1 Korrekturen

6.2.10 Logarithmische Matrixnorm

...

Rechenregeln

$$|\mathbf{Ax}| \geq \max\{-\mu(-\mathbf{A}), -\mu(\mathbf{A})\}\,|\mathbf{x}| \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \tag{6.2.14g}$$

...

9.5.8 Berechnung mittels Cayley-Hamilton

Mit dem Theorem von Cayley-Hamilton (siehe Abschnitt 4.11) kann die Exponentialfunktion $e^{\mathbf{A}t}$ für beliebige quadratische Matrizen $\mathbf{A}$ berechnet werden. Das Verfahren wird allgemein in Kapitel 4.11.3 beschrieben und hier mit $f(\mathbf{A}) = e^{\mathbf{A}t}$ angewendet.

Aus dem Cayley-Hamilton-Theorem folgt, dass die Exponentialfunktion der $n \times n$-Matrix $\mathbf{A}$ durch die folgende endliche Reihe berechnet werden kann:

$$e^{\mathbf{A}t} = b_0(t)\mathbf{I} + b_1(t)\mathbf{A} + b_2(t)\mathbf{A}^2 + \cdots + b_{n-1}(t)\mathbf{A}^{n-1}. \tag{9.5.8}$$

Vorgehensweise bei der Berechnung

Wenn das System nur paarweise verschiedene Eigenwerte hat, ergeben sich die n Koeffizienten $b_k(t)$ des Polynoms $h(\lambda)$ aus dem folgenden Gleichungssystem mit n Gleichungen, wobei λ_i die n Eigenwerte der Matrix sind:

$$e^{\lambda_i t} = b_0(t) + b_1(t)\lambda_i + b_2(t)\lambda_i^2 + \cdots + b_{n-1}(t)\lambda_i^{n-1} = h(\lambda_i). \tag{9.5.9}$$

Falls die Matrix $\mathbf{A}$ mehrfache Eigenwerte λ_i, also Eigenwerte mit algebraischer Vielfachheit $m_{\lambda_i} > 1$, hat, liefert Gl. (9.5.9) weniger als n verschiedene Gleichungen. Nach (4.11.8) liefern die $m_{\lambda_i} - 1$ Ableitungen nach den Eigenwerten, die zu mehrfachen Eigenwerten gehören, die fehlenden Gleichungen:

$$\left.\frac{d^l e^{\lambda t}}{d\lambda^l}\right|_{\lambda=\lambda_i} = t^l e^{\lambda_i t} = \left.\frac{d^l h(\lambda)}{d\lambda^l}\right|_{\lambda=\lambda_i} \text{ für } l = 1, \ldots, m_{\lambda_i} - 1. \tag{9.5.10}$$

11.2.2 Zustandsraumdarstellung

...
Zur Bestimmung der Zustandsraumdarstellung eines Systems gibt es mehrere Möglichkeiten: Entweder werden bereits bei der System-Modellierung Zustandsgrößen gewählt, die eine physikalische Bedeutung haben und so die direkte Formulierung einer Zustandsraumdarstellung erlauben, oder man entwickelt die Differentialgleichung des Systems und formt diese in eine Zustandsraumdarstellung um. Dann haben die Zustandsgrößen jedoch nicht unbedingt einen physikalischen Sinn. Hier wird letztere Möglichkeit dargestellt, da diese sich auf alle Systeme, bei denen die Wirkung des Eingangs auf den Ausgang mittels einer linearen Differentialgleichung beschrieben werden kann, anwenden lässt.

Zunächst wird nur der Nenner der Übertragungsfunktion betrachtet, d.h. $b_i = 0 \ \forall \ i \neq 0$ und $b_0 = 1$. Daraus folgt folgende Differentialgleichung:

$$z^{(n)}(t) + a_{n-1}z^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1\dot{z}(t) + a_0 z(t) = u(t). \tag{11.2.3}$$

Um aus der Differentialgleichung (11.2.3) eine Zustandsraumdarstellung zu bestimmen, wählt man zuerst die Zustandsgrößen x_i des Systems wie folgt:

$$\begin{aligned} x_1 &= z, \\ x_2 &= \dot{z} = \dot{x}_1, \\ x_3 &= \ddot{z} = \dot{x}_2, \\ &\vdots \\ x_n &= z^{(n-1)} = \dot{x}_{n-1}. \end{aligned} \tag{11.2.4}$$

Dann ergibt sich eine mögliche Zustandsraumdarstellung der Differentialgleichung (11.2.3):

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u,$$

$$z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Nun soll auch der Einfluss der Zählerkoeffizienten berücksichtigt werden. Da das System linear ist und daher das Superpositionsgesetz zutrifft, gilt:

$$y(t) = b_m z^{(m)}(t) + \cdots + b_1\dot{z}(t) + b_0 z(t) \tag{11.2.5}$$

Sowohl $z(t)$ als auch die Ableitungen $z^{(m)}(t)$ sind für alle $m < n$ bereits bekannt. Da bei technischen Systemen, aufgrund der stets vorhandenen Verzögerungen, in der Regel $m < n$ gilt, ist der Durchgang $d = 0$ und es ergibt sich

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_m & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}$$

als Zustandsraumdarstellung des Systems (11.2.1).

Wenn $m = n$ doch zutrifft, ergibt sich der Durchgang zu $d = b_m$. Systeme mit $m > n$ sind nicht kausal, und daher nur theoretischer Natur. In realen Systemen sind sie nicht vorzufinden.
...