

## G Grundlagen

### G1 Die Begriffe „Energie“ und „Leistung“

Energie (griech. Energos „wirksam“, Formelzeichen  $W$ ) ist die Fähigkeit eines physikalischen Systems, Arbeit ( $W$ , work) zu verrichten. Eine (im physikalischen Sinn) „mechanische“ Arbeit wird dann verrichtet, wenn ein Körper unter dem Einfluss einer auf ihn wirkenden Kraft  $F$  mit der Geschwindigkeit  $v$  z. B. entlang einer räumlichen Wegkurve  $C$  bewegt wird. Mit dem Kraftvektor  $\vec{F}$  am Ort  $P = (x, y, z)$  und dem differentiell kurzen Wegvektor  $d\vec{s}$  als Tangentenvektor an dieser Kurve  $C$  im Punkt  $P$  ( $P$  ist ein Punkt dieser Kurve) ist die differentiell kleine geleistete Arbeit auf den Körper

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F \cdot ds \cdot \cos \alpha \quad , \quad (G1-1)$$

wobei  $\alpha$  der Winkel zwischen den beiden Vektoren  $\vec{F}$  und  $d\vec{s}$  ist. Somit ist " $\cdot$ " das Skalarprodukt der Vektorrechnung. Die am Körper längs der Kurve  $C$  verrichtete Arbeit ist dann die Summe von (G1-1) längs  $C$ , also wegen des differentiell kleinen Arbeitsbeitrags  $dW$  das Integral (G1-2).

$$W = \int_C dW = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_C F \cdot \cos \alpha \cdot ds \quad . \quad (G1-2)$$

Biologische Aspekte der Arbeit und Energie werden damit nicht erfasst. Wenn ein Mensch einen Körper („Last“)  $m$  entlang der Erdoberfläche trägt und sich dabei mit der Geschwindigkeit  $v$  parallel zur Erdoberfläche bewegt, so wirkt auf Grund der Erdanziehungskraft auf den Körper die Kraft  $\vec{F}$  senkrecht zur Erdoberfläche nach unten und schließt mit dem Geschwindigkeitsvektor  $\vec{v}$  den rechten Winkel  $\alpha = \pi/2$  ein, so dass die Arbeit  $W = \int_C F \cdot \cos(\pi/2) \cdot ds = \int_C F \cdot 0 \cdot ds = 0$  ist. Trotzdem müssen die Muskeln des

Menschen sich anspannen (verkürzen), um die Kraft  $-\vec{F}$  aufzubringen, damit die Last gehalten wird. Für das Verkürzen der Muskeln ist Energie erforderlich, die in Form von chemischer Energie (= Bindungsenergie der Moleküle der den Muskeln zugeführten Nährstoffe) den Muskelzellen zu Verfügung gestellt wird. Diese Art biochemischer Energieumsetzung werden wir im Folgenden zunächst nicht betrachten, da wir uns zuerst mit physikalischen und nicht mit biologischen Systemen befassen.

Die Zufuhr oder Abgabe von Arbeit in einem physikalischen System kann

- den Bewegungszustand eines Systems (hier Körper) durch Beschleunigen oder Abbremsen verändern. Es ändert sich die **kinetische Energie** des Körpers.
- die Lage des Systems (Körpers) in einem Kraftfeld  $\vec{F}(x, y, z, t)$ , z. B. dem Schwerkraftfeld der Erde, ändern. Es ändert sich die **potentielle Energie** des Körpers.
- die **innere Energie** des Systems verändert werden. Diese soll kurz im Folgenden erläutert werden.

Da die Temperatur  $T$  eines Gases nach *L. Boltzmann* durch den Bewegungszustand (nämlich den Geschwindigkeiten) der einzelnen Gasmoleküle charakterisiert ist, kann die Zufuhr oder Abgabe von Arbeit diese kinetische Energie der Moleküle, genannt die **innere Energie** des Systems „Gas“, verändern, z. B. durch die Erwärmung oder Abkühlung des Gases. Weil aber die Moleküle und Atome durch Zufuhr oder Abgabe von Arbeit selbst verändert werden können, nämlich z. B. die Zerlegung (Dissoziierung) von Molekülen in ihre atomaren Bestandteile oder durch Anregung der Elektronen in den Atomhüllen (= Anhebung der Hüllenelektronen auf höhere Energieniveaus), ist auch dies eine Änderung der inneren Energie.

Die (Momentan-)Leistung  $P$  ist die zeitliche Änderungsrate der Energie

$$P(t) = dW / dt \quad , \quad (G1-3)$$

so dass sich aus (G1-1) für die mechanische Momentan-Leistung ergibt:

$$P(t) = dW / dt = \vec{F} \cdot d\vec{s} / dt = \vec{F} \cdot \vec{v} = F(t) \cdot v(t) \cdot \cos \alpha(t) \quad . \quad (G1-4)$$

Da z. B. in elektrischen metallischen Leitern die Kraft  $F$  auf die im Kristallgitter des Metalls beweglichen  $N$  Leitungselektronen (Ladung je Elektron  $q = -e$ ; „Elementarladung“  $e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ A} \cdot \text{s}$ ) durch das elektrische Feld  $E$  gemäß  $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$  aufgebracht wird, bewegen sich diese Ladungsträger mit der Driftgeschwindigkeit  $v$ . Es gilt  $P = N \cdot q \cdot \vec{E} \cdot \vec{v} = N \cdot q \cdot E \cdot v$ . Mit der elektrischen (Gleichstrom-)Stromstärke  $I = N \cdot q / t$ , der Geschwindigkeit  $v = l / t$  ( $l$ : Leiterlänge) und der elektrischen (Gleich-)Spannung  $U = \int \vec{E} \cdot d\vec{s} = E \cdot l$  erhalten wir als „**elektrische Leistung**“

$$P = N \cdot q \cdot E \cdot l / t = U \cdot I. \quad (G1-5)$$

Selbst geringe Energiemengen können zu hohen Leistungen führen, wenn sich die Energie rasch ändern kann.

### Beispiel G1-1:

Wird ein Energiespeicher mit dem Inhalt  $W = 1000 \text{ J}$  während einer Millisekunde entleert, tritt während dieser kurzen Zeit die hohe Leistung  $P = W / t = 1000 / 0.001 = 1 \text{ MW}$  auf („Leistungsspeicher“). Für diesen hohen Leistungsfluss muss der z. B. elektrische Anschluss (Kabelquerschnitt) bei einem elektrischen Energiespeicher bemessen sein. Soll z. B. die auftretende Spannung  $U = 400 \text{ V DC}$  sein, träte bei dieser Gleichspannung für  $1 \text{ ms}$  der Gleichstromwert  $I = P / U = 10^6 / 400 = 2500 \text{ A}$  auf. Bei einer zulässigen Stromdichte von z. B. kurzzeitig  $J = 20 \text{ A/mm}^2$  benötigen wir einen Kabelquerschnitt von  $q_{\text{Cu}} = I / J = 2500 / 20 = 125 \text{ mm}^2$ .

## G2 Energieformen

Die **kinetische Energie (Bewegungsenergie)**  $W_k$  ist jene Energie, die ein Körper mit der Masse  $m$  aufgrund seines Bewegungszustands (Geschwindigkeit  $v$ ) besitzt. Diese Energie betrifft sowohl die Bewegung idealisiert punktförmiger Körper als auch real ausgedehnter Körper. Diese können ideal starre oder real deformierbare Festkörper sein, aber auch bewegte deformierbare Körper, also strömende Fluide. Dabei werden inkompressible (nicht zusammenpressbare) Fluide (z. B. Wasser) und kompressible Fluide (Gase) wie z. B. Wasserdampf unterschieden. Auf Grund der ausgeführten Bewegung (Ortsveränderung des Körpers) nennt man diese kinetische Energie auch **Translationsenergie**. Ein Sonderfall, bei dem der betrachtete Körper am Ort bleibt, ist die Drehbewegung von Körpern, sodass hier die kinetische Energie **Rotationsenergie** genannt wird.

Die **potentielle Energie (Lageenergie)**  $W_p$  ist jene Energie, die ein Körper auf Grund seiner Lage in einem Kraftfeld (z. B. eine elektrische Ladung im elektrischen Feld) hat. Im Sonderfall einer Masse im Schwerfeld heißt sie mechanische potentielle Energie oder **Gravitationsenergie**. Ein weiterer Sonderfall ist bei der Mechanik ausgedehnter deformierbarer Festkörper die erhöhte Lageenergie der einzelnen Atome des Festkörpers zueinander beim zusammengedrückten Körper gegenüber dem unverformten Körper als sogenannte **Deformationsenergie (Verformungsenergie)**. Ist der Vorgang der Deformation reversibel, verschwindet also die Deformation nach Wegnahme der drückenden Kraft, sprechen wir von elastischen Festkörpern und der **elastischen Deformationsenergie**,

andernfalls beim (auch teilweisen) Verbleib der Verformung von der **plastischen Deformationsenergie**.

Hierbei kann auch die Anregungsenergie eines Elektrons in der Hülle eines Atoms oder die Anregung (Veränderung) eines Atomkerns selbst als potentielle Energie im elektrischen Feld des positiven Kerns aufgefasst werden, ebenso wie die in chemischen Bindungen der Hüllenelektronen einzelner Atome zu Molekülen oder Festkörpern (Kristallen) gespeicherte Bindungs-Energie. Wir geben eine etwas genauere Unterscheidung tabellarisch an.

*Mechanische Energie:*

- **Bewegungsenergie**,
- **Lageenergie** in Gravitationsfeldern,
- **Deformationsenergie** (auf Basis von Bindungskräften in Festkörpern).

*Elektromagnetische Energie:*

- **Elektrische Lageenergie** im elektrostatischen Feld (z. B. im Plattenkondensator),
- **Magnetische Lageenergie** im magnetostatischen Feld (z. B. Magnetsysteme),
- Transportierte **elektromagnetische Energie** bei Wellenausbreitung (z. B. Antennen).

*Thermische Energie:*

- **Wärmeenergie** ist die innere Energie z. B. eines Körpers (kinetische Energie der schwingenden Atomrümpfe im Kristallverband) oder eines Gases (kinetische Energie der sich frei im Raum bewegenden Gaspartikel).

*Chemische Energie:*

- **Elektrische Bindungsenergie** der Atome zu Molekülen (**kovalente Bindung**) oder zu Kristallen (**Ionenbindung** in Ionenkristallen, **metallische Bindung** in metallischen Festkörpern, **kovalente Bindung** ... meist erst bei sehr tiefen Temperaturen).

*Atomenergie:*

- **elektrische Bindungsenergie** der elektrisch negativ geladenen Elektronen in der Atomhülle an den positiv geladenen Atomkern,
- **Kernenergie** der über die nur auf sehr kurze Distanz wirkende „starke Wechselwirkungskraft“ im Kern aneinander gebundenen Nukleonen (Kernbausteine) als elektrisch positiv geladene Protonen und ungeladene Neutronen.

Energie in physikalischen Systemen wird also stets durch Kräfte vermittelt. Wir unterscheiden dabei vier Grundtypen von Kräften:

- 1) Die **Gravitationskraft** ist die stets anziehende Kraft zwischen massebehafteten Körpern.
- 2) Die „**elektromagnetische Kraft**“ (**Lorentz-Kraft**) wirkt als anziehende Kraft zwischen elektrisch ungleichnamig geladenen Teilchen und abstoßend zwischen elektrisch gleichnamig geladenen Teilchen. Weiter wirkt sie bei in einem Magnetfeld bewegten elektrisch geladenen Teilchen als seitlich im rechten Winkel zur Bewegungsrichtung und zur Magnetfeldrichtung auftretenden Kraft.
- 3) Die anziehend wirkende „**starke Kraft**“ (**starke Wechselwirkung**) wirkt nur auf kurze Distanz (nämlich in der Größenordnung der Atomkerndurchmesser) zwischen den Protonen und Neutronen gegen die Abstoßungskraft der gleichnamig geladenen Protonen.
- 4) Die „**schwache Kraft**“ (**schwache Wechselwirkung**) wirkt ebenfalls nur auf kurze Distanz und tritt bei Kernumwandlungsprozessen auf, wo ein Neutron in ein Proton und Elektron umgewandelt wird, wobei das Elektron vom Kern ausgesandt wird (*Beta-Zerfall* des Atomkerns).

Es ist bisher gelungen, die „elektromagnetische Kraft“, die „starke“ und „schwache“ Kraft in einer gemeinsamen Theorie zusammenzufassen, wobei zunächst „elektromagnetische“ und „schwache“ Kraft zu „elektroschwachen“ Kraft zusammengeführt werden konnten. Die Gravitationskraft entzieht sich bisher solchen Bemühungen einer „grand unified theory“. Diese vier Grundkräfte „halten unsere Welt zusammen“. Für die Gravitationskraft und die elektromagnetische Kraft sind Formelausdrücke der klassischen Physik verfügbar. Für die schwache und starke Wechselwirkungskraft sind quantenmechanische Beschreibungen erforderlich.

Die **Trägheitskraft**  $F$  ist keine Grundkraft, sondern ergibt sich aus der Änderung des Bewegungsimpulses  $p$  eines massebehafteten Körpers („träge“ Masse  $m$ ), wie (G2-1) für die Translationsbewegung zeigt!

$$\vec{F} = d\vec{p} / dt = d(m \cdot \vec{v}) / dt = \dot{m} \cdot \vec{v} + m \cdot d\vec{v} / dt \quad (\text{G2-1})$$

Bei Rotationsbewegung ergibt sich in ähnlicher Weise die Fliehkraft, und bei Körpern, die sich relativ zu einem rotierenden System auf diesem bewegen, die „Coriolis“-Kraft. Diese „träge“ Masse ist dabei IDENTISCH mit der schweren Masse der Gravitationskraft (siehe Abschn. G2.1)! Wir wollen im Folgenden näher betrachten, wie diese Kräfte mit den entsprechenden Energieformen zusammenhängen.

## G2.1 Mechanische Energie

Zwischen zwei massebehafteten Körpern 1 und 2 mit den Massen  $m_1$  und  $m_2$  wirkt die anziehende Gravitationskraft  $F$ , die vom Körper 1 zum Körper 2 entlang der gedachten, geraden Verbindungslinie der Massenmittelpunkte der beiden Körper gerichtet ist (Bild G2.1-1). Dabei ist der Einheitsvektor  $\vec{e}_r$  mit dem Betrag  $|\vec{e}_r| = 1$  vom Massenmittelpunkt des Körpers 1 zum Massenmittelpunkt des Körpers 2 gerichtet.

$$\vec{F} = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \vec{e}_r \quad (\text{G2.1-1})$$

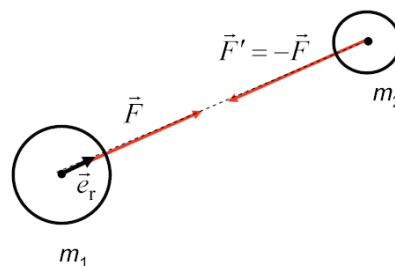


Bild G2.1-1: Zwei Massen  $m_1$ ,  $m_2$  ziehen sich mit den Kräften  $F$  bzw.  $F'$  auf Grund der Gravitation an, wobei die Wirkungslinie der Kräfte die gerade Verbindungslinie der Massenmittelpunkte der beiden Massen ist.

In (G2.1-1) ist  $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 / (\text{kg} \cdot \text{s}^2)$  die Gravitationskonstante. Auf den Körper 2 wirkt die Kraft  $\vec{F}' = -\vec{F}$ , die vom Körper 2 zum Körper 1 gerichtet ist. Auf Grund dieser Kraft wird der Körper 2, bezogen auf einen Beobachter, der mit Körper 1 ruht, gemäß dem *Newton'schen* Kraftgesetz „Kraft = Masse x Beschleunigung“ auf Körper 1 hinbewegt. Um ihn von Körper 1 zu entfernen, muss eine äußere Kraft  $F_a$  gegen diese Anziehungskraft aufgebracht werden, die diese Anziehung überwindet (Richtungsvektor  $\vec{e}_{r'} = -\vec{e}_r$ ). Befindet sich der Körper 2 zum Zeitpunkt  $t_A$  beim Radius  $r_A$  (gezählt vom Massenmittelpunkt des Körpers 1 als Ursprung eines dort verankerten Koordinatensystems), so wird er auf Grund dieser äußeren Kraft  $F_a$  sich zu einem späteren Zeitpunkt  $t_B > t_A$  vom Körper 1 weg bewegt haben so, dass er sich

beim Radius  $r_B > r_A$  befindet. Mit  $d\vec{s} = d\vec{r} = \vec{e}_r \cdot dr$  und  $\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r = 1$  erhalten wir die dabei von der äußeren Kraft gegen die Gravitationskraft verrichtete Arbeit gemäß (G1-2) als

$$W_{AB} = \int_{r_A}^{r_B} \left( G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \vec{e}_r \right) \bullet d\vec{s} = \int_{r_A}^{r_B} \left( G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \vec{e}_r \right) \bullet \vec{e}_r \cdot dr = -G \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = \frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{r} \Bigg|_{r_A}^{r_B},$$

$$W_{AB} = -G \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) < 0. \quad (\text{G2.1-2})$$

Eine am Körper verrichtete Arbeit durch eine äußere Kraft wird negativ gezählt:  $W_{AB} < 0$ . Diese Arbeit muss von einem von außen einwirkenden (fremden) System verrichtet werden.

### G2.1.1 Potentielle Energie (Lageenergie)

Da gemäß (G2.1-2) eine Arbeit  $W_{AB}$  verrichtet werden musste, um die Masse  $m_2$  von  $r_A$  nach  $r_B > r_A$  zu befördern, ist nun diese Arbeit, gemeinsam mit jener Arbeit, die zu verrichten wäre, um die Masse  $m_2$  von  $m_1$  beim Radius  $r = 0$  zu  $r_A$  zu bewegen, in Form einer Lageenergie (potentielle Energie)  $W_p$  im System, gebildet aus den beiden Massen  $m_1$  und  $m_2$ , gespeichert. Wir schreiben allgemein (Bild G2.1.1-1)

$$W_p(r) = -\frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{r}, \quad (\text{G2.1.1-1})$$

so dass gilt:

$$W_{AB} = W_p(r_A) - W_p(r_B) = -G \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) < 0. \quad (\text{G2.1.1-2})$$

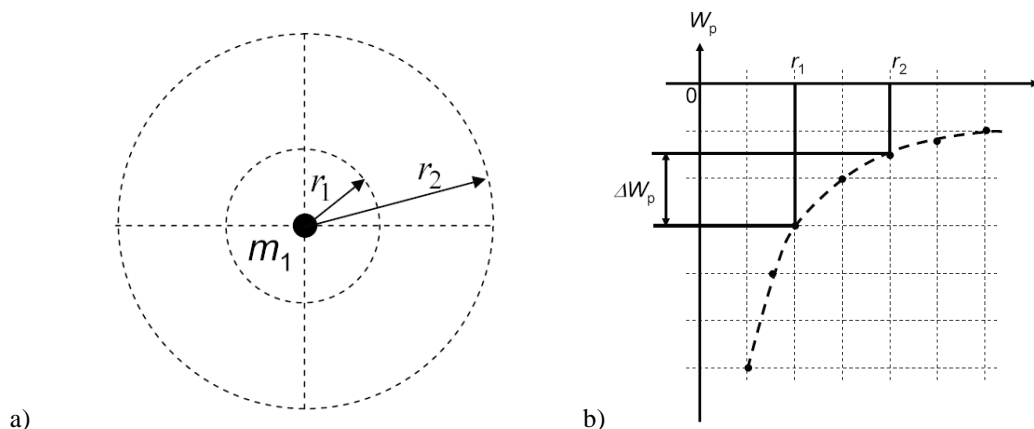


Bild G2.1.1-1: a) Das Schwerkraftfeld der Masse  $m_1$ , das auf die Masse  $m_2$  anziehend wirkt, ist kugelsymmetrisch. b) Die potentielle Energie  $W_p(r)$  der Masse  $m_2$  im Schwerkraftfeld der Masse  $m_1$  ist eine Hyperbelfunktion des Abstands (Radius)  $r$  vom Massenmittelpunkt von  $m_1$

Die von außen über  $F_a$  an  $m_2$  verrichtete Arbeit  $W_{AB}$  hat die potentielle Energie  $W_p$  des Körpers 2 gegenüber dem Körper 1 um  $W_{AB} = W_p(r_A) - W_p(r_B)$  von  $W_p(r_A)$  auf  $W_p(r_B) > W_p(r_A)$  erhöht. Sei nun Körper 1 die Erde ( $m_1 = m_E = 5.98 \cdot 10^{24}$  kg) und Körper 2 in seinen Abmessungen deutlich kleiner als der mittlere Erdradius  $r_E$ . Wir nähern die Form der Erde (Geoid) durch die Kugelform mit  $r_E$  idealisiert an. Körper 2 befinde sich im Abstand  $h \ll r_E$  oberhalb der Erdoberfläche. Mit  $r_A = r_E$  und  $r_B = r_A + h$  erhalten wir mit  $1/(1+x) \approx 1 - x$  (für  $x \ll 1$ ) gemäß

$$h/r_A \ll 1: \frac{1}{r_B} = \frac{1}{r_A + h} = \frac{1}{r_A \cdot (1 + h/r_A)} \approx \frac{1 - h/r_A}{r_A},$$

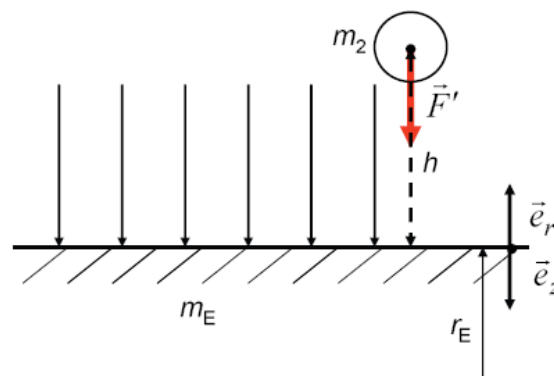
$$\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} = \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_A + h} \approx \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_A} + \frac{h}{r_A^2} = \frac{h}{r_A^2},$$

aus (G2.1.1-2) mit

$$W_p(r_B) - W_p(r_A) = G \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) \approx \frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{r_A^2} \cdot h = m_2 \cdot \frac{G \cdot m_E}{r_E^2} \cdot h. \quad (\text{G2.1.1-3})$$

Die Größe  $g = \frac{G \cdot m_E}{r_E^2} = \frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 5.98 \cdot 10^{24}}{(12700000/2)^2} \approx 9.81 \text{ m/s}^2$  ist die Erdbeschleunigung und die potentielle Energie des Körpers 2 im Abstand  $h$  von der Erdoberfläche (Bild G2.1.1-2)

$$W_p(h) = m_2 \cdot g \cdot h. \quad (\text{G2.1.1-4})$$



**Bild G2.1.1-2:** Die Schwerkraft der Erde (Masse  $m_E$ ) wirkt näherungsweise mit parallelen Kraftlinien auf den gegenüber der Ausdehnung der Erde viel kleineren Körper mit der Masse  $m_2$  im Abstand  $h$  von der Erdoberfläche.

### Beispiel G2.1.1-1:

Ein Körper mit der Masse  $m_2 = 1 \text{ kg}$  hat im Abstand  $h = 1 \text{ m}$  von der Erdoberfläche die potentielle Energie  $W_p(h = 1\text{m}) = 1 \text{ kg} \cdot 9.81 \text{ m/s}^2 \cdot 1 \text{ m} = 9.81 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2 = 9.81 \text{ J}$ . Er wird gemäß (G2.1-1)

$$\vec{F}' = -G \cdot \frac{m_E \cdot m_2}{r_E^2} \cdot \vec{e}_r = G \cdot \frac{m_E \cdot m_2}{r_E^2} \cdot \vec{e}_{r'} = g \cdot m_2 \cdot \vec{e}_{r'} = -\vec{F} \quad (\text{G2.1.1-5})$$

mit dem Kraftbetrag  $|F'| = F = g \cdot m_2 = 9.81 \text{ m/s}^2 \cdot 1 \text{ kg} = 9.81 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2 = 9.81 \text{ N}$  von der Erde angezogen und zieht seinerseits mit der Kraft  $-9.81 \text{ N}$  die Erde an.

### G2.1.2 Kinetische Energie (Bewegungsenergie)

Wir betrachten Bewegungen von Körpern mit Geschwindigkeiten  $v$ , die klein sind gegenüber der Vakuumlichtgeschwindigkeit  $c_0 = 299\,792\,458 \text{ m/s}$ , betreiben also nichtrelativistische Physik. Dann gilt das *Newton'sche* Axiom

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}, \quad (\text{G2.1.2-1})$$

dass der Beschleunigungsvektor  $\vec{a}$  einer Masse  $m$  durch die auf sie wirkende Kraft  $\vec{F}$  bedingt ist. Wir betrachten den im Abstand  $h$  über der Erdoberfläche befindlichen Körper aus Bsp. G2.1.1-1, der durch den Einfluss der Erdanziehungskraft  $g \cdot m_2 \cdot \vec{e}_r$  auf die Erdoberfläche zu bewegt wird (Bild G2.1.2-1).

Anstelle des Radius  $r$  wählen wir wegen der eben angenommenen Erdoberfläche ( $h \ll r_E$  !) die Koordinate  $z$ , die am Ort des Körpers zur Zeit  $t = 0$  ihren Ursprung hat ( $z = 0$ ) und zum Erdinneren gerichtet ist. Zum Zeitpunkt  $t = 0$  ruht ( $v(0) = 0$ ) der Körper somit bei  $z = 0$ . Mit  $a = dv/dt$  folgt aus (G2.1.2-1) und (G2.1.1-5)  $dv/dt = a = g$ . Daher ist

$$v(t) = g \cdot t + v(0) = g \cdot t \quad (G2.1.2-2)$$

Nach der Zeit  $t > 0$  hat die Masse gemäß  $v = dz/dt$  den Fallweg

$$z(t) = g \cdot t^2 / 2 + v(0) \cdot t + z(0) = g \cdot t^2 / 2 \quad (G2.1.2-3)$$

zurückgelegt. Die Erdanziehungskraft verrichtet dabei gemäß (G1-2) die Arbeit

$$W = \int_0^z (m_2 \cdot g) \cdot dz = \int_0^z (m_2 \cdot a) \cdot dz = \int_0^z (m_2 \cdot \frac{dv}{dt}) \cdot dz = \int_0^z (m_2 \cdot \frac{d^2z}{dt^2}) \cdot dz = \int_0^t (m_2 \cdot \frac{d^2z}{dt^2}) \cdot \frac{dz}{dt} \cdot dt.$$

Mit  $\frac{d^2z}{dt^2} \cdot \frac{dz}{dt} = \frac{dv}{dt} \cdot v = \frac{d}{dt} \left( \frac{v^2}{2} \right)$  erhalten wir

$$W = \int_0^t m_2 \cdot \frac{d(v^2/2)}{dt} \cdot dt = \int_0^{v^2/2} m_2 \cdot d(v^2/2) = m_2 \cdot v^2 / 2 = W_k. \quad (G2.1.2-4)$$

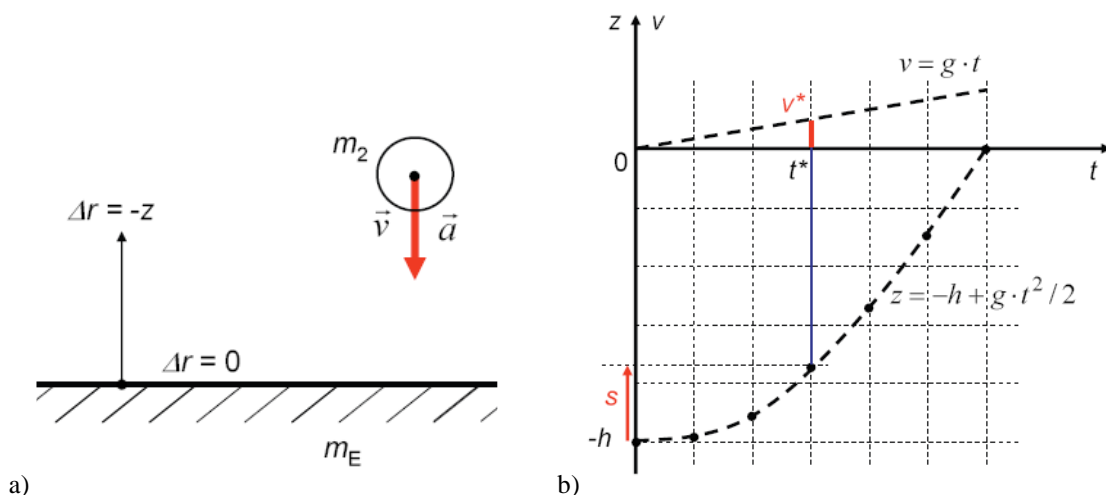
Die an dem fallenden Körper verrichtete Arbeit  $W$  ist in die dem Körper nun eigenen kinetischen Energie  $W_k = m_2 \cdot v^2 / 2$  übergegangen. Dabei hat die potentielle Energie des Körpers um eben diesen Wert abgenommen,

$W_p(t=0) - W_p(t) = m_2 \cdot g \cdot h - m_2 \cdot g \cdot (h - z) = m_2 \cdot g \cdot z = m_2 \cdot v^2 / 2 = W_k(t) \Rightarrow v = \sqrt{2 \cdot g \cdot z}$   
wie der Vergleich mit (G2.1.2-2), (G2.1.2-3) gemäß

$$z(t) = g \cdot t^2 / 2, \quad v(t) = g \cdot t \Rightarrow z = v^2 / (2g) \Rightarrow v = \sqrt{2 \cdot g \cdot z} \quad (G2.1.2-5)$$

zeigt. Die Summe aus potentieller und kinetischer Energie  $W_p(t) + W_k(t) = W_p(t=0)$  ist offenbar zeitunabhängig konstant:

$$W_p(t) + W_k(t) = W_p(t=0) + W_k(t=0) = m_2 \cdot g \cdot h + m_2 \cdot (v(0))^2 / 2 = m_2 \cdot g \cdot h = W_p(t=0) .$$



**Bild G2.1.2-1:** a) Der frei Fall des gegenüber der Erde kleinen Körpers mit der Masse  $m_2$  im Schwerkraftfeld der Erde (Masse  $m_E$ ), b) Die Zunahme der Geschwindigkeit  $v$  des Körpers mit der Masse  $m_2$  und die Abnahme seiner Lage über der Erdoberfläche  $h - z$ .

Da der Körper 2 und die Erde (Körper 1) in unserem Beispiel G2.1.1-1 ein abgeschlossenes System bilden, in dem keine weiteren physikalischen Effekte (Kräfte, Körper, ...) wirken, formulieren wir allgemein: In einem abgeschlossenen System ist die Gesamtenergie als

Summe der einzelnen Energiekomponenten konstant. In einem abgeschlossenen System kann keine zusätzliche Energie erzeugt werden oder Energie „verloren“ gehen (**Energieerhaltungssatz**). Auf Grund der von uns willkürlich getroffenen Annahme, dass die Erdoberfläche die Bezugsfläche für  $W_p$  ist (dort ist  $W_p$  Null!), ist in unserem Beispiel die Gesamtenergie als Konstante  $W_p(t=0) = m_2 \cdot g \cdot h$ . Insofern ist die Gesamtenergie eines **abgeschlossenen Systems** eine willkürlich gewählte Größe.

Allgemein ist die kinetische Energie eines mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  ( $|\vec{v}| \ll c_0$ ) bewegten Körpers mit der Masse  $m$

$$W_k = m \cdot |\vec{v}|^2 / 2 \quad . \quad (G2.1.2-6)$$

Beispiel G2.1.2-1:

Wie groß ist die kinetische Energie  $W_k$  des frei fallenden Körpers (aus Bsp. G2.1.1-1) bei der Höhe  $h/2 = 0.5$  m? Wie groß ist dabei seine Geschwindigkeit  $v$ ? Wieviel Zeit ist verstrichen?

$$z = h/2: \quad W_k = m_2 \cdot v^2 / 2 = m_2 \cdot g \cdot z = 1 \cdot 9.81 \cdot 0.5 = 4.91 \text{ J},$$

$$v = \sqrt{2W_k / m_2} = \sqrt{2 \cdot 4.91 / 1} = 3.13 \text{ m/s} \quad \text{oder} \quad v = \sqrt{2 \cdot g \cdot z} = \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 0.5} = 3.13 \text{ m/s},$$

$$t = v / g = 3.13 / 9.81 = 0.32 \text{ s}.$$

Ein Sonderfall ist die **Rotationsbewegung**, wobei sich der Körper mit der Masse  $m$  auf einer Kreisbahn mit dem Radius  $r$  um ein Drehzentrum 0 bewegt und dabei  $n$  Umdrehungen je Zeiteinheit (1 s) mit dem dabei jeweils überstrichenen Drehwinkel  $2\pi$  ausführt (Bild G2.1.2-2a). Dabei benötigt er bei konstanter Rotationsgeschwindigkeit jeweils die Zeit  $T = 1/n$  für eine volle Umdrehung. Je Umdrehung legt er den Weg als Bahnumfang  $2\pi \cdot r$  zurück, so dass die Bahngeschwindigkeit

$$v = 2\pi \cdot r / T = 2\pi \cdot r \cdot n = \omega \cdot r \quad (G2.1.2-7)$$

auftritt. Wir nennen  $\omega = 2\pi \cdot n$  die **mechanische Winkelgeschwindigkeit**. Da der Geschwindigkeitsvektor  $\vec{v}$  stets der Tangentenvektor an die Bahnkurve (hier: Kreisbahn) ist, und der Radiusvektor  $\vec{r}$  von 0 aus radial nach außen orientiert ist, erhalten wir die Richtung von  $\vec{v}$  korrekt, wenn wir in (G2.1.2-8) das äußere Vektorprodukt (Kreuzprodukt) verwenden und den Vektor der mechanischen Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$  normal auf die Bahnebene im Sinne einer Rechts-Schraube der Drehbewegung orientieren.

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (G2.1.2-8)$$

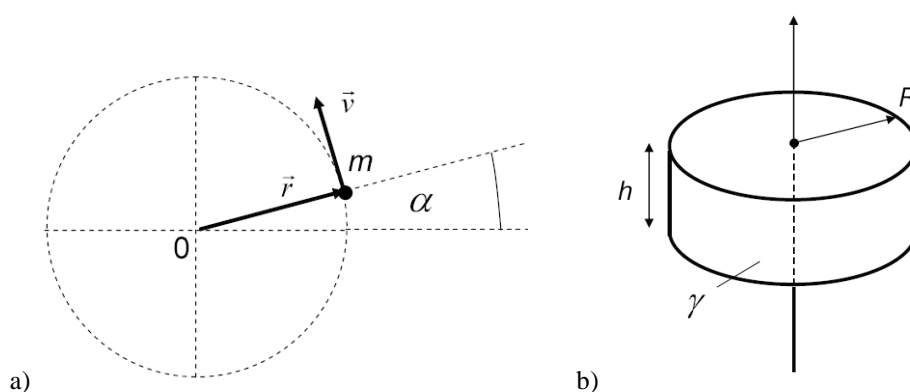


Bild G2.1.2-2: a) Die Masse  $m$  rotiert mit dem Drehwinkel  $\alpha$  um ein räumlich festes Rotationszentrum 0 mit dem konstanten Abstand  $r$  vom Rotationszentrum 0. Eine tangential auf die Masse wirkende Kraft  $F$  kann durch ein Drehmoment  $M$  beschrieben werden. b) Das polare Trägheitsmoment  $J$  eines drehzylindrischen Körpers der Masse  $M$  (mit räumlich konstanter Massendichte  $\gamma$  und dem Radius  $R$ ) um die Symmetrieachse ist  $J = MR^2/2$ .



Die kinetische Energie ist mit (G2.1.2-6), (G2.1.2-7)  $W_k = m \cdot |\vec{v}|^2 / 2 = m \cdot \omega^2 \cdot r^2 / 2$ . Mit der Abkürzung „polares Trägheitsmoment“  $J = m \cdot r^2$  einer mit dem Radius  $r$  von einem Drehzentrum  $0$  entfernten (Punkt)-Masse  $m$  schreiben wir:

$$W_k = J \cdot \omega^2 / 2. \quad (\text{G2.1.2-9})$$

Aus (G2.1.2-1) folgt, dass mit der im Abstand  $r$  vom Drehzentrum  $0$  wirkenden Kraft  $\vec{F}$  der Körper auf der Kreisbahn beschleunigt werden kann:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot (d\vec{v} / dt) = m \cdot [(d\vec{\omega} / dt) \times \vec{r}]. \quad (\text{G2.1.2-10})$$

Diese im Abstand  $r$  (Hebelarm) wirkende Kraft ordnen wir nach dem Hebelgesetz ein Drehmoment  $M$  zu, dessen Vektor  $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$  wie  $\vec{\omega}$  normal auf die Rotationsebene gerichtet

ist. Aus (G2.1.2-10) folgt mit  $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{A} \bullet \vec{C}) - \vec{C} \cdot (\vec{A} \bullet \vec{B})$  und  $d\vec{\omega} / dt = \dot{\vec{\omega}}$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = m \cdot \vec{r} \times [\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}] = m \cdot \left( \dot{\vec{\omega}} \cdot (\vec{r} \bullet \vec{r}) - \vec{r} \cdot (\dot{\vec{\omega}} \bullet \vec{r}) \right) = m \cdot \left( \dot{\vec{\omega}} \cdot (\vec{r} \bullet \vec{r}) - 0 \right) = m \cdot \dot{\vec{\omega}} \cdot |\vec{r}|^2.$$

Folglich lautet das *Newton'sche* Axiom (G2.1.2-1) für die Drehbewegung einer (Punkt)-Masse  $m$  im Abstand  $r$  vom Rotationszentrum  $0$  mit  $J = m \cdot |\vec{r}|^2 = m \cdot r^2$

$$\vec{M} = J \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \quad (\text{G2.1.2-11})$$

Bei rotierenden ausgedehnten Körpern muss zur Bestimmung von  $J$  über die im unterschiedlichen Abstand  $r$  von der Drehachse befindlichen Massenteilchen  $\Delta m$  des betrachteten Körpers summiert werden. Es ergibt sich dann beispielsweise für das polare Trägheitsmoment  $J$  eines rotationssymmetrischen Zylinders der Masse  $M$  und des Radius  $R$ , dessen Drehachse die Zylinderachse ist, der Wert  $J = M \cdot R^2 / 2$  (Bild G2.1.2-2b).

### Beispiel G2.1.2-2:

Wie groß ist die kinetische Energie in einem mit der Drehzahl  $n = 10000/\text{min}$  rotierenden Stahlzylinder mit dem Radius  $R = 0.1$  m und der Länge  $L = 0.2$  m? Die Dichte von Stahl beträgt etwa  $\gamma = 7850$  kg/m<sup>3</sup>. Wegen der enormen Fliehkraftbeanspruchung soll die Umfangsgeschwindigkeit des Stahlzylinders 250 m/s nicht übersteigen. Ist diese Bedingung erfüllt?

$$M = R^2 \pi \cdot L \cdot \gamma = 0.1^2 \cdot \pi \cdot 0.2 \cdot 7850 = 49.3 \text{ kg}, \quad J = M \cdot R^2 / 2 = 49.3 \cdot 0.1^2 / 2 = 0.247 \text{ kg} \cdot \text{m}^2,$$

$$\omega = 2\pi \cdot n = 2\pi \cdot (10000 / 60) = 1047.2 \text{ rad/s} = 1047.2 / \text{s},$$

$$W_k = 0.247 \cdot 1047.2^2 / 2 = 135433 \text{ J} = 0.0376 \text{ kWh},$$

$v = \omega \cdot r = 1047.2 \cdot 0.1 = 104.7$  m/s < 250 m/s. Die Festigkeitsbedingung für den Stahlzylinder ist erfüllt.

## G2.1.3 Mechanische Grundgesetze

### a) Kraft und Drehmoment

Das zweite NEWTON'sche Axiom besagt, dass die Kraft  $F$ , die auf eine Masse  $m$  wirkt, diese beschleunigt (Bild G2.1.3-1a), wobei die Beschleunigung die Änderung der Geschwindigkeit  $v$  mit der Zeit  $t$  ist. Dabei ist die Geschwindigkeit  $v$  die Änderung des Ortes  $x$  der Masse  $m$  mit der Zeit  $t$ .

2. NEWTON'sches Axiom: "**Kraft = Masse x Beschleunigung**"

$$v = dx/dt, \quad (\text{G2.1.3-1})$$

$$a = dv/dt = d^2x/dt^2, \quad (\text{G2.1.3-2})$$

$$F = m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (\text{G2.1.3-3})$$

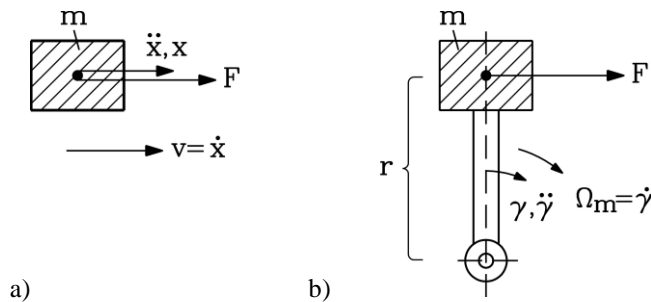


Bild G2.1.3-1: Zweites NEWTON'sches Axiom für a) linear bewegte und b) rotierende Massen.

Wird die Masse  $m$  im Abstand  $r$  von einem Drehpunkt starr mit einer „masselosen“ Verbindung befestigt (Bild G2.1.3-1b), so kann sie sich nur auf einer Kreisbahn bewegen. Die Verbindungslinie vom Drehpunkt zum Massenmittelpunkt (Schwerpunkt) überstreicht bei dieser Bewegung den Winkel  $\gamma$ . Aus dem zurückgelegten Weg  $x$  auf einem Kreisbogen folgt die Bahngeschwindigkeit  $v$  und die Beschleunigung  $a$ .

$$x = \gamma \cdot r, \quad (\text{G2.1.3-4})$$

$$v = \dot{x} = r \cdot d\gamma / dt, \quad a = \ddot{x} = r \cdot d^2\gamma / dt^2 \quad (\text{G2.1.3-5})$$

Aus (G2.1.3-3) folgt durch Multiplikation mit der Länge des Hebelarms  $r$  das 2. NEWTON'sche Axiom für rotierende Massen (G2.1.3-6):

**"Drehmoment = Trägheitsmoment x Winkelbeschleunigung".**

( $J$ : Trägheitsmoment,  $M$ : mechanisches Drehmoment,  $\Omega_m$ : mechanische Winkelgeschwindigkeit).

$$F \cdot r = m \cdot r \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = m \cdot r^2 \cdot \frac{d^2 \gamma}{dt^2} \quad \Rightarrow \quad M = J \cdot \frac{d^2 \gamma}{dt^2} = J \cdot \frac{d\Omega_m}{dt} \quad (\text{G2.1.3-6})$$

$$J = m \cdot r^2, \quad M = F \cdot r, \quad \Omega_m = d\gamma / dt \quad (\text{G2.1.3-7})$$

Bei einer mechanischen Drehfrequenz (Drehzahl)  $n$  von einer Umdrehung je Sekunde wird genau der Winkel  $\gamma = 2\pi$  überstrichen. Daher ist die mechanische Winkelgeschwindigkeit  $\Omega_m$  das  $2\pi$ -fache der mechanischen Drehzahl  $n$ .

$$\Omega_m = 2\pi \cdot n \quad (\text{G2.1.3-8})$$

### b) Arbeit und Leistung

Die von einem Linearmotor geleistete Arbeit  $W$ , wenn er die Masse  $m$  mit einer konstanten Kraft  $F$  längs des Wegs  $x$  bewegt, ist die mechanische Energie, die dieser Linearmotor an die Arbeitsmaschine abgibt: **"Arbeit = Kraft x Weg"**.

$$W = F \cdot x \quad (\text{G2.1.3-9})$$

Die je Zeiteinheit  $t$  geleistete Arbeit  $W$  ist die vom Linearmotor erbrachte mechanische Leistung  $P$ : **"Leistung = Kraft x Geschwindigkeit"**.

$$P = dW / dt = F \cdot dx / dt = F \cdot v \quad \boxed{P = F \cdot v} \quad (\text{G2.1.3-10})$$

Durch Erweiterung von (G2.1.3-10) mit der Länge des Hebelarms  $r$  und dessen Kehrwert  $1/r$  wird die entsprechende Formel für die rotatorische Bewegung abgeleitet:

**"Leistung = Drehmoment x Winkelgeschwindigkeit"**.

$$P = F \cdot r \cdot dx / dt \cdot \frac{1}{r} = M \cdot \frac{d\gamma}{dt} = M \cdot \Omega_m \quad \boxed{P = M \cdot \Omega_m} \quad (\text{G2.1.3-11})$$

Die in der bewegten Masse  $m$  gespeicherte mechanische Energie heißt **kinetische Energie**. Aus (G2.1.3-10) folgt durch Integration:

$$W = \int P \cdot dt = \int F \cdot \frac{dx}{dt} \cdot dt = \int m \cdot \frac{dv}{dt} \cdot v \cdot dt = \int m \cdot v \cdot dv = m \cdot \frac{v^2}{2} . \quad (\text{G2.1.3-12})$$

Für rotierende Massen entsteht (G2.1.3-13) aus (G2.1.3-12) durch Umformung. In **Schwungmassenspeichern** (das sind rasch rotierende Massen mit hohem Trägheitsmoment) wird dieser Effekt zur Speicherung von kinetischer Energie genutzt.

$$W = m \cdot r^2 \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{v^2}{2} = J \cdot \frac{\Omega_m^2}{2} \quad (\text{G2.1.3-13})$$

### c) Beispiel: Gezeitenkraft als Wirkung der Rotation des Mondes um die Erde

Die Kraft der Gezeiten wird in Gezeitenkraftwerken zur Energiegewinnung ausgenutzt. Der gemeinsame Schwerpunkt (Baryzentrum **S**) des Systems Erde-Mond liegt innerhalb der Erde, wie folgende Rechnung zeigt. Mit der Erd- und Mondmasse und dem mittleren Erde-Mond-Abstand  $m_E = 59.8 \cdot 10^{23} \text{ kg}$ ,  $r_E = 6378 \text{ km}$ ,  $m_M = 0.73 \cdot 10^{23} \text{ kg}$ ,  $\Delta_{EM} = 384000 \text{ km}$  wird über das Momenten-Gleichgewicht (Bild G2.1.3-2a)

$$m_E \Delta_E = m_M \Delta_M, \quad \Delta_E + \Delta_M = \Delta_{EM} \quad (\text{G2.1.3-14})$$

der Abstand des Schwerpunkts **S** vom Erdmittelpunkt **M** erhalten, der kleiner als der Erdradius 6378 km (Bild G2.1.3-2b) ist.

$$\Delta_E = \frac{m_M}{m_E + m_M} \cdot \Delta_{EM} = 4631 \text{ km} < 6378 \text{ km} \quad (\text{G2.1.3-15})$$

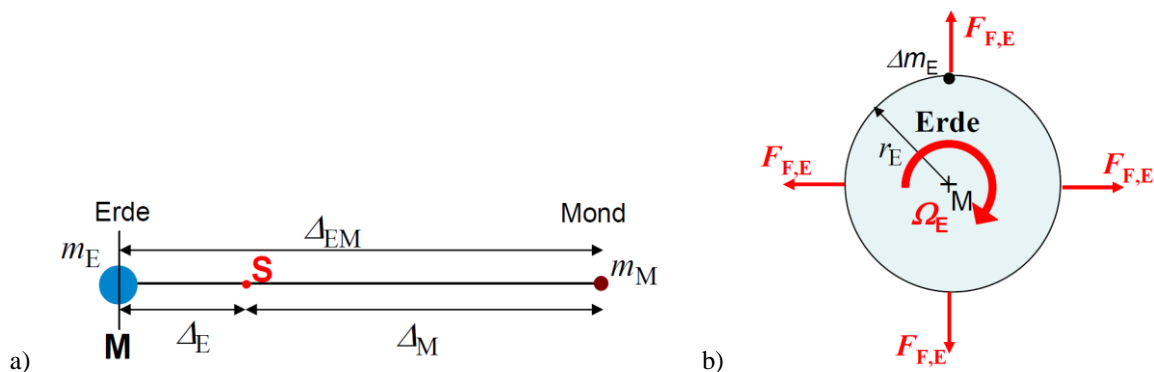


Bild G2.1.3-2: a) System Erde-Mond mit dem gemeinsamen Schwerpunkt **S** und dem Erdmittelpunkt **M**, b) Die Eigenrotation der Erde (Tag-Nacht-Zyklus in Bezug zur Sonne) führt für Massenelemente  $\Delta m_E$  z. B. an der Erdoberfläche zur dort angreifenden Fliehkraft  $F_{F,E}$ .

Die Rotation der Erde um **S** erfolgt mit der Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$  und führt zur Fliehkraft  $F_F$  im Erdmittelpunkt **M**  $F_F = m_E \cdot \Delta_E \cdot \Omega^2$ . Diese Fliehkraft  $F_F$  in **M** ist mit der Gravitations-Anziehungskraft  $F_{EM}$  in **M** zwischen Erde-Mond im Gleichgewicht.

$$F_F = m_E \cdot \Delta_E \cdot \Omega^2 = F_G = G \cdot \frac{m_E \cdot m_M}{\Delta_{EM}^2} \quad (\text{G2.1.3-16})$$

Daraus ergibt sich die „siderische“ Mondumlaufzeit  $T_M$  mit etwas weniger als 1 Monat.

$$\Omega = \frac{2\pi}{T_M} = \sqrt{\frac{G \cdot m_M}{\Delta_{EM}^2 \Delta_E}} = \sqrt{\frac{G \cdot (m_M + m_E)}{\Delta_{EM}^3}} \quad T_M = 0.0746 \text{ a} = 27.3 \text{ d} \quad (\text{G2.1.3-17})$$

Die Eigenrotation der Erde um den Erdmittelpunkt **M** mit  $\Omega_E$  (Bild G2.1.3-2b) bewirkt eine allseitig gleichermaßen wirkende Fliehkraft  $F_{F,E} = \Delta m_E \cdot r_E \cdot \Omega_E^2$  auf alle Massepunkte  $\Delta m_E$  an der Erdoberfläche. Diese Kraft liefert deshalb keinen Beitrag zur Gezeitenwirkung! Nur die Erdrotation um **S** (ohne ihre Eigenrotation) bewirkt den Gezeiten-Effekt. Zuzufolge dieser

Rotation drehen alle Punkte der Erde auf gleichen raumfesten Kreisen K mit Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$  (Bild G2.1.3-3). Alle Punkte auf der Erde (so auch die Massenteile  $\Delta m_E$  auf der Erdoberfläche) erfahren gleiche Fliehkraft  $F'_F = \Delta m_E \cdot \Delta_E \cdot \Omega^2$ . Die Gravitations-Mondanziehungskraft  $F_G$  (G2.1.3-16) ist auf Erdoberfläche auf der dem Mond zugewandten Seite mit  $F_{Gi}$  wegen des kleineren Abstands zu Mond größer als auf der dem Mond abgewandten Seite  $F_{Ga}$ !

$$F_{Ga} = G \cdot \Delta m_E \cdot m_M / (\Delta_{EM} + r_E)^2, \quad F_{Gi} = G \cdot \Delta m_E \cdot m_M / (\Delta_{EM} - r_E)^2 \quad . \quad (G2.1.3-18)$$

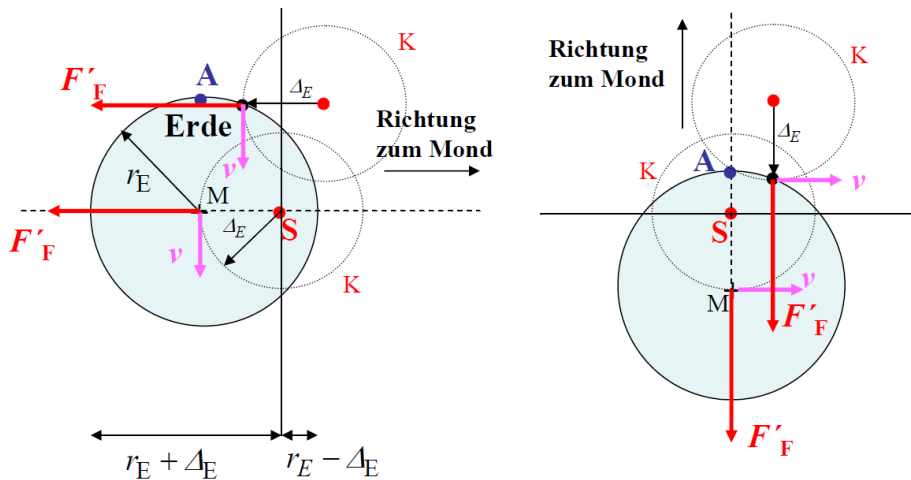


Bild G2.1.3-3: Zufolge der Rotation der Erde und des Mondes als Paar um S drehen alle Punkte der Erde auf gleichen raumfesten Kreisen K mit derselben Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$ , wobei S auf der Verbindungslinie Erde-Mond liegt. Die Bilder links und rechts sind um eine Vierteldrehung zeitversetzt.

Die resultierende Kraft  $F_a = F'_F - F_{Ga}$  bzw.  $F_i = F_{Gi} - F'_F$  je Massenteil  $\Delta m_E$  als Summe aus Fliehkraft und Gravitationskraft ist die wirksame Gezeitenkraft (Bild G2.1.3-4). Somit entstehen die **Gezeiten als zwei Flutberge der Weltmeere** durch das Zusammenwirken der Fliehkraft  $F'_F$  und der Gravitationskraft  $F_{G,i,a}$  als resultierende Kraft  $F(r)$  (wenn  $r$  aus dem Mondmittelpunkt heraus gezählt wird) auf alle Massenelemente des Meerwassers, da Erde und Mond um einen gemeinsamen Schwerpunkt (Baryzentrum S) rotieren, der außerhalb des Erdmittelpunkts M liegt (Bild G2.1.3-5).

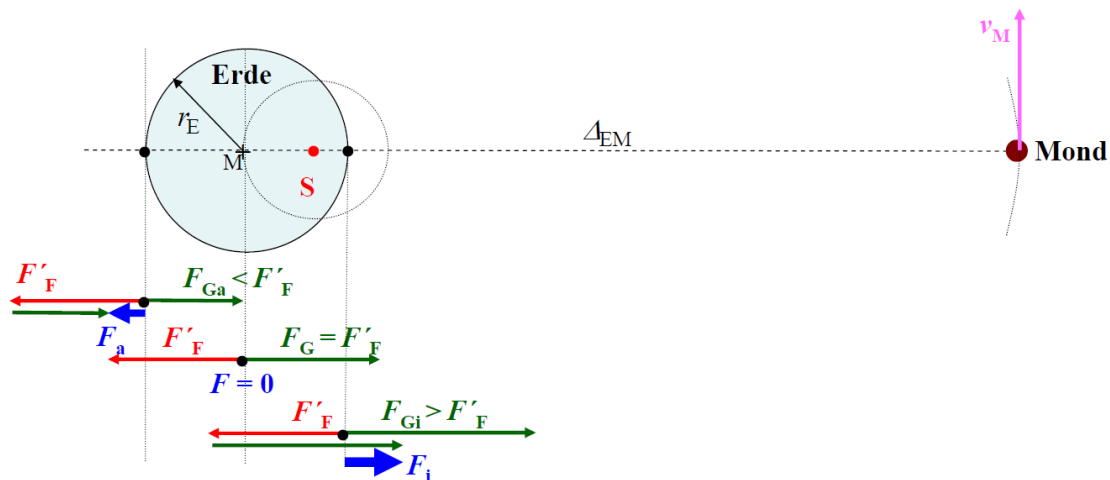


Bild G2.1.3-4: Die resultierende Kraft je Massenteil  $\Delta m_E$  als Summe aus Fliehkraft und Gravitationskraft ist die wirksame Gezeitenkraft  $F_a$  bzw.  $F_i$ .

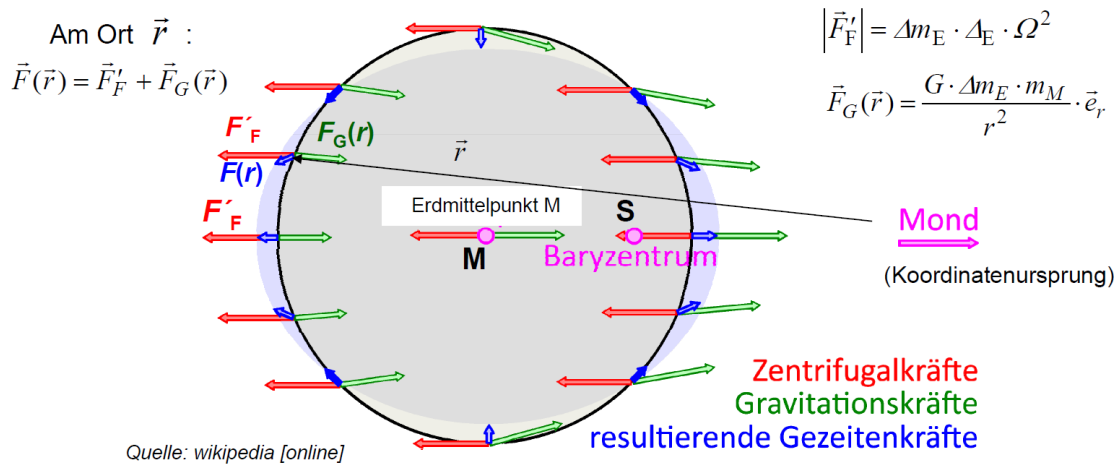


Bild G2.1.3-5: Entstehung der Gezeitenkraft  $F(r)$  je Massenteil  $\Delta m_E$  der Weltmeere als Summe aus Fliehkraft und Gravitationskraft. Sie führt wegen der unter dieser Kraft verformten Wasseroberfläche zur Entstehung zweier Flutberge und zweier Ebbe-Täler.

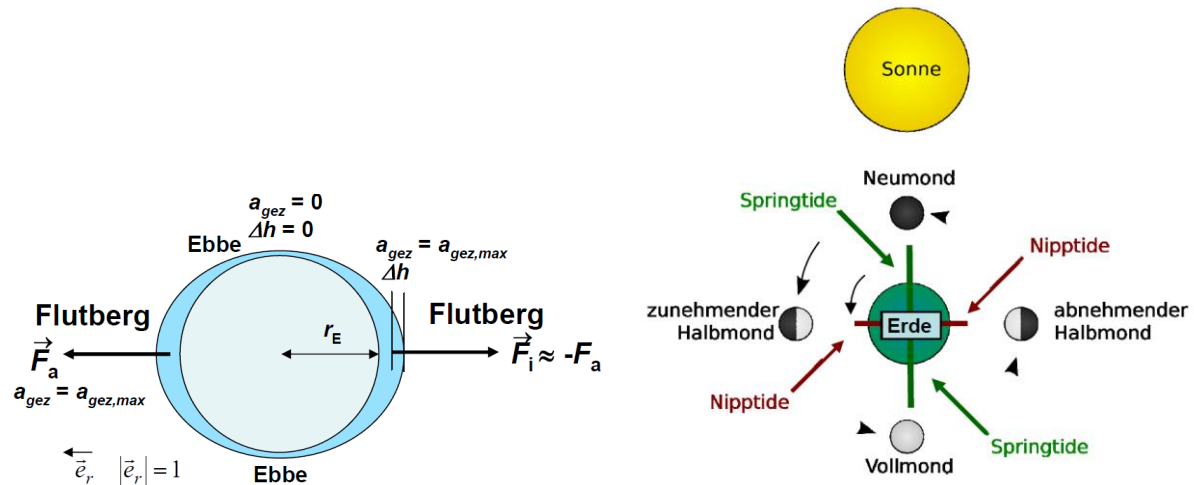


Bild G2.1.3-6: a) Entstehung der beiden Flutberge durch die Gezeitenwirkung, b) Gezeitenwirkung von Sonne und Mond (Blick auf die Erd-Nordhalbkugel) (Quelle: Wikipedia.de)

Über die Gezeitenkräfte  $F_a$  und  $F_i$  (G2.1.3-19) in der Verbindungslinie Erde-Mond schätzen wir gemäß Bild G2.1.3-5 und -6a die Höhe der Flutberge der Weltmeere ab.

$$F_a = F'_F - F_{Ga} = F_G - F_{Ga} = \frac{G \cdot \Delta m_E \cdot m_M}{(\Delta_{EM})^2} - \frac{G \cdot \Delta m_E \cdot m_M}{(\Delta_{EM} + r_E)^2} = \frac{G \cdot \Delta m_E \cdot m_M}{(\Delta_{EM})^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{r_E}{\Delta_{EM}}\right)^2}\right)$$

$$F_i = F_{Gi} - F'_F = F_{Gi} - F_G = \frac{G \cdot \Delta m_E \cdot m_M}{(\Delta_{EM} - r_E)^2} - \frac{G \cdot \Delta m_E \cdot m_M}{(\Delta_{EM})^2} = -\frac{G \cdot \Delta m_E \cdot m_M}{(\Delta_{EM})^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{\left(1 - \frac{r_E}{\Delta_{EM}}\right)^2}\right)$$

Wegen  $\xi = \frac{r_E}{\Delta_{EM}} = \frac{6370}{384000} = 0.0166 \ll 1$  folgt in sehr guter Näherung

$$F_a = \frac{G \cdot \Delta m_E \cdot m_M}{(\Delta_{EM})^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{r_E}{\Delta_{EM}}\right)^2}\right) = A \cdot \left(1 - \frac{1}{(1 + \xi)^2}\right) = A \cdot \left(1 - \frac{1}{1 + 2\xi + \xi^2}\right) \approx A \cdot \left(1 - \frac{1}{1 + 2\xi}\right)$$

bzw.  $F_a \approx A \cdot (1 - (1 - 2\xi)) = A \cdot 2\xi$  und

$$F_i = -\frac{G \cdot \Delta m_E \cdot m_M}{(\Delta_{EM})^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{\left(1 - \frac{r_E}{\Delta_{EM}}\right)^2}\right) = A \cdot \left(1 - \frac{1}{(1 - \xi)^2}\right) \approx A \cdot 2\xi \quad . \text{ bzw. } F_a \approx A \cdot 2\xi \approx F_i .$$

$$F_a \approx \frac{2G \cdot \Delta m_E \cdot m_M \cdot r_E}{(\Delta_{EM})^3} \approx F_i \quad (\text{G2.1.3-19})$$

Die Gezeitenbeschleunigung  $a_{\text{gez}}$  ist sehr klein:

$$a_{\text{gez,max}} = F_a / \Delta m_E = F_i / \Delta m_E = \frac{2G \cdot m_M \cdot r_E}{(\Delta_{EM})^3} = 1.1 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad . \quad (\text{G2.1.3-20})$$

Die Arbeit der Gezeitenkraft  $F_a$  bzw.  $F_i$ , ein Wasserteilchen  $\Delta m_E$  von der Mitte des Ebbe-Tals zur Flutberghöhe längs des Viertel-Erdumfangs  $\pi \cdot r_E / 2 \approx r_E$  mit dem zur Erdoberfläche

tangentialen Wegelement  $d\vec{s}$  auf die Höhe  $\Delta h$  anzuheben, ist  $W = \int_{\text{Ebbetal}}^{\text{Flutberg}} \vec{F}(r) \cdot d\vec{s}$  und wird

mit  $W \approx F_a \cdot r_E$  abgeschätzt. Mit (G2.1.3-20) folgt

$$F_a \cdot r_E = \Delta m_E \cdot a_{\text{gez,max}} \cdot r_E = \Delta m_E \cdot g \cdot \Delta h \quad \text{und} \quad (\text{G2.1.3-21})$$

$$\Delta h = a_{\text{gez,max}} \cdot r_E / g = 1.1 \cdot 10^{-6} \cdot 6378 \cdot 10^3 / 9.81 = 0.7 \text{ m} \quad . \quad (\text{G2.1.3-22})$$

Die Abschätzung ergibt eine Flutberghöhe der sonst ungestörten Meeresoberfläche von nur  $\Delta h \approx 0.7$  m. Erst in Meeresbuchten oder Meerengen bewirkt diese Verengung der Meeresoberfläche eine Erhöhung der Flutberge, so dass dort Ebbe-Flut-Differenzen im Meeresspiegel von über 10 m auftreten können. Die Gezeitenwirkung  $F_{a,M} \approx F_{i,M}$  des Mondes auf die Wasseroberfläche der Weltmeere ist mit (G2.1.3-19) 2.2 größer als die Gezeitenwirkung der Gravitationskraft der Sonne  $F_{a,S} \approx F_{i,S}$ , da diese wesentlich weiter entfernt ist.

$$F_{a,S} / F_{a,M} = \frac{m_S \cdot (\Delta_{EM})^3}{m_M \cdot (\Delta_{ES})^3} = \frac{1.98 \cdot 10^{30} \text{ kg} \cdot (384 \cdot 10^6 \text{ m})^3}{0.73 \cdot 10^{23} \text{ kg} \cdot (150 \cdot 10^9 \text{ m})^3} = \frac{1}{2.2} \quad (\text{G2.1.3-23})$$

Die große Mondgezeitenkraft überlagert sich die um 1/2.2 kleineren Sonnengezeitenkraft. Der gemeinsame Sonnen- und Mondphasen-Einfluss ist bei Voll- und Neumond maximal, da dann Mond, Erde, Sonne in einer Linie liegen. Es tritt die **Springtide** mit einem erhöhten Flutberg auf, da Mond- u. Sonnengezeitenkraft sich algebraisch addieren. Die gemeinsame Gezeitenwirkung ist minimal bei zu- oder abnehmendem Halbmond, da dann Mond, Erde, Sonne zueinander einen rechten Winkel bilden. Es tritt **Nipptide** mit einem verminderten Flutberg auf (Bild G2.1.3-6b).

Durch die Erdrotation  $\Omega_E$  um ihre Achse (Tag-Nacht-Zyklus) dreht sich die Erde unter den Flutbergen hinweg, so dass jeder der beiden Berge in ca. 24 h einmal um die Erde läuft. Flut und Ebbe wechseln somit einander im ca. 6-h-Rhythmus ab. Diese Relativbewegung der Erdoberfläche zu den Flutbergen bremst die Rotation der Erde um ihre Achse ab. Zurzeit dreht sich die Erde schneller ( $T_E = 1$  d) um ihre Achse als der Mond in gleichsinniger Drehung um die Erde ( $T_M = 27.3$  d):  $\Omega_E = 2\pi/T_E$ ,  $\Omega_M = 2\pi/T_M$ . Die Flutberge laufen bezüglich der Erdoberfläche in Ost-West-Richtung mit der daraus resultierenden Differenzgeschwindigkeit um. So kommt es zum Strömen der beiden Flutwellenberge mit der zugehörigen sehr kleinen Wasserreibung, aber auch zum Anprall der beiden Flutberge an die Kontinentalküsten, was eine erhebliche Bremswirkung zur Folge hat und die Erdrotation  $\Omega_E$  verringert! Wenn auch die Reibungswärme dabei gering ist, so vermindert sich doch der Spin-Drehimpuls der Erde  $L_E = J_E \Omega_E$ . Die Bremskraft verschwindet, wenn die Erde so weit abgebremst ist, dass keine Differenzgeschwindigkeit auftritt und die Flutberge an der Erdoberfläche stehen bleiben:  $T'_E = T'_M > T_E$ . Dann ist  $\Omega_E = \Omega_M = \Omega$ ! Bei vernachlässigter

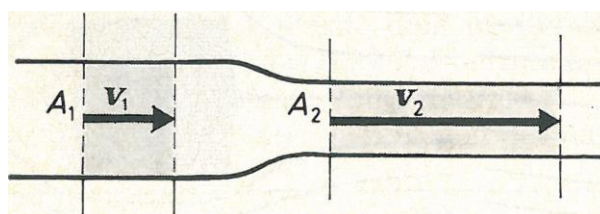
Reibungswärme ist die Konstanz des Gesamtdrehimpulses  $L = L_E + L_M = \text{konst.}$  von Mond und Erde dafür verantwortlich, dass sich bei sinkendem  $L_E$  der Bahn-Drehimpuls des Mondes  $L_M$  um die Erde erhöht:  $L_M = M_M \cdot \Delta_M^2 \cdot \Omega_M = M_M \cdot \Delta_M'^2 \cdot \Omega'$ .

$$L_E + L_M = J_E \cdot \Omega_E + M_M \cdot \Delta_M^2 \cdot \Omega_M = J_E \cdot \Omega' + M_M \cdot (\Delta_M')^2 \cdot \Omega' = \text{konst.} \quad (\text{G2.1.3-24})$$

Mit den aktuellen Daten  $J_E, \Omega_E, M_M, \Delta_M, \Omega_M$  ergibt (G2.1.3-24) den endgültigen Abstand des Mondes von der Erde  $\Delta_M' / \Delta_M = 1.56$ . Der Mond entfernt sich von Erde! Im **Endzustand** ist  $T_E' = T_M' = 56 \text{ d} = 2\pi / \Omega'$ : Der „Erd-Tag“ verlängert sich auf 56 jetzige Erdentage! Der Mond wird mit 599 000 km 1.56-mal so weit von der Erde entfernt sein wie jetzt. Die Flutberge und Ebbenbereiche bewegen sich dann bezüglich der Erdoberfläche nicht mehr, und der Mond wird nur von einer Erdseite aus (sehr viel kleiner) zu sehen sein.

## G2.2 Energie in strömenden Flüssigkeiten

Mit dem Begriff **Fluide** werden allgemein **Gase** (kompressible Fluide: Die Dichte  $\gamma$  ist nicht konstant!) und **Flüssigkeiten** (i. A. nicht kompressible Fluide: Die Dichte  $\gamma$  ist konstant!) zusammengefasst, wobei die Lage der einzelnen Teilchen, aus denen das Fluid besteht, ihre Lage zueinander ändern können. Somit ist die Gestalt (Körperform) eines Fluids veränderbar und i. A. veränderlich. Bei idealen Fluiden werden die einzelnen Teilchen (i. A. Moleküle) als punktförmig betrachtet, wobei bei Gasen zwischen den einzelnen Teilchen ein gewisser Abstand („leerer Raum“) auftritt, während bei Flüssigkeiten die Teilchen eng benachbart liegen, so dass sie nicht weiter zusammendrückbar sind („inkompressibel“). Die von außen über eine Fläche  $A$  wirkende Kraft  $F$  auf eine ruhende Flüssigkeit in einem Gefäß wirkt daher allseitig als statischer Druck  $p = F/A$  („hydrostatischer“ Druck) innerhalb der Flüssigkeit. I. A. aber kann sich die Flüssigkeit bei Einwirkung einer äußeren Kraft  $F$  bewegen; sie strömt. Auf Grund der Annahme idealer Teilchen (es tritt keine Teilchenumwandlung z. B. in Strahlung auf) bleibt die Masse  $m$  der Flüssigkeit auch beim „Strömen“ konstant:  $dm/dt = 0$ . Gegen die von außen wirkende, die Flüssigkeit beschleunigende Kraft wirken die innere Zähigkeitskraft (siehe unten), die innere Druckkraft und im Schwerfeld die Schwerkraft. Bei **zeitlich stationärer Strömung** ändert sich das Geschwindigkeitsfeld der Strömung, also die Größe und Richtung der lokalen Strömungsgeschwindigkeit  $v$  in der strömenden Flüssigkeit nicht. Die einzelnen Flüssigkeitsteilchen durchlaufen bei ihrer Bewegung Orte mit unterschiedlicher Geschwindigkeit. So ist z. B. im Bild G2.2-1 die Teilchengeschwindigkeit am Ort der größeren Querschnittsfläche  $A_1 > A_2$  des Strömungskanals  $v_1$  niedrig, am Ort mit der kleineren Querschnittsfläche  $A_2$  mit  $v_2 > v_1$  hoch. Aber das Strömungsbild der gesamten Flüssigkeit bleibt dabei zeitlich unveränderlich. Dies wollen wir nun weiter betrachten.



**Bild G2.2-1:** Die strömende Flüssigkeit mit der Masse  $m$  strömt von einem vergrößerten Kanalquerschnitt (Fläche  $A_1$ ) zu einem engen Kanalquerschnitt mit der Fläche  $A_2$  [Sch].

Wir nehmen an, dass im Bereich der Fläche  $A_1$  auf die Länge  $l_1$  die Strömungsgeschwindigkeit  $v_1$  herrscht. Während der Zeit  $t$  wird daher diese Länge  $l_1 = t \cdot v_1$  von den Teilchen zurückgelegt. Die pro Zeiteinheit durch die Fläche  $A_1$  strömende Masse („Massestrom“) ist  $\dot{m} = l_1 A_1 \gamma / t = v_1 A_1 \gamma = \dot{V} \cdot \gamma$  mit dem „Volumenstrom“  $\dot{V}$ . Wegen der Massen-

und Dichtekonstanz gilt gemäß Bild G2.2-1 am Strömungsquerschnitt  $A_2$  für inkompressible Flüssigkeiten  $m = l_1 A_1 \gamma = l_2 A_2 \gamma$  und wegen  $v_2 = l_2 / t$  somit  $\dot{m} = v_1 A_1 \gamma = v_2 A_2 \gamma = \dot{V} \cdot \gamma$  als **Kontinuitätsgleichung**

$$v_1 A_1 = v_2 A_2 \quad . \quad (G2.2-1)$$

Beispiel G2.2-1:

Flüssigkeit strömt mit der Geschwindigkeit  $v_2 = 6 \text{ m/s}$  durch den Querschnitt  $A_2 = 1 \text{ dm}^2$ . Wie hoch ist die Strömungsgeschwindigkeit im größeren Strömungsquerschnitt  $A_1 = 3 \text{ dm}^2$ ?  
 Antwort:  $v_1 = v_2 A_2 / A_1 = v_2 \cdot (1/3) = v_2 / 3 = 6/3 = 2 \text{ m/s}$  .

Können die strömenden Flüssigkeitsteilchen reibungsfrei aneinander vorbei gleiten, sprechen wir von einer ideal reibungsfreier Flüssigkeit, ansonsten von **zäh (viskosen) Flüssigkeiten**. In der Realität ist jede Flüssigkeit zäh (viskos), so dass die reibungsfreie Flüssigkeit eine Idealisierung ist (manchmal spöttisch als „trockene“ Flüssigkeit bezeichnet). Wegen der Reibung zwischen benachbarten Teilchen tritt dort die gegen diese Relativbewegung gerichtete Zähigkeitskraft  $F_\eta$  auf. Erfolgt die Strömung mit ausreichend niedriger Geschwindigkeitsänderung  $dv/dt$  bei veränderlichen Strömungsquerschnitten (z. B. von  $A_1$  nach  $A_2$  in Bild G2.2-1), so ist die dabei auftretende Beschleunigungs- bzw. Verzögerungskraft auf die Masseteilchen  $\sim dv/dt$  klein gegenüber  $F_\eta$ ; die Strömung ist reibungsdominiert. Die Bahnen der einzelnen Teilchen sind annähernd parallel; es ergibt sich eine „geschichtete“ (**laminare**) **Strömung**. An der Kanalwand ist wegen der haftenden Reibungskraft die Strömungsgeschwindigkeit Null. Sie nimmt parabolisch zur Kanalmitte zu (*Hagen-Poiseuille-Gesetz*), Bild G2.2-2a. Ergeben sich auf Grund der veränderlichen Strömungsquerschnitte hohe Geschwindigkeitsänderungen  $dv/dt$  von Ort zu Ort, so dass die dabei auftretende Beschleunigungs- bzw. Verzögerungskraft auf die Masseteilchen  $\sim dv/dt$  groß gegenüber  $F_\eta$  ist, so ist die Strömung von dieser Trägheitskraft dominiert. Zwar ist an den Kanalwandungen wegen der haftenden Reibungskraft die Strömungsgeschwindigkeit weiterhin Null, aber die Teilchenbahnen können z.B. durch Seitwärtsbewegungen nun verwickelt und kompliziert werden. Im Kanalquerschnitt  $A_2$  (Bild G2.2-1) nahe beieinander liegende Teilchen können im Querschnitt  $A_1$  weit voneinander entfernt sein („chaotisches“ Verhalten der Teilchenbahnen), so dass „turbulente“ Strömung auftritt. Nur in der Nähe der Kanalwände, wo die Geschwindigkeit klein ist, dominiert die Zähigkeitskraft, deshalb bildet sich dort eine laminare Grenzschicht aus, aber zur Kanalmitte hin herrscht ein turbulentes Strömungsbild mit einem nicht-parabolischen Geschwindigkeitsprofil.

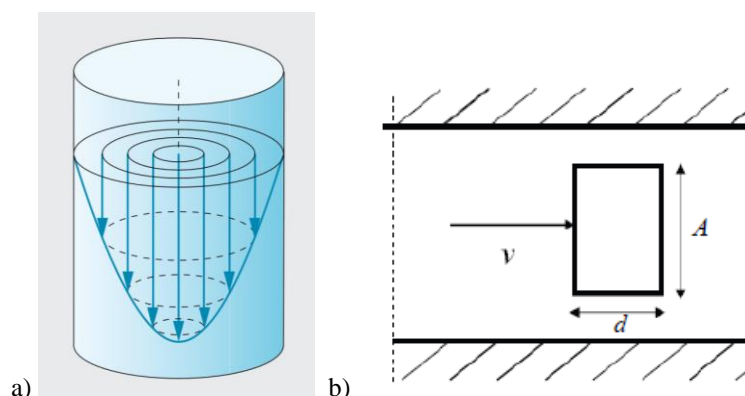


Bild G2.2-2: a) In der laminar (= reibungsdominiert) strömenden Flüssigkeit ist die Geschwindigkeitsverteilung über den Kanalquerschnitt parabolisch. In der turbulent strömenden Flüssigkeit ist diese Geschwindigkeitsverteilung über den Kanalquerschnitt nicht mehr parabolisch, sondern gegenüber dem Parabelverlauf abgeplattet, hat aber in Kanalnähe wegen der dort geringen Geschwindigkeit eine laminare Grenzschicht [Ger]. b) Betrachtung der Zähigkeits- und Trägheitskraft in einer strömenden Flüssigkeit.



Eine mit  $v$  bewegte Flüssigkeitssäule mit der Seitenfläche  $A = d \cdot d$  und der Dicke  $d$  hat die Masse  $m = A \cdot d \cdot \gamma$  (Bild G2.2-2b). Entlang ihrer Seitenfläche  $A$  wirkt nach *Newton* die Zähigkeitskraft  $F_\eta \approx \eta \cdot A \cdot (v/d)$ , wobei  $\eta$  die **dynamische Zähigkeit** ( $\text{kg}/(\text{m} \cdot \text{s}^2)$ ) als Stoffwert die Größe der Zähigkeit beschreibt und  $(v/d)$  proportional zur Änderung des Geschwindigkeitsprofils quer zur Strömung auf Grund dieser Zähigkeit ist. Die Trägheitskraft  $F_T = m \cdot dv/dt$  schätzen wir damit ab, dass längs des Wegs  $d$  in der Zeit  $t$  die Geschwindigkeitsänderung  $dv/dt = \Delta v/t = \Delta v/(d/v) = v \cdot \Delta v/d \approx v \cdot v/d$  stattfindet. Das Kraftverhältnis ist die dimensionslose *Reynolds-Zahl*

$$\text{Re} = \frac{F_T}{F_\eta} = \frac{m \cdot dv/dt}{F_\eta} \approx \frac{m \cdot v^2/d}{\eta \cdot A \cdot (v/d)} = \frac{\gamma \cdot A \cdot d \cdot v^2/d}{\eta \cdot A \cdot (v/d)} = \frac{d \cdot v}{\eta/\gamma} = \frac{d \cdot v}{\nu}, \quad (\text{G2.2-2a})$$

wobei  $\nu = \eta/\gamma$  die **kinematische Zähigkeit** ( $(\text{m}^2/\text{s})$ ) ist. Wegen der Abschätzung ist die Länge  $d$  als charakteristische Länge abhängig von der betrachteten Kanalgeometrie. Wird zum Beispiel für **Rohrströmungen** die mittlere Strömungsgeschwindigkeit  $v_{av}$  im Strömungskanal bezeichnet (gemittelt über das Geschwindigkeitsprofil z. B. in Bild G2.2-2a),

$$\text{Re} = d_H \cdot v_{av} / \nu, \quad (\text{G2.2-2b})$$

so ist  $d$  als „hydraulischer“ Durchmesser des Kanals  $d_H$  aus dem Kanalquerschnittsumfang  $U_k$  und der Kanalquerschnittsfläche  $A_k$  gemäß (G2.2-3) zu ermitteln.

$$d_H = 4 \cdot A_k / U_k \quad (\text{G2.2-3})$$

#### Beispiel G2.2-2:

a) Kreisförmige Kanalquerschnittsfläche (Kanal Durchmesser  $d_k$ ):

$$A_k = d_k^2 \cdot \pi / 4, \quad U_k = d_k \pi, \quad d_H = d_k.$$

b) Quadratische Kanalquerschnittsfläche (Seitenkante  $l_k$ ):  $A_k = l_k^2$ ,  $U_k = 4 \cdot l_k$ ,  $d_H = l_k$ .

#### Beispiel G2.2-3:

Ein Drehzylinder (Länge  $l$ , Durchmesser  $d$ ) wird seitlich von einer Flüssigkeit (Dichte  $\gamma$ ) umströmt, wobei die Geschwindigkeit der Flüssigkeit weit vom Zylinder entfernt („ungestörte“ Strömung)  $v_\infty$  ist. Er setzt der Flüssigkeit die projizierte Fläche  $A = d \cdot l$  als Strömungswiderstand entgegen.

a) Die Flüssigkeit ist reibungsfrei. Es stellt sich vor und hinter dem Zylinder ein identisches Strömungsbild ein. Die Flüssigkeit gleitet am Zylinder vorbei. Auf diesen wird keine Kraft übertragen:  $F_R = 0$  (Bild G2.2-3a).

b) Die Flüssigkeit hat innere Reibungskräfte. Es stellt sich vor und hinter dem Zylinder ein unterschiedliches Strömungsbild ein (Bild G2.2-3b). Die Flüssigkeit überträgt auf den Zylinder die Reibungskraft  $F_R = c_W \cdot d \cdot l \cdot v_\infty^2 / 2$ , wobei der dimensionslose Beiwert  $c_W(\text{Re})$  von  $\text{Re}$  abhängt. Die *Reynolds-Zahl* wird als  $\text{Re} = d \cdot v_\infty / \nu$  berechnet. Es werden in Bild G2.2-3c abnehmende kinematische Zähigkeiten  $\nu$  untersucht:

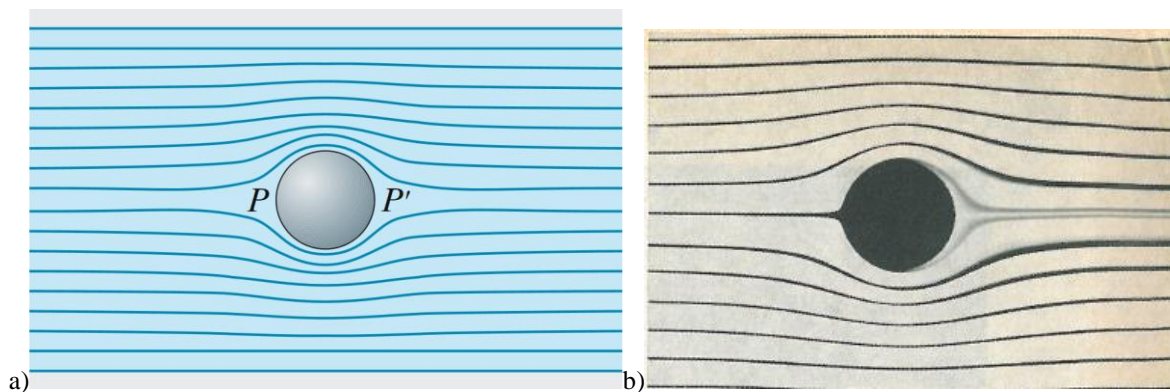
- Bei hoher Zähigkeit  $\text{Re} = 0.01$  ist  $c_W = 10$ . Das Strömungsbild scheint vor und hinter dem Zylinder symmetrisch, ist es aber bei genauere Analyse (mehr Stromlinien zeichnen!) auf Grund der Reibkraft nicht.

- Bei  $\text{Re} = 20$  ist  $c_W = 2$ , und die nun stärker wirksamen Trägheitskräfte beschleunigen die Teilchen hinter dem Zylinder zur Mitte hin, so dass sich je zwei Strömungswirbel (links- und rechtsdrehend) symmetrisch ausbilden.

- Bei  $\text{Re} = 100$ ,  $c_W = 1.5$ , lösen sich diese Wirbel abwechselnd als links- und rechtsdrehende Wirbel ab und bilden eine Wirbelstraße (erstmal berechnet von *T. v. Kármán*), wobei sich diese Wirbel nach und nach auf Grund der Reibungskräfte auflösen.

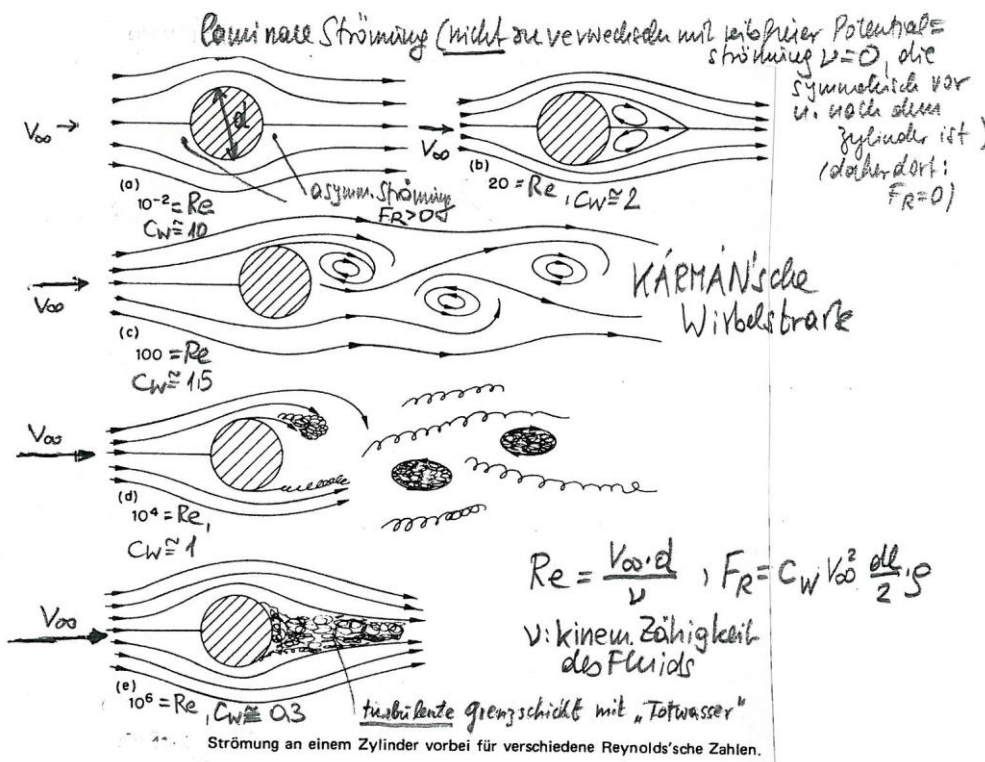
- Bei  $Re = 10000$ ,  $c_w = 1$ , werden die Wirbel auf Grund der immer turbulenter werdenden Strömung durchmischt, und bei  $Re = 1\ 000\ 000$ ,  $c_w = 0.3$ , bildet sich eine turbulente Totwasser-Zone hinter dem Zylinder aus.

Abhängig von der Zahl  $Re$  hat man somit eine laminare oder turbulente Strömung vor sich, wobei für laminare Strömungen  $Re < Re_{krit}$  und für turbulente Strömungen  $Re > Re_{krit}$  gilt. Diese **kritische Reynolds-Zahl**  $Re_{krit}$  für das Umschlagen der Strömung hängt von der jeweiligen Strömungsgeometrie ab. Für die oben erwähnte Rohrströmung (vgl. (G2.2-2)) gilt  $Re_{krit} = 2000$ . Man muss also bei der energetischen Betrachtung von Strömungen stets vor Augen haben, dass auf Grund der Wechselwirkung der Trägheits- und Reibungskräfte lokal sich **Wirbel mit begleiteter Wirbelablösung** ausbilden können (z. B. an Tragflächenprofilen von Windturbinenrotoren), die neben Energieverlusten in der Strömung (diese erwärmt sich auf Grund der Reibung) zu Geräuschen, verursacht durch die wirbelnde Strömung und zur Schwingungsanregung des umströmten Körper auf Grund der impulsartigen Kräfte bei der Wirbelablösung führen können.



a)

b)



c)

Bild G2.2-3: a) Stromlinien einer reibungsfrei strömenden Flüssigkeit um einen Drehzylinder [Ger], b) wie a), jedoch reibungsbehaftete Strömung [Sch], c) wie a), wobei jedoch die Zähigkeiten in 5 Schritten abnimmt (= die Reynolds-Zahlen nehmen zu) (Quelle: Feynman, R.: Physik)

Sieht man von diesen Effekten der lokalen Strömungsbildung ab, so kann man in inkompressiblen, näherungsweise reibungsfreien stationären Strömungen die „mittlere“ Bahn eines Teilchens im Strömungsfeld verfolgen und entlang dieses **Stromfadens** die Energiebilanz aufstellen („Stromfadentheorie“). Es müssen dann kinetische Energie, Druckenergie und potentielle Energie an unterschiedlichen Stellen entlang des Stromfadens konstant sein. Für ein Stromfadenstück der Länge  $l$  und des Querschnitts  $A$ , also der Masse  $m = \gamma \cdot A \cdot l$ , in der Höhe  $h$  oberhalb der unendlich ausgedehnt angenommenen Erdoberfläche gilt

$$W_k + W_d + W_p = m \cdot v^2 / 2 + p \cdot A \cdot l + m \cdot g \cdot h = \text{konst.} \quad , \quad (\text{G2.2-4})$$

$$v^2 / 2 + p / \gamma + g \cdot h = \text{konst.} \quad (\text{Bernoulli-Gleichung für einen Stromfaden}) \quad . \quad (\text{G2.2-5})$$

Daraus folgt für zwei unterschiedliche Orte 1 und 2 entlang des Stromfadens

$$v_1^2 / 2 + p_1 / \gamma + g \cdot h_1 = v_2^2 / 2 + p_2 / \gamma + g \cdot h_2 \quad . \quad (\text{G2.2-6})$$

#### Beispiel G2.2-4:

Offenes Wassergerinne, das daher nur dem überall gleichen Luftdruck  $p = p_0$  ausgesetzt ist (Bild G2.2-4a). Aus einem Becken (Ort 1) mit der Höhe  $h$  gegenüber dem Ende der Wasserrinne (Ort 2) fließt mit sehr kleiner Geschwindigkeit  $v_1 \approx 0$  Wasser in die Wasserrinne. Wie groß ist die Wasserfließgeschwindigkeit  $v_2$  am Ort 2? Mit  $h_1 = h + h_2$ ,  $p_1 = p_2 = p_0$  und

$$v_1 \approx 0 \quad \text{folgt:} \quad v_1^2 / 2 + p_0 / \gamma + g \cdot (h_2 + h) \approx p_0 / \gamma + g \cdot (h_2 + h) = v_2^2 / 2 + p_0 / \gamma + g \cdot h_2, \\ 2 \cdot g \cdot h \approx v_2^2, \quad v_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \quad .$$

Diese „Ausfluss-Formel“ entspricht der frei fallenden Flüssigkeit im Schwerfeld mit

$$W_{\text{ges}} = W_{k1} + W_{p1} = W_{p1} = m \cdot g \cdot h = W_{k2} + W_{p2} = W_{k2} = m \cdot v_2^2 / 2, \quad v_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \quad .$$

Beträgt die Höhendifferenz  $h = 100$  m, dann ist  $v_2 = \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 100} = 44.3 \text{ m/s} = 159 \text{ km/h}$  .

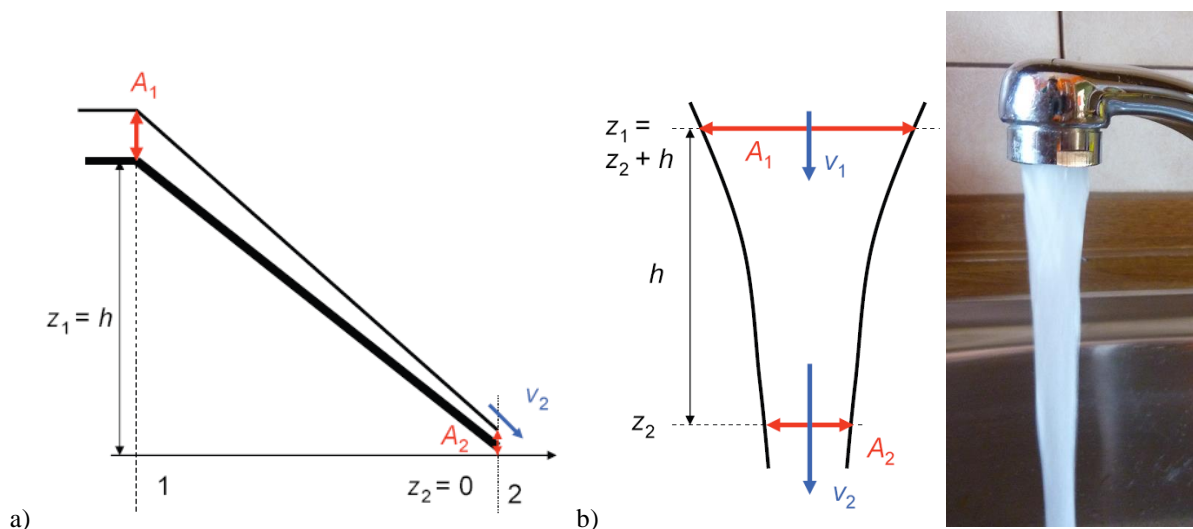


Bild G2.2-4: a) Offenes Wassergerinne mit dem Höhenunterschied  $h$  („Gefälle“), b) Strahleinschnürung eines frei fallenden Wasserstrahls (Quelle: Wikipedia.de)

#### Beispiel G2.2-5:

Berücksichtigt man in Bsp. G2.2-4  $v_1 > 0$ , so liefert die Kontinuitätsgleichung (G2.2-1) eine **Strahleinschnürung**, die man gut beim frei fallenden Wasser am Wasserleitungshahn beobachten kann (Bild G2.2-4b). Es folgt mit  $v_1^2 / 2 + g \cdot h = v_2^2 / 2$  und  $v_1 A_1 = v_2 A_2$  :

$A_2 = A_1 \cdot (v_1 / v_2) = A_1 / \sqrt{1 + 2 \cdot g \cdot h / v_1^2}$ . Bei  $v_1 = 2 \text{ m/s}$  beträgt die Strahleinschnürung nach  $h = 20 \text{ cm}$  bereits  $A_2 / A_1 = 1 / \sqrt{1 + 2 \cdot g \cdot h / v_1^2} = 1 / \sqrt{1 + 2 \cdot 9.81 \cdot 0.2 / 2^2} = 0.71$ . Bei sehr starker Strahleinschnürung  $A_2 \rightarrow 0$  versagen die Vereinfachungen der Stromfadentheorie. Die (vernachlässigten) Anziehungskräfte der polaren Moleküle (Oberflächenspannung macht sich bemerkbar = Kapillarwirkung!) führen anstatt zu einer weiteren Einschnürung zu einem Abreißen des Strahls, so dass sich einzelne Tropfen bilden.

Die **innere Reibung** kann näherungsweise auch in der Stromfadentheorie berücksichtigt werden, indem die gegen die Strömungsrichtung wirkende Reibungskraft als Druckverlust  $\Delta p$  erfasst wird. Bei laminarer Strömung wird dies durch die Zähigkeitskraft ausgedrückt:  $\Delta p = F_\eta / A$ . In turbulenter Strömung hängt gemäß Bsp. G2.2-3 diese Kraft von  $Re$  ab und kann über Strömungswiderstandsbeiwerte  $\zeta(Re)$  ähnlich  $c_w$  im Bsp. G2.2-3 abhängig von der jeweiligen Kanalgeometrie z. B. für Rohrleitungen bei  $Re > Re_{krit} = 2000$  ermittelt werden.

$$\Delta p = \zeta(Re) \cdot \gamma \cdot v^2 / 2 \quad (\text{G2.2-7})$$

$$v_1^2 / 2 + p_1 / \gamma + g \cdot h_1 = v_2^2 / 2 + (\Delta p + p_2) / \gamma + g \cdot h_2 \quad (\text{G2.2-8})$$

### G2.3 Elektromagnetische Energie

Ein mit der Geschwindigkeit  $v$  bewegtes Teilchen mit der elektrischen Ladung  $q$  erfährt im elektrischen Feld  $E$  und im magnetischen Feld  $B$  eine Kraft  $F$  (Lorentz-Kraft)

$$\vec{F} = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B} + \vec{E}) \quad (\text{G2.3-1})$$

Der *Coulomb*-Anteil  $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$  wirkt auch beim ruhenden Teilchen  $v = 0$  und ist für den Spezialfall, dass  $E$  von einer Punktladung  $q_2$  erregt wird, in (G2.3.1-2) angegeben. *Coulomb*-Kräfte sind in technischen Anwendungen i. A. klein, weil große Ladungsmengen zu hohen  $E$ -Feldern (beim Ladungs- und damit Elektrodenabstand  $\Delta$ ) und damit zur Stoßionisation der Luftmoleküle („Durchschlag“) führen (z. B. beim Homogenfeld muss  $E_{Luft} < 30 \text{ kV/cm}$  bei einem Abstand  $\Delta = 1 \text{ cm}$  sein, um Durchschlag zu vermeiden, siehe Kap. V).

Im Bereich der Elementarteilchen ist die Gravitationskraft  $F_G$  gegenüber der elektrostatischen Kraft  $F_C$  UNABHÄNGIG vom Abstand  $r$  vernachlässigbar klein, wie das Beispiel zweier ruhender geladener Teilchen (Protonen) im Abstand  $r$  zeigt. Mit der  $q = e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ As}$  (el. Ladung) und der Proton-Ruhemasse  $m_p = 1.67239 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$  folgt aus (G2.1-1) und (G2.3-2)

$$\frac{F_G}{F_C} = G \cdot 4\pi\epsilon_0 \cdot \left(\frac{m_p}{e}\right)^2 = 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 4\pi \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} \cdot \left(\frac{1.67 \cdot 10^{-27}}{1.6 \cdot 10^{-19}}\right)^2 = 8.08 \cdot 10^{-37} \quad (\text{G2.3-2})$$

Der *Lorentz*-Anteil von (G2.3-1)  $\vec{F} = q_1 \cdot \vec{v} \times \vec{B}$  (oft auch nur *Lorentz*-Kraft genannt) wirkt NUR bei bewegten geladenen Teilchen  $v \neq 0$ . Diese *Lorentz*-Kraft  $F$  ist normal auf die Bewegungs- und Feldrichtung gerichtet! Daher kann die *Lorentz*-Kraft KEINE mechanische Arbeit am geladenen Teilchen verrichten (Bild G2.3-1)!

$$W = \int_C dW = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_C F \cdot \cos\alpha \cdot ds = \int_C F \cdot \cos 90^\circ \cdot ds = 0 \quad (\text{G2.3-3})$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{s} = q_1 (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s} = q_1 \left( \frac{d\vec{s}}{dt} \times \vec{B} \right) \cdot d\vec{s} = \vec{0} \quad (\text{G2.3-4})$$

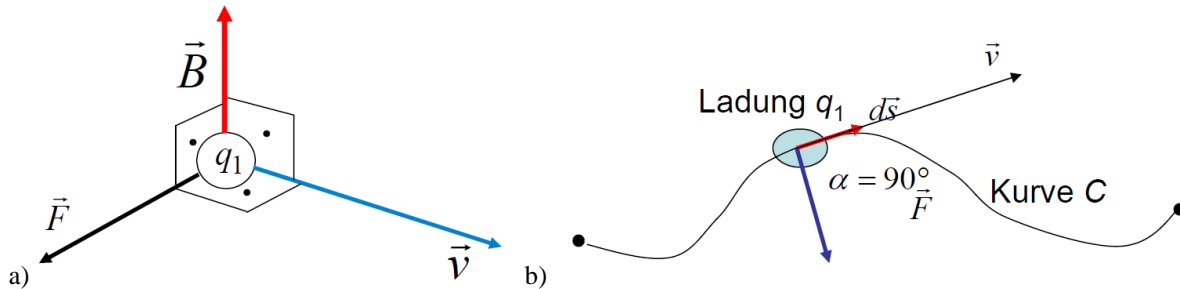
Anstelle dessen zwingt die *Lorentz*-Kraft das geladene Teilchen auf eine Kreisbahn, die sich um die  $B$ -Feldlinien schlingt. Wird nämlich im Magnetfeld  $B$  der Vektor der Teilchengeschwindigkeit  $v$  zerlegt in eine Komponente  $v_t$  parallel zum  $B$ -Feldvektor ( $\uparrow\uparrow B$ )

und in eine Komponente  $v_n$  normal zu  $B$  ( $\perp B$ ), so ist die *Lorentz-Kraft* auf die el. Ladung  $q$ :  $\vec{F} = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = q \cdot v_n B \cdot \vec{e}_{vB}$ , mit  $|\vec{e}_{vB}| = 1$ , nur durch  $v_n$  bewirkt. Das Teilchen wird normal zu  $B$  und  $v$  mit  $\vec{a} = \vec{F} / m$  beschleunigt. Das führt zur Kreisbahn mit jenem Radius  $r$ , bei dem die Fliehkraft  $F_F$  zufolge der Kreisbahn und die *Lorentz-Kraft* im Gleichgewicht sind  $F = F_F$ .

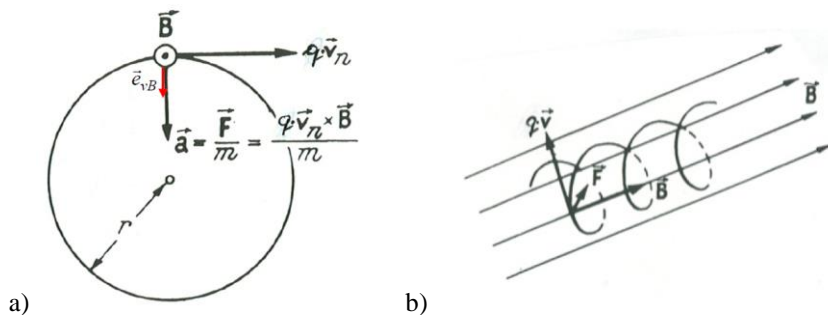
$$F_F = m \cdot v_n^2 / r, \quad F = F_F : r = m \cdot v_n / (q \cdot B) \quad (G2.3-6)$$

Die zugehörige Kreisfrequenz der Rotation (Bild G2.3-2a) ist

$$\omega = v_n / r = (q \cdot B) / m = 2\pi \cdot f \quad (G2.3-7)$$



**Bild G2.3-1:** a) *Lorentz-Kraft*  $F$  auf eine mit  $v$  bewegte el. Ladung  $q_1$  im  $B$ -Feld, b) Die *Lorentz-Kraft* steht senkrecht zu  $v$  und verrichtet deshalb keine mechanische Arbeit an der bewegten Ladung  $q_1$ .



**Bild G2.3-2:** a) Die *Lorentz-Kraft*  $F$  zwingt die bewegte Ladung auf eine Kreisbahn mit der Bahnebene senkrecht zum  $B$ -Feld, b) Der Kreisbahn überlagert ist die Geschwindigkeitskomponente  $v_n$ , so dass aus der Kreisbahn eine Spiralbahn um die  $B$ -Feldlinien entsteht.

Sind die  $B$ -Feldlinien geschlossen (Torusfeld im Inneren einer Ringspule), so können die geladenen Teilchen sich nur entlang den Feldlinien spiralen, aber nicht entkommen. Dies wird im Fusionsreaktor ausgenutzt, wo superschwere Wasserstoffkerne (Tritiumkerne) zu Heliumkernen verschmolzen werden, um Energie zu gewinnen.

**Beispiel G2.3-1:** Tritiumkern:  $q = e = 1.6 \cdot 10^{-19}$  As,  $m =$  Ruhemasse  $5.1 \cdot 10^{-27}$  kg.

Bei  $B = 5$  T ist die Frequenz der Rotation  $f = 25$  MHz (Bild G2.3-2b).

**Beispiel G2.3-2:**

*Lorentz-Kraft* auf den Elektronenstrom im Kupfer-Leiter im externen Magnetfeld  $B = 1$ T: El. Gleichstromstärke  $I = 10$  A, zugehörige mittlere Elektronen-Driftgeschwindigkeit im Kupfer  $v = 0.7$  mm/s. Strom = bewegte Ladungsmenge  $\Delta Q$  durch den Leiterquerschnitt je Zeit  $\Delta t$ :

$$I = \Delta Q / \Delta t \quad (G2.3-8)$$

*Lorentz-Kraft*  $F$  auf diese bewegte Ladungsmenge:

$$\Delta \vec{F} = \Delta Q \cdot \vec{v} \times \vec{B} = \Delta Q \cdot \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t} \times \vec{B} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \cdot \Delta \vec{s} \times \vec{B} = I \cdot \Delta \vec{s} \times \vec{B} \Rightarrow d\vec{F} = I \cdot d\vec{s} \times \vec{B} \quad (G2.3-9)$$

Lorentz-Kraft auf einen geraden Leiterabschnitt der Länge  $l$  im Homogenfeld  $B = \text{konst.}$ :

$$\vec{F} = \int_0^l d\vec{F} = \int_0^l I \cdot d\vec{s} \times \vec{B} = I \cdot \vec{l} \times \vec{B} . \quad (\text{G2.3-10})$$

Kraft  $F$  bei einer Leiterlänge  $l = 1 \text{ m}$ :  $|\vec{F}| = |I \cdot \vec{l} \times \vec{B}| = I \cdot l \cdot B = 10 \cdot 1 \cdot 1 = 10 \text{ N}$ .

Lorentz-Kräfte sind, wie Bsp. G2.3-2 zeigt, in technischen Anwendungen i. A. groß, so dass elektromechanische Energiewandler (z. B. Generatoren) mit Magnetkräften arbeiten!

### Beispiel G2.3-3:

Die Kraft zwischen zwei parallelen stromführenden Leiter 1 und 2 mit den el. Strömen  $I_1$ ,  $I_2$  und dem Leiter-Abstand  $r$  wird als Lorentz-Kraft auf Leiter 1 im  $B$ -Feld des Leiters 2 bestimmt (Bild G2.3-3).

$$\vec{B}_2 = \mu_0 \cdot \frac{I_2}{2\pi \cdot r} \cdot \vec{e}_\varphi \quad (\text{G2.3-11})$$

Dabei ist  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/(Am)}$  die Permeabilität des leeren Raums. Die Lorentz-Kraft auf die gerade Leiterlänge  $l$  ist demnach  $\vec{F} = I_1 \cdot \vec{l} \times \vec{B}_2 = I_1 \cdot l \cdot B_2 \cdot (\vec{e}_z \times \vec{e}_\varphi) = -I_1 \cdot l \cdot B_2 \cdot \vec{e}_{r'}$ , wobei  $\vec{e}_{r'}$  der von der Leiterachse 2 aus gezählte Radiuseinheitsvektor ist und  $\vec{e}_r = -\vec{e}_{r'}$  gilt, also  $\vec{F} = I_1 \cdot l \cdot B_2 \cdot \vec{e}_r$ . Mit  $l = 1 \text{ m}$ ,  $r = 1 \text{ m}$ ,  $I_1 = 100 \text{ A}$ ,  $I_2 = 10\,000 \text{ A}$  erhalten wir

$B_2 = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10000}{2\pi \cdot 1} = 2 \text{ mT}$ ,  $F = 100 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 0.2 \text{ N}$ . Die seitlich wirkende Lorentz-Kraft wird zu Erzeugung von Drehbewegung in elektrischen Maschinen als elektromechanische Energiewandler eingesetzt.

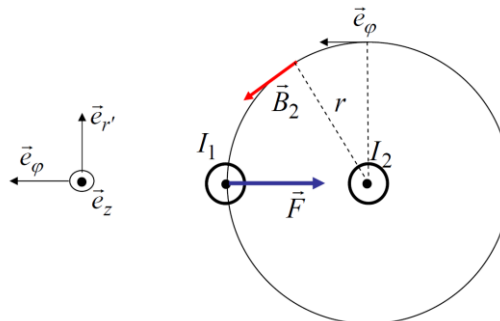


Bild G2.3-3: Lorentz-Kraft  $F$  zwischen zwei parallelen stromführenden Leiter 1 und 2 mit den el. Strömen  $I_1$ ,  $I_2$  und dem Leiter-Abstand  $r$  als Lorentz-Kraft auf Leiter 1 im  $B$ -Feld des Leiters 2

### G2.3.1 Elektrostatistische Energie

Eine el. Punktladung  $q_2$  erregt ein rein radiales elektrisches Feld  $E_2$  (Bild G2.3.1-1a).

$$\vec{E}_2 = \frac{q_2}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} \cdot \vec{e}_{r'} \quad (\text{G2.3.1-1})$$

Die elektrische Kraft  $F$  (Coulomb-Kraft) auf die ruhende Punktladung  $q_1$  im  $E$ -Feld der ruhenden Punktladung  $q_2$  (Elektrostatik!) ist

$$\vec{F} = q_1 \cdot \vec{E}_2 = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} \cdot \vec{e}_{r'} . \quad (\text{G2.3.1-2})$$

Sind die el. Ladungen  $q_1, q_2 > 0$ , so ergibt sich eine abstoßende Kraft  $F$  in Richtung  $\vec{e}_{r'}$ . Wird die Punktladung  $q_1$  von  $r_A$  nach  $r_B$  bewegt, ist die Bewegungsrichtung IN Richtung der Kraft  $F$ , so dass die mech. Arbeit  $W > 0$  ist und diese Arbeit aus dem  $E$ -Feld gewonnen wird.

$$W = \int_{r_A}^{r_B} \vec{F} \cdot dr \cdot \vec{e}_{r'} = -\frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left( \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) = W_{pA} - W_{pB} > 0 \quad (\text{G2.3.1-3})$$

Die „potentielle elektrische Energie“  $W_p$  (elektrostatische Energie) von  $q_1$  im E-Feld ist somit

$$W_p(r) = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot r} > 0 \quad (\text{G2.3.1-4})$$

und das „elektrisches Potential“  $\varphi$

$$\varphi(r) = W_p / q_1 = \frac{q_2}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot r} \quad (\text{G2.3.1-5})$$

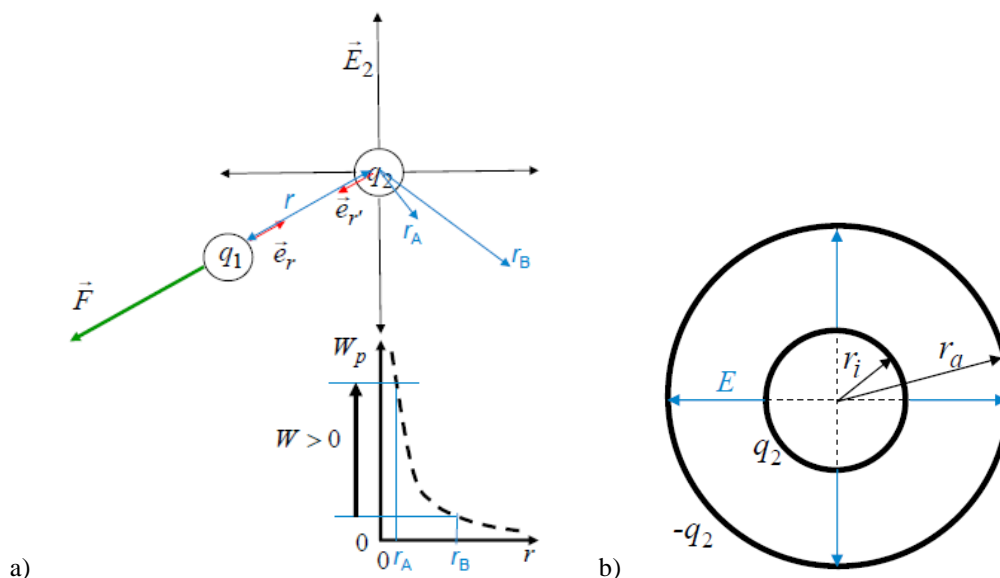
sowie die zugehörige el. Spannung als el. Potentialdifferenz zw. A und B

$$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = \frac{q_2}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) \quad (\text{G2.3.1-6})$$

Es ergeben sich damit folgende Zusammenhänge:

$$\varphi = W_p / q_1 = \frac{q_2}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot r} \Rightarrow U_{AB} = \int_{r_A}^{r_B} \vec{E}_2 \cdot dr \cdot \vec{e}_{r'} = \varphi_A - \varphi_B \quad \Rightarrow$$

$$W = U_{AB} \cdot q_1 = W_{pA} - W_{pB}$$



**Bild G2.3.1-1:** a) Elektrische Kraft  $F$  und die potentielle el. Energie  $W_p$  einer Punktladung  $q_1$  im E-Feld einer Punktladung  $q_2$ , b) Kugelkondensator mit Luft als Dielektrikum  $\epsilon_0$

**Beispiel 2.3.1-1:** Der Kugelkondensator (Bild G2.3.1-1b) ist eine reale, innerhalb  $r_i < r < r_a$  mit dem  $E$ -Feld der Punktladung identische  $E$ -Feldanordnung. Er hat als die beiden Elektroden die el. leitfähigen (metallischen) Kugeloberflächen bei  $r = r_i$  und  $r = r_a$ , welche die entgegengesetzt gleich großen el. Ladungen  $q_2$  und  $-q_2$  tragen! Es tritt dabei der „Geometrie“-Faktor **Kapazität**  $C$  als Verhältnis zwischen el. Ladung und el. Spannung auf!

$$U_{ia} = \varphi_i - \varphi_a = \frac{q_2}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left( \frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_a} \right) = \frac{q_2}{C} \Rightarrow \frac{1}{C} = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left( \frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_a} \right), \quad U_{ia} = \frac{q_2}{C} \quad (\text{G2.3.1-7})$$

Da unsere Erde insgesamt elektrisch neutral ist, musste für die Ladungstrennung  $q_2$  und  $-q_2$  im Kugelkondensator die Arbeit  $W$  aufgewendet werden. Diese Ladungstrennungsarbeit  $W$  ist als elektrische (elektrostatische) Energie  $W_e$  im Kondensator gespeichert. Für die Ladungstrennung wird in vielen Schritten jeweils die (differentiell) kleine Ladung  $dq$  von der Elektrode  $i$  zur Elektrode  $a$  transportiert. Je Schritt verbleibt bei  $i$  dann zusätzlich die negative

Ladung  $-dq$  bzw. am Ende aller Schritte später  $-q$ . Diese Ladungsbewegung erfolgt gegen die anziehende *Coulomb*-Kraft der bereits getrennten Ladungen, so dass die dabei zu verrichtende Arbeit  $dW < 0$  ist. Mit  $dq$  statt  $q_1$  und  $-q$  statt  $q_2$  und i, a statt A, B im Vergleich zu Bild G2.3.1-1a folgt mit ( $q = q_a = -q_i$ ):

$$dW = \frac{dq \cdot (-q)}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \left( \frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_a} \right) = dq \cdot U_{ia} = -dq \cdot U_{ai} = -dW_e \quad . \quad (G2.3.1-8)$$

Die Summierung aller Ladungstrennungsschritte führt zu

$$U_{ia} = \frac{q_i}{C} \Rightarrow dU_{ia} = \frac{-dq}{C},$$

$$W_e = \int dW_e = \int_0^{q_a} U_{ai} \cdot dq = \int_0^U C \cdot U_{ai} \cdot dU_{ai} = C \cdot U^2 / 2 \quad .$$

Resultat: Die im elektrischen Feld  $E$  einer Kondensatoranordnung  $C$  gespeicherte elektrostatische Energie ist

$$W_e = C \cdot U^2 / 2 \quad . \quad (G2.3.1-9)$$

$$W_e = C \cdot U_{ai}^2 / 2 = U_{ai} \cdot \frac{CU_{ai}}{2} = U_{ai} \cdot \frac{q_a}{2} = \frac{\varphi_a q_a}{2} - \frac{\varphi_i q_a}{2} = \frac{\varphi_a q_a}{2} + \frac{\varphi_i q_i}{2} \quad . \quad (G2.3.1-10)$$

Mit dem innerhalb  $r_i < r < r_a$  gültigen E-Feld des Kugelkondensators  $\vec{E}_2 = \frac{q_2}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2} \cdot \vec{e}_r$  und

der zusätzlich definierten **dielektrischen Verschiebung (el. Flussdichte)  $D$**  als  $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$  im Vakuum zwischen den beiden Elektroden kann  $W_e$  auch als Volumenintegral über die Energiedichte als Energie pro Volumen  $w_e = dW_e/dV$  ermittelt werden.

$$w_e = \vec{E} \cdot \vec{D} / 2 \Rightarrow W_e = \int_V w_e dV = \int_{r_i}^{r_a} (\varepsilon_0 E^2 / 2) \cdot 4\pi r^2 dr = \int_{r_i}^{r_a} \frac{(q^2 / 2) \cdot dr}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2} = \frac{C \cdot U^2}{2} \quad . \quad (G2.3.1-11)$$

Wird nun zusätzlich in den vom  $E$ -Feld erfüllten Raum eine **elektrisch polarisierbare Materie** (Dielektrika) eingefügt, ändern sich die Kräfte- und damit die Energieverhältnisse. Diese **Dielektrika** sind i. A. elektrisch nicht oder schwach leitfähige Stoffe mit el. polaren Molekülen, die auf Grund der an ihnen angreifenden *Coulomb*-Kräfte versuchen, sich im äußeren elektrischen Feld  $E$  in oder gegen die Feldrichtung  $E$  auszurichten („polarisieren“). Durch diese Polarisation erregen sie ein zusätzliches elektrisch wirksames el. Feld, das **elektrische Polarisationsfeld  $P$** . Das resultierend wirksame elektrische Feld ist die **dielektrische Verschiebung (el. Flussdichte)  $D$** .

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P} \quad (G2.3.1-12)$$

Bei **isotropen Dielektrika** ist die Polarisierung unabhängig von der Raumrichtung, so dass stets  $P \uparrow \uparrow E$  ist. Weiter gilt für **linear polarisierbare Dielektrika** (G2.3.1-13), wobei  $\varepsilon_r$  die **relative Permittivität** ist. Wegen  $P \uparrow \uparrow E$  ist  $\varepsilon_r \geq 1$ .

$$\vec{P} \sim \vec{E} \Rightarrow \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon \cdot \vec{E} = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \vec{E} \quad (G2.3.1-13)$$

Die Energiedichte ist nun gegenüber dem Vakuumfeld höher.

$$w_e = \vec{D} \cdot \vec{E} / 2 \Big|_{isotrop} = \varepsilon \cdot |\vec{E}|^2 / 2 = \varepsilon \cdot E^2 / 2 \quad (G2.3.1-14)$$

Die el. Energie im Kugelkondensator mit polarisierbarer Materie (Bild G2.3.1-2b) wird mit der inneren Elektrodenoberfläche  $A_i$  und dem Feldvolumen  $V$  zwischen beiden Elektroden berechnet. Aus (G2.3.1-10) folgt

$$W_e = U_{ai} \cdot \frac{q_a}{2} = -U_{ia} \cdot \frac{q_a}{2} = U_{ia} \cdot \frac{q_i}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left( \int_{r_i}^{r_a} \vec{E} \cdot d\vec{s} \right) \cdot \oint_{A_i} \vec{D} \cdot d\vec{A}$$



$$= \frac{1}{2} \int_{r_i}^{r_a} \oint_{A_i} (\vec{D} \cdot d\vec{A}) \cdot (\vec{E} \cdot d\vec{s}) = \frac{1}{2} \int_{r_i}^{r_a} \oint_{A_i} (\vec{D} \cdot \vec{E}) \cdot (d\vec{A} \cdot d\vec{s}) = \frac{1}{2} \int_V \vec{D} \cdot \vec{E} \cdot dV$$

Damit ist (G2.3.1-11) bewiesen, dass auch über die Energiedichte die el. Energie bestimmbar ist. Sie ist bei vorgegebener Spannung  $U$  um  $\varepsilon_r$  höher als ohne Dielektrikum.

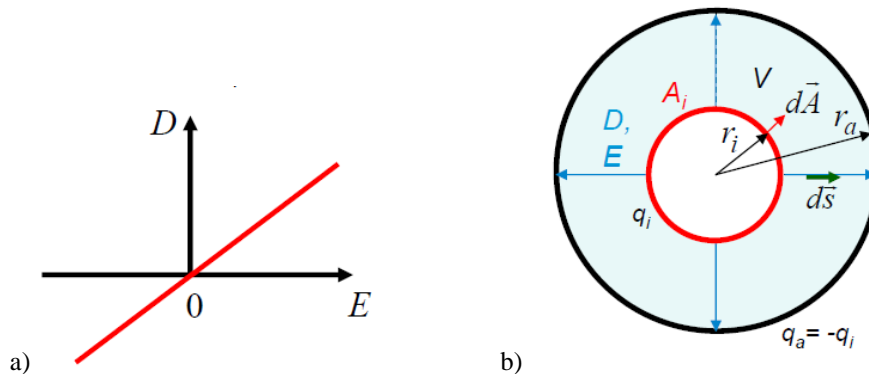


Bild G2.3.1-2: a)  $D(E)$ -Kennlinie des linear polarisierbaren Dielektrikums, b) Kugelkondensator mit el. polasierbarer Materie  $\varepsilon_r$  zwischen den beiden Elektroden

$$W_e = \int_V w_e \cdot dV = \frac{1}{2} \int_V \vec{D} \cdot \vec{E} \cdot dV \quad (\text{G2.3.1-15})$$

Gemäß (G2.3.1-15) ist die el. Energie  $W_e$  über ihre Dichte im felderfüllten Raum lokalisiert, der mit dieser Energiedichte  $w_e$  „erfüllt“ ist! Die beiden Elektroden  $i$  und  $a$  stehen unter mechanischer Spannung der sich gegenseitig über die *Coulomb*-Kraft anziehenden elektrischen Ladungen  $q_i$  und  $q_a = -q_i$  („Fernwirkungsmodell“ der Kraft zwischen den entfernten Ladungen). Diese Kraft kann auch direkt durch die Felder  $E, D$  lokal beschrieben werden, was als „*Maxwell*“scher Zug  $p_e$  bezeichnet wird („Nahwirkungsmodell“). Dieser „*Maxwell*“scher Zug ist die durch das elektrische Feld  $E$  zwischen den Elektroden wirkende Kraft  $F_e$ , bezogen auf die Elektrodenoberfläche  $A$ . Die Berechnung dieser mechanischen Zugspannung  $p_e = F_e / A$  erfolgt hier für den einfachsten Geometrie-Fall des Homogenfelds zwischen parallelen Kondensatorplatten, wobei wegen  $E = \text{konst.}$ ,  $D = \text{konst.}$  auch  $w_e = \text{konst.}$  ist. Wegen  $dW_e = F_e \cdot dx$  gilt

$$dV = dA \cdot dx: F_e = F_{e,x} = \frac{dW_e}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \int_{xA} w_e \cdot dA \cdot dx \right) = w_e \cdot \int_A dA \cdot \frac{d}{dx} \left( \int_x dx \right) = w_e \cdot A, \quad (\text{G2.3.1-16})$$

$$F_{e,x} = \int_A p_{e,x} \cdot dA = p_{e,x} \cdot A, \quad p_{e,x} = \frac{\vec{D} \cdot \vec{E}}{2} = \frac{D_x \cdot E_x}{2}, \quad \vec{p}_{e,x} = p_{e,x} \cdot \vec{e}_x. \quad (\text{G2.3.1-17})$$

Dies ist der einfachste (einachsige) Fall einer „*Maxwell*“schen Zugspannung in  $x$ -Richtung. Sie wirkt gegen die Vergrößerung des Plattenabstands der ungleichnamig geladenen Platten (Bild G2.3.1-3a). Die Einheit der Energiedichte  $w_e$  ist  $\text{J/m}^3 = \text{N}\cdot\text{m/m}^3 = \text{N/m}^2$  und identisch mit jener der „*Maxwell*“schen Zugspannung  $p_e$ .

**Beispiel 2.3.1-2:** Plattenkondensator (Bild G2.3.1-3b): Daten:  $d = 1 \text{ mm}$ ,  $A = 1 \text{ m}^2$ ,  $\varepsilon_r = 4$ ,  $U = 1 \text{ kV}$ . Das Dielektrikums-Material zwischen den Elektroden 1 und 2 des Plattenkondensators ist homogen und isotrop polarisierbar. Die gespeicherte Energie im näherungsweise angenommenen Homogenfeld (ohne Randfeld) ist klein.

$$E = U/d = 10^3 / 10^{-3} = 10^6 \text{ V/m} = 10 \text{ kV/cm}, \quad D = 4 \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 10^6 = 35.4 \cdot 10^{-6} \text{ As/m}^2:$$

$$W_e = C \cdot U^2 / 2 = \frac{\epsilon}{2} \cdot E^2 \cdot A \cdot d = \frac{D \cdot E}{2} \cdot V, \quad w_e = \frac{D \cdot E}{2} = 17.7 \text{ J/m}^3.$$

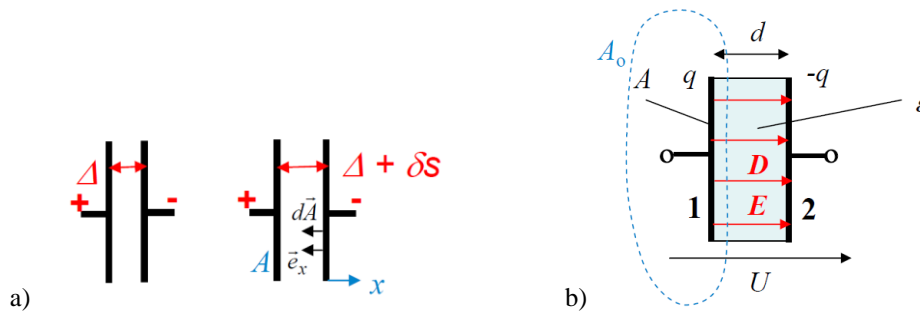


Bild G2.3.1-3: a) Plattenkondensator und Änderung des Plattenabstands gegen die positive  $x$ -Richtung, b) Einhüllende Fläche  $A_0$  um die linke Elektrode

Mit der Hüllfläche  $A_0$  wird über das Gesetz vom el. Hüllfluss die Plattenladung  $q$  bestimmt, wobei das Feld außerhalb des Raums zwischen den Platten näherungsweise Null ist. Daraus erhalten wir die Kondensatorkapazität  $C$ .

$$q = \oint_{A_0} \vec{D} \cdot d\vec{A} \approx D \cdot A = 35.4 \mu\text{C}, \quad C = \frac{q}{U} = \frac{35.4 \cdot 10^{-6}}{10^3} = 35.4 \text{ nF}.$$

Damit wird alternativ die gespeicherte el. Energie berechnet.

$$W_e = \frac{C \cdot U^2}{2} = \frac{35.4 \cdot 10^{-9} \cdot (10^3)^2}{2} = 17.7 \text{ mJ}$$

Über dieselbe Hüllfläche  $A_0$  wird mit der *Maxwell'schen* Zugspannung  $p_e = D \cdot E / 2 = 17.7 \text{ N/m}^2$  die Kraft auf die Platte bestimmt. Wiederum verbleibt nur  $A$ , wo das Feld ungleich Null ist.

$$F = p_e \cdot A = 17.7 \text{ N}$$

### G2.3.2 Magnetostatische Energie

Die *Coulomb*-Kraft zwischen zwei parallelen Linienladungen  $q = \tau \cdot l$  auf Leitern der Länge  $l$  (Bild G2.3.2-1a) ist gemäß Bsp. G2.3-3

$$\vec{F}_1 = \frac{\tau_1 \cdot \tau_2}{2\pi \cdot \epsilon_0 \cdot r} \cdot l \cdot \vec{e}_r, \quad \vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \quad . \quad (\text{G2.3.2-1})$$

und ist abstoßend für  $q_1 \cdot q_2 > 0$  und anziehend für  $q_1 \cdot q_2 < 0$ . Die *Lorentz*-Kraft zwischen zwei parallelen Linienströmen  $I$  auf Leitern der Länge  $l$  (Bild G2.3.2-1b, siehe Bsp. G2.3-3) ist abstoßend für  $I_1 \cdot I_2 < 0$  und anziehend für  $I_1 \cdot I_2 > 0$ .

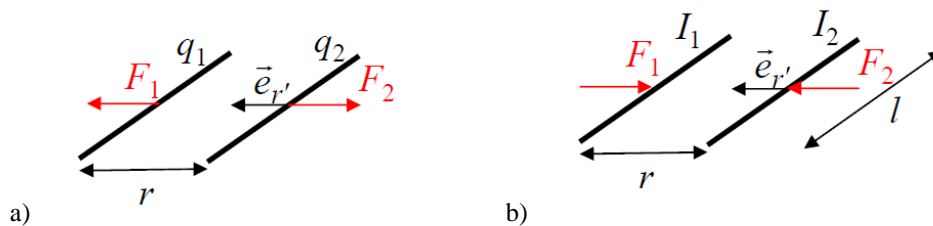
$$\vec{F}_1 = -\mu_0 \cdot \frac{I_1 \cdot I_2}{2\pi \cdot r} \cdot l \cdot \vec{e}_r, \quad \vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \quad . \quad (\text{G2.3.2-2})$$

Im statischen Magnetfeld stationär fließender Gleichströme  $I = \text{konst.}$  treten bei gleicher Leitergeometrie gleichartige Kraftformeln wie im elektrostatischen Feld auf, wenn statt der Linienladungen  $\tau = q/l$  fließende Ströme  $I$  verwendet werden. Die aus Bild G2.3.2-1b gebildete geschlossene Schleife (Bild G2.3.2-2a) hat den Magnetfluss  $\Phi$  durch die Schleifenfläche ( $A = r \cdot l$ )  $\Phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$ . Dabei ist die Schleifen-Flussverketzung mit der

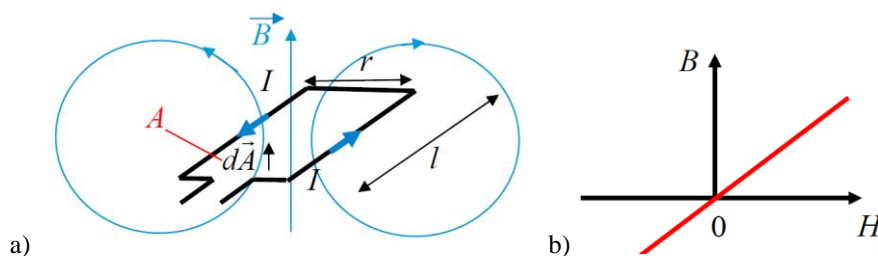
Schleifen-Windungszahl (allgemein  $N$  Windungen)  $\Psi = N \cdot \Phi$ . Der „Geometriefaktor“ der

Schleife für das Verhältnis aus felderregendem Strom  $I$  und Flussverketung  $\Psi$  ist die **Selbstinduktivität  $L$** .

$$L = \Psi / I = N \cdot \Phi / I \tag{G2.3.2-3}$$



**Bild G2.3.2-1:** Zwei parallele unendlich lang gerade el. Leiter a) mit entgegengesetzt gleich großer el. Ladung  $q_1 = -q_2$ , b) mit entgegengesetzt gleich großen fließenden el. Strömen  $I_1 = -I_2$



**Bild G2.3.2-2:** a) Zwei parallele gerade el. Leiter werden zu einer Stromschleife (1 Windung  $N = 1$ ) geschlossen. b)  $B(H)$ -Kennlinie eines linearen magnetisierbaren Materials

	Elektrostatik	Magnetostatik
Flussdichte	$D$ (A·s/m <sup>2</sup> )	$B$ (V·s/m <sup>2</sup> )
Feldstärke	$E$ (V/m)	$H$ (A/m)
Polarisation	$P$ (A·s/m <sup>2</sup> )	$J_M$ (V·s/m <sup>2</sup> )
rel. Werkstoffparameter	$\epsilon_r$ (-)	$\mu_r$ (-)
Feldkonstante	$\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}$ A·s/(V·m)	$\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$ V·s/(A·m)
"Geometriefaktor"	$C$ (A·s/V)	$L$ (V·s/A)
Energiedichte *)	$w_e = \vec{D} \cdot \vec{E} / 2$	$w_m = \vec{B} \cdot \vec{H} / 2$
Energie *)	$W_e = C \cdot U^2 / 2 = q \cdot U / 2$	$W_m = L \cdot I^2 / 2 = \Psi \cdot I / 2$

**Tabelle G2.3.2-1:** Entsprechungen zwischen den (Feld-)Größen des elektrostatischen und magnetostatischen Felds. Die Formeln \*) gelten für „lineares“ Material.

**Magnetisierbare Werkstoffe (z. B. Ferromagnetika, Ferrimagnetika etc.)** sind i. A. el. leitfähige Stoffe, deren Atome versuchen, ihre magnetischen Achsen im äußeren magnetischen Feld  $H$  in oder gegen die Feldrichtung  $H$  auszurichten. Dadurch erregen sie ein zusätzliches **magnetisches Polarisations-Feld  $J_M$**  (bzw. „Magnetisierung“  $M = J_M / \mu_0$ ). Das resultierend wirksame magnetische Feld ist die **magnetische Induktion (mag. Flussdichte)  $B$** :  $\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H} + \vec{J}_M = \mu_0 \cdot \vec{H} + \mu_0 \cdot \vec{M}$ . Bei **isotropen Magnetika** folgt die Magnetisierungswirkung unabhängig von der Raumrichtung parallel dem sie magnetisierenden äußeren Feld  $H$ :  $M \uparrow \uparrow H$ , wobei zusätzlich bei **linearen isotropen Magnetika** (Bild G2.3.2-2b) gilt:  $\vec{J}_M \sim \vec{H} \Rightarrow \vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{J}_M = \mu \cdot \vec{H} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \vec{H}$ . Dabei ist  $\mu_r$  die "relative Permeabilität". Wegen  $M \uparrow \uparrow H$  ist  $\mu_r \geq 1$ . Die **magnetostatische**

**Energiedichte**  $w_m$  für „lineare“ **Magnetika** entsteht somit durch die das äußere  $H$ -Feld erregenden elektrischen Gleichströme  $I$  UND die magnetisierte Materie wegen  $J_M$ . Wegen der Analogie von Bild G2.3.2-1 gelten die folgenden Entsprechungen zwischen den (Feld-) Größen des elektrostatischen und magnetostatischen Felds in Tab. G2.3.2-1.

Die magnetische Energiedichte im isotrop magnetisierbaren Material ist somit

$$w_m = \frac{\vec{B} \cdot \vec{H}}{2} \Big|_{\text{isotrop}} = \frac{\mu}{2} \cdot |\vec{H}|^2 = \frac{\mu}{2} \cdot H^2. \quad (\text{G2.3.2-4})$$

Im Vergleich zwischen elektrostatischem und magnetostatischem Feld ist die Energie im elektrostatischen Quellenfeld  $E$ , erregt von der el. Ladung  $q = C \cdot U$ , mit  $C$  (Kapazität) als dem „Geometriefaktor“ der Ladungsanordnung,  $W_e = C \cdot U^2 / 2$ . Dabei ist  $U$  die elektrische

Spannungsdifferenz zwischen den Ladungsanordnungen  $U = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{s}$ . Analog dazu ist die

Energie im magnetostatischen Feld  $H$ , erregt vom Gleichstrom  $I = q/t$ , mit  $L$  (Induktivität) als dem „Geometriefaktor“ der Stromleiteranordnung,  $W_m = L \cdot I^2 / 2$ . Durch Einsetzen der „Geometrie-Faktoren“  $C$  bzw.  $L$  in diese Energieformeln erhalten wir die statische Energie pro Feldvolumen  $w$

a) im „leeren Raum“:  $\varepsilon = \varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ As/(Vm)}$ , Permittivität (Dielektrizitätszahl) des leeren Raums ( $\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/(Am)}$ , Permeabilität des leeren Raums).

$$w_e(x, y, z) = \frac{\varepsilon_0}{2} \cdot (E(x, y, z))^2, \quad w_m(x, y, z) = \frac{\mu_0}{2} \cdot (H(x, y, z))^2, \quad (\text{G2.3.2-5})$$

b) in isotroper, nichtlinear polarisierbarer bzw. magnetisierbarer Materie:

$$w_e(x, y, z) = \frac{\varepsilon(E)}{2} \cdot (E(x, y, z))^2, \quad w_m(x, y, z) = \frac{\mu(H)}{2} \cdot (H(x, y, z))^2. \quad (\text{G2.3.2-6})$$

mit  $\varepsilon, \mu$  in Abhängigkeit von  $E$  bzw.  $H$ . Aus (G2.2.2-5), G(2.3.2-6) wird durch Integration über das felderfüllte Volumen  $V$  die dort gespeicherte statische Energie (G2.3.2-7) erhalten.

$$W_e = \int_V w_e \cdot dV, \quad W_m = \int_V w_m \cdot dV. \quad (\text{G2.3.2-7})$$

Beispiel G2.3.2-1: Magnetfeld a) einer Kreisschleife, b) eines Dauermagneten (Bild 2.3.2-3): Die gespeicherte magn. Energie  $W_m$  im Feldvolumen  $V$  einer einzigen Kreisschleife (Bild G2.3.23a) mit im Feldraum anwesender homogen und isotrop

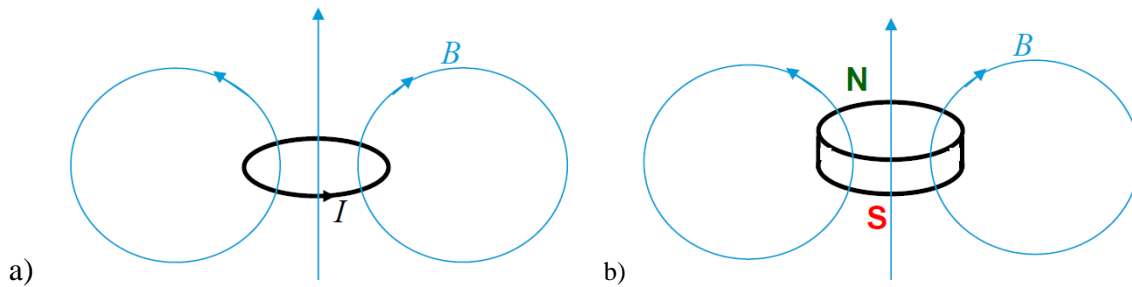
magnetisierbarer Materie ist  $W_m = L \cdot I^2 / 2 = \int_V \frac{\vec{B} \cdot \vec{H}}{2} \cdot dV$ . Für den Magneten gilt analog

$$W_m = \int_V \frac{\vec{B} \cdot \vec{H}}{2} \cdot dV. \text{ Sind zwei solcher Schleifen bzw. Magnete (mit jeweils parallelen Achsen)}$$

in einem bestimmten Abstand vorhanden und soll dieser Abstand vergrößert werden, so folgt: Um die zweite Schleife 2 (bzw. den 2. Magnet) von der ersten Schleife 1 (bzw. den 1. Magnet) weiter zu trennen, muss mech. Arbeit  $W$  gegen die anziehende Lorentz-Kraft  $F$  zwischen beiden aufgewendet werden, die dann als zusätzliche magnetische Energie  $\Delta W_m = W$  im Magnetfeld zwischen den beiden Schleifen, beschrieben durch die Selbst-/Gegeninduktivität  $L_1, L_2, M$ , (bzw. durch (G2.3.2-7) für die Magnetanordnung), gespeichert ist.

Beispiel G2.3.2-2: Magnetfeld zwischen zwei Eisen-Polschuhen (Bild G2.3.2-4), deren Eisenrückschluss von Pol zu Pol im Bild nicht dargestellt ist. Das linear magnetisierbar angenommene Eisen hat die Eisenpermeabilität  $\mu_{Fe} \gg \mu_0$ . Der Weg  $s_{Fe}$  der  $B$ -Feldlinienlänge

im Eisen (mit Rückschluss) ist auch der Weg des  $H$ -Felds. Dessen Erregung erfolgt durch die Spule ( $N$  Windungen) mit dem Spulenstrom  $i$ .



**Bild G2.3.2-3:** Schematische Darstellung des Felds der magn. Flussdichte  $B$  a) einer stromdurchflossenen Kreisschleife, b) eines homogen magnetisierten Zylindermagneten mit der Magnetisierungsrichtung parallel zur Zylinderachse

Der magnetische Fluss ist  $\Phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = B_\delta \cdot A = B_{Fe} \cdot A$ , und der Durchflutungssatz liefert

$$N \cdot i = \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = H_{Fe} \cdot s_{Fe} + H_\delta \cdot \delta. \text{ Mit den Material-Beziehungen } H_\delta = B_\delta / \mu_0, \text{ im Eisen}$$

$H_{Fe} = B_{Fe} / \mu_{Fe} = B_\delta / \mu_{Fe} \ll H_\delta$ , daher  $H_{Fe} \approx 0$ , liefert der Durchflutungssatz  $B_\delta = \mu_0 \cdot N \cdot i / \delta$ . Die Selbstinduktivität ist  $L = \Psi / i = N \cdot \Phi / i = N \cdot B_\delta \cdot A / i = \mu_0 N^2 A / \delta$ .

Die Feld-Energiedichte ist im Eisen wegen  $H_{Fe} \approx 0$  etwa Null. Es verbleibt die Energiedichte im Luftspalt  $w_m = B_\delta \cdot H_\delta / 2$ . Über den Maxwell-Zug  $p_m = B_\delta \cdot H_\delta / 2$  wird die Zugkraft  $F$  je Pol bestimmt:  $F = p_m \cdot A = (B_\delta \cdot H_\delta / 2) \cdot A$ .

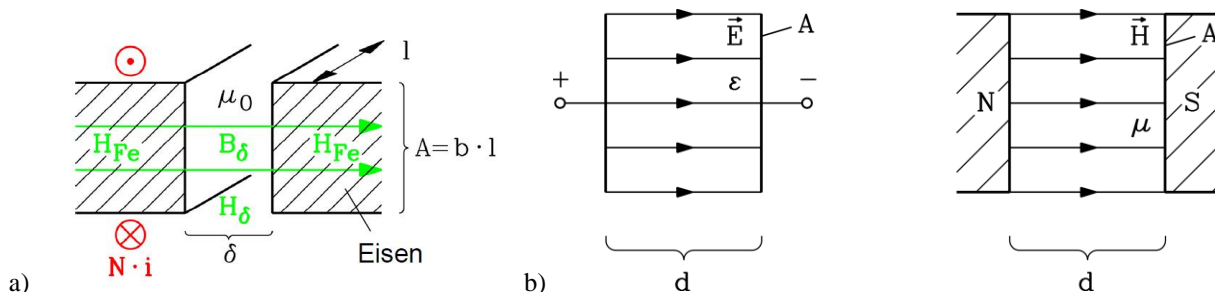
Mit den Daten  $b = l = 5 \text{ cm}$ ,  $\delta = 1 \text{ mm}$ ,  $N = 500$ ,  $i = 1 \text{ A}$  ergibt sich

$$H_\delta = 500 \cdot 1 / 10^{-3} = 500 \text{ kA/m}, B_\delta = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 0.5 \cdot 10^6 = 0.628 \text{ T},$$

$$L = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 500^2 \cdot 5^2 \cdot 10^{-4} / 10^{-3} = 0.785 \text{ H} \Rightarrow W_m = L \cdot i^2 / 2 = 0.785 \cdot 1^2 / 2 = 0.39 \text{ J},$$

$$w_m = 0.628 \cdot 500 \cdot 10^3 / 2 = 157 \text{ kJ/m}^3, F = 25 \cdot 10^{-4} \cdot 157 \cdot 10^3 = 392.5 \text{ N}.$$

Die gegenüber ähnlich großen elektrostatischen Anordnungen deutliche höhere Kraft und Energiedichte ist der Grund, warum elektrische Energiewandler (E-Motoren, E-Generatoren) ausschließlich auf Basis von Magnetkräften meist mit Eisenrückschlüssen verwendet werden, wie folgendes Beispiel G2.3.2-3 zeigt!



**Bild G2.3.2-4:** a) Eine Spule mit  $N$  Windungen magnetisiert über den Strom  $i$  die Magnetflussdichte  $B$  im Eisenkreis und Luftspalt  $\delta$ . Der Eisenrückschluss von Pol zu Pol ist nicht dargestellt. b) Gespeicherte elektrische Energie im Plattenkondensator (links) bzw. magnetische Energie im Luftspalt zwischen zwei Polschuhen eines Magneten (rechts). (Annahme: idealisiertes Homogenfeld, Streufelder an den Rändern des Kondensators bzw. Magneten vernachlässigt).

Beispiel G2.3.2-3:

Vergleich der gespeicherten elektrostatischen Energie in einem Kondensator mit der gespeicherten magnetostatischen Energie im Luftspalt gleichen Volumens mit den Abmessungen  $d = 1 \text{ mm}$ ,  $A = 1 \text{ m}^2$  zwischen zwei Eisenpolschuhen:

a) Kondensator: Dielektrikum "Luft", Dielektrizitätskonstante:  $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ As/(Vm)}$ .

In Luft ist die elektrische Feldstärke durch die Durchschlagfeldstärke  $E_D$  der Luft (ca. 30 ... 40 kV/cm) begrenzt.

$$\text{Elektrische Energie: } W = A \cdot d \cdot \frac{\epsilon_0 E^2}{2} = 1 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{8.854 \cdot 10^{-12} \cdot (4 \cdot 10^6)^2}{2} = \underline{\underline{0.07}} \text{ Ws}$$

b) Magnetfeld: Permeabilitätskonstante von Luft:  $\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/(Am)}$ .

Das Eisen der Polschuhe des Magneten sättigt ab ca.  $B = 1.7 \text{ T}$ , so dass hier  $B = 1 \text{ T}$  verwendet wird.

$$\text{Magnetische Energie: } W = A \cdot d \cdot \frac{B^2}{2\mu_0} = 1 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{1^2}{2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}} = \underline{\underline{400}} \text{ Ws}$$

Die *Maxwell'sche* elektrische und magnetische Zugkraftdichte  $f = F/A$  sind dabei:

$$\text{a) Kondensator: } f = \frac{\epsilon_0 \cdot E^2}{2} = \frac{8.854 \cdot 10^{-12} \cdot (4 \cdot 10^6)^2}{2} = \underline{\underline{70.8}} \text{ N/m}^2,$$

$$\text{b) Magnet: } f = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{1^2}{2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}} = \underline{\underline{398089}} \text{ N/m}^2.$$

Das magnetische Feld erlaubt hier mit  $400/0.07 = 5700$  eine wesentlich höhere Zugkraft, **so dass elektrische Energiewandler bevorzugt mit magnetischen Feldern arbeiten**. Nur bei Mikromotoren (kleine Kräfte) werden auch elektrostatische Kräfte zum Bewegen der Motorläufer eingesetzt (z. B. Ausnutzung des Piezoeffekts).

**G2.3.3 Elektromagnetische Energie**

Bei zeitlich veränderlichen elektromagnetischen Vorgängen sind elektrische und magnetische Felder über das *Ampere-Maxwell-Gesetz* und das *Faraday-Induktionsgesetz* gekoppelt und treten daher gemeinsam auf. Der *Ampere-Maxwell-Satz* (G2.3.3-1) ist die Erweiterung des *Ampere'schen* Durchflutungssatzes für hohe Frequenzen und besagt, dass sowohl ein elektrischer Strom (Durchflutung) ein Magnetfeld erregt, als auch eine (rasche) Änderung der elektrischen Feldstärke. Dabei ist  $\Theta$  die Durchflutung des Leitungsstroms. Die  $D$ -Feldänderung kommt durch die räumliche Verschiebung der Ladungen  $q$  als  $\epsilon \cdot \partial \vec{E} / \partial t$  ("Verschiebungsstromdichte") zustande. Die elektromagnetischen Grundgesetze dazu sind die *Maxwell-Gleichungen*, die in integraler Form in (G2.3.3-1-4) angegeben sind, wobei die Bedeutung der darin enthaltenen Symbole in Bild G2.3.3-1 sichtbar ist. Es meint  $C = \partial A$  die geschlossene Randkurve der Fläche  $A$ .

$$\oint_{C=\partial A} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \Theta + \frac{\partial \Phi_e}{\partial t} \text{ (Ampere-Maxwell-Gesetz)}, \quad \Theta = \sum_k N_k I_k \text{ el. Durchflutung} \quad (\text{G2.3.3-1})$$

$$\oint_{C=\partial A} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} \text{ (Faraday-Induktionsgesetz)} \quad (\text{G2.3.3-2})$$

$$\Phi = \oint_{A, \partial A=0} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \text{ (Satz vom magnetischen Hüllenfluss)} \quad (\text{G2.3.3-3})$$

$$\Phi_e = \oint_{A, \partial A=0} \vec{D} \cdot d\vec{A} = q \text{ (Satz vom elektrischen Hüllenfluss)} \quad (\text{G2.3.3-4})$$

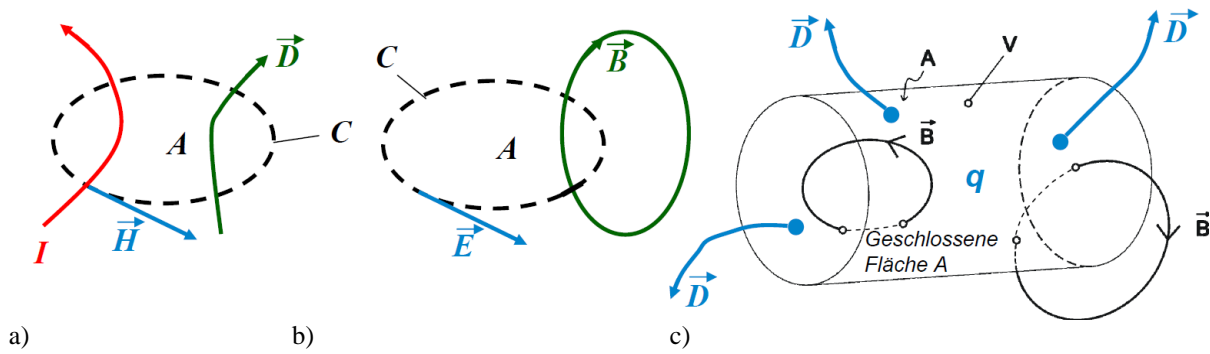


Bild G2.3.3-1: Felder und Geometrie zu a) Ampere-Maxwell-Gesetz, b) Faraday-Induktionsgesetz, c) zu den Hüllenflüssen

Die **elektromagnetische Energie**  $W_{em}$  ist ähnlich zu den statischen Feldern, im zeitlich veränderlichen elektromagnetischen  $E$ - $H$ -Feld gespeichert, wobei elektrisches Feld  $E$  und magnetisches Feld  $H$  über ihre zeitlichen Änderungen miteinander verkoppelt sind. Die Materialgleichungen  $D(E)$  und  $B(H)$  aus G2.3.1 und G2.3.2 bleiben davon unberührt. Durch die zeitlichen Änderungen  $dE/dt$  und  $dH/dt$  breiten sich  $E$ - und  $H$ -Feld im Raum wellenartig mit Lichtgeschwindigkeit  $c$  als „Feldwellenausbreitung“ (elektromagnetische Strahlung) aus und transportieren dabei die Energie  $W_{em}$ . In jedem Punkt des Raumes wird dieser Energietransport je Zeit  $P = dW_{em}/dt$  durch den Poynting-Vektor  $S_{pg}$  beschrieben (Bild G2.3.3-2a). Die Ausbreitung erfolgt mit der Feldwellengeschwindigkeit, also mit Lichtgeschwindigkeit  $c$ . Im Vakuum mit  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ ,  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$  ist  $c = c_0 = 299\,792\,458$  m/s. Im Sonderfall der ebenen Welle gilt dann  $\vec{E} = c \cdot \mu_0 \cdot \vec{H}$ .

$$\vec{S}_{pg} = \vec{E} \times \vec{H} \quad , \quad P = dW_{em} / dt = \int_A \vec{S}_{pg} \cdot d\vec{A} \tag{G2.3.3-5}$$

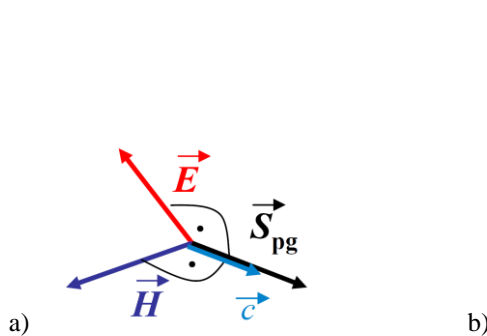


Bild G2.3.3-2: a) Der Poynting-Vektor  $S_{pg}$  steht normal auf die Feldvektoren  $E$ ,  $H$  und gibt Richtung und Größe des Leistungstransports an. b) Stab-Dipol, der in der Mitte mit einer HF-Wechselspannungsquelle gespeist werden kann.

**Beispiel G2.3.3-1:** Ebene Feldwelle:  $E = 1000$  V/m,  $H = 2.65$  A/m  $\rightarrow S_{pg} = 2653$  V·A/m<sup>2</sup> = 2653 W/m<sup>2</sup>. Es wird je Sekunde durch die Fläche von 1 m<sup>2</sup> die Energie von  $W_{em} = 2.65$  kJ transportiert, also eine Strahlungsleistung  $P = W_{em}/t = 2.65$  kW.

Im Abschnitt G2.3.2 führte ein konstanter elektrischer Stromfluss  $i = dQ/dt = \text{konst.}$  einer Ladungsmenge  $Q = N \cdot q$  von  $N$  mit konstanter Geschwindigkeit bewegten Ladungen  $q$  zur Erregung eines zeitlich konstanten  $H$ -Felds. Daher führt jede Beschleunigung/Bremsung einer el. Ladung bereits zu zeitlich veränderlichen Feldern  $dH/dt$ ,  $dE/dt$  und damit zur Feldwellenausbreitung (Abstrahlung). Merkbar wird dies aber erst, wenn in Bsp. G2.3.3-1 die

Änderung  $dE/dt$  so groß ist, dass  $\Theta$  und  $\partial\Phi_e/\partial t \approx A \cdot \partial D/\partial t = A \cdot \varepsilon \cdot \partial E/\partial t$  in gleicher Größenordnung auftreten. Mit  $\Theta \sim I = J \cdot A$  heißt das  $J \approx \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0 \cdot \partial E/\partial t$ . Bei zeitlich sinusförmigen Änderungen mit der Frequenz  $f = \omega/(2\pi)$  und  $E = \hat{E} \cdot \cos(\omega t)$  ist dies bei  $\hat{J} \approx \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0 \cdot \omega \cdot \hat{E}$  gegeben, also in el. leitfähigen Medien  $\hat{J} = \kappa \cdot \hat{E}$  bei  $\kappa \approx \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0 \cdot \omega$ . Für Kupfer ( $\kappa = 57 \text{ MS/m}$ ,  $\varepsilon_r = 1$ ) erfordert dies eine Frequenz  $f = \kappa/(2\pi \cdot \varepsilon_0) = 10^6 \text{ Hz}$ .

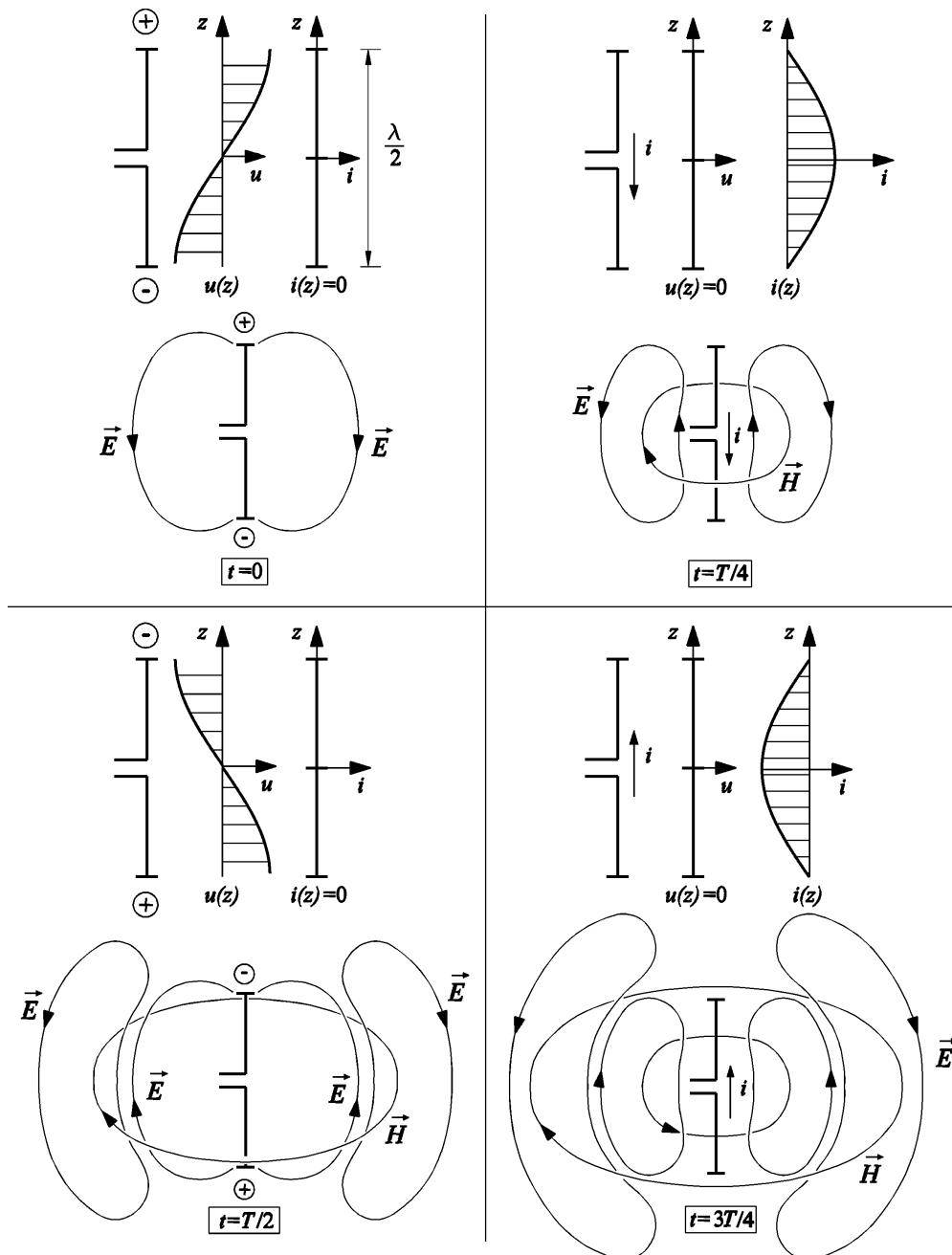


Bild G2.3.3-3: Feldabstrahlung (schematisch) beim  $\lambda/2$ -Dipol für die vier Zeitpunkte  $t = 0, T/4, T/2$  und  $3T/4$

Wird der Stabdipol Bild G2.3.3-2b in der Mitte mit einer Spannungsquelle entsprechend hoher Frequenz  $f$  gespeist, schwingen die el. Ladungen in den beiden Stabseiten mit dieser Frequenz und daher der zugehörigen Geschwindigkeit  $v(t) \sim \cos(\omega t)$  im el. Stableiter. Die Ladungsbeschleunigung  $dv(t)/dt \sim \sin(\omega t)$  führt zur Wellenabstrahlung mit der



Wellenausbreitungsgeschwindigkeit  $c = \lambda \cdot f = c_0$ . In Bild G2.3.3-2b hat der Dipol die Länge der halben Wellenlänge  $\lambda/2$ . Laden sich beim Dipol die Enden durch Ladungsansammlung auf (Spannungsbauch), so müssen sich die  $E$ -Feldlinien über den umgebenden Raum zum anderen Dipolende schließen (Bild G2.3.3-3, Zeitpunkt  $t = 0$ ). Nach einer halben Periode  $T/2 = 1/(2f)$  hat sich das  $E$ -Feld umgepolt. Eine Änderung des elektrischen Felds ("Verschiebungsstromdichte") ruft nun ein magnetisches Feld  $H$  hervor. Gleichzeitig fließt beim Umschwingen die Ladung von den Dipolenden zur Mitte. Dieser Leitungsstrom verstärkt das  $H$ -Feld gemäß (G2.3.3-1).

Das sich dabei ändernde (vergrößernde)  $H$ -Feld induziert nach dem *Faraday'schen* Induktionsgesetz (G2.3.3-2) ein elektrisches Feld (induziertes Feld), das sich mit geschlossenen Feldlinien um das  $H$ -Feld ausbildet. Nach  $T/2$  ist der Dipol umgepolt, der Stromfluss wird Null und das  $E$ -Feld mit umgekehrter Polarität maximal. Die geschlossenen Feldlinien von  $E$ - und  $H$ -Feld des Zeitabschnitts  $0 \leq t \leq T/2$  sind aber nicht erloschen, sondern nach außen gedrängt worden und werden als Welle **abgestrahlt**. Im Zeitabschnitt  $T/2 \leq t \leq T$  wiederholt sich der Vorgang mit umgekehrter Polarität. Dadurch entsteht eine **elektromagnetische Feldwelle** (Verkopplung von  $E$ - und  $H$ -Feld im Raum), deren räumliche Wellenlänge doppelt so groß wie die Länge des  $\lambda/2$ -Dipols ist. Die  $E$ -Vektoren schwingen mit der Frequenz  $f$ , wobei die Vektoren in Meridianebenen mit dem Dipol als Achse (**Polarisationsebenen**) liegen. Die  $H$ -Vektoren schwingen in Ebenen, die senkrecht zur Dipolachse liegen.

#### G2.3.4 Wärmestrahlung

Gemäß der mechanistischen Auffassung der Wärmelehre ist die absolute Temperatur  $T$  eines Gases proportional zur mechanischen kinetischen Energie der Gastteilchen. In einem ionisierten Gas wie z. B. dem durch Stöße ionisierten Wasserstoffgas der Sonne sind die Gastteilchen Ionen und Elektronen, also el. Ladungen, die durch Stöße stets beschleunigt/abgebremst werden, so dass sie einen Teil ihrer Energie als el. Welle abstrahlen. Diese **Wärmestrahlung** benötigt somit keinen Stoff, um die Wärmeenergie zu transportieren, sondern erfolgt als elektromagnetische Wellenausbreitung auch im Vakuum. Die uns interessierenden absoluten Temperaturen  $T$  der Wärmestrahler führen auf Frequenz und Wellenlänge der transversal zur Wellenausbreitungsrichtung schwingenden elektrischen und magnetischen Vektorfelder  $E$  (elektrische Feldstärke, Einheit: V/m) und  $H$  (magnetische Feldstärke, Einheit: A/m) im **Infrarotbereich** (auch Ultrarotbereich genannt). Die sich in Strahlungsrichtung ausbreitende elektromagnetische Welle führt elektromagnetische Energie als Strahlungsenergie mit sich, ausgedrückt durch den **Poynting-Vektor**  $\vec{S}_{pg} = \vec{E} \times \vec{H}$  (Einheit:  $W/m^2$ ), der die Strahlungsleistung je Flächeneinheit der Wellenfront angibt. Da  $\vec{E}$  und  $\vec{H}$  jeweils senkrecht zur Ausbreitungsrichtung stehen, weist  $\vec{S}_{pg} = \vec{E} \times \vec{H}$  in die Ausbreitungsrichtung und gibt damit den Energietransport je Zeiteinheit und Fläche an. Somit ist die Strahlungslehre zunächst keine Disziplin der klassischen Thermodynamik, die auf den Gesetzen der Mechanik statistisch verteilter großer Teilchenmengen beruht, sondern basiert auf der Elektrodynamik.

Während aber die klassische Elektrodynamik lehrt, dass elektromagnetische Wellen (also „Licht“) von z. B. mit der Frequenz  $f$  schwingenden elektrischen Ladungen mit jeder beliebigen Energiemenge abgestrahlt werden können, schränkt die darüber hinausgehende Quantenelektrodynamik dies ein: Lichtwellen der Frequenz  $f$  können nur mit bestimmten Energieportionen („**Quanten**“) abgestrahlt werden, die ganzzahlige Vielfache von  $h \cdot f$  sind. Dabei ist  $h = 6.625 \cdot 10^{-34}$  Js das **Planck'sche Wirkungsquantum**. Damit hat Licht statt eines Wellen- nun einen Teilchencharakter. Die Lichtteilchen (Photonen) mit der Energie  $h \cdot f$  und

dessen Vielfachen stellen als Teilchenstrom die elektromagnetische Strahlung dar, also auch die Wärmestrahlung. Die **Strahlungsenergie**  $W_{\text{rad}}$  (*Radiation*) der elektromagnetischen Strahlung, sei es eine Wärmestrahlung (Infrarotbereich der Wellenlängen) oder Lichtstrahlung („sichtbarer“ Bereich der Wellenlängen), wird mit dem Wellenmodell des Lichts (Abschnitt G2.3.3) berechnet.

$$W_{\text{rad}} = \iint_{t A} \vec{S}_{\text{pg}} \cdot d\vec{A} \cdot dt = W_{\text{em}} \quad (\text{G2.3.4-1})$$

Die zugehörigen Amplituden der Feldstärkevektoren bei der Frequenz  $f$  erhalten wir mit

$$W_{\text{rad}} = N \cdot h \cdot f \Rightarrow E(t) = \hat{E} \cdot \cos(2\pi f t), H(t) = \hat{H} \cdot \cos(2\pi f t), \quad f = 1/T, \quad (\text{G2.3.4-2})$$

$$\text{Zeitl. Mittelwert: } \bar{S}_{\text{pg}} = \frac{1}{T} \int_0^T E(t) \cdot H(t) \cdot dt = \hat{E} \cdot \hat{H} / 2 = I_0, \quad \hat{E} = \hat{H} \cdot c_0 \cdot \mu_0. \quad (\text{G2.3.4-3})$$

Mit dem alternativen **Teilchenmodells des Lichts** ist die elektromagnetische Strahlung ein Lichtteilchen-Strom (Photonen-Strom). Jedes Lichtteilchen hat die Ruhemasse Null, aber bei der Frequenz  $f$  der el.-magn. Welle (einfarbige Lichtwelle) die „Bewegungsenergie“  $W_{\text{photon}} = h \cdot f$ . Die Strahlungsenergie von  $N$  Photonen ist folglich  $W_{\text{rad}} = h \cdot f \cdot N$ .

#### Beispiel G2.3.4-1:

Sichtbares Licht  $f = 600 \text{ THz}$ ,  $\lambda = 500 \text{ nm}$ ,  $N = 10^{26}$  Teilchen:

$$W_{\text{rad}} = h \cdot f \cdot N = 6.625 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot (600 \cdot 10^{12} / \text{s}) \cdot 10^{26} = 39.75 \text{ MJ}.$$

Die Geschwindigkeit aller Photonen ist einheitlich  $v = c$  (Lichtgeschwindigkeit). Die Lichtteilchen ruhen also NICHT, d. h. die Ruhemasse  $m_0$  der Lichtteilchen ist Null! Die Masse  $m$  der mit  $c$  fliegenden Photonen ist gemäß *EINSTEIN*-Relation  $W_{\text{photon}} = m \cdot c^2$

$$W_{\text{photon}} = m \cdot c^2 = h \cdot f \Rightarrow m = \frac{h \cdot f}{c^2}. \quad (\text{G2.3.4-4})$$

Folglich ist der mech. Bewegungsimpuls eines Photons  $\vec{p}_{\text{photon}} = m \cdot \vec{v} = m \cdot \vec{c}$ . Wenn Licht auf eine Oberfläche trifft, ist dies somit das Auftreffen von  $N$  Lichtteilchen, z. B. auf eine „ideal schwarze“ (= vollständig das Licht absorbierende) Fläche  $A$ . Diese Fläche hat den Absorptionskoeffizienten  $\varepsilon = 1$ . Es erfolgt eine vollständige Lichtteilchen-Abbremsung und somit ihr vollständiger Impulsverlust. Die gesamte Impulsänderung  $\Delta p = N \cdot p_{\text{photon}}$ ,  $\Delta p = N \cdot m \cdot c$  führt auf die zugehörige Strahlungsdruck-Kraft  $F_{\text{rad}}$  auf Fläche  $A$  als Impulsänderung je Zeit  $\Delta p / t = F_{\text{rad}}$  und den zugehörigen **Strahlungsdruck**:

$$\frac{F_{\text{rad}}}{A} = \frac{\Delta p / t}{A} = \frac{N \cdot m \cdot c}{A \cdot t} = \frac{N \cdot m \cdot c^2}{A \cdot t \cdot c} = \frac{W_{\text{rad}}}{t} \cdot \frac{1}{A \cdot c} = \frac{P_{\text{rad}}}{A} \cdot \frac{1}{c} = \frac{I_{\text{rad}}}{c}. \quad (\text{G2.3.4-5})$$

#### Resultat:

Der Strahlungsdruck  $F_{\text{rad}}/A$  ist die Strahlungsintensität  $I_{\text{rad}}$  / Lichtgeschwindigkeit  $c$ .

#### Beispiel G2.3.4-2:

a) Ideal absorbierende Fläche  $A$  ( $\varepsilon = 1$ ):  $\frac{F_{\text{rad}}}{A} = \frac{I_{\text{rad}}}{c}$ .

b) Ideal verspiegelte Fläche  $A$  = Ideale Reflexion der Photonen ( $\varepsilon = 0$ ):

$$\vec{p}_{\text{photon}} = m \cdot \vec{c} \Rightarrow -m \cdot \vec{c} \text{ Impulsänderung: } \Delta p = 2 \cdot m \cdot c \Rightarrow \frac{F_{\text{rad}}}{A} = 2 \cdot \frac{I_{\text{rad}}}{c}.$$

Beispiel G2.3.4-3: Sonnenstrahlung

Extraterrestrische Sonneneinstrahlung:  $I_{\text{rad}} = P_{\text{rad}} / A = 1328 \text{ W/m}^2 = I_0$ ,

Strahlungsdruck der Sonne:  $\frac{F_{\text{rad}}}{A} = \frac{I_0}{c} = \frac{1328}{3 \cdot 10^8} = 4.42 \cdot 10^{-6} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ . Die gesamte Strahlungskraft

der Sonne auf die Erde wird mit der projizierten Erdoberfläche

$$A = r_E^2 \cdot \pi = (6378 \cdot 10^3)^2 \cdot \pi = 1.28 \cdot 10^{14} \text{ m}^2$$

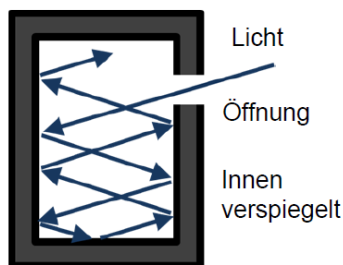
bestimmt und ist mit  $F_{\text{rad}} = 4.42 \cdot 10^{-6} \cdot 1.28 \cdot 10^{14} = 565.7 \text{ MN}$  nur  $10^{-25}$  der Sonne-Erde-Anziehungskraft!

Beispiel G2.3.4-4:

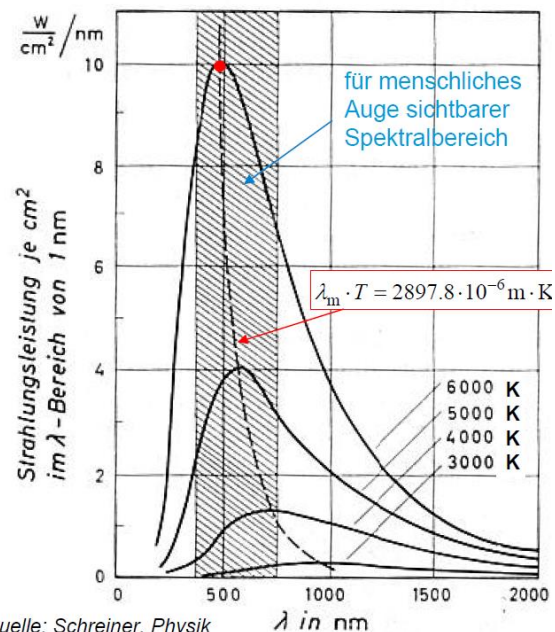
El. u. magn. Feldstärke der Sonnenstrahlung an der Erdoberfläche (ohne Erdatmosphäre, „air mass“ zero AM0) (G2.3.4-3):  $I_0 = 1328 \text{ W/m}^2$ ;  $\hat{E} = 1 \text{ kV/m} = 0.01 \text{ kV/cm}$ ,  $\hat{H} = 2.65 \text{ A/m}$ .

Eine hypothetische Strahlungsquelle ist der „**schwarze Strahler**“. Ein innen verspiegelter Hohlraum enthält eingeprägte elektromagnetische Wellen der Frequenz  $f$  als „Hohlraumstrahlung“, die sich auf Grund der Reflexion an den Spiegelwänden als stehende Wellen von  $E$  und  $H$  ausbilden. Die eingeschlossene Strahlungsenergie entspricht einer bestimmten Temperatur  $T$  des schwarzen Strahlers. Wird eine Öffnung in eine der Wände dieses Hohlraums vorgesehen, so tritt dort die Strahlung aus, allerdings nur mit gequantelten Energiemengen  $n \cdot h \cdot f$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Die Strahlungsleistung je Wellenfrontfläche im Frequenzintervall  $[f, f + df]$ , genannt  $I_f(f)$ , wurde zuerst von *M. Planck* berechnet (**Planck'sches Strahlungsgesetz**), der damit die Quantenmechanik begründete.

$$I_f(f) = \frac{2\pi \cdot h \cdot f^3}{c_0^2} \cdot \frac{1}{\frac{h \cdot f}{e^{k \cdot T}} - 1} \quad (\text{G2.3.4-6})$$



Quelle: Wikipedia (engl.)



b) Quelle: Schreiner, Physik

**Bild G2.3.4-1:** a) Modell eines schwarzen Körpers: Er absorbiert alle auftreffende elektromagnetische Strahlung jeglicher Wellenlänge vollständig. b) Spektrale Verteilung der emittierten Strahlungsleistung je Flächeneinheit (hier:  $1 \text{ cm}^2$ ) des schwarzen Strahlers für vier Temperaturen 3000 K, 4000 K, 5000 K, 6000 K gemäß (G2.3.4-6) in Abhängigkeit der Wellenlänge. Der für das menschliche Auge sichtbare Spektralbereich ist schraffiert. Der Ort der Strahlungsmaxima ist durch eine gestrichelte Linie verbunden.

Aus (G2.3.4-6) ergibt sich die Strahlungsleistung je Fläche im betrachteten Frequenzband zu  $dI(f) = I_f(f) \cdot df$ . Da der schwarze Strahler mit jeder beliebigen Frequenz  $f$  bzw. Wellenlänge  $\lambda$  strahlen kann, gibt (G2.3.4-6) die Abhängigkeit der Strahlungsleistung von der Frequenz  $f$  als „spektrale“ Verteilung  $I_f(f)$  an. Vernachlässigt man die „körnige“ Struktur des Lichts, indem man die quantisierten Energieportionen als sehr klein annimmt  $h \cdot f \ll k \cdot T$ , folgt

wegen  $e^{\frac{h \cdot f}{k \cdot T}} \approx 1 + \frac{h \cdot f}{k \cdot T}$  aus (G2.3.4-6) das **Rayleigh-Jeans-Strahlungsgesetz** (G2.3.4-7).

$$I_f(f) \approx \frac{2\pi \cdot f^2}{c_0^2} \cdot k \cdot T \quad (\text{G2.3.4-7})$$

Es gilt gemäß der Annahme nur für entsprechend niedrige Frequenzen  $f$ . Da die Phasengeschwindigkeit jeder Welle, also auch der Lichtwellen,  $v_{\text{ph}} = \lambda \cdot f$  ist, wird mit  $v_{\text{ph}} = c_0$  zu jeder Frequenz  $f$  die zugehörige Wellenlänge  $\lambda$  der Lichtwelle angegeben. Mit  $dI(f) = I_f(f) \cdot df = I_\lambda(\lambda) \cdot d\lambda$  und  $f = v_{\text{ph}} / \lambda$ , also  $df = -(v_{\text{ph}} / \lambda^2) \cdot d\lambda$  folgt aus (G2.3.4-6) die Strahlungsleistung je Fläche (G2.3.4-8) im Wellenlängenintervall  $[\lambda, \lambda + d\lambda]$  als  $dI(\lambda) = I_\lambda(\lambda) \cdot d\lambda$ .

$$I_\lambda(\lambda) = \frac{2\pi \cdot h \cdot c_0^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h \cdot c_0}{\lambda \cdot k \cdot T}} - 1} \quad (\text{G2.3.4-8})$$

In Bild G2.3.4-1b ist die mit (G2.3.4-8) berechnete spektrale Verteilung  $I_\lambda(\lambda)$  der emittierten Strahlungsleistung je Flächeneinheit (hier:  $1 \text{ cm}^2$ ) und Wellenlängenband  $d\lambda$  des schwarzen Strahlers für vier Temperaturen  $T = 3000 \text{ K}$ ,  $4000 \text{ K}$ ,  $5000 \text{ K}$ ,  $6000 \text{ K}$  in Abhängigkeit der Wellenlänge  $\lambda$  dargestellt. So strahlt der schwarze Strahler („schwarzer Körper“) z. B. im Wellenlängenbereich zwischen  $\lambda = 499 \text{ nm}$  und  $500 \text{ nm}$  ( $d\lambda \rightarrow \Delta\lambda = 1 \text{ nm}$ ) je  $\text{cm}^2$  ( $A = 1 \text{ cm}^2$ ) die Energie von  $10 \text{ J}$  je Sekunde ab:  $W = I_\lambda(\lambda) \cdot \Delta\lambda \cdot A = I_\lambda(\lambda = 499.5 \text{ nm}) \cdot 1 \text{ nm} \cdot 1 \text{ cm}^2 = 10 \text{ J}$ . Das Strahlungsmaximum bei einer festen (Oberflächen-)Temperatur  $T$  des schwarzen Strahlers tritt gemäß  $dI_\lambda(\lambda) / d\lambda = 0$  bei der Wellenlänge

$$\lambda_{\text{m}} = \frac{h \cdot c_0}{4.9621 \cdot k \cdot T} \Rightarrow \lambda_{\text{m}} \cdot T = \frac{h \cdot c_0}{4.9621 \cdot k} = 2.8978 \cdot 10^{-6} \text{ K} \quad (\text{G2.3.4-9})$$

auf. Dieses **Wien'sche Verschiebungsgesetz**  $\lambda_{\text{m}} \cdot T = 2.8978 \cdot 10^{-6} \text{ K}$  besagt, dass sich mit steigender absoluter Temperatur  $T$  die Strahlungsmaxima zu kleineren Wellenlängen  $\lambda_{\text{m}}$  verschieben (Bild G2.3.4-1b). Die gesamte je Flächeneinheit  $A$  abgestrahlte Leistung  $P_{\text{th}}$  entspricht der Fläche unter der Kurve  $I_\lambda(\lambda)$  und führt auf das **Stefan-Boltzmann'sche Strahlungsgesetz**.

$$P_{\text{th}} / A = \int_0^\infty I_\lambda(\lambda) \cdot d\lambda = \sigma \cdot T^4 \quad \sigma = \frac{2\pi^5 \cdot k^4}{15 \cdot h^3 c_0^2} = 0.56697 \cdot 10^{-7} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4} \quad (\text{G2.3.4-10})$$

Die abgestrahlte Leistung  $P_{\text{th}}$  nimmt mit der vierten Potenz der absoluten Oberflächentemperatur  $T$  des schwarzen Strahlers zu.

Die je Fläche  $A$  vom heißen ( $T_2$ ) zum kalten Ort ( $T_1 < T_2$ ) abgestrahlte Wärmeleistung ist dann die Differenz der Strahlungsleistungen beider Orte (mit gleicher Strahlungsfläche  $A$ ).

$$P_{\text{th}} / A = \sigma \cdot (T_2^4 - T_1^4) \quad (\text{G2.3.4-11})$$

Reale Strahler haben kleinere Strahlungskoeffizienten  $\varepsilon \cdot \sigma < \sigma$ ,  $0 \leq \varepsilon \leq 1$ . Die Berücksichtigung der ausgetauschten Strahlungsleistung zwischen zwei Oberflächen mit unterschiedlichem Flächeninhalt  $A_1 \neq A_2$  und unterschiedlichen Strahlungskoeffizienten

$\varepsilon_1 \cdot \sigma$ ,  $\varepsilon_2 \cdot \sigma$  erfolgt mit dem **Kirchhoff'schen Strahlungsgesetz**. Im "vollständigen thermodynamischen Gleichgewicht" ist dabei die absorbierte Strahlungsleistung gleich der emittierten Strahlungsleistung. So ist z. B. der Emissionskoeffizient  $\varepsilon_2$  der strahlenden heißen Fläche  $A_2$  und jener der kalten Fläche  $A_1$  entsprechend  $\varepsilon_1$ .

$$P_{\text{th}} = A_1 \cdot \frac{\sigma \cdot (T_2^4 - T_1^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{A_1}{A_2} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_2}\right)} \quad (\text{G2.3.4-12})$$

#### Beispiel G2.3.4-5:

Eine bei sehr tiefen Temperaturen **supraleitend ausgeführte Spule** (= elektrischer Widerstand des Spuleleitermaterials NbTi ist Null) speichert elektrische Energie in dem von ihr erregten Magnetfeld, wobei der elektrische Gleichstrom in der Spule verlustfrei fließt. Diese Spule wird in einem Gefäß mit flüssigem Helium auf der Temperatur 4.2 K gehalten. Dieses Gefäß befindet sich in einem zweiten Gefäß mit evakuiertem Zwischenraum (keine Wärmeleitung oder Konvektion). Aus der warmen Umgebung soll möglichst wenig Wärme auf die Außenwand des äußeren Gefäßes übertragen werden (Außenverspiegelung). Von der Innenwand des Außengefäßes (Heißeite) soll nämlich möglichst wenig Wärme in das innere Gefäß (Außenwand des inneren Gefäßes, Kaltseite) eindringen, da sonst die erwärmte Spule ihre supraleitende Eigenschaft verliert. Der Absorptionskoeffizient  $\varepsilon_1$  der Kaltseite soll über eine ebenfalls spiegelnd ausgeführte Oberfläche möglichst klein sein (Thermoskannen-Prinzip). Der von der Kaltseite reflektierte Strahlungsanteil soll an der Innenseite des Außengefäßes möglichst vollständig absorbiert werden (hoher Absorptionskoeffizient  $\varepsilon_2$ ).

Kaltseite: gut polierte Metalloberfläche:  $\varepsilon_1 = 0.05$ ,  $T_1 = 4.2$  K,

Heißeite: oxydiertes (mattes) Blech:  $\varepsilon_2 = 0.5$ ;  $A_2 \sim A_1$ .

Wie groß ist auf der Kaltseite eintreffende Wärmestromdichte, wenn  $T_2 = 293$  K (Raumtemperatur) ist?

Antwort:  $q = \frac{P_{\text{th}}}{A_1} = \frac{0.56697 \cdot 10^{-7} \cdot (293^4 - 4.2^4)}{\frac{1}{0.05} - 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{0.5}\right)} = 19.9 \text{ W/m}^2$ . Dieser Wert ist viel zu hoch

und würde die Spule rasch aus dem supraleitenden Zustand „quenchen“. Deshalb stellt man das äußere Gefäß in ein weiteres Außengefäß mit ebenfalls evakuiertem Zwischenraum, und kühlt das so erhaltene Zwischengefäß mit flüssigem Stickstoff auf 80 K. Dann verringert sich die eingestrahelte Wärmestromdichte auf das Innengefäß auf 0.55 %!

$$q = \frac{P_{\text{th}}}{A_1} = \frac{0.56697 \cdot 10^{-7} \cdot (80^4 - 4.2^4)}{\frac{1}{0.05} - 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{0.5}\right)} = 0.11 \text{ W/m}^2$$

Für vereinfachte Abschätzungen realer Strahler verwendet man (G2.3.4-11) mit verkleinerten Strahlungskoeffizienten  $c_s < \sigma$ . Typische Werte für schwarz oder grau gestrichene Metalloberflächen ("schwarz" und "grau" nicht nur im sichtbaren Wellenlängenbereich, sondern auch im Infrarotbereich) sind  $c_s = (4 \dots 5) \cdot 10^{-8} \text{ W/(m}^2\text{K}^4)$ .

## G2.4 Wärmeenergie

### G2.4.1 Wärmeenergie idealer Gase

Wärme (Wärmemenge  $Q$ ; Maßeinheit: Joule (J)) ist eine Form der Energieübertragung auf Stoffe, die sich überträgt in die stochastisch verteilte, ungerichtete mechanische Bewegung der Teilchen (Atome, Moleküle) des betrachteten Stoffs. Die dem Stoff zugeführte

Wärmeenergie ist in der kinetischen Energie  $W_k$  der Teilchen als „innere Energie  $U$ “ gespeichert. Diese **innere Energie  $U$**  ist also im einfachsten Fall die kinetische Energie  $W_k$  der in ungeordneter Bewegung befindlichen

a) Atome und Moleküle eines Gases oder einer Flüssigkeit bzw.

b) die Schwingungsenergie der Atomrümpfe bzw. Atome in einem Festkörper.

Die innere Energie  $U$  eines Systems (Körper, Gas, Flüssigkeit) kann durch zu-/abgeführte Wärme  $Q$  erhöht/erniedrigt werden. Ebenso kann sie durch Zufuhr mechanischer Arbeit  $W$  wie z. B. durch Kompression eines Gases (= System) in einem Zylinder durch die Verrichtung „äußerer Arbeit“  $W$  am Kolben erhöht werden.

$$\Delta U = Q + W \text{ bzw. differentielle Erhöhung } dU = dQ + dW > 0. \quad (\text{G2.4.1-1})$$

Sind keine weiteren inneren Energieformen wirksam, so ist  $W_k = U$  die innere Energie des Systems. Folglich ist die **innere Energie  $U$**  die gesamte für einen thermodynamischen Umwandlungsprozess zur Verfügung stehende Energie  $U$  eines sich im thermodynamischen Gleichgewicht befindlichen physikalischen Systems. Die kinetische und potentielle Energie  $W_{k,\text{ges}}$ ,  $W_{p,\text{ges}}$  des betrachteten Systems selbst, resultierend aus der gemeinsamen mittleren Geschwindigkeit aller Teile des Systems und aus deren gemeinsamer mittlerer „Höhenlage“, sind NICHT Teil der inneren Energie  $U$  !

Gase eines bestimmten Stoffs (z. B. Wasserstoff) umfassen viele Moleküle ( $i = 1, \dots, N$ ) dieses Stoffs (z. B. Wasserstoffmoleküle  $\text{H}_2$ ) als kleine, frei bewegliche Teilchen, denn zwischen diesen Teilchen ist leerer Raum. Diese Teilchen mit denselben Molekülmassen  $m$  bewegen sich auch im äußerlich ruhenden (also nicht strömenden) Gas mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten  $v_i$  und haben daher unterschiedliche kinetische Energien  $W_{k,i} = m \cdot v_i^2 / 2$ .

Bei diesem gasförmigen „System“ wird zwischen **realem und idealem Gas** unterschieden. Ein **reales Gas** eines bestimmten Stoffs (z. B. Wasserstoff-Gas) besteht somit aus  $N$  kleinen identischen Teilchen (z. B. Wasserstoffmolekül  $\text{H}_2$  mit der Molekülmasse  $m$ ), die im Gasraum (Volumen  $V$ ) frei beweglich sind. Die Teilchenabmessungen (z. B. Molekülabmessung  $d$  von einigen  $\text{\AA}$ ngström,  $1 \text{\AA} = 10^{-10} \text{ m}$ ) sind klein gegenüber den mittleren Teilchen-Abständen, also der „mittleren freien Weglänge“  $l$  eines Teilchens zwischen zwei Stößen. Abgeschätzt über diese „mittlere freie Weglänge“  $l$  eines Moleküls zwischen zwei Stößen, die z. B. bei  $\text{H}_2$ -Gas bei einem äußeren Druck von 1 bar und einer Gastemperatur von  $0^\circ \text{C}$  etwa  $2.7 \cdot 10^{-7} \text{ m}$  beträgt, erhalten wir  $l/d = 2.7 \cdot 10^{-7} / 10^{-10} = 2700 \gg 1$ . Die Teilchen bewegen sich auch im global ruhenden Gas ( $W_{k,\text{ges}} = 0$ ) mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten  $v_i$  der  $i$ -ten Teilchen,  $i = 1, \dots, N$ , die daher unterschiedliche kinetische Teilchen-Energien  $W_{k,i}$  aufweisen. Moleküle sind ungeladen, können aber so aufgebaut sein, dass der positive und der negative Ladungsschwerpunkt nicht zusammenfallen, so dass sie el. Dipole bzw. Multipole bilden. Nicht-polare Moleküle üben aufeinander keine el. *Coulomb*-Kräfte aus, sondern nur die (vernachlässigbar) kleine Gravitationskraft (Bsp. G2.4.1-1).

#### Beispiel G2.4.1-1:

$\text{H}_2$ -Gas bei 1 bar,  $\vartheta = 0^\circ \text{C}$ , Molekül-(Ruhe)-Masse  $m \approx 3.4 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ , Abstand zwischen zwei Molekülen eine halbe freie Weglänge  $r = l/2 = 1.35 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ , anziehende SEHR KLEINE Gravitationskraft  $F$ :

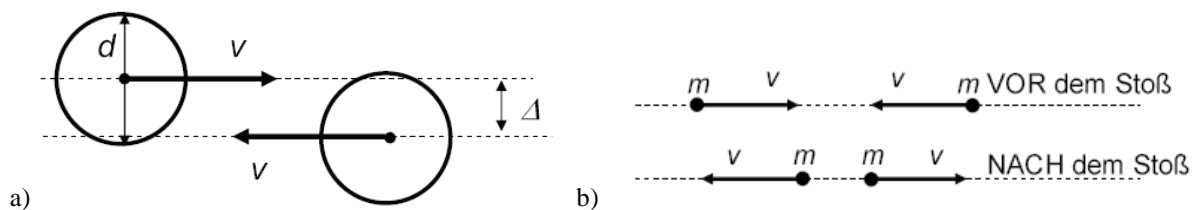
$$F = G \cdot \frac{m \cdot m}{r^2} = 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot (3.4 \cdot 10^{-27})^2 / (1.35 \cdot 10^{-7})^2 = 4.2 \cdot 10^{-50} \text{ N} .$$

Wegen ihrer kleinen Molekülmassen  $m$  und rel. großen mittleren Abständen  $l$  sind die Gravitationskräfte zwischen den Gasteilchen vernachlässigbar klein.

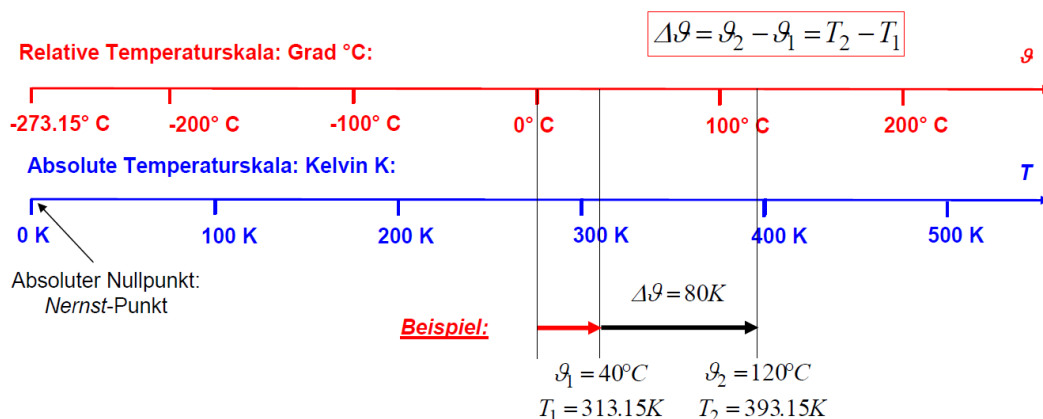
Bei idealisierter Betrachtung des realen Gases als „**ideales Gas**“ sind die Teilchen punktförmig, denn die Molekülabmessungen  $d$  sind, wie oben gezeigt, klein gegenüber den

mittleren Abständen  $l$  zwischen den Molekülen. Ein global ruhendes **ideales Gas** besteht folglich aus nicht unterscheidbaren punktförmigen Teilchen mit jeweils gleicher Teilchenmasse  $m$ , die keine Kräfte aufeinander ausüben. Stöße zwischen den einzelnen Teilchen erfolgen wegen der vernachlässigten Teilchengröße (Teilchendurchmesser  $d$  sehr klein) stets zentral und elastisch; denn die Teilchen werden beim Stoß nicht deformiert (Bild G2.4.1-1). Unter äußerem Druck  $p$  wird der mittlere Abstand  $l$  der Teilchen verringert, so dass das Gas komprimiert wird (sein Volumen  $V$  sinkt) und seine Dichte  $\gamma$  zunimmt. Nach *L. Boltzmann* ist die von uns körperlich fühlbare Temperatur proportional zur mittleren kinetischen Energie der Gasteilchen. Wenn z. B. alle Gasteilchen ruhen, also ihre kinetische Energie Null ist, ist demnach diese „absolute Temperatur“ Null:  $T = 0 \text{ K}$  (*Kelvin*). Dieser Zustand entspricht der Temperatur  $\vartheta = -273.15 \text{ }^\circ\text{C}$  (*Grad Celsius*), (Bild G2.4.1-2). Es gibt somit einen tiefsten Wert der Temperatur, den „absoluten Nullpunkt“ bei  $-273.15 \text{ }^\circ\text{C}$ , den wir aber wegen der damit verbundenen Energie „Null“ nie ganz erreichen können (**Nernst'scher Satz oder 3. Hauptsatz der Wärmelehre**). Die absolute Temperatur  $T$  (in K) und die Temperatur  $\vartheta$  (in  $^\circ\text{C}$ ) haben den Zusammenhang  $T = \vartheta + 273.15 \text{ K}$ .

Mit Berücksichtigung der Annahmen für ein „ideales Gas“ haben *Maxwell* und *Boltzmann* auf statistischem Weg die Häufigkeitsfunktion  $f(v)$  der Geschwindigkeitsverteilung (G2.4.1-2) berechnet (**Maxwell-Boltzmann-Verteilung**), mit der eine bestimmte Menge der Teilchen des Gases im Raum „herumfliegt“ (Bild G2.4.1-3a), wobei die **Boltzmann'sche Konstante**  $k = 1.3805 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$  eingeführt wurde. Dieser Bruchteil der Teilchenzahl (bezogen auf die Gesamtzahl der Teilchen  $N$ ), die mit Geschwindigkeiten  $v \dots v + dv$  fliegen, ist demnach  $f(v) \cdot dv$ . Die Gesamtzahl aller Teilchen, bezogen auf ihre echte Teilchenzahl  $N$ , ist Eins.



**Bild G2.4.1-1:** a) Beispiel für einen nichtzentralen Stoß zweier Kugeln mit dem Durchmesser  $d$  infolge des Abstands  $\Delta < d/2$  zwischen den beiden Massenschwerpunkten, b) Zentraler elastischer Stoß zweier punktförmiger und daher nicht deformierbarer Massen  $m$  ( $d \rightarrow 0, \Delta \rightarrow 0$ )



**Bild G2.4.1-2:** Absolute Temperatur  $T$  (Einheit: Kelvin K) und Grad-Celsius-Temperatur  $\vartheta$  (Einheit:  $^\circ\text{C}$ ) sowie Erwärmung (Temperaturdifferenz)  $\Delta T = \Delta\vartheta$  (Einheit: K)

$$f(v) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \left(\frac{m}{kT}\right)^{3/2} \cdot v^2 \cdot e^{-m \cdot v^2 / (2 \cdot k \cdot T)}, \quad \int_0^{\infty} f(v) \cdot dv = 1 \quad (\text{G2.4.1-2})$$

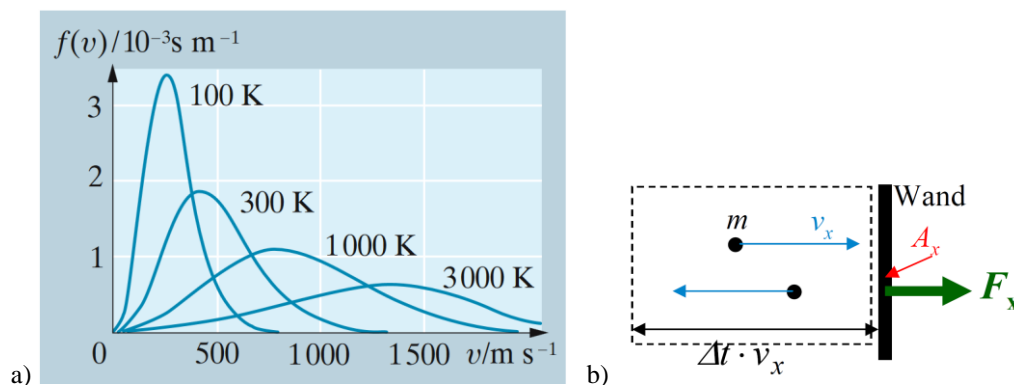


Bild G2.4.1-3: a) Maxwell-Boltzmann-Verteilung der Molekülgeschwindigkeiten in Luft für vier unterschiedliche Lufttemperaturen 100 K, 300 K, 1000 K, 3000 K (Quelle: Gerthsen, Physik). b) Gasdruck auf eine Wand in  $x$ -Richtung

Je höher die Gastemperatur  $T$ , desto schneller sind „im Mittel“ die Moleküle. Gemäß Bild G2.4.1-3a fliegt der größte Anteil der Moleküle (= Maximum von  $f(v)$ ) bei 100 K mit ca. 300 m/s und bei Raumtemperatur (300 K  $\approx$  27 °C) mit ca. 400 m/s. Demnach ist auch die kinetische Energie der Teilchen unterschiedlich. Mit  $W_k = m \cdot v^2 / 2$  und  $dW_k / dv = d(m \cdot v^2 / 2) / dv = m \cdot v$  erhalten wir über  $dW_k = m \cdot v \cdot dv$  aus (G2.4.1-2) die Verteilung der kinetischen Energie  $g(W_k)$  auf die einzelnen Teilchen (G2.4.1-3).

$$g(W_k) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{W_k}}{(k \cdot T)^{3/2}} \cdot e^{-W_k / (k \cdot T)} \quad (\text{G2.4.1-3})$$

Jene mittlere kinetische Energie  $\bar{W}_k$  je Teilchen, mit der die Teilchen unterwegs sind, muss gemäß  $\bar{W}_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N m \cdot v_i^2 / 2 = \frac{m}{2 \cdot N} \sum_{i=1}^N v_i^2 = \frac{m \cdot (v^2)_{av}}{2}$  über den Mittelwert von  $(v^2)_{av}$  berechnet werden. Die Anzahl der Teilchen  $dn = g(W_k) \cdot dW_k$  hat die Energie  $W_k$ . Folglich ist die mittlere kinetische Energie durch die Summation über alle Energiebeiträge  $W_k \cdot dn = W_k \cdot g(W_k) \cdot dW_k$  zu finden.

$$\bar{W}_k = \int_0^{\infty} W_k \cdot g(W_k) \cdot dW_k = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{W_k^{3/2}}{(k \cdot T)^{3/2}} \cdot e^{-W_k / (k \cdot T)} \cdot dW_k \quad (\text{G2.4.1-4})$$

Mit der Substitution  $w = W_k / (kT)$  erhalten wir

$$\bar{W}_k = \frac{2 \cdot kT}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^{\infty} w^{3/2} \cdot e^{-w} \cdot dw = \frac{2 \cdot kT}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{3\sqrt{\pi}}{4} = \frac{3}{2} \cdot k \cdot T \quad (\text{G2.4.1-5})$$

Es ist also die mittlere kinetische Energie je Teilchen - wie oben behauptet - zur absoluten Temperatur  $T$  direkt proportional. Da sich die Gasteilchen mit  $v_x$  in  $x$ -Richtung, mit  $v_y$  in  $y$ -Richtung und mit  $v_z$  in  $z$ -Richtung bewegen, ist der Betrag des Geschwindigkeitsvektors  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$  durch  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$  gegeben. Demgemäß gilt für den Mittelwert des Geschwindigkeitsquadrats aller Teilchengeschwindigkeiten:

$$(v^2)_{av} = (v_x^2)_{av} + (v_y^2)_{av} + (v_z^2)_{av} \quad (\text{G2.4.1-6})$$



$$\overline{W}_k = \frac{m \cdot (v^2)_{av}}{2} = m \cdot \frac{(v_x^2)_{av} + (v_y^2)_{av} + (v_z^2)_{av}}{2} = \frac{3}{2} \cdot k \cdot T. \quad (\text{G2.4.1-7})$$

Da im Mittel keine der drei Raumrichtungen bevorzugt ist (**Gleichverteilungsprinzip** oder „Äquipartitionsprinzip“ der Thermodynamik), gilt mit  $(v_x^2)_{av} = (v_y^2)_{av} = (v_z^2)_{av}$ :

$$(v_x^2)_{av} = \frac{k \cdot T}{m}. \quad (\text{G2.4.1-8})$$

Ein „warmes“ Gas einer bestimmten Temperatur  $T$  mit  $N$  Gasteilchen hat daher einen bestimmten Energieinhalt  $W = N \cdot \overline{W}_k$ . Diese „innere Gasenergie“ ist die oben beschriebene innere Energie  $U$  und ist beim idealen Gas die kinetische Energie seiner Teilchen, da andere Energieformen nicht auftreten. Wenn also ein Gas vorher am absoluten Nullpunkt  $T = 0$  die innere Energie  $U = 0$  hatte, und ihm wird die Wärme  $Q$  zugeführt, hat es danach die innere Energie  $U = Q$  und eine entsprechende absolute Temperatur  $T > 0$ .

#### Beispiel G2.4.1-2:

H<sub>2</sub>-Gas, 1 bar, 0°C = 273.15 K, Molekül-(Ruhe)-Masse:  $m_{\text{H}_2} \approx 3.4 \cdot 10^{-27}$  kg,

$$\sqrt{(v^2)_{av}} = \sqrt{\frac{3 \cdot k \cdot T}{m_{\text{H}_2}}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 1.3805 \cdot 10^{-23} \cdot 273.15}{3.4 \cdot 10^{-27}}} = 1824 \text{ m/s}, \quad \overline{W}_k = \frac{m_{\text{H}_2} \cdot (v^2)_{av}}{2} = 5.66 \cdot 10^{-21} \text{ J}.$$

Beim „realen“ Gas kommt die potentielle elektrostatische Energie der Wechselwirkungskräfte zwischen den polaren Teilchen, ggf. auch die chemische Bindungsenergie der Teilchen als Moleküle, der Atombindungsenergie der Atome selbst etc. hinzu, je nach dem, welcher physikalische Vorgang betrachtet wird. Ändert sich z. B. die Teilchenart und Zahl durch chemische Reaktionen (Verbindungen, Dissoziationen) in unterschiedliche Molekülformen, so ändert sich  $U$  um die Energie der chemischen Bindungen der beteiligten Atomarten. Ändern sich die Teilchenart und Zahl durch Ionisation in Atomrümpfe und Elektronen, dann ändert sich  $U$  um die Ionisationsenergien der Moleküle und Atome. Ändern sich aber Teilchenart und Zahl bei Kernreaktionen (Radioaktivität) durch Kernverschmelzung (Kernfusion) od. Kernspaltung (Kernfission), so ändert sich  $U$  um die Kernbindungsenergien.

Im idealen Gas kann die innere Energie durch Wärmezufuhr/-abfuhr  $Q$  geändert werden. Gemäß  $W = U$  ist Wärme daher eine Form von Energie („**Wärmeenergie**“, **1. Hauptsatz der Wärmelehre**). Die Temperatur  $T$  gibt an, wie viel kinetische Energie im Mittel auf ein Gasmolekül entfällt. Wärmeenergie ist somit innere Bewegungsenergie eines Gases oder einer Flüssigkeit, aber auch eines Festkörpers. Beim Festkörper können sich die Atome im Kristallverband zwar nicht frei bewegen, aber sie können um ihre Ruhelage schwingen. Diese Schwingungsenergie tritt als kinetische Energie der Atome als innere Bewegungsenergie auf.

$$W = N \cdot \frac{3}{2} \cdot k \cdot T = U \quad (\text{G2.4.1-9})$$

Die Bewegung der Moleküle in einem ruhenden Gas einer bestimmten Gastemperatur  $T$  hat Stöße der Moleküle gegen die Gefäßwand zur Folge, die als **Gasdruck**  $p$  wahrgenommen werden. Ein Molekül der Masse  $m$ , das in  $x$ -Richtung mit  $v_x$  senkrecht auf eine Gefäßwand (Wandfläche  $A_x$ , Gefäßvolumen  $V$ ) prallt, wird von dieser mit  $-v_x$  elastisch reflektiert. Der Bewegungsimpuls  $m \cdot v_x$  des Moleküls in  $x$ -Richtung hat sich nun umgekehrt auf  $-m \cdot v_x$ . Die Impulsänderung des Teilchens während des Stoßes ist somit  $m \cdot v_x - (-m \cdot v_x) = 2 \cdot m \cdot v_x$ . Dieser Impuls wurde auf die Wand übertragen (Bild G2.4.1-3b). Wir nehmen nun an, dass im Mittel alle Teilchen in  $x$ -Richtung die mittlere Geschwindigkeitskomponente

$\pm v_x = \pm \sqrt{(v_x^2)_{av}}$  haben. Wenn insgesamt  $N$  Teilchen vorhanden sind, werden im Mittel stets  $N/2$  Teilchen eine positive und  $N/2$  Teilchen eine negative Geschwindigkeitskomponente  $\sqrt{(v_x^2)_{av}}$  in  $x$ -Richtung aufweisen. Im Zeitintervall  $\Delta t$  erreichen daher alle jene Moleküle, die sich innerhalb der Entfernung  $\Delta t \cdot v_x$  von der Wand befinden, die Wand. Das sind alle die in einem Volumen  $A_x \cdot \Delta t \cdot v_x$  enthaltenen Moleküle mit positivem  $v_x$ , somit  $(N/2) \cdot A_x \cdot \Delta t \cdot v_x / V$  Teilchen. Sie übertragen demnach auf die Wand während der Zeit  $\Delta t$  den Gesamtimpuls  $(2m \cdot v_x) \cdot (N/2) \cdot A_x \cdot \Delta t \cdot v_x / V = A_x \cdot \Delta t \cdot m \cdot v_x^2 \cdot N / V$ . Die auf die Wand wirkende Kraft als Impulsänderung pro Zeit  $F_x = (A_x \cdot \Delta t \cdot m \cdot v_x^2 \cdot N / V) / \Delta t$  wird als Druck an der Wand  $p_x = F_x / A_x = m \cdot v_x^2 \cdot N / V$  wahrgenommen. Dieser Druck wirkt somit auch im Gas. Da keine der drei Raumrichtungen ausgezeichnet ist, erhalten wir in gleicher Weise  $p_x = p_y = p_z = p = m \cdot (v_x^2)_{av} \cdot N / V = m \cdot (v_y^2)_{av} \cdot N / V = m \cdot (v_z^2)_{av} \cdot N / V$  und mit (G2.4.1-6) und der Gasdichte  $\gamma = N \cdot m / V$  schließlich den **Gasdruck**

$$p = \frac{(v^2)_{av}}{3} \cdot N \cdot m / V = \frac{(v^2)_{av}}{3} \cdot \gamma, \quad (\text{G2.4.1-10a})$$

$$p \cdot V = \frac{m \cdot (v^2)_{av}}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot N = \frac{3 \cdot k \cdot T}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot N = N \cdot k \cdot T. \quad (\text{G2.4.1-10b})$$

Mit der Anzahl Gasmoleküle je Volumen  $n = N/V$  erhalten wir den Gasdruck im idealen Gas

$$p = n \cdot k \cdot T \quad (\text{G2.4.1-11})$$

#### Beispiel G2.4.1-3:

a) Bei  $0^\circ\text{C}$  ( $T = 273.15\text{ K}$ ) und Luftdruck 1 bar ( $= 10^5\text{ Pa}$ ) enthält ein Kubikmeter Raumvolumen ( $V = 1\text{ m}^3$ ) JEDES idealen Gases gemäß (G2.4.1-10)

$$N_A = \frac{p \cdot V}{k \cdot T} = \frac{10^5 \cdot 1}{1.3805 \cdot 10^{-23} \cdot 273.15} = 2.652 \cdot 10^{25} \text{ Teilchen (Avogadro-Zahl)}.$$

b)  $\text{H}_2$ -Gasdichte:  $\gamma = N_A \cdot m / V = 2.652 \cdot 10^{25} \cdot 3.4 \cdot 10^{-27} / 1 = 0.09\text{ kg/m}^3$  bei  $0^\circ\text{C}$ , 1 bar; (genauer  $\gamma_{\text{H}_2} = 0.0887\text{ kg/m}^3$ ).

Darüber hinaus hat man die Gasmenge, die  $L = 6.023 \cdot 10^{26}$  Teilchen enthält, als die **Stoffmenge** 1 kmol (1 kilomol), definiert, wobei  $L$  die **Loschmidt'sche Zahl** ist. Daher ist das Verhältnis  $L / N_A = 22.71$ . In der englischsprachigen Literatur wird genau umgekehrt der Name *Avogadro-Zahl* für  $L' = L / 1000 = 6.023 \cdot 10^{23} / \text{mol}$  und der Name *Loschmidt-Zahl* für  $2.652 \cdot 10^{25} / \text{m}^3$  verwendet. Vereinfacht werden oft beide Namen *Avogadro-Zahl* und *Loschmidt-Zahl* für  $L' = 6.023 \cdot 10^{23} / \text{mol}$  verwendet – also diesbezüglich Vorsicht beim Lesen von unterschiedlichen Physikbüchern!

#### Beispiel G2.4.1-4:

Die Stoffmenge von  $L$  Gasteilchen eines BELIEBIGEN idealen Gases erfüllt bei  $0^\circ\text{C}$  ( $T = 273.15\text{ K}$ ) und Luftdruck 1 bar ( $= 10^5\text{ Pa}$ ) ein Raumvolumen von

$$V_{m,0} = \frac{L \cdot k \cdot T}{p} = \frac{6.023 \cdot 10^{26} \cdot 1.3805 \cdot 10^{-23} \cdot 273.15}{10^5} = 22.71\text{ m}^3, \text{ genannt „Molvolumen“ eines}$$

Kilomols, daher  $V_{m,0} = 22.71\text{ dm}^3$  das Molvolumen eines Mols.

Aus (G2.4.1-10) folgt mit der Kilomolzahl  $\nu_m = N/L$  bzw. Molzahl  $\nu'_m = N/L'$  und  $L \cdot k = R$  bzw.  $L' \cdot k = R'$  die **Zustandsgleichung für ideale Gase**

$$p \cdot V = \nu_m \cdot R \cdot T \quad \text{bzw.} \quad p \cdot V = \nu'_m \cdot R' \cdot T \quad (\text{G2.4.1-12})$$

mit der **universellen Gaskonstante**

$$R = L \cdot k = 6.023 \cdot 10^{26} \cdot 1.3805 \cdot 10^{-23} = 8314 \text{ J/(kmol} \cdot \text{K)} \quad . \quad (\text{G2.4.1-13})$$

bzw.  $R' = L' \cdot k = 8314 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)}$ .

Makroskopisch wird das (ideale) Gas folglich durch die Zustandsgrößen  $T$ ,  $V$ ,  $p$  beschrieben (Tab. G2.4.1-1). Dabei werden als Normalbedingungen ein mittlerer Luftdruck auf Höhe des Meeresspiegels  $p_0 = 1013 \text{ hPa} = 760 \text{ Torr}$  und die Temperatur  $T_0 = 273 \text{ K}$  ( $0 \text{ }^\circ\text{C}$ ) festgelegt. Bei Normalbedingungen verhalten sich Luft, Wasserstoff und Edelgase annähernd als ideale Gase. Bei speziellen Zustandsänderungen bleibt jeweils eine Zustandsgröße konstant:

- a) Isobare Zustandsänderung:  $p = \text{konst.}$ ; b) Isotherme Zustandsänderung:  $T = \text{konst.}$ ;  
c) Isochore Zustandsänderung:  $V = \text{konst.}$

Formelzeichen	Zustandsgröße	SI-Einheit
$T$	Temperatur	K
$V$	Volumen	$\text{m}^3$
$p$	Druck	$\text{Pa} = \text{N/m}^2$

Tabelle G2.4.1-1: Zustandsgrößen  $T$ ,  $V$ ,  $p$  des (idealen) Gases

Sind mehrere Gase (allgemein  $K$  Gassorten) im Raum vorhanden, so beeinflussen diese einander bezüglich Druck im Gleichgewichtszustand bei der gemeinsamen Gastemperatur  $T$  nicht, wenn zwischen den Partnern keine chemischen Reaktionen auftreten. Der Gesamtdruck  $p$  ist dann die Summe der Teildrücke  $p_i$  (**Dalton'sches Gesetz**). Jedes der Gase erzeugt den seiner Teilchendichte  $n_i$  entsprechenden Teildruck (Partialdruck)  $p_i = n_i \cdot k \cdot T$ .

$$p = \sum_{i=1}^K n_i \cdot k \cdot T = k \cdot T \cdot \sum_{i=1}^K n_i \quad (\text{G2.4.1-14})$$

### G2.4.2 Entropie und Hauptsätze der Wärmelehre

Wird ein Gasbereich mit höherer Gastemperatur  $T_2 = T_H > T_1 = T_K$  mit einem Gasbereich mit niedrigerer Gastemperatur  $T_1$  (z. B. über eine Gefäßwand) in Verbindung gebracht (Bild G2.4.2-1), ohne dass sich die beiden Gase mischen, so übertragen die heißeren (schnelleren) Teilchen ihre größere mittlere Bewegungsenergie  $\bar{W}_{k2} = (3/2) \cdot k \cdot T_2$  durch Zusammenstöße über die Gefäßwand zum Teil auf die im Durchschnitt langsameren Moleküle des kälteren Gasbereichs, die dadurch etwas schneller werden. Nach einer bestimmten Zeit (thermischer Ausgleichsvorgang) sind die schnelleren (heißeren) Moleküle im Mittel etwas langsamer und die kälteren (langsameren) Moleküle etwas schneller geworden und haben nun dieselbe mittlere Temperatur  $T_3$ . Bei diesem Vorgang der **Wärmeleitung** geht die Wärmeenergie stets vom wärmeren auf den kälteren (Körper-)Teil über, bis ein Temperatúrausgleich hergestellt ist. Es geht somit Wärme VON SELBST nur vom wärmeren zum kälteren Körper über (**2. Hauptsatz der Wärmelehre**). Wenn in diesem Beispiel die Teilchenanzahl  $N_1 = N_2 = N/2$  ist und beim Ausgleichsvorgang keine Wärme nach außen abgeführt wird, ist mit

$U_1 = (N/2) \cdot \frac{3}{2} \cdot k \cdot T_1 > U_2 = (N/2) \cdot \frac{3}{2} \cdot k \cdot T_2$  die sich nach dem Ausgleichsvorgang einstellende Gastemperatur  $T_3 = T_{av}$  (G2.4.2-1).

$$U = N \cdot \frac{3}{2} \cdot k \cdot T_3 = U_1 + U_2 = \frac{N}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot k \cdot T_1 + \frac{N}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot k \cdot T_2 \Rightarrow T_3 = \frac{T_1 + T_2}{2} = T_{av} \quad (\text{G2.4.2-1})$$

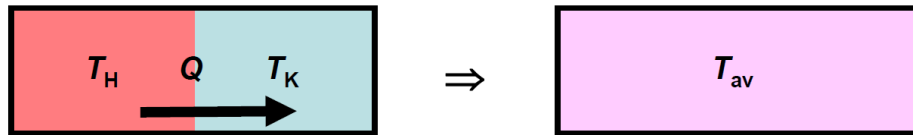


Bild G2.4.2-1: Wärme  $Q$  fließt von selbst nur vom Ort höherer Temperatur  $T_H > T_K$  zum Ort niedrigerer Temperatur  $T_K$  (2. Hauptsatz der Wärmelehre), wobei sich danach die mittlere Temperatur  $T_{av}$  einstellt.

Sie ist niedriger als  $T_2$ , aber höher als  $T_1$ , weil Wärmeenergie  $(U_2 - U_1)/2$  vom heißeren zum kälteren Gas geflossen ist. Nach dem Ausgleichsvorgang haben beide Gasmengen die Energiemengen von je  $(U_2 + U_1)/2$ . Beachten Sie, dass beim Verletzen des zweiten Hauptsatzes durch die Annahme, dass von selbst Energie vom kalten zum warmen Gas fließt (z. B. die Menge  $\Delta U$ ), so dass danach das heiße Gas noch heißer wäre (Energie  $U'_1 = U_1 + \Delta U$ ) und das kalte noch kälter ( $U'_2 = U_2 - \Delta U$ ), immer noch der Energieerhaltungssatz, dass in einem abgeschlossenen System die Summe aller Energien konstant ist, nicht verletzt wäre:  $U'_1 + U'_2 = U_1 + U_2$ . Zwischen dem Energieerhaltungssatz und dem 2. Hauptsatz der Wärmelehre besteht also ein grundsätzlicher Unterschied: Die Energieerhaltung wird ausnahmslos und in voller Strenge im gesamten Bereich der Physik als gültig angesehen. Der zweite Hauptsatz ist hingegen ein nur im statistischen Mittel gültiger Satz, der nur für aus sehr vielen Molekülen oder Atomen bestehenden Kollektiven (Gasen, Festkörper, etc.) gilt ( $N$  muss eine sehr große Zahl sein, vgl.  $N_A$  oder  $L!$ ). Bei ganz geringen Teilchenzahlen ist die mittlere Energiebetrachtung (G2.4.1-6), die zum Begriff der Temperatur  $T$  führt, wegen der möglichen großen Abweichungen der einzelnen Teilchenenergien vom Mittel nicht mehr sinnvoll. Bei wenigen Teilchen ( $N$  z. B. 30) ist es durchaus möglich, dass bei den Stößen zufällig die langsameren Teilchen noch Energie verlieren und die schnelleren Teilchen auf Kosten der langsameren Teilchen noch schneller werden. Dies wäre natürlich auch bei großem  $N$  prinzipiell möglich, aber ausgesprochen unwahrscheinlich (**Wahrscheinlichkeit**  $w$  für einen bestimmten Zustand der Energieverteilung auf die einzelnen Moleküle eines Kollektivs von  $N$  Molekülen:  $0 \leq w \leq 1$  wäre  $w \approx 0$ ), während bei kleinem  $N$  die Wahrscheinlichkeit für einen solchen Vorgang durchaus groß sein kann. Es ist somit durchaus möglich, dass eine Bleistiftspitze plötzlich ohne Wärmezufuhr und ohne sonstigen ersichtlichen Grund zu glühen beginnt, in dem die durch viele Stöße infolge der ungeordneten Molekularbewegung gleichmäßig verteilte Bewegungsenergie zufällig in extrem hohem Maß den Molekülen der Spitze zugeführt wird. Die Wahrscheinlichkeit  $w$  für eine so geordnete Energieverteilung (wenige Teilchen haben viel Energie, viele Teilchen haben sehr wenig Energie) ist aber bei großem  $N$  (nahezu) Null. Dieser zahlenmäßig sehr kleine Wert wird durch den Logarithmus vergrößert, so dass anstelle  $w$  die **Entropie**

$$S = k \cdot \ln(w) \quad (\text{G2.4.2-2})$$

zur Beschreibung dieser Wahrscheinlichkeit verwendet wird. Dass in einem gasgefüllten Gefäß die linke Hälfte mit Teilchen hoher Energie (heißes Gas), die rechte Hälfte mit Teilchen niedriger Energie gefüllt ist, ist unwahrscheinlich ( $S$  klein). Dass das Gefäß mit Teilchen mittlerer Energie gefüllt ist, ist auf Grund der Stöße sehr wahrscheinlich ( $S$  groß). Somit ist der oben beschriebene Ausgleichsvorgang, bei dem Wärme  $Q$  von selbst vom

heißeren auf den kälteren Gasteil fließt, ein Vorgang vom Zustand mit geringer Entropie zu einem Zustand mit hoher Entropie. **Ein System hört erst dann auf, von selbst seinen Zustand zu ändern, bis es den maximal wahrscheinlichen Zustand, also den Zustand mit der größten Entropie, erreicht hat.**

Die Erhöhung der Entropie  $\Delta S$  bzw.  $dS$  eines auf der Temperatur  $T$  befindlichen Gases (Entropie  $S$ ) bei Wärmezufuhr  $dQ$  muss nun von der lokalen Formulierung (G2.4.2-2) in eine Formulierung mit der makroskopischen Zustandsgröße  $T$  umgeformt werden und man erhält (ohne Herleitung!) (G2.4.2-3).

$$dS = \frac{dQ}{T} \quad (\text{G2.4.2-3})$$

Ein System der Temperatur  $T$  im thermodynamischen Gleichgewicht ( $dQ = 0$ ) ändert sich in seinen Zuständen nicht mehr  $\Rightarrow dS = dQ/T = 0$ ;  $S = \text{konst.}$  Die Entropie  $S$  bleibt konstant.

#### Zusammenfassung der Hauptsätze der Wärmelehre:

**0) Nullter Hauptsatz:** Ist ein System A mit einem System C im thermodynam. Gleichgewicht, und ebenso ein System B mit diesem System C, so sind auch A und B miteinander im thermodynam. Gleichgewicht (Bild G2.4.2-2a).

**1) Erster Hauptsatz:** Die Energiemenge in einem (thermodynam.) abgeschlossenen System ist konstant = Es gilt der Energieerhaltungssatz (Bild G2.4.2-2b). Im nicht abgeschlossenen System kann  $U$  erhöht werden durch Wärmezufuhr  $Q$  und durch am System durch äußere Kräfte verrichtete mechanische Arbeit  $W$ .

**2) Zweiter Hauptsatz:** Wärme  $Q$  geht VON SELBST nur vom wärmeren zum kälteren Körper über.

**3) Dritter Hauptsatz** (W. Nernst, 1905): Bei Annäherung an den absoluten Nullpunkt  $T = 0$  geht  $S \rightarrow 0$ . Deshalb kann  $T = 0$  nicht exakt erreicht werden.

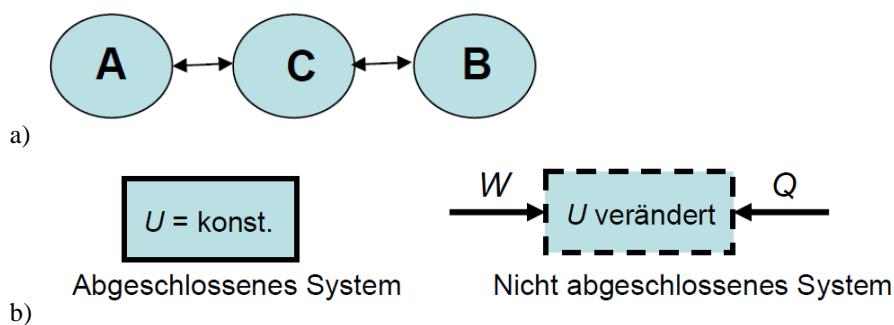


Bild G2.4.2-2: a) Systeme A, B und C sind miteinander im thermodyn. Gleichgewicht, b) Im abgeschlossenen System ist  $U = \text{konst.}$ . Im offenen System kann  $U$  durch die Zufuhr von Wärme  $Q$  und mech. Arbeit  $W$  erhöht werden:  $\Delta U = Q + W$ .

### G2.4.3 Wärmeaustausch bei idealen und realen Gasen

Die den idealen Gasen bei **konstantem Gasvolumen**  $V$  (z. B. in einem abgeschlossenen Gefäß) zugeführte Wärmenergie  $Q$  wird gemäß (G2.4.1-8) gänzlich in kinetischer Translationsenergie gespeichert, da diese im Atomkern nahezu punktförmigen Massen (nahezu) keine Rotationsenergie aufweisen. Die entsprechende Erhöhung der Gastemperatur  $\Delta T$  berechnen wir mit

$$\Delta Q = N \cdot \frac{3}{2} \cdot k \cdot \Delta T = \nu_m \cdot R \cdot \frac{3}{2} \cdot \Delta T = \nu_m \cdot C_{mV} \cdot \Delta T \quad (\text{G2.4.3-1})$$

wobei  $C_{mV} = R \cdot (3/2)$  die **molare Wärmekapazität des idealen Gases** bei konstantem Volumen ist. Es ist die erforderliche Wärmemenge, um die Gasmenge von 1 kmol (Gasteilchenzahl  $N = L$ ) um  $\Delta T = 1$  K bei konstantem Volumen zu erwärmen (Bild G2.4.3-1a).

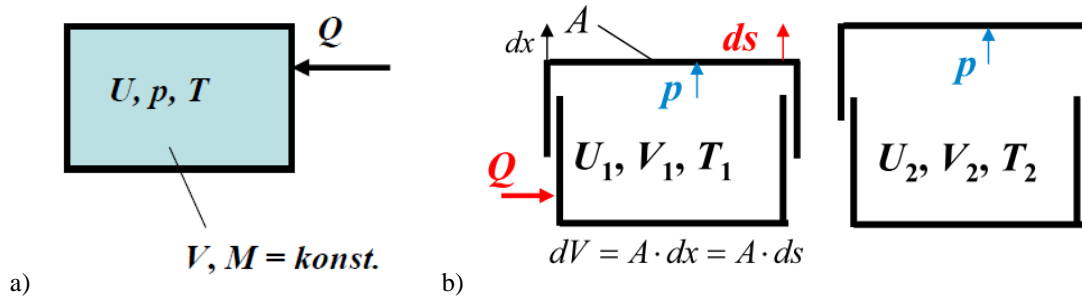


Bild G2.4.3-1: a) Wärmezufuhr in ein System bei konstantem Volumen, b) Wärmezufuhr in ein System bei konstantem Druck

Wird einem idealen Gas bei **konstantem Gasdruck  $p$**  z. B. in einem Zylinder mit verschiebbarem Kolben (Kolbenfläche  $A$ ) Wärmenergie  $Q$  zugeführt, so dass das Gas sich bei Erwärmung mit  $p = \text{konst.}$  ausdehnen kann (Bild G2.4.3-1b), so wirkt auf den Kolben die Kraft  $F = p \cdot A$  in Richtung der Kolbenbewegung. Das Gas dehnt sich gemäß (G2.4.1-12) um  $\Delta V = v_m \cdot R \cdot \Delta T / p$ , so dass der Kolben den Weg  $\Delta s = \Delta V / A$  zurücklegt. Es wird am Kolben vom Gas wegen  $Q$  die mechanische Arbeit

$$\Delta W = F \cdot \Delta s = p \cdot A \cdot \Delta s = p \cdot \Delta V \quad (\text{G2.4.3-2})$$

verrichtet. Mit (G2.4.1-1)  $\Delta U = Q + W$  ( $W > 0$  bei zugeführter mech. Arbeit) ist nun wegen der vom Gas verrichteten Arbeit  $\Delta U = Q - \Delta W$ . Die Energiebilanz lautet daher

$$Q = \Delta U + \Delta W = v_m \cdot C_{mV} \cdot \Delta T + \Delta W = v_m \cdot C_{mV} \cdot \Delta T + p \cdot \Delta V = v_m \cdot C_{mV} \cdot \Delta T + v_m \cdot R \cdot \Delta T.$$

$$Q = v_m \cdot (C_{mV} + R) \cdot \Delta T = v_m \cdot C_{mp} \cdot \Delta T \quad (\text{G2.4.3-3})$$

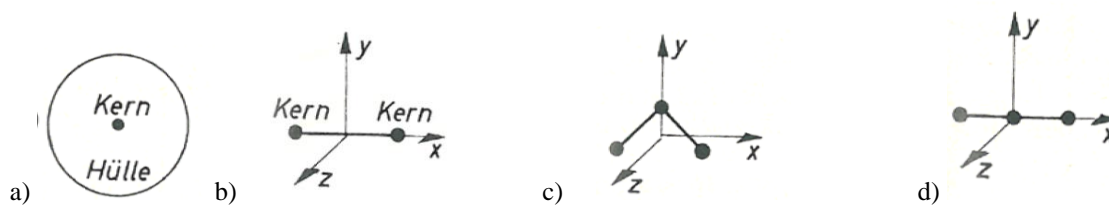
Es ist  $C_{mp} = C_{mV} + R = R \cdot (3/2) + R = R \cdot (5/2)$  die **molare Wärmekapazität des idealen Gases** (Einheit  $\text{J}/(\text{kmol} \cdot \text{K})$ ) bei konstantem Druck, also die erforderliche Wärmemenge, um die Gasmenge von 1 kmol (Gasteilchenzahl  $N = L$ ) um  $\Delta T = 1$  K bei  $p = \text{konst.}$  zu erwärmen. Wird die molare Wärmekapazität in der Einheit  $\text{J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$  angegeben, ist ihr Zahlenwert um den Faktor 1000 kleiner.

Einatomige Gase werden durch das Modell des idealen Gases in vielerlei Hinsicht sehr gut beschrieben. Einatomige Gase existieren als Edelgase (He, Ne, Ar ...), da die Elektronenhülle ihrer Atome stets so mit Elektronen gefüllt ist, dass je Energiewert der negativ geladenen Elektronen gegenüber dem positiv geladenen Kern zwei Elektronen mit entgegengesetztem **Spin** („Eigenrotation“) auftreten („**Spinabsättigung**“). Diese nur nach den Gesetzen der Quantenmechanik zu verstehende Eigenschaft macht die Atome dieser Edelgase äußerst träge gegenüber einer chemischen Verbindung mit anderen Atomen, weshalb sie „edel“ genannt werden und einatomig als Gase auftreten.

Reale Gase bestehen aber in der Regel aus Molekülen, also aus Teilchen, die mehrere Atome umfassen, mit endlicher Ausdehnung und unterschiedlicher Form (Bild G2.4.3-2). Die Elektronen in den Atomhüllen bewirken die elektrischen Bindekräfte der Atome zu diesen Molekülen („chemische Bindung“). In vielen Molekülen sind die elektrisch positiven Atomkerne und die elektrisch negativen Hüllenelektronen soweit zueinander verschoben (z. B.  $\text{H}_2\text{O}$ -Molekül, Bild G2.4.3-2c), dass der positive und negative Ladungsschwerpunkt nicht zusammenfallen („**polares**“ **Molekül**). Es entsteht ein elektrischer Dipol, der auf die benachbarten elektrischen Dipol-Moleküle eine elektrostatische Anziehungs- oder

Abstoßungskraft, je nach relativer Lage der Moleküle zueinander, ausübt. Diese elektrischen Dipolkräfte sind also spezielle intermolekulare Kohäsionskräfte (*van der Waals'sche Kräfte*), die allerdings nur auf kurze Distanz in der Größenordnung der Molekülabmessungen wirken.

Endliches Teilchenvolumen und die auftretenden Teilchenkräfte sind die wesentlichen Kennzeichen **realer Gase**. Während ein Zusammenpressen des idealen Gases (= Volumen  $V$  sinkt) gemäß  $V = v_m \cdot R \cdot T / p$  eine Druckerhöhung bewirkt, die eng aneinander liegenden Teilchen aber nicht aneinander haften (= es gibt keine Teilchenkräfte), ist bei realem Gas durch Kompression ein aneinander Haften der Moleküle durch die Kohäsionskräfte möglich, so dass das Gas durch Kompression verflüssigt werden kann. Es ist auch ein direkter Übergang vom Gas zum Festkörper (**Sublimation**, z. B. Reifbildung) möglich. Verflüssigung und Verdampfung, allgemein also die Übergänge zwischen unterschiedlichen Aggregatzuständen (Phasenübergänge), sind nur mit den Eigenschaften realer Gase erklärbar.



**Bild G2.4.3-2:** a) Die Teilchen einatomiger Gase werden als kleine Kugeln betrachtet. Da der Atomkern fast die gesamte Masse  $m$  enthält und sehr klein ist, ist die Rotationsenergie der Kerne wegen deren geringen Trägheitsmoment nahezu Null. b) Bei Gasen mit Teilchen als zweiatomige Moleküle (z. B.  $H_2$ ) haben diese Moleküle eine Hantelform. Die Drehung um die  $x$ -Achse erfordert (fast) keine Rotationsenergie. c) Bei dreiatomigen Molekül z. B. von  $H_2O$  (gewinkelte Form) erfordert die Rotation um alle drei Raumachsen Energie. d) Bei der gestreckten dreiatomigen Molekülform (z. B.  $CO_2$ ) erfordert die Drehung um die  $x$ -Achse (fast) keine Rotationsenergie [Sch].

Beim idealen Gas wurde jeder Raumbewegungsrichtung und damit jedem Freiheitsgrad der translatorischen Bewegung eines Massepunkts der Anteil  $k \cdot T / 2$  der kinetischen Energie zugeordnet. Eine mögliche Rotation der Massepunkte mit  $\omega$  um ihre Achse lieferte bei einatomigen Gasen wegen des sehr kleinen Radius (Trägheitsmoment  $J \approx 0$ ) keinen Beitrag zur kinetischen Energie ( $W_{k,rot} = J \cdot \omega^2 / 2 = 0$ ). Bei realen Gasen kommen auf Grund der räumlich ausgedehnten Moleküle auch nicht zentrale Stöße vor, die die Moleküle in Rotation versetzen. Bei zweiatomigen Molekülen (z. B.  $H_2$ ,  $N_2$ ,  $O_2$ , ...) bilden beide Atome eine hantelförmige Struktur (Bild G2.4.3-2b) z. B. um die  $x$ -Achse. Daher ist zwar  $J_x$  wie bei den einatomigen Teilchen (nahezu) Null, aber  $J_y$  und  $J_z$  sind mit dem Abstand  $a$  des Atomschwerpunkts von der Drehachse gemäß  $J_y = J_z = 2 \cdot a^2 \cdot (m/2) = m \cdot a^2 > 0$ , so dass eine Rotation um die  $y$ - bzw.  $z$ -Achse jeweils einen kinetischen Energiebeitrag  $J_y \cdot \omega_y^2 / 2$ ,  $J_z \cdot \omega_z^2 / 2$  liefert, dem nach dem Gleichverteilungsprinzip (siehe „Grundlagen“) jeweils  $kT/2$  entspricht. Die resultierende mittlere kinetische Energie pro Teilchen ist dann auf drei translatorische und zwei rotatorische Freiheitsgrade verteilt ( $f = 5$ ).

$$\bar{W}_k = \frac{5}{2} \cdot k \cdot T \quad (G2.4.3-4)$$

Demnach ist die molare Wärmekapazität zweiatomiger Gase bei konstantem Volumen  $C_{mV} = R \cdot (5/2)$ . Für drei- und mehratomige Moleküle ( $H_2O$ ,  $NH_3$  ...) existieren stets alle drei Rotationsfreiheitsgrade um  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Achse, was wegen  $f = 6$  einer molaren Wärmekapazität  $C_{mV} = R \cdot (6/2)$  bei konstantem Volumen entspricht. In Festkörpern ergeben sich zusätzlich noch Schwingungen der Atome im Kristallverband um ihre Ruhelage, so dass

sich weitere Freiheitsgrade der Bewegung ergeben. Vernachlässigen wir die intermolekularen Kohäsionskräfte, so ergibt dieselbe Herleitung für die Gaserwärmung bei  $p = \text{konst.}$

$$C_{\text{mp}} = C_{\text{mV}} + R, \quad (\text{G2.4.3-5})$$

da die Dehnungsarbeit für die Volumenvergrößerung bei konstantem Druck bei der Bestimmung von  $C_{\text{mp}}$  zu berücksichtigen ist. Bei Flüssigkeiten und Festkörpern ist die Wärmeausdehnung bei der Stoffermwärmung deutlich kleiner als bei Gasen und wird hier vernachlässigt, so dass wir für Flüssigkeiten und Festkörper  $C_{\text{mp}} \approx C_{\text{mV}} = C_{\text{m}}$  schreiben.

Hat allgemein ein Stoff die Stoffmenge von  $\nu_{\text{m}}$  kmol, so ist seine **Wärmekapazität** bei der zugeführten Wärmeenergie  $Q$  gemäß  $C_{\text{V}} = \nu_{\text{m}} \cdot R \cdot (f/2) = Q/\Delta T$  (Einheit: J/K) bei  $V = \text{konst.}$  bzw.  $C_{\text{p}} = \nu_{\text{m}} \cdot R \cdot ((f/2) + 1)$  bei  $p = \text{konst.}$  Bezogen auf seine Masse  $M$  erhalten wir mit der Molekülmasse  $m$  die **spezifische Wärmekapazität** (Einheit: J/(kg · K))

$$c_{\text{V}} = Q/(\Delta T \cdot M) = C_{\text{V}}/M = \nu_{\text{m}} \cdot R \cdot (f/2)/M = (M/m) \cdot k \cdot (f/2)/M = k \cdot f/(2 \cdot m) \quad (\text{G2.4.3-6})$$

bzw.

$$c_{\text{p}} = k \cdot ((f/2) + 1)/m \quad (\text{G2.4.3-7})$$

und daher

$$\kappa = c_{\text{p}}/c_{\text{V}} = (f + 2)/f \quad (\text{G2.4.3-8})$$

Je kleiner die Molekülmasse  $m$  ist, desto höher ist die spezifische Wärmekapazität, wie Tab. G2.4.3-1 ( $m_{\text{H}_2} < m_{\text{N}_2} < m_{\text{O}_2}$ ) zeigt. Deshalb hat Wasserstoffgas eine deutlich höhere spezifische Wärmekapazität als Luft, so dass es bei großen Synchronmaschinen als Kraftwerksgeneratoren (ab ca. 350 ... 400 MW Generator-Nennleistung) anstelle von Luft zum Kühlen (Wärmeabfuhr durch Konvektion) eingesetzt wird. Ein Sonderfall ist flüssiges Wasser. Die gewinkelten und damit polaren Wassermoleküle sind so beweglich, dass sie Molekülschwingungen ausführen, so dass man jedes der drei Atome im Molekül als unabhängig auffassen kann und ihnen alle 6 Freiheitsgrade (3 Translations- und 3 Rotationsfreiheitsgrade) zuordnen kann. Daher ergibt sich eine hohe spezifische Wärmekapazität  $4185 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K}) = 1 \text{ kcal}$  (**1 Kilo-Kalorie**). Man benötigt die Energiemenge 1 Kilo-Kalorie, um 1 kg Wasser (ca. 1 Liter Wasser) um 1 K zu erwärmen. Wegen seiner hohen Wärmekapazität wird Wasser für die Wassermantelkühlung von z. B. Verbrennungskraftmaschinen, E-Motoren für die Elektromobilität oder als direkte Leiterkühlung in großen Synchron-Kraftwerksgeneratoren (ab ca. 700 MW Generator-Nennleistung) eingesetzt.

Werte bei Gasen für 0°C	$c_{\text{p}} / \text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$	$c_{\text{V}} / \text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$	$\kappa = c_{\text{p}} / c_{\text{V}}$
Ar einatomiges Gas	518	314	$5/3 = 1.66$
H <sub>2</sub> zweiatomiges Gas	14210	10078	$7/5 = 1.40$
N <sub>2</sub> zweiatomiges Gas	1037	740	$7/5 = 1.40$
O <sub>2</sub> zweiatomiges Gas	915	656	$7/5 = 1.40$
Luft (ca. 80% N <sub>2</sub> , 18% O <sub>2</sub> )	1003	715	$7/5 = 1.40$
N <sub>2</sub> O dreiatomiges Gas	849	660	$1.29 \approx 8/6$
CO <sub>2</sub> dreiatomiges Gas	819	627	$1.30 \approx 8/6$
H <sub>2</sub> O Flüssigkeit	4185	4185	$\approx 1$
Cu Festkörper	388	388	$\approx 1$
Fe Festkörper	502	502	$\approx 1$

Tabelle G2.4.3-1: Spezifische Wärmekapazitäten einiger Stoffe

Wir schreiben allgemein für Flüssigkeiten und Festkörper der Masse  $M$

$$\Delta Q = c \cdot M \cdot \Delta T = C \cdot \Delta T \quad (\text{G2.4.3-9})$$

und bei differentiell kleiner Wärmezufuhr



$$dQ = c \cdot M \cdot dT = C \cdot dT. \quad (\text{G2.4.3-10})$$

Die gesamte innere Energie eines Körpers, einer Flüssigkeit, eines Gases ist dann

$$U = c \cdot M \cdot T = C \cdot T. \quad (\text{G2.4.3-11})$$

Beispiel G2.4.3-1:

Zwei in zwei Bechern enthaltene unterschiedliche Flüssigkeiten mit den Massen  $M_1, M_2$ , den spezifischen Wärmekapazitäten  $c_1, c_2$  haben die (absoluten) Temperaturen  $T_1$  und  $T_2$ . Wie groß ist nach vollständiger Durchmischung beider Flüssigkeiten (ohne Wärmeabgabe) die sich einstellende (absolute) Temperatur  $T$  des Gemisches?

Antwort: Energieerhaltungssatz im angeschlossenen System:  $U_1 + U_2 = U$ .

$$U_1 = c_1 \cdot M_1 \cdot T_1, \quad U_2 = c_2 \cdot M_2 \cdot T_2, \quad U = c_1 \cdot M_1 \cdot T + c_2 \cdot M_2 \cdot T,$$

$$T = \frac{c_1 \cdot M_1 \cdot T_1 + c_2 \cdot M_2 \cdot T_2}{c_1 \cdot M_1 + c_2 \cdot M_2} \quad (\text{„Mischungsformel“}). \quad (\text{G2.4.3-12})$$

Die bisherigen Betrachtungen betrafen das ruhende Gas in einem Gefäß und dessen Wärmeenergie. In der Energietechnik kommen strömende heiße Gase z.B. in Dampf- und Gasturbinen vor. Bei **strömendem Gas**, z. B. einem auf eine Turbinenschaufel auftreffenden Wasserdampfstrahl, tritt zusätzlich zur „inneren“ Geschwindigkeit der einzelnen Gasmoleküle die allen Teilchen gemeinsame (mittlere) Geschwindigkeit des strömenden Gases, auch **Driftgeschwindigkeit**  $v_G$  bezeichnet, auf. Damit erhalten wir zusätzlich die kinetische Energie der strömenden Gasmasse. Die je Zeiteinheit  $\Delta t$  durch eine Querschnittsfläche  $A$  eines Strömungskanals fließende Masse  $\Delta m$  ist der Massestrom  $\dot{m} = \Delta m / \Delta t = (\gamma \cdot \Delta V) / \Delta t$ . Bei konstanter Gasdichte  $\gamma$  folgt daraus mit  $\Delta V = A \cdot \Delta l = A \cdot v_G \cdot \Delta t$  und dem Volumenstrom

$$\dot{V} = \Delta V / \Delta t$$

$$\dot{m} = \gamma \cdot \dot{V} = \gamma \cdot A \cdot v_G. \quad (\text{G2.4.3-13})$$

Beachten Sie, dass bei strömendem Gas i. A. die Kontinuitätsgleichung (G2.2-1) nicht mehr gilt, denn auch die Dichte kann sich nun in jedem Strömungsquerschnitt ändern, weil Gase kompressibel sind. Nur der Massestrom  $\dot{m}$  selbst muss konstant bleiben, wenn keine Masse verloren gehen soll. Deshalb gilt nun die **erweiterte Kontinuitätsgleichung**

$$\gamma_1 v_1 A_1 = \gamma_2 v_2 A_2. \quad (\text{G2.4.3-14})$$

Sowohl den inkompressiblen als auch den kompressiblen Fluiden ist aber gemeinsam, dass sich eine lokale Druckänderung (also eine Änderung des hydrostatischen Drucks in Flüssigkeiten oder des Gasdrucks in Gasen) nicht beliebig schnell im gesamten Fluid ausbreiten kann. Diese lokale Druckerhöhung oder Erniedrigung durch eine lokale Störung wird durch die Stöße in Längsrichtung (= Ausbreitungsrichtung der Druckstörung) zwischen den einzelnen Teilchen des Fluids „weitergegeben“, und zwar wellenartig in Form einer Longitudinalwelle als Druckwelle. Diese wellenartige Ausbreitung einer Druckänderung nennen wir allgemein **Schallwelle**, auch wenn wir sie ggf. mit unseren Ohren nicht hören können, weil die Frequenz der Druckschwankung außerhalb unseres Hörbereichs liegt (z. B. oberhalb unserer Hörschwelle von 16 kHz (bei jungen, gesunden Ohren) als **Ultraschall**). Die Geschwindigkeit dieser Schallwelle als **Schall-Geschwindigkeit**  $c_0$  hängt vom jeweiligen Medium und dessen Zustand ab, z. B. im idealen Gas  $c_0 \sim \sqrt{p/\gamma}$ . Strömt das Fluid langsamer als  $c_0$  ( $v_G < c_0$ ), ist diese eine Unterschallströmung, andernfalls mit  $v_G > c_0$  eine Überschallströmung, ausgedrückt durch die **Mach-Zahl**  $Ma = v_G / c_0$  als  $Ma < 1$  oder  $Ma > 1$ . In einer Überschallströmung werden somit stromaufwärts Druckstörungen, die stromabwärts auftreten, nicht mehr wahrgenommen, da das strömende Fluid die Schallwelle mit sich fort trägt (wegen der positiven Geschwindigkeitsdifferenz  $v_G - c_0 > 0$ ).

Beispiel G2.4.3-2:

Strömen eines Fluids durch eine „Düse“ (Querschnittsflächenverengung von  $A_1$  auf  $A_2$  und anschließende Erweiterung auf  $A_3$ ):

(i) *Inkompressibles Fluid*: Die Geschwindigkeit steigt von  $v_1$  bei  $A_1$  auf  $v_2 = v_1 \cdot (A_1 / A_2)$  an und sinkt bei  $A_3$  wieder auf  $v_3 = v_1 \cdot (A_1 / A_3)$  ab. Wenn an der engsten Stelle der Düse  $v_2 < c_0$  gilt, kann das Fluid durch die Düse nicht auf Überschallgeschwindigkeit beschleunigt werden.

(ii) *Kompressibles Fluid*: Wenn die Geschwindigkeit von  $v_1$  bei  $A_1$  auf  $v_2 = v_1 \cdot (A_1 / A_2)$  bei z. B.  $\gamma = \text{konst.}$  zunimmt, kann sie bei  $A_3$  durch entsprechendes Absenken der Dichte  $\gamma_3 < \gamma_1$  noch weiter beschleunigt werden  $v_3 = v_1 \cdot (A_1 / A_3) \cdot (\gamma_1 / \gamma_3) > c_0$  und doch noch Überschall erreichen. Dies wird in der **Laval-Düse** angewendet.

Bei der Erwärmung von Flüssigkeiten und Festkörper der Masse  $M$  sind die spezifischen Wärmen  $C_p$  und  $C_V$  identisch, da keine nennenswerte Expansionsarbeit (= thermische Ausdehnung) der erwärmten Flüssigkeiten und Festkörper stattfindet.

$$C = C_p = C_V, \quad \Delta Q = c \cdot M \cdot \Delta T = C \cdot \Delta T \quad (\text{G2.4.3-15})$$

Beispiel G2.4.3-3:

Ein Liter ( $V = 1 \text{ dm}^3$ ) von a) Luft, b) Kupfer, c) Eisen soll von  $20^\circ\text{C}$  auf  $100^\circ\text{C}$  erhitzt werden. Wie groß ist die dafür benötigte zugeführte Wärmeenergie  $\Delta Q$ ? Die Dichten von Luft / Kupfer / Eisen sind ca.  $\gamma = 1.226 / 8900 / 7850 \text{ kg/m}^3$ .

Antwort:

$$\Delta T = 100 - 20 = 80 \text{ K}, \quad \Delta Q = c \cdot M \cdot \Delta T = c \cdot \gamma \cdot V \cdot \Delta T$$

$$\text{a) Luft: } \Delta Q = 1.226 \cdot 10^{-3} \cdot 1009 \cdot 80 = \underline{\underline{99 \text{ J}}}$$

$$\text{b) Kupfer: } \Delta Q = 8900 \cdot 10^{-3} \cdot 388.5 \cdot 80 = \underline{\underline{276.6 \text{ kJ}}}$$

$$\text{c) Eisen: } \Delta Q = 7850 \cdot 10^{-3} \cdot 502 \cdot 80 = \underline{\underline{315.3 \text{ kJ}}}$$

Die Speicherdichte  $\Delta Q / V$  ist bei b) und c) wegen der höheren Dichte deutlich größer. Deshalb sind am Abend nach einem heißen Sommertag die Wände der Häuser (z. B. Backstein) noch deutlich wärmer als die sich bereits rascher abkühlende Luft. Aus dem gleichen Grund sind bei einem anscheinend ausgekühlten Apfelkuchen (der Teig ist bereits essbar kühl) die Apfelstücke wegen der höheren spezifischen Wärmekapazität noch so heiß, dass man sich den Mund verbrennt.

Beispiel G2.4.3-4:

Wie hoch ist die Wärmeenergie  $\Delta Q_{\text{Fe}}$ , um 1 kg Eisen von  $20^\circ\text{C}$  zur Weißglut (ca.  $1000^\circ\text{C}$ ) zu erhitzen? Wie hoch ( $^\circ\text{C}$ ) erwärmt sich 1 Liter 20-gradiges Wasser mit derselben Energie?

Antwort:  $\Delta Q_{\text{Fe}} = 1 \cdot 502 \cdot (1000 - 20) = 491.96 \text{ kJ}$ ,

$$\Delta \vartheta_{\text{H}_2\text{O}} = \Delta Q_{\text{Fe}} / (M \cdot c_{\text{H}_2\text{O}}) = 491.96 \cdot 10^3 / (1 \cdot 4185) = 117.6 \text{ K},$$

$$\vartheta_{\text{H}_2\text{O}} = 20^\circ\text{C} + \Delta \vartheta_{\text{H}_2\text{O}} = 137.6^\circ\text{C}.$$

**G2.4.4 Thermodynamisches Gleichgewicht und Massenwirkungsgesetz**

Gemäß G2.4.2 verhält sich ein System, wenn es sich selbst überlassen ist, so, dass **seine Entropie  $S$  maximal** ist. Wenn dieser Zustand  $S = S_{\text{max}}$  erreicht ist, also jede weitere

Entropieänderung Null ist ( $dS = 0$ ), ist das System im thermodynamischen Gleichgewicht. **Generell ist also ein System im thermodynamischen Gleichgewicht (ändert sich in seinen Zuständen nicht mehr), wenn seine Entropie den unter den gegebenen Randbedingungen maximal möglichen Wert angenommen hat.** Diese sehr allgemeine Bedingung wird nun für typische Randbedingungen spezialisiert.

a) Adiabatische und isobare Randbedingung:

Mit (G2.4.1-1)  $\Delta U = Q + W$  bzw.  $dU = dQ + dW$  für eine am Gas verrichtete mech. Arbeit  $W = W_{\text{zu}} > 0$  folgt analog zu (G2.4.3-2) für eine vom Gas verrichtete Arbeit  $W = -W_{\text{ab}} < 0$ :  $dQ = dU + dW_{\text{ab}} = dU + p \cdot dV$ . Im thermodynamischen Gleichgewicht bei adiabatischer Randbedingung  $Q = \text{konst.}$  ( $dQ = 0$ ) und isobarer Randbedingung  $p = \text{konst.}$  ( $dp = 0$ ) gelten gemäß  $d(p \cdot V) = p \cdot dV$  die Ausdrücke (G2.4.4-1, -2), dass die als **Enthalpie**  $H = U + p \cdot V$  bezeichnete Zustandsgröße des Gases konstant ist.

$$dQ = dU + p \cdot dV + V \cdot dp = dU + d(p \cdot V) = d(U + p \cdot V) = dH = 0 \quad (\text{G2.4.4-1})$$

$$U + p \cdot V = \text{konst.} = H \quad (\text{G2.4.4-2})$$

Im thermodynamischen Gleichgewicht bei adiabatischen und isobaren Randbedingungen ist mit  $dH = 0$  die Enthalpie extremal (genauer: minimal).

Das *mechanische Analogon* für einen Gleichgewichtszustand ist z. B. die Kugel in einer konkaven Schale. Im Gleichgewicht ruht die Kugel am tiefsten Punkt der Schale und kehrt dorthin unter dem Einfluss der Schwerkraft bei jeder Auslenkung aus der Ruheposition selbsttätig zurück („**stabiles**“ **Gleichgewicht**). Am Schalengrund ist die potentielle Energie der Kugel im Schwerfeld  $W_p = 0$ , also lautet die Gleichgewichtsbedingung  $dW_p = 0$ , entsprechend  $dH = 0$  gemäß (G2.4.4-1) im thermodynamischen Gleichgewicht bei  $Q = \text{konst.}$ ,  $p = \text{konst.}$ .

b) Isotherme und isochore Randbedingung:

Ausgehend von der Gleichgewichtsbedingung  $dS = 0$  folgt

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{dU + p \cdot dV}{T} = 0 \quad \rightarrow \quad dU + p \cdot dV - T \cdot dS = 0. \quad (\text{G2.4.4-3})$$

Bei isothermen ( $T = \text{konst.}$ ,  $dT = 0$ ) und isochoren ( $V = \text{konst.}$ ,  $dV = 0$ ) Randbedingungen folgt  $dU = T \cdot dS$ . Beidseitige Integration liefert

$$\int dU = U = \int T \cdot dS = T \cdot \int dS = T \cdot S + \text{konst.} = T \cdot S + F. \quad (\text{G2.4.4-4})$$

Die Integrationskonstante „konst. =  $F$ “ hat die Dimension einer Energie und heißt „**freie Energie**“  $F$  oder **Helmholtz-Potential**. Damit folgt als Bedingung für das thermodynamische Gleichgewicht bei  $T = \text{konst.}$ ,  $V = \text{konst.}$

$$dF = d(U - T \cdot S) = dU - T \cdot dS = 0 \quad \rightarrow \quad dF = 0. \quad (\text{G2.4.4-5})$$

Die *freie Energie* ist im thermodynamischen Gleichgewicht bei isothermer und isochorer Randbedingung minimal.

c) Isotherme und isobare Randbedingung:

Soll anstelle  $V = \text{konst.}$  nun  $p = \text{konst.}$  ( $dp = 0$ ) als Randbedingung für das thermodynamische Gleichgewicht gelten, folgt mit  $d(p \cdot V) = p \cdot dV + V \cdot dp$  und  $d(T \cdot S) = T \cdot dS + S \cdot dT$ , also  $d(p \cdot V) = p \cdot dV$  und  $d(T \cdot S) = T \cdot dS$  aus (G2.4.4-3)

$$dU + p \cdot dV - T \cdot dS = 0 = dU + d(p \cdot V) - d(T \cdot S) = d(U + p \cdot V - T \cdot S). \quad (\text{G2.4.4-6})$$

Mit der Abkürzung  $G$  als sogenannter „**freier Enthalpie**“  $G$  (auch: **Gibbs-Potential**)

$$G = U + p \cdot V - T \cdot S \quad (\text{G2.4.4-7})$$

lautet daher die thermodynamische Gleichgewichtsbedingung bei  $T = \text{konst.}$ ,  $p = \text{konst.}$ , dass dann die freie Enthalpie minimal ist.

$$G = \text{konst.} \Rightarrow dG = 0 \quad (\text{G2.4.4-8})$$

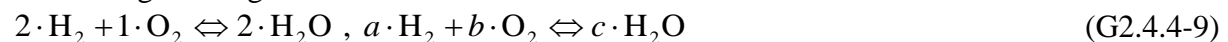
Anwendungen dieser Gleichgewichtsüberlegungen sind z. B. chemische Reaktionen, bei denen zuvor in chemischen Bindungen gespeicherte Energie frei wird (**exotherme chemische Reaktion**) oder Energie zur Herstellung chemischer Bindungen benötigt wird (**endotherme chemische Reaktion**). Chemische Reaktionen sind eine wichtige Energiequelle der Menschheit, denn biologisch gesehen leben wir überwiegend von chemisch gebundener Energie in unserer Nahrung und technisch von chemisch gebundener Energie in fossilen Substanzen wie Erdöl, Erdgas und Kohle.

Eine chemische Reaktion läuft „spontan“ (= von selbst) ab, wenn die Entropie  $S$  dabei zunehmen kann. Läuft die Reaktion bei z. B. konstanter Umgebungstemperatur  $T$  und konstantem Umgebungsdruck  $p$  ab, strebt sie gemäß (G2.4.4-8) dem Minimum der freien Enthalpie  $G$  zu. Es muss also bei der Reaktion  $G_{\text{end}}$  der chemischen Endprodukte kleiner als  $G_{\text{ausg}}$  der chemischen Ausgangsprodukte sein:  $\Delta G = G_{\text{end}} - G_{\text{ausg}} < 0$ . Die spontane chemische Reaktion hört auf, wenn keine weitere  $G$ -Senkung mehr möglich ist:  $\Delta G = 0$ .

Diese thermodynamische Gleichgewichtsbedingung führt für chemisch reversible Reaktionen zum **Massenwirkungsgesetz von *Guldberg und Waage***. Wir bringen eine Substanz A mit der Menge von  $\nu_A$  kmol bzw.  $N_A = \nu_A \cdot L$  Teilchen und eine Substanz B mit der Menge von  $\nu_B$  kmol bzw.  $N_B = \nu_B \cdot L$  zusammen ( $L$ : *Loschmidt-Zahl*), wobei diese beiden sich von selbst („spontan“) zu einer neuen Substanz AB mit der Menge  $\nu_{AB}$  kmol bzw.  $N_{AB} = \nu_{AB} \cdot L$  chemisch verbinden.

#### Beispiel G2.4.4-1:

Wassermolekülbildung: Substanz C = AB = H<sub>2</sub>O aus Wasserstoff- A = H<sub>2</sub> und Sauerstoffmolekülen B = O<sub>2</sub>: z. B. bei stöchiometrischen Mengen und damit vollständiger Reaktion 2 kmol H<sub>2</sub> ( $\nu_A = 2 = a$ ) und 1 kmol O<sub>2</sub> ( $\nu_B = 1 = b$ ) verbinden sich zu 2 kmol H<sub>2</sub>O ( $\nu_{AB} = 2 = c$ ).  
Reaktionsgleichung:



Bei unvollständiger Reaktion ist i. A.  $\nu_A \neq 2 = a$ ,  $\nu_B \neq 1 = b$ ,  $\nu_{AB} \neq 2 = c$ .

Der Gesamtdruck  $p$  der Reaktionspartner im Volumen  $V$  ist gemäß dem idealen Gasgesetz  $p = N \cdot k \cdot T / V$  proportional zur Summe aller Teilchen:  $N_A + N_B + N_{AB} = N \sim p$  und zu  $T$ . Wegen  $p = \text{konst.}$   $T = \text{konst.}$  ist  $N = \text{konst.}$  bzw. bei  $V = \text{konst.}$  ist auch die Konzentration  $n = N/V = \text{konst.}$ , so dass die Summe aller drei Stoffkonzentrationen  $n_A, n_B, n_{AB}$  Eins ist.

$$(N_A / N) + (N_B / N) + (N_{AB} / N) = n_A + n_B + n_{AB} = 1 \quad (\text{G2.4.4-10})$$

Wenn bei der spontanen Reaktion  $G$  abnimmt, wird der Vorgang so lange anhalten, bis eine der beiden Substanzen A oder B vollständig verbraucht ist. Um aber chemisch miteinander reagieren zu können, müssen die Partner A und B vollständig molekular durchmischt sein. In diesem Fall ist  $G$  bei selbständig ablaufender chemischer Reaktion dann minimal, wenn bei der Temperatur  $T$  das Produkt der Konzentrationen der Ausgangssubstanzen  $(n_A)^a \cdot (n_B)^b$  über einen „Gleichgewichts“-Faktor  $K = K_1 \cdot e^{K_2/T}$  gleich der Konzentration der Endsubstanz  $(n_{AB})^c$  ist (G2.4.4-11) (**Massenwirkungsgesetz**; Beweis siehe z. B. *Meschede/Gerthsen – Physik*). Für die vorausgesetzt chemisch umkehrbare Reaktion mit der **Reaktionsgleichung**  $A + B \rightarrow AB$  bzw.  $A + B \leftarrow AB$  von Bsp. G2.4.4-1 stellen sich im thermodynamischen Gleichgewicht folgende Konzentrationsverhältnisse ein:

$$(n_A)^a \cdot (n_B)^b = (n_{AB})^c \cdot K_1 \cdot e^{-K_2/T} = (n_{AB})^c / K. \quad (\text{G2.4.4-11})$$

Der Faktor  $K_1$  ist nur dann ungleich Eins, wenn sich bei der Reaktion die Gesamtteilchenzahl  $N \sim p$  und damit der Gesamtdruck  $p$  der Reaktionspartner ändert. Bei  $p = \text{konst.}$  ist  $K_1 = 1$ . So hat neben  $T$  nur  $K_2$  einen Einfluss auf  $K$ , und ist die Differenz der freien Enthalpien der

Stoffe links in der Reaktionsgleichung (hier: je Mol  $G_A$  und  $G_B$ ) und der Stoffe rechts in der Reaktionsgleichung (hier: je Mol  $G_{AB}$ ), bezogen auf die ideale Gaskonstante  $R$ .

$$\frac{(n_{AB})^c}{(n_A)^a \cdot (n_B)^b} = e^{\frac{a \cdot G_A + b \cdot G_B - c \cdot G_{AB}}{R \cdot T}} = e^{-\frac{\Delta G}{R \cdot T}} \quad (\text{G2.4.4-12})$$

Ist die  $G$ -Differenz als Abnahme bei der Reaktion positiv und groß, so ist  $K$  groß, also  $(n_{AB})^c \gg (n_A)^a \cdot (n_B)^b$ ; es findet eine fast völlige Durchreaktion der beiden Partnersubstanzen A und B statt. Ist  $K$  klein, so ist  $(n_{AB})^c \ll (n_A)^a \cdot (n_B)^b$ ; es findet fast keine Reaktion der beiden Partnersubstanzen A und B statt.

## G2.5 Chemische Bindungsenergie

Atome können sich über ihre äußeren Hüllenelektronen mit anderen Atomen zu Molekülen verbinden. Dabei ist die chemische Energie  $W_{\text{ch}}$  als Bindungsenergie zwischen den einzelnen Bindungspartnern dieser chemischen Verbindung gespeichert. Diese Energie  $W_{\text{ch}}$  wird bei chemischen exothermen Reaktionen als Wärme (= kinetische Energie der Bindungspartner) freigesetzt und bei endothermen Reaktionen aufgenommen.

### Beispiel G2.5-1:

a) Exotherme Reaktion zwischen den Reaktionspartner A und B, die sich zum Reaktionsprodukt AB verbinden, wobei  $\Delta H < 0$  die freigesetzte Reaktions“wärme“ ist:



b) Endotherme Reaktion zwischen den Reaktionspartner A und B, die sich zum Reaktionsprodukt AB verbinden, wobei  $\Delta H > 0$  die dafür benötigte aufgenommene Reaktions“wärme“ ist:



Meist laufen diese Reaktionen isobar ab ( $p = \text{konst.}$ ), so dass  $dp = 0$  ist! Wenn keine Reaktionswärme auftritt, ist  $Q = \text{konst.}$  Dies sind adiabatische und isobare Randbedingungen. Gemäß (2.4.4-2) ist die **Enthalpie**  $H = U + p \cdot V$  des Systems konstant. Wenn also Reaktionswärme auftritt, die Wärme  $Q$  somit zu- oder abnimmt, so ist dies eine Änderung von  $H$ . Dies ist die „Reaktionsenthalpie“  $\Delta H > 0$  oder  $\Delta H < 0$ .

Die chemische Bindungsenergie  $W_{\text{ch}}$  ist zusammengesetzt aus

- kinetischer Energie der Elektronen,
- potentieller elektrischer Energie aus den Wechselwirkungen von Elektronen und Atomkernen, je nach Art der chemischen Bindung. Hierbei werden die metallische Bindung, die kovalente Bindung und die Ionenbindung unterschieden.

Beispiel G2.5-2: Die Kohlenstoffverbrennung ist ein exothermer Vorgang. Es entsteht Kohlenstoffdioxid  $\text{CO}_2$  bei der Reaktion von Kohlenstoff C mit Sauerstoff O.

$\text{C} + \text{O}_2 \rightarrow \text{CO}_2 - 394 \text{ kJ/mol}$ . Die freigesetzte Reaktionswärme (Reaktionsenthalpie) als Verbrennungswärme mit 394 kJ/mol ist als kinetische Energie auf die ( $1 \text{ mol} = 6 \cdot 10^{23}$ )  $\text{CO}_2$ -Moleküle verteilt. Daher sind die Partner C und  $\text{O}_2$  im Molekül  $\text{CO}_2$  stärker aneinander gebunden als die beiden Partner O und O im Molekül  $\text{O}_2$ , was die frei werdende Reaktionswärme erklärt. Da ein Kohlenstoffatom im Mittel 6 Protonen und 6 Neutronen im Atomkern hat, ergibt sich die Massezahl 12:  $^{12}\text{C}$ . Mit der atomaren Masseneinheit je Kernbaustein

$1 m_u = 1.66 \cdot 10^{-27}$  kg und vernachlässigbar kleiner Elektronenmasse hat ein 1 kg eines Stoffes  $L$  Kernbausteine:  $1 \text{ kg} / (1 m_u) = 6.023 \cdot 10^{26} = L = 1 \text{ kmol}$ . Daher hat  $1 \text{ kmol}^{-12}\text{C}$ -Atome die Masse 12 kg. Bei der Verbrennung von 1kg Kohlenstoff wird daher die chemische Energie

$$W_{\text{ch}} = \frac{1 \text{ kg}}{12 \text{ kg/kmol}} \cdot 394 \frac{\text{MJ}}{\text{kmol}} = 32.8 \cdot 10^6 \text{ J} \quad (\text{G2.5-3})$$

frei. Der Heizwert von reinem Kohlenstoff ist somit  $H_i = W/M = 32.8 \text{ MJ/kg}$ .

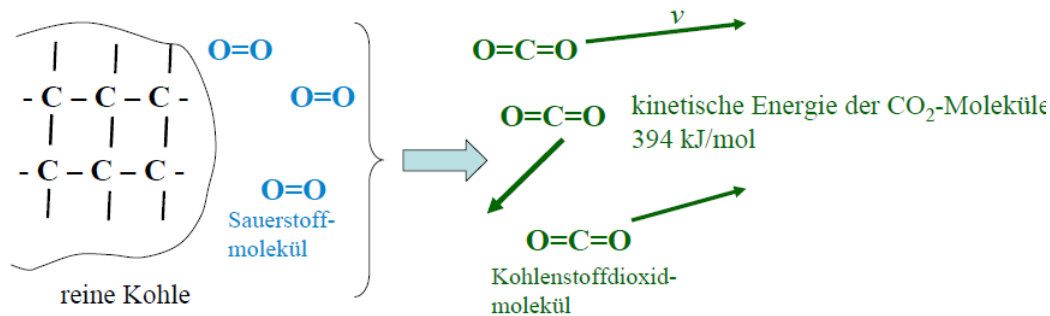


Bild G2.5-1: Kohlenstoffverbrennung mit reinem Sauerstoff zu Kohlenstoffdioxid

### Beispiel G2.5-3:

Die Ozonbildung  $\text{O}_3$  ist ein endothermer Vorgang:  $\text{O}_2 + \text{O}_2 + \text{O}_2 \rightarrow 2\text{O}_3 + 403 \text{ kJ/mol}$ . Die Reaktionsenthalpie ist positiv und muss daher dem Vorgang zugeführt werden. Folglich ist das  $\text{O}_3$ -Molekül schwächer gebunden als die  $\text{O}_2$ -Moleküle.

Die Reaktionsenthalpie  $\Delta H$  muss gemäß der *Einstein*-Formel  $W = \Delta M \cdot c_0^2 = \Delta H$  einer Massenveränderung (Massendefekt)  $\Delta M$  entsprechen. Für die Verbrennung von 1 kg C erhalten wir einen verschwindend kleinen Massendefekt:

$$\Delta M / M = (W / M) / c_0^2 = H_i / c_0^2 = 32.8 \cdot 10^6 / (3 \cdot 10^8)^2 = 3.6 \cdot 10^{-10} \approx 0. \quad (\text{G2.5-3})$$

Bei chemischen Vorgängen (also dem Binden und Lösen von Verbindungen) bleiben folglich die Energie (gemäß dem Energieerhaltungssatz) UND die Masse (nahezu wegen des sehr kleinen „Massendefekts“) erhalten!

Die **Energieerhaltung** ist bei der Kohleverbrennung dadurch gegeben, dass das Reaktionsprodukt  $\text{CO}_2$  eine stärkere („höhere“) Bindungsenergie hat als die Reaktanden C und  $\text{O}_2$ , dafür wurde Energie freigesetzt (exotherm, negative Energiezählung  $-394 \text{ kJ/mol}$  in der Reaktionsgleichung), die als z. B. kinetische Energie der  $\text{CO}_2$ -Moleküle auftritt. Im chemischen Bereich wird somit eine erhöhte positiv gezählte Bindungsenergie mit einer frei werdenden (negativ gezählten) Reaktions-Enthalpie zu NULL verrechnet.

Da die chemische Bindungsenergie durch elektrische Kräfte zwischen den Elektronen der Atomhüllen der Bindungspartner bewirkt wird, ist eine lokale Beschreibung der Elektronen als geladene Teilchen nötig, die nicht mehr durch die Gesetze der klassischen Mechanik (*I. Newton*) möglich ist, sondern nur durch die Quantenmechanik. Demnach entspricht jedem Teilchen eine (komplexwertige) Materie-Wellenfunktion  $\underline{\psi}(r,t)$  mit der **De Broglie-Wellenlänge**  $\lambda$ .

$$\lambda = \frac{h}{m \cdot v} \quad (\text{G2.5-4})$$

Das Betrags-Quadrat  $w \sim |\underline{\psi}(\vec{r},t)|^2$  gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit  $w$  das Teilchen mit der Masse  $m$  und dem Impuls  $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$  sich am Ort  $\vec{r}$  zur Zeit  $t$  aufhält. Der

**Bewegungsimpuls**  $p$  des sich frei bewegenden Teilchens gemäß der Quantenmechanik und die zugeordnete kinetische Energie  $W_k$  sind

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} = \frac{h}{\lambda} \cdot \vec{e}_r \Rightarrow v = \frac{h}{\lambda \cdot m} \quad W_k = \frac{m \cdot v^2}{2} = \frac{|\vec{p}|^2}{2m} \quad (G2.5-5)$$

Dieser Impuls und die Energie treten aber nur in bestimmten Mengen (Quanten) auf:

$$W_k = h \cdot f = m \cdot v^2 / 2 \quad (h: \text{Planck'sche Wirkungsquantum } h = 6.625 \cdot 10^{-34} \text{ Js}), \quad (G2.5-6)$$

Die Materiewellen-Frequenz  $f$  ist demnach

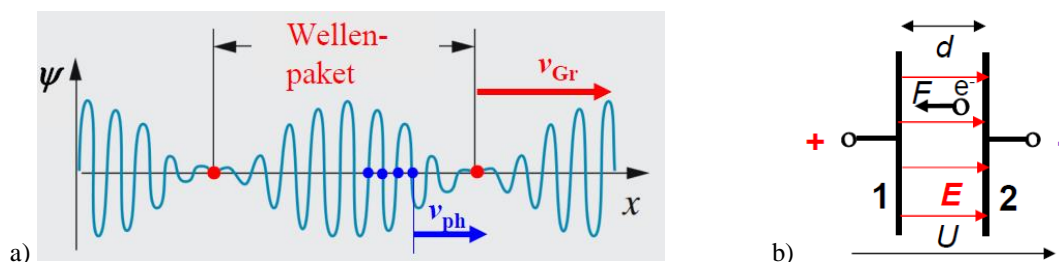
$$W_k = h \cdot f \Rightarrow f = \frac{W_k}{h} = \frac{p^2}{2m \cdot h} = \frac{h}{2m \cdot \lambda^2} \quad (G2.5-7)$$

Die **Phasengeschwindigkeit**  $v_{ph}$  der Materiewellen, also die Geschwindigkeit der Wellenberge, beträgt nur 50% der Teilchengeschwindigkeit  $v$ .

$$\vec{v}_{ph} = v_{ph} \cdot \vec{e}_r = \lambda \cdot f \cdot \vec{e}_r = \frac{h}{2m \cdot \lambda} \cdot \vec{e}_r = \frac{v}{2} \cdot \vec{e}_r \quad (G2.5-8)$$

Die Geschwindigkeit  $v$  der Teilchenmasse  $m$ , und damit die Geschwindigkeit  $v$  der transportierten Energie  $W_k$ , ist wie bei jeder Wellenausbreitung die „Wellengruppen“-Geschwindigkeit  $v_{Gr}$ , die für Materiewelle folgenden Wert hat (Bild G2.5-2a):

$$v_{Gr} = \frac{df}{d(1/\lambda)} = \frac{df}{-d\lambda} = -\lambda^2 \cdot \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{h}{2m\lambda^2} \right), \quad v_{Gr} = -\lambda^2 \cdot \frac{-2h}{2m\lambda^3} = \frac{h}{m\lambda} = v \quad (G2.5-9)$$



**Bild G2.5-2:** a) Materiewelle einer frei beweglichen Teilchenfolge, deren wahrscheinlicher Aufenthaltsort mit der Lage der Wellenpakete übereinstimmt (Quelle: Gerthsen, Physik), b) Elektron  $e$  wird im  $E$ -Feld  $E = U/d$  eines Plattenkondensators (mit dem Plattenabstand  $d$ ) beschleunigt

#### Beispiel G2.5-4: Bild G2.5-2b

Elektron  $e$  wird im  $E$ -Feld eines Plattenkondensators (mit dem Plattenabstand  $d$ ) beschleunigt; die Kondensatorspannung beträgt  $U = E \cdot d = 2.5 \text{ kV}$ . Die *Coulomb*-Kraft  $F$  und die aufgenommene kinetische Energie  $W_k$  sind

$$|F| = E \cdot |e| = E \cdot e \Rightarrow W_k = F \cdot d = m_e \cdot v^2 / 2 = U \cdot e = 2500 \text{ eV} = 4 \cdot 10^{-16} \text{ J}.$$

Die zugehörige Teilchengeschwindigkeit  $v$  und die entsprechende *de Broglie*-Wellenlänge  $\lambda$  sind mit der Elektronenmasse  $m_e = 9.108 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$

$$v = \sqrt{2 \cdot U \cdot e / m_e} = 29.65 \cdot 10^6 \text{ m/s} = 0.1 \cdot c_0$$

und

$\lambda = h / \sqrt{2 \cdot U \cdot e \cdot m_e} = 0.25 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ . Diese Wellenlänge ist vergleichbar kurz wie jene elektromagnetischer kurzwelliger *Röntgen*-Strahlen.

Wie Bild G2.5-2b zeigt, ist der genaue Ort  $x$  der Teilchen durch die Materiewelle nicht angegeben, sondern nur ein bestimmter wahrscheinlicher Aufenthaltsbereich, was in der **Heisenberg'schen Unschärferelation** formuliert ist: Geschwindigkeit  $v$  und Ort  $r$  (bzw.  $x$ )

des Teilchens lassen sich durch Messung gleichzeitig nicht beliebig genau angeben, sondern nur mit der Impuls-Unschärfe (Ungenauigkeit)  $\Delta p = m \cdot \Delta v$  und Orts-Unschärfe  $\Delta r$ :

$$\Delta p \cdot \Delta r \geq \frac{h}{2\pi} \quad . \quad (G2.5-10)$$

Die Beispiele G2.5-5 und G2.5-6 zeigen, dass die *Heisenberg*-Unschärferelation nur bei sehr kleinen Teilchen Bedeutung hat.

Beispiel G2.5-5:

Die Lage  $r$  eines makroskopisch großen Körpers mit der Masse  $m = 1 \text{ g}$  ist mit der sehr kleinen „Unschärfe“  $\Delta r = 10^{-10} \text{ m}$  hochgenau bekannt, denn die Unschärfe beträgt, da der Körper aus miteinander verbundenen Atomlagen aufgebaut ist, nur ca. 1 Atomradius  $10^{-10} \text{ m}$ ! Daraus resultiert eine SEHR KLEINE Unschärfe bei der Geschwindigkeitsmessung  $\Delta v$  von nur  $10^{-21} \text{ m/s}$ !

$$\Delta v \geq \frac{h}{m \cdot 2\pi \cdot \Delta r} = \frac{6.625 \cdot 10^{-34}}{10^{-3} \cdot 2\pi \cdot 10^{-10}} = 10^{-21} \text{ m/s}$$

Beispiel G2.5-6:

Die Lage  $r$  eines Elektrons mit der Masse  $m = m_e$  sei, wie in Bsp. G2.5-5, ebenfalls mit Ungenauigkeit  $\Delta r = 10^{-10} \text{ m}$  bekannt. Bezogen auf „Elektronenradius“  $r_e$  ist diese Unschärfe  $\Delta r$  ( $\approx$  ca. 1 Atomradius) ein sehr großer Wert! Daher tritt eine SEHR GROSSE Unschärfe  $\Delta v$  bei der Geschwindigkeitsmessung von  $10^6 \text{ m/s}$  auf!

$$\Delta v \geq \frac{h}{m_e \cdot 2\pi \cdot \Delta r} = \frac{6.625 \cdot 10^{-34}}{9.108 \cdot 10^{-31} \cdot 2\pi \cdot 10^{-10}} = 1.16 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

Das **Wasserstoff-Atom** ist das am einfachsten aufgebaute Atom mit einem Proton (Masse  $m_p$ ), das eine el. Elementarladung  $e$  trägt, als Kern und einem Elektron (Masse  $m_e$ ) mit der Ladung  $-e$  als „Elektronenhülle“ bzw. Atomhülle (Bild G2.5-3a). Das Modell zum Verständnis der Kräfte zwischen Kern und Hülle war ursprünglich das **Rutherford-Modell** gemäß den Gesetzen der klassischen Mechanik. Demnach wird das den positiven Kern mit der Geschwindigkeit  $v$  umkreisende Elektron vom Kern mit *Coulomb*-Kraft  $F_C$  angezogen, gegen die es Fliehkraft  $F_F$  im Gleichgewicht hält.

$$F_C = \frac{e \cdot e}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} = F_F = m_e \cdot \frac{v^2}{r} = m_e \cdot a \quad \text{kinetische Energie : } W_k = m_e \cdot \frac{v^2}{2} \quad (G2.5-11)$$

Die Kritik an diesem Modell macht geltend, dass die Zentripetalbeschleunigung  $a$  des kreisenden Elektrons nach der klassischen Elektrodynamik bewirken muss, dass die so beschleunigte el. Ladung des Elektrons eine el.-magn. Welle abstrahlen müsste. Die damit abgestrahlte el.-magn. Energie  $W_{em}$  entzieht diese Energie der kinetischen Energie des kreisenden Elektrons, so dass  $W_k$  und damit  $v$  und  $F_F$  sinken. Damit überwiegt  $F_C > F_F$ , so dass Elektron in den Kern stürzen würde. Deshalb wird dieses Modell durch **das Bohr-Modell** ersetzt mit der Forderung nach „strahlungsfreien“ Elektronenbahnen („Orbit“, hier näherungsweise Kreisbahn mit Radius  $r$ ) um den Kern. Mit den o. g. Gesetzen der Quantenmechanik wird daher gefordert, dass entlang dem Bahnumfang  $2\pi r$  eine stationäre, also konstante Aufenthaltswahrscheinlichkeit  $w$  für das Elektron auftritt. Dies ist bei einer auf einer Kreisbahn laufenden Materiewelle nur möglich, wenn die Materiewellenlänge ein ganzzahliger Bruchteil  $1/n$  ( $n$ : **Hauptquantenzahl**) des Bahnumfangs ist:

$$\lambda \cdot n = 2\pi \cdot r, \quad n = 1, 2, 3 \dots (\text{Bild G2.5-4 und Formel (G2.5-12)}).$$

$$\lambda \cdot n = \frac{h}{m_e \cdot v} \cdot n = 2\pi \cdot r \Rightarrow v = \frac{h \cdot n}{m_e \cdot 2\pi \cdot r} \quad (G2.5-12)$$



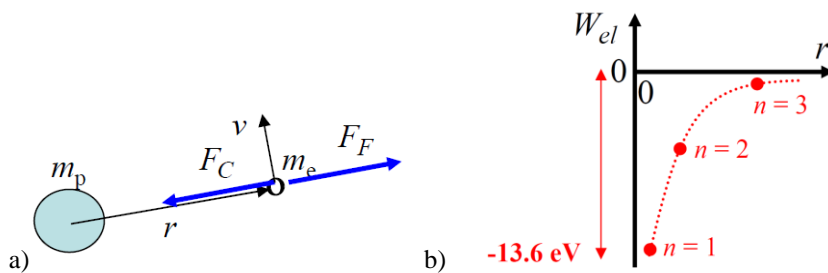
$$F_F = \frac{m_e}{r} \cdot \left( \frac{h \cdot n}{m_e 2\pi \cdot r} \right)^2 = F_C = \frac{e^2}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} \Rightarrow r(n) = \frac{\epsilon_0 \cdot h^2}{\pi \cdot m_e \cdot e^2} \cdot n^2 \tag{G2.5-13}$$

Aus dem Kräftegleichgewicht wird der Radius  $r(n)$  der strahlungsfreien Kreisbahnen (G2.5-13) ermittelt. Auf diesem Orbit treten die kinetische Elektronen-Energie (G2.5-14) und die potentielle elektrostatische Elektronen-Energie (G2.5-15) auf, deren Summe die gesamte **Elektronen-Energie**  $W_{el}$  ist.

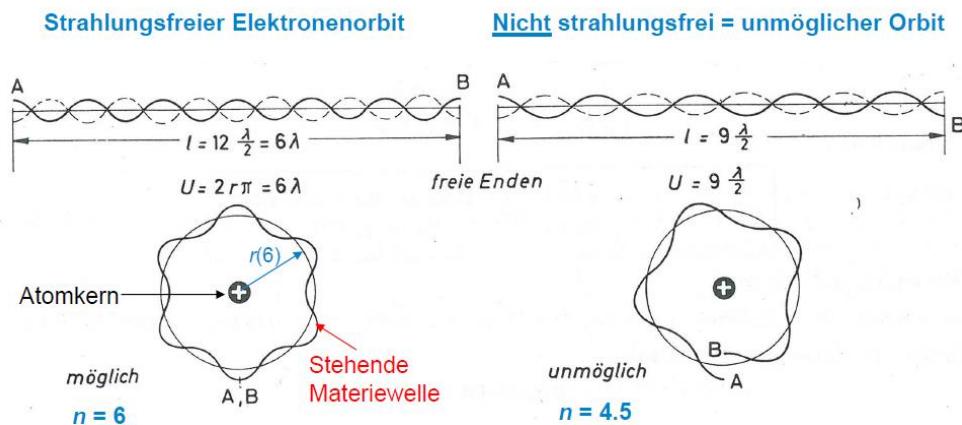
$$W_k(n) = m_e \cdot \frac{v(n)^2}{2} = \frac{F_C \cdot r}{2} = \frac{e^2}{8\pi \cdot \epsilon_0 \cdot r(n)} \tag{G2.5-14}$$

$$W_p(n) = -\frac{e^2}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot r(n)} = -2 \cdot W_k(n) \tag{G2.5-15}$$

Daher ist die gesamte Elektronen-Energie  $W_{el} = W_k + W_p$  bei  $r \rightarrow \infty$  Null. Dort ruht das Elektron:  $W_k = 0$ . Die potentielle Energie ist ebenfalls Null:  $W_p \sim 1/r = 0$ ;  $W_{el} = W_k + W_p = 0$ . Beim Orbit-Radius  $r(n)$  ist die Elektronen-Energie  $W_{el} = W_k + W_p = W_k - 2W_k = -W_k$  **NEGATIV**, was einem **GEBUNDENEN** Zustand des Elektrons entspricht (Tab. G2.5-1). Diese Energie ist das Negative der kinetischen Energie und bei  $n = 1$  negativ maximal  $-13.6 \text{ eV}$  Bindungsenergie. Orbits  $n > 1$  sind schwächer gebundene („angeregte“) Zustände.



**Bild G2.5-3:** a) Kräftegleichgewicht beim mechanistischen H-Atommodell für die strahlungsfreie Elektronenbahn, b) Elektronenenergie  $W_{el}$  auf den ersten drei strahlungsfreien Orbits in der Elektronenhülle des H-Atoms (nicht maßstäblich!)



**Bild G2.5-4:** Beispiel für gültige und ungültige Lösung für die Materiewelle des kreisenden strahlungsfreien Elektrons (Quelle: Schreiner, Physik)

Für  $n = 1$  ergibt Tab. G2.5-1 einen Orbitradius  $r = 5 \cdot 10^{-11} \text{ m}$  und damit einen „H-Atomradius“ von ca.  $2r = 10^{-10} \text{ m} = 1 \text{ Angström}$ ! Die den Hauptquantenzahlen  $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \dots$  zugeordneten Elektronenorbits („Schalen“ gleicher Aufenthaltswahrscheinlichkeit um den Kern) werden mit K, L, M, N, O, P, Q ... bezeichnet.

$n$	1	2	3	4
$r / (10^{-11} \text{ m})$	5.292	21.16	47.63	84.67
$W_{el} / (10^{-18} \text{ J})$	-2.18	-0.545	-0.242	-0.136
$W_{el} / \text{ eV}$	-13.6	-3.4	-1.5	-0.85

Tabelle G2.5-1: Die ersten vier Orbitradien des Elektrons im H-Atom und die zugehörige Elektronenenergie im E-Feld des positiv geladenen Kerns

Die Lösung der für die Quantenmechanik maßgebenden *Schrödinger*-Gleichung zur Ermittlung der Amplitude der Materiewelle bei Anwesenheit von  $W_p(n)$  gemäß (G2.5-15) liefert zusätzlich zu  $n$  den ganzzahligen Parameter  $l$  (**Nebenquantenzahl** bzw. **Drehimpulsquantenzahl**, Bild G2.5-5a).

$$l = 0, 1, 2, 3, \dots, n - 1 \tag{G2.5-16}$$

Damit wird der durch die Rotation des Elektrons um den Kern auftretende Bahn-Drehimpuls quantenmechanisch erfasst. Bei  $l = 0$  tritt über das Quadrat des Betrags der komplexwertigen Materiewellen-Amplitude eine kugelsymmetrische Verteilung der Aufenthaltswahrscheinlichkeit  $w = w(r)$  des Elektrons in der Atomhülle auf. Der zugehörige Bahndrehimpuls ist Null. Der durch  $n > 0$  und  $l = 0$  beschriebene Elektronenorbit heißt s-Orbitale mit seinem zugehörigen Elektronen-Energieniveau  $W_{el}$  gemäß Tab. G2.5-1. Bei  $l > 0$  weicht die Verteilungen der Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Elektrons in der Atomhülle von der Kugelsymmetrie ab und hängt auch vom Umfangswinkel ab. Es tritt ein Bahn-Drehimpuls und damit eine etwas erhöhte Elektronenenergie  $W_{el}$  auf. Somit legen  $n$  und  $l$  die Energieniveaus  $W_{el}$  des Elektrons im H-Atom fest! Aus (G2.5-16) sind lediglich  $l = 0, 1, 2, 3$  für die in der Natur vorkommenden Elemente relevant. Die zugehörigen Orbitale heißen s-, p-, d-, f-Orbital (Bild G2.5-5b).

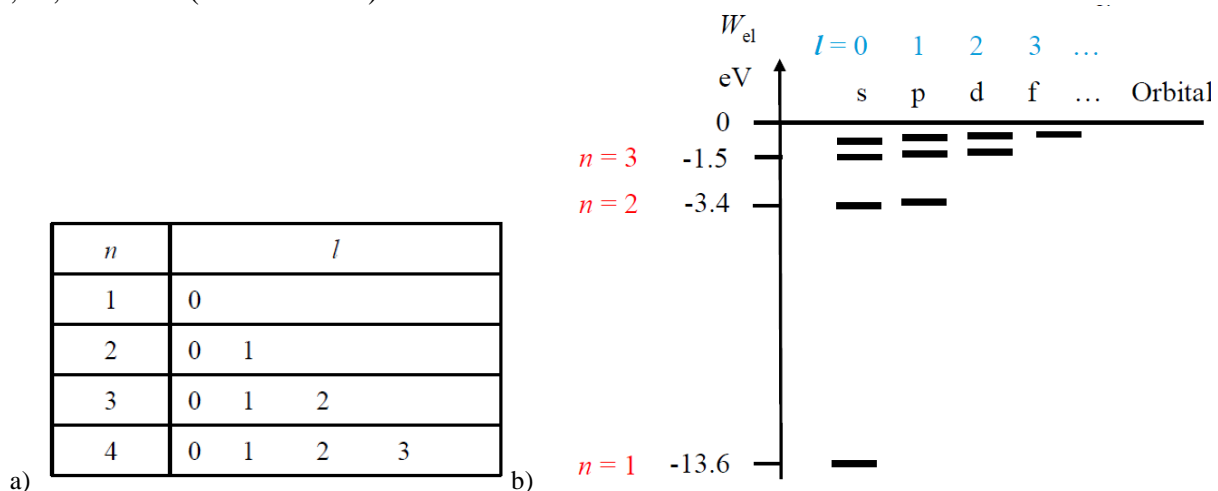


Bild G2.5-5: Elektron im H-Atom: a) Die ersten vier Nebenquantenzahlen  $l$  für den Bahndrehimpuls des Elektrons, b) Die Energieniveaus des Elektrons sind für  $l > 0$  gegenüber  $l = 0$  erhöht mit steigendem  $l$

Die ursprüngliche **mechanische Vorstellung** von einem auf einer (Kreis-)Bahn um den Kern kreisenden Elektron interpretiert dieses als el. Kreisstrom, der gemäß dem Durchflutungssatz ein atomares Magnetfeld erregt, so dass ein atomarer magnetischer Dipol entsteht. Diese Elementarströme aller Atome im Festkörper summieren sich zum resultierenden Magnetismus des Festkörpers („Remanenz“), der maximal ist, wenn alle Kreisströme dieselbe Bahnachse haben (Elementarstromtheorie des *A. M. Ampère*). Mit dem **quantenmechanischen Modell** ist bei  $l = 0$  (Drehimpulsquantenzahl ist Null: s-Orbitale) der Drehimpuls des Bahnelektrons Null, weil eine kugelsymmetrische Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Elektrons auftritt. Dann tritt auch kein Kreisstrom und damit kein atomares Magnetfeld auf! Bei  $l > 0$  (p, d, f ...-Orbitale) tritt ein Bahn-Drehimpuls dieses „Bahnelektrons“ auf. Der

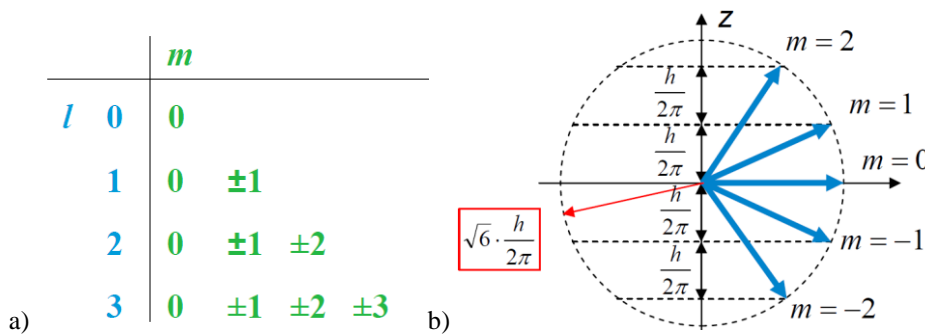
zugehörige Drehimpulsbetrag  $L$  ist gemäß der Lösung der *Schrödinger*-Gleichung  $|L| = \sqrt{l \cdot (l + 1)} \cdot h / (2\pi)$ . In diesem Fall führt der Bahndrehimpuls zu einem Kreisstrom und damit zu einem atomaren Magnetfeld. Allerdings sind nur bestimmte Drehimpulswerte quantenmechanisch möglich (Drehimpuls-Quantelung). Es treten nur  $m$  Werte für den Drehimpuls auf:  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm l$  (Parameter  $m$ : **Magnetquantenzahl**, Bild G2.5-6a). Der **Elektron-Bahndrehimpuls** hat eine Komponente in Beobachtungsrichtung  $z$ , die gequantelt auftritt als

$$L_z(m) = m \cdot h / (2\pi), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l, \tag{G2.5-17}$$

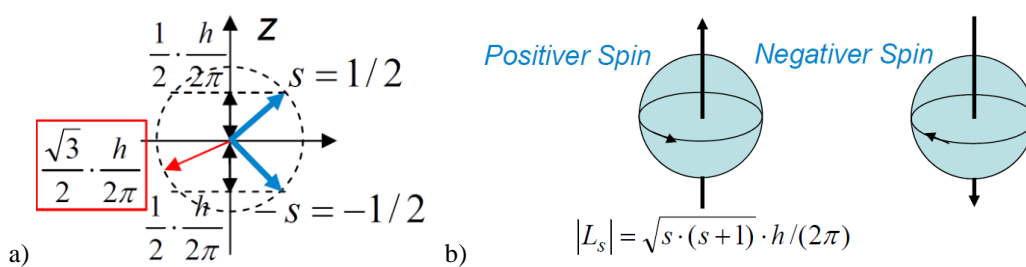
während der Drehimpulsbetrag

$$|\vec{L}| = \sqrt{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2} = |L|(l) = \frac{h}{2\pi} \cdot \sqrt{l \cdot (l + 1)}; \quad \text{z. B.: } l = 2: |L|(2) = \sqrt{6} \cdot \frac{h}{2\pi}, \tag{G2.5-18}$$

dadurch ebenfalls gequantelt ist (Bild G2.5-6), wobei aber seine Komponenten  $L_x, L_y$  nicht bekannt sind, sondern wegen  $|\vec{L}| > L_z$  nur  $L_x^2 + L_y^2 = |\vec{L}|^2 - L_z^2$ . Somit liegt der Drehimpulsvektor  $\vec{L} = (L_x, L_y, L_z)$  je Wert  $m$  auf einem Kegelmantel um die  $z$ -Achse, wobei seine genaue Lage am Kegelmantel wegen der *Heisenberg*-Unbestimmtheitsrelation nicht feststellbar ist.



**Bild G2.5-6:** Elektron im H-Atom: a) Die ersten vier Nebenquantenzahlen  $l$  und Magnetquantenzahlen  $m$ , b) Bahndrehimpulsvektor  $L$  mit seiner gequantelten  $z$ -Komponente (Beobachtungsrichtung) und dem zugehörigen Vektor-Betrag; Bsp.: Zu  $l = 2$  treten 5  $L$ -Vektormöglichkeiten auf.



**Bild G2.5-7:** a) Elektron im H-Atom: Eigendrehimpulsvektor  $L_s$  mit seiner gequantelten  $z$ -Komponente (Beobachtungsrichtung) und dem zugehörigen Vektor-Betrag; Es treten nur zwei  $L_s$ -Vektormöglichkeiten auf, nämlich „positiver“ und „negativer“ Spin-Vektor. b) Modell zum „positiven“ und „negativen“ Spin-Vektor.

Zusätzlich ist im klassischen mechanischen Modell eine Eigenrotation des Elektrons um seine eigene Achse möglich. Dieser **Elektron-Eigendrehimpuls („Spin“)** ist quantenmechanisch wiederum nur in seiner Komponente in der Beobachtungsrichtung  $z$  bestimmbar und wiederum gequantelt als zwei Werte  $L_{s,z} = s \cdot h / (2\pi)$ ,  $s = \pm 1/2$ . Der Parameter der Quantelung ist die **Spin-Quantenzahl**  $s$ . Der Betrag des Elektron-Eigendrehimpulses ist

$$|\vec{L}_s| = \frac{h}{2\pi} \cdot \sqrt{|s| \cdot (|s| + 1)} = \frac{h}{2\pi} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{G2.5-19}$$

Seine Komponenten  $L_{s,x}$ ,  $L_{s,y}$  sind nicht bekannt. Wegen  $|\vec{L}| > L_{s,z}$  ist nur  $S_x^2 + S_y^2 = |\vec{S}|^2 - S_z^2$  bekannt. Somit liegt der Spin-Vektor  $\vec{L}_s = (L_{s,x}, L_{s,y}, L_{s,z})$  je Wert  $s$  auf einem Kegelmantel um die  $z$ -Achse, wobei seine genaue Lage am Kegelmantel wegen der *Heisenberg-Unbestimmtheitsrelation* nicht feststellbar ist (Bild G2.5-7). Es existiert mit  $L_{s,z} = h/(4\pi)$  ein „positiver“ Spin-Vektor und mit  $L_{s,z} = -h/(4\pi)$  ein „negativer“ Spin-Vektor.

Die **mechanische Vorstellung** zum Spin eines negativ geladenen Elektron („Elektronenspin“), aber auch eines positiv geladenen Kerns („Kernspin“) als rotierende Kugeln mit darin gleichmäßig verteilter Ladungsdichte (Bild G2.5-7b), führt wiederum auf Kreisströme um die Rotationsachse, die aber wegen der kleinen dabei umschriebenen Kreisfläche (prop. zum Quadrat des Elektronen- bzw. Kernradius) nur ein kleines Spin-Magnetfeld erregen. Gemäß dem **quantenmechanischem Modell** tritt der Spin-Drehimpuls tritt nur gequantelt auf. Für das Elektron existieren zwei Spin-Vektoren gemäß der Spinquantenzahl  $s = \pm 1/2$  mit einem Betrag  $|L_s| = \sqrt{|s| \cdot (|s| + 1)} \cdot h/(2\pi) = \sqrt{3} \cdot h/(4\pi)$ . Der Spin-Drehimpuls-Vektor  $L_s$  kann daher sowohl mit positivem als auch mit negativem Vorzeichen auftreten, mit der symbolischen Darstellung:  $\downarrow\uparrow$  und entspricht einem positiv oder negativ orientierten Kreisstrom und Magnetfeld! Die „negative“ Richtung wird „antiparallele“ Spinausrichtung genannt.

Aufbauend auf der Lösung für die Materiewellen zum H-Atom werden komplizierte Näherungslösungen für die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten der Hüllenelektronen für die schwereren **Atome mit Z Protonen im Kern und Z Elektronen in der Hülle (Z: Kernladungszahl)** ermittelt. Ähnlich wie bei H-Atom ( $Z = 1$ ) werden für  $Z > 1$

- die Energieniveaus  $W_{el}$  der Hüllen-Elektronen und
- ihre Aufenthaltswahrscheinlichkeitsverteilung (Orbitale) berechnet.

Nach dem dabei zu beachtenden, quantenmechanisch begründeten **Pauli-Prinzip** dürfen je Orbital nie zwei oder mehr Elektronen in allen vier Quantenzahlen  $n$ ,  $l$ ,  $m$ ,  $s$  übereinstimmen, so wie das auch bei der H-Atomlösung der Fall ist. Daher dürfen wegen  $s = \pm 1/2$  je zwei Elektronen mit antiparallem Spin in einem Orbital auftreten! Wir berechnen mit Bild G2.5-6a die max. zulässige Anzahl der Elektronen je Orbital, die  $2 \cdot (2l + 1)$  beträgt.

Je s-Orbital:  $l = 0$ :  $m = 0$ : ( $\downarrow\uparrow$ ) 2 Elektronen,  $2 \cdot (2l + 1) = 2 \cdot 1 = 2$ ;

Je p-Orbital:  $l = 1$ :  $m = 0, \pm 1 = 3$  Zustände  $\times 2$  ( $\downarrow\uparrow$ ) Elektronen = 6 Elektronen,  
 $2 \cdot (2l + 1) = 2 \cdot 3 = 6$ ;

Je d-Orbital:  $l = 2$ :  $m = 0, \pm 1, \pm 2 = 5$  Zustände  $\times 2$  ( $\downarrow\uparrow$ ) Elektronen = 10 Elektronen,  
 $2 \cdot (2l + 1) = 2 \cdot 5 = 10$ ;

Je f-Orbital:  $l = 3$ :  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 = 7$  Zustände  $\times 2$  ( $\downarrow\uparrow$ ) Elektronen = 14 Elektronen,  
 $2 \cdot (2l + 1) = 2 \cdot 7 = 14$ .

Je „Elektronenschale“  $n$  ( $n = 1, 2, 3, 4 \dots$ ) mit den Bezeichnungen K, L, M, N, ...-Schale erhalten wir somit folgende gesamte Elektronenzahl:

$$2 \sum_{l=0}^{n-1} (2l + 1) = 2n^2 \quad . \quad (G2.5-20)$$

Für  $n = 1$  sind dies  $2n^2 = 2$  Elektronen ( $1s^2$ -Orbital). Für  $n = 2$  sind es bereits 8 ( $2s^2$ ;  $1s^2$ -Orbital und  $3p^2$ -Orbitale). Für  $n = 3$  sind es 18 Elektronen ( $2s^2$ ;  $1s^2$ -Orbital,  $3p^2$ -Orbitale,  $5d^2$ -Orbitale). Für  $n = 4$  sind es 32 Elektronen ( $2s^2$ ;  $1s^2$ -Orbital,  $3p^2$ -Orbitale,  $5d^2$ -Orbitale,  $7f^2$ -Orbitale). Damit ergibt sich die **Beschreibung des Atomaufbaus** über

a) die steigende Kernladungszahl  $Z$  (**Protonenzahl im Kern**) des Elements (z. B. C:  $Z = 6$ ),

b) die zugehörige Atomzahl  $A = Z + N$  ( $N$ : **Neutronenzahl im Kern**) des jeweiligen Isotops (z.B.  $C^{12}$ :  $A = 12$ ) und

c) die  $Z$  **Elektronen in der Hülle** in ihren Orbitalen (z. B.: C:  $1s^2 2s^2 2p^2$ ).

Dabei besetzen die Hüllen-Elektronen im energetischen Grundzustand (= keine Anregung des Atoms von außen) die jeweils niedrigsten Energieniveaus  $W_{el}$  aufsteigend. Auf Grund der Wechselwirkung der einzelnen Elektronen untereinander wegen der *Coulomb*-Abstoßungskraft in der Hülle erhöhen sich die Energieniveaus zu jeder Kombination ( $n, l, m, s$ ) gegenüber den Werten im H-Atom (Bild G2.5-5b). Wegen dieser Energieerhöhung der einzelnen Orbitale ist eine **Periode der Elemente** jeweils mit einem Edelgas (He, Ne, Ar, Kr, Xe, Rn, Og) abgeschlossen, wobei die „Perioden“ aber No. 2 durch vollständig besetzte p-Orbitale definiert sind (Bild G2.5-8).

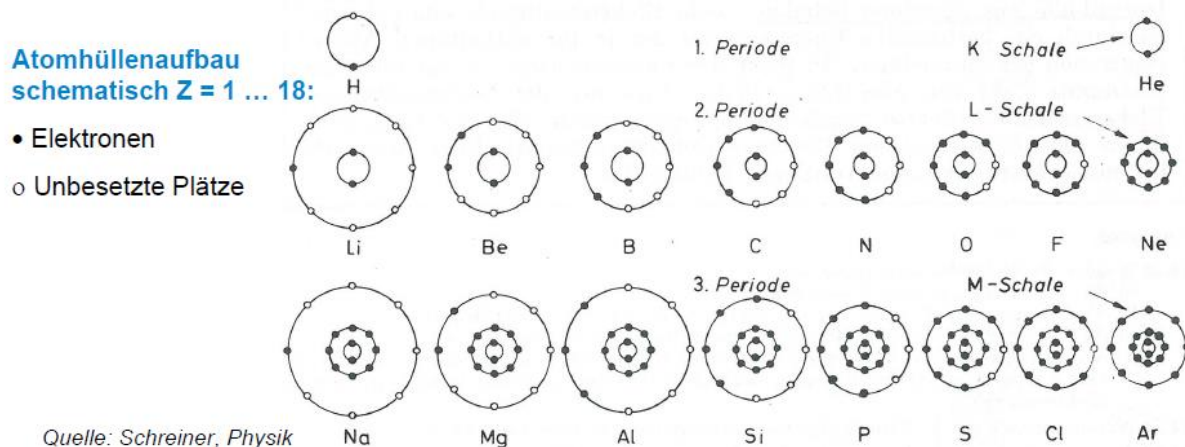
- 1. Periode: 1s: Helium He ( $Z = 2$ )
- 2. Periode: 2s, 2p: Neon Ne ( $Z = 10$ )
- 3. Periode: 3s, 3p: Argon Ar ( $Z = 18$ )
- 4. Periode: 4s, 3d\*, 4p: Krypton Kr ( $Z = 36$ )
- 5. Periode: 5s, 4d\*, 5p : Xenon Xe ( $Z = 54$ )
- 6. Periode: 6s, 4f\*, 5d\*, 6p: Radon Rn ( $Z = 86$ ) (radioaktiv)
- 7. Periode: 7s, 5f\*, 6d\*, 7p: Oganesson Og ( $Z = 118$ ) (radioaktiv, künstlich hergestellt)

Ab der 4. Periode erfolgt die Besetzung der d- und f-Orbitale niedrigerer Hauptquantenzahlen und die Besetzung der s- und p-Orbitale höherer Hauptquantenzahlen „überlappend“, so dass diese der d- und f-Orbitale als \*) „Tauchbahnen“ der Hüllenelektronen bezeichnet werden.

Z	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
Element	H	He	Li	Be	B	C	N	O	F	Ne	...
Orbitale	$1s^1$	$1s^2$	$1s^2 2s^1$	$1s^2 2s^2$	$1s^2 2s^2 2p^1$	$1s^2 2s^2 2p^2$	$1s^2 2s^2 2p^3$	$1s^2 2s^2 2p^4$	$1s^2 2s^2 2p^5$	$1s^2 2s^2 2p^6$	...

$n = 1$   
1. Periode
 $n = 2$   
2. Periode

Bild G2.5-8: Die Elemente der 1. und 2. Periode des Periodensystems mit ihren Orbitalen.



**Bild G2.5-9:** Die Elemente der 1. bis 3. Periode des Periodensystems mit ihren äußeren s- und p-Orbitalen und dem Besetzungszustand dieser Orbitale durch Hüllenelektronen. Bei den Edelgasen He, Ne, Ar ... sind die jeweiligen s- und p-Orbitale zu den Hauptquantenzahlen  $n = 1, 2, 3 \dots$  (Schalen K, L, M, N...) vollständig besetzt. Die Anordnung untereinander in Elemente mit gleichem Besetzungsgrad in den s- bzw. p-Orbitalen definiert ähnliche chemische Eigenschaften und damit gesonderte Hauptgruppen I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII (= Edelgase).

Bei den **Edelgasen He, Ne, Ar, Kr, Xe, Rn und Og** (Oganesson: künstlich erzeugt) sind stets die p-Orbitale mit Elektronenpaaren mit antiparallelem Spin vollständig besetzt. Sie haben

daher wenig Neigung, Verbindungen mit anderen Atomen durch *Coulomb*-Kräfte einzugehen, was als „edles“ Verhalten bezeichnet wird und auf monoatomare Teilchen führt (keine Molekülbildung). Da sie wenig verbindungsfreudig sind, haben sie einen gasförmig Aggregatzustand bis zu den tiefsten Temperaturen. Je kleiner das Atom dabei ist, desto beweglicher ist es im Gas und umso tiefer ist die Verflüssigungstemperatur  $T_s$ . Somit hat das kleine He die tiefste Verflüssigungstemperatur von 4.2 K bei 1 bar (*H. Kamerlingh-Onnes*, 1912). Bei diesen tiefen Temperaturen wurde die für die Energietechnik mittlerweile relevante Supraleitung von einigen Metallen, Legierungen und auch später von keramischen Cupraten entdeckt.

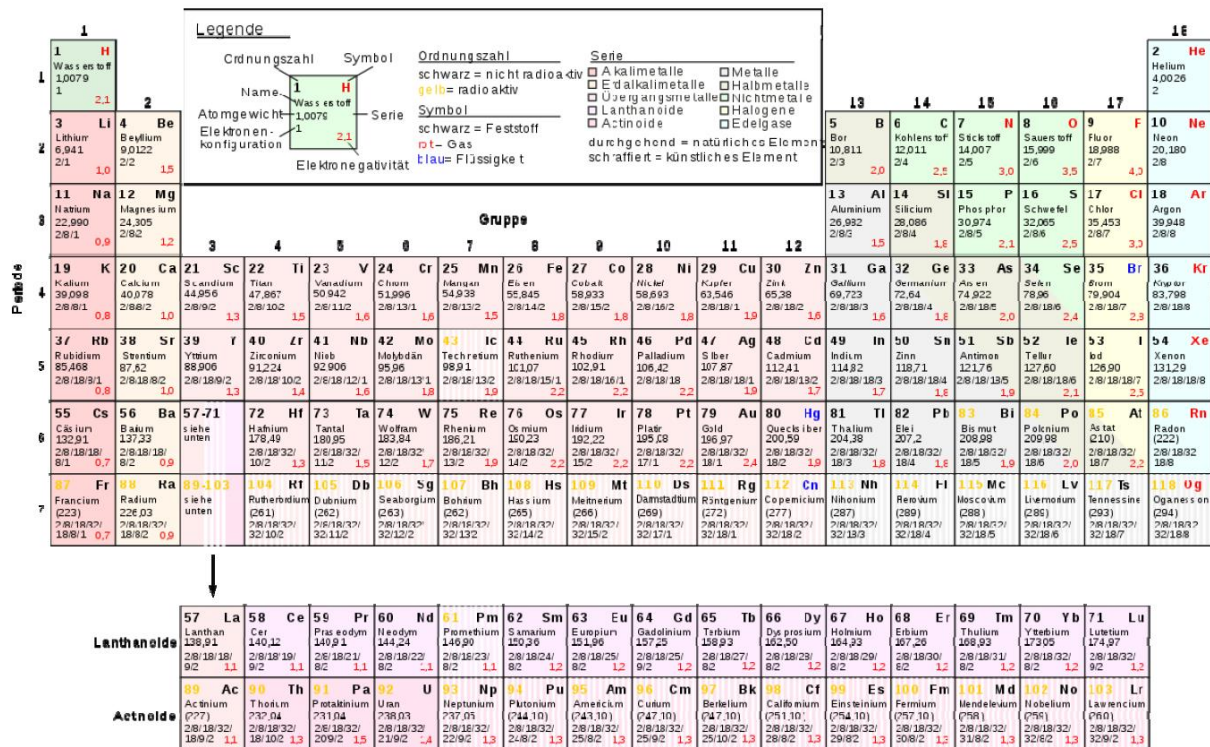


Bild G2.5-10: Das Periodensystem der Elemente mit den bekannten 7 Perioden, den I ... VIII Hauptgruppen und den 18 Gruppen (Quelle: Wikipedia; Joshua D. wondrousch, Matlaabs)

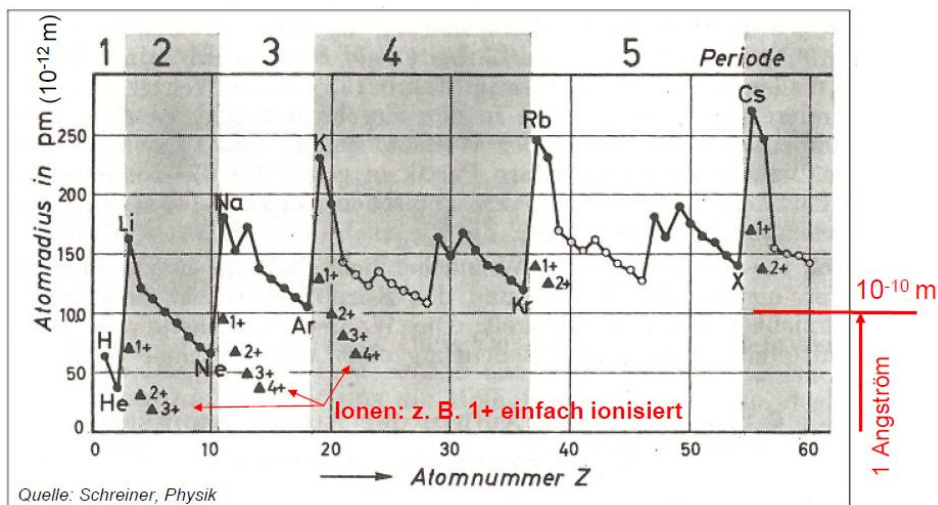


Bild G2.5-11: Das Periodensystem der Elemente bis 5. Periode und dem 1. Element der 6. Periode (Cs) mit den zugehörigen Atomradien. Die Atome mit den am schwächsten gebundenen Hüllenelektronen (= 1 Valenzelektron im s-Orbital, Metalle!) haben die größten Radien je Periode.

Element	He	Ne	Ar	Kr	Xe	Ra
Z	2	10	18	36	54	86
$T_s$	4.2 K	27 K	87 K	120 K	165 K	212 K

Tabelle G2.5-2: Die Verflüssigungstemperaturen der Edelgase (bei 1 bar) sind wegen ihres „edlen“ chemischen Verhaltens sämtlich unter 0°C und steigen mit der Größe des Atomradius.

Die einzelnen Atome der chemischen Elemente können sich durch die *Coulomb*-Kräfte der Hüllenelektronen zunächst zu Molekülen verbinden. Das **einfachste Molekül** ist das  $H_2$ -Molekül, bestehend aus zwei Protonen (el. Ladung jeweils  $+e$ ) als zwei Kerne und zwei Hüllenelektronen (el. Ladung jeweils  $-e$ ). Die quantenmechanisch korrekte Berechnung der Elektronenorbitale ist analytisch nur mit Näherungsmethoden möglich. Noch einfacher ist diese Näherungsrechnung für das einfach ionisierte  $H_2$ -Molekül (Bild G2.5-12a), das  **$H_2^+$ -Ion**. Es besteht aus zwei Protonen als zwei Kerne, aber nur einem Hüllenelektron. Die abstoßende *Coulomb*-Kraft der beiden Protonen ( $+e$  A und B) wird durch die anziehende Kraft des Elektrons  $-e$  zwischen ihnen kompensiert, so dass die Abstände des Elektrons zu A als  $r_A$  und von B als  $r_B$  kleiner sind als der Protonenabstand  $r_{AB}$ ! Für diese Anordnung existiert eine Näherungslösung der *Schrödinger*-Gleichung für die potentielle Energie  $W_{pB}$  von Proton B gegenüber Proton A (G2.5-21). Mit dem H-Atom-Radius (G2.5-13)

$$r(n=1) = \frac{\epsilon_0 \cdot h^2}{\pi \cdot m_e \cdot e^2} = a = 5.3 \cdot 10^{-11} \text{ m} = 0.53 \text{ Angström}$$

als Bezugswert für  $R = r_{AB}/a$  ist diese Energie

$$W_{pB}(R) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot a} \cdot \left[ \frac{1}{2} + \left( \frac{2R}{3} - \frac{1}{R} \right) \cdot e^{-R} \right] = -W_0 \cdot \left[ \frac{1}{2} + \left( \frac{2R}{3} - \frac{1}{R} \right) \cdot e^{-R} \right]. \quad (\text{G2.5-21})$$

Der Gleichgewichtsabstand  $r_{AB}$  zwischen beiden Protonen ist dort, wo Proton B kräftefrei in Bezug auf A ist, wo als  $F = dW_{pB}(R)/dR = 0$  ist (Bild G2.5-12b).

$$dW_{pB}/dR = 0: \quad R^3 - R^2 - \frac{3}{2} \cdot R - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow R = 2.07 \quad (\text{G2.5-22})$$

Dieser Gleichgewichtstabstand ist  $r_{AB,0} = 2.07 \cdot a = 1.1 \text{ Angström}$ . Bei diesem Abstand ist die

$$\text{potentielle Energie je Ion: } W_D = W_{pB}(2.07) = \frac{0.61 \cdot e^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot a} = 2.7 \cdot 10^{-18} \text{ J}/H_2^+ \text{-Ion. Diese Energie}$$

muss Proton B von außen zugeführt werden, um es aus der Bindung an Proton A und das Hüllenelektron zu befreien (zu dissoziieren) und stellt daher die Bindungsenergie  $W_D$  (Dissoziationsenergie) des Ions dar. Ist die zugeführte Energie kleiner, verbleibt B an A, kann aber um die Ruhelage  $r_{AB,0}$  Schwingungen mit der Amplitude  $\Delta r_{AB}$  ausführen („Molekül-Schwingung“, Bild G2.5-12b). Das  $H_2$ -Ion hat in der A-B-Achse etwa die Länge von 2 Atomradien. Eine ähnliche Berechnung für das  $H_2$ -Molekül, wo zwei Hüllen-Elektronen zwischen A und B beide Protonen aneinander binden, zeigt, dass der A-B-Abstand kleiner als beim Ion ist ( $r_{AB,0} = 1.4 \cdot a = 0.74 \text{ Angström}$ ). Die Protonen A und B sind stärker aneinander gebunden, da zwei Elektronen die abstoßende *Coulomb*-Kraft kompensieren; daher tritt ein kleinerer Gleichgewichtsabstand  $r_{AB,0}$  auf und eine höhere Bindungsenergie. Die in Bild G2.5-12 beschriebene chemische Bindungsart ist die **kovalente Bindung (homöopolare Bindung, Atombindung, Elektronenpaarbindung)**.

*Beispiel G2.5-7:*  $H_2$ -Molekül:  $1s^1 + 1s^1$  (H-H): Einfache kovalente Bindung: Zwei Elektronen mit „antiparallelem“ Spin besetzen  $1s$ -Orbital als  $1s^2$ . Sie bewirken im gemeinsamen  $s$ -Orbital

eine „Spinabsättigung“. Dies wirkt wie eine vollständige K-Schale. Daher hat (ähnlich wie bei Edelgasen) das  $H_2$ -Molekül wenig „Neigung“, sich mit anderen  $H_2$ -Molekülen zu verbinden. Wasserstoff  $H_2$  ist daher bis zu tiefen Temperaturen (21 K!) gasförmig ( $H_2$ -Gas)!

**Beispiel G2.5-8:**  $N_2$ -Molekül:  $1s^2 2s^2 2p^3 + 1s^2 2s^2 2p^3$  ( $N \equiv N$ ): Dreifache kovalente Bindung: Je 3 Elektronen von jedem der beiden Atome mit „antiparallelem“ Spin besetzen das gemeinsame  $2p$ -Orbital als  $2p^6$  vollständig. Es existieren 3 Elektronenpaare mit jeweils Spinabsättigung! Folglich ist  $N_2$  ein chemisch träges („inertes“) Molekül-Gas. Es geht nur schwer chem. Verbindungen ein. Es ist daher bis zu tiefen Temperaturen (77 K!) gasförmig ( $N_2$ -Gas).

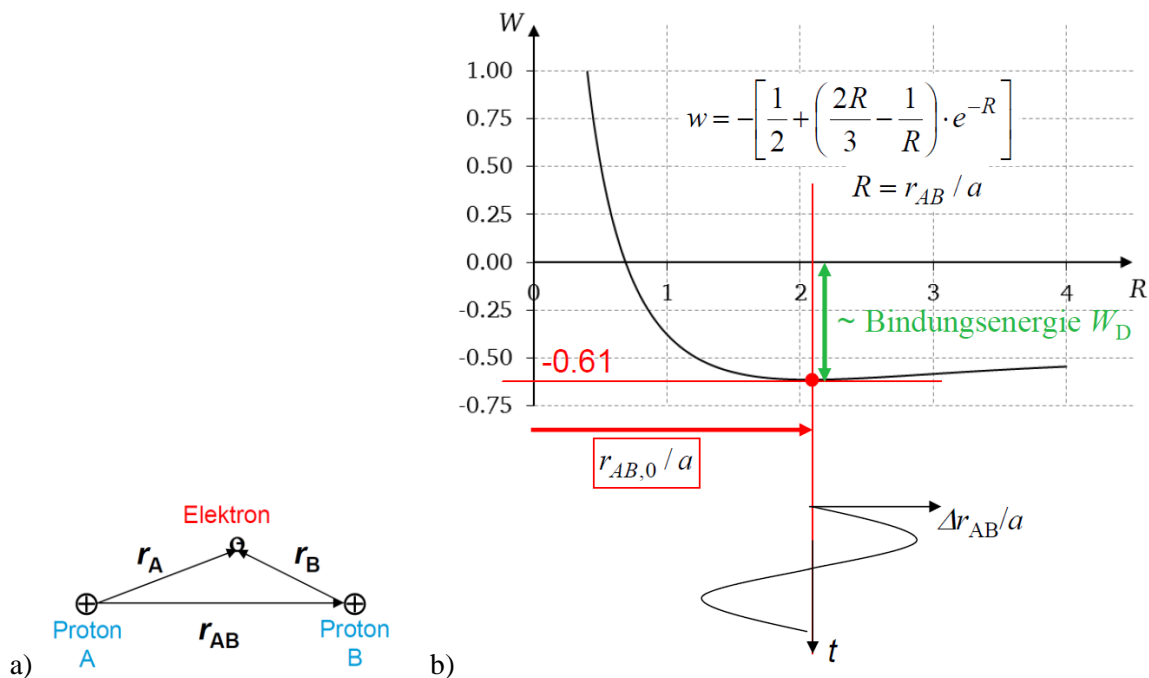


Bild G2.5-12: a) Struktur des einfach ionisierten  $H_2$ -Ions schematisch, b) Zugehörige elektrostatische potentielle Energie  $W/W_0$  des Protons B im  $E$ -Feld des Protons A und des Hüllenelektrons in Abhängigkeit des Protonenabstands  $R = r_{AB}/a$ .

Kovalente Bindungen bilden sich besonders zwischen den Atomen von Nichtmetallen aus. Die Atome bilden - über die Wechselwirkung der Außenelektronen (**Valenzelektronen**) ihrer Elektronenhülle - zwischen sich mindestens ein Elektronenpaar mit Spinabsättigung aus. In Richtung der Achse dieses Paares ordnen sich die beiden verbundenen Atome an. Es entsteht dadurch eine gerichtete Bindung. Dieses **BINDENDE** Elektronenpaar hält i. A. zwei (*Zweizentrenbindung*) oder mehr (*Mehrzentrenbindung*) Atome zusammen. Bei der *Zweizentrenbindung* existiert ein bindendes Elektronenpaar (Einfachbindung; z. B. H-H). Aber auch zwei Paare (Doppelbindung, z. B.: O = O) bzw. drei Paare (Dreifachbindung, z. B.:  $N \equiv N$ ) sind häufig (vgl. Bsp. G2.5-8).

Die **Ionenbindung** (*heteropolare oder elektrovalente Bindung*) beruht auf der elektrostatischen Anziehung durch *Coulomb*-Kraft positiv und negativ geladener Ionen. Diese gerichtete Kraft führt zu einer gerichteten Bindung. Ionenkristalle bilden sich durch die Anordnung unterschiedlich geladener Ionen in einem regelmäßigen Muster (Gitter) relativ leicht und sind daher bei Raumtemperatur meist Festkörper (z.B.: NaCl: Schmelzpunkt  $801^\circ C$ , Siedepunkt  $1461^\circ C$ ). Ionenkristalle lösen sich leicht in polaren Flüssigkeiten, bei denen die Flüssigkeitsmoleküle ausgeprägten el. Dipolcharakter haben (z. B. NaCl in Wasser), da z. B. die polaren Wassermoleküle über ihre *Coulomb*-Dipol-Kräfte die Ionen elektrisch voneinander abschirmen, so dass deren Bindungskraft stark abnimmt!



Beispiel G2.5-9:

NaCl-Molekül: Beim Natriumatom  $1s^2 2s^2 2p^6 3s^1$  (Bild G2.5-9) ist im äußeren 3s-Orbital nur ein Valenzelektron vorhanden, das wegen der fehlenden Spinabsättigung leicht abgetrennt werden kann. Es tritt die Dissoziation  $\text{Na} \rightarrow \text{Na}^+ + \text{e}^-$  auf, so dass als ( $\text{Na}^+$  ein positiv geladenes Na-Ion entsteht).

Chloratom:  $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^5$ : Im äußeren 3p-Orbital fehlt ein Elektron, um dieses Orbital über Spinabsättigung in 3 Elektronenpaaren zu komplettieren! Das Valenzelektron des Na komplettiert das p-Orbital zu  $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6$  gemäß  $\text{Cl} + \text{e}^- \rightarrow \text{Cl}^-$ , so dass mit ( $\text{Cl}^-$  ein negativ geladenes Cl-Ion auftritt. Die Bindung des Na-Ions an das Cl-Ion besteht aus zwei Kraftanteilen:

- Die *Coulomb*-Kraft zwischen  $\text{Na}^+$  und  $\text{Cl}^-$  ist ein wesentlicher Teil der chemischen Bindungskraft!
- Der antiparallele Spin des Na-Valenz-Elektrons im  $3p^6$ -Orbital ergibt auch einen kovalenten Bindungskraftanteil, der ca. 25% der gesamten Bindungskraft beträgt.

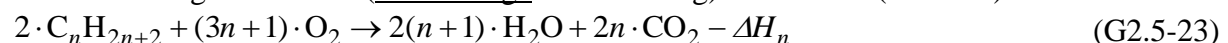
Bei der **metallischen Bindung** haben die einzelnen Metallatome meist nur ein Außenelektron in der Hülle (1 Valenzelektron je Atom) auf der äußersten Schale. Diese sind nur schwach gebunden und können daher leicht vom Atom abgetrennt werden, wie z. B. bei Li:  $1s^2 2s^1$ , Na:  $1s^2 2s^2 2p^6 3s^1$  ... Dadurch ergeben sich die Metalle als Festkörper bei Raumtemperatur mit einem regelmäßigen Kristallgitter aus periodisch angeordneten positiv geladenen Metallionen (Atomrümpfe) mit der Rumpf-Kernladung  $Z$ . Die Valenzelektronen sind nun nicht mehr einem einzelnen Atom zugeordnet. Sie können sich innerhalb des Kristallgitters aus Atomrümpfen nahezu frei bewegen und werden als „Elektronengas“ der Leitungselektronen bezeichnet. Zwischen den Atomkernen und den eng gebundenen Hüllenelektronen eines Rumpfs zum Nachbaratomrumpf **ist viel freier Raum** für die sehr kleinen frei beweglichen Valenz-Elektronen, denn der Atomradius ist ca. 10 000 ... 50 000-mal größer als der Kernradius. Die Leitungselektronen bewirken die hohe elektrische Leitfähigkeit  $\kappa$  und hohe Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  der Metalle, die aber mit steigender Temperatur abnehmen, da die Elektronen an den dann stärker schwingenden Atomrümpfen durch Stöße gebremst werden. Bei der **metallischen Bindung** wirkt die elektrostatische Anziehung zwischen den positiven Atomrümpfen und dem negativen Elektronengas allseitig und führt zu einer ungerichteten Bindung zwischen Atomrümpfen und Leitungselektronen. Wegen dieser ungerichtete Bindung sind Metalle gut plastisch verformbar („duktil“) und nicht spröde! Eine gute Bearbeitung ist

- im kalten Zustand durch Drehen, Fräsen, Bohren etc. möglich,
- im warmem Zustand z. B. Drahtziehen (Kupferdraht!),
- im heißen Zustand z. B. beim Schmieden etc.

Metallatome gehen „leicht“ metallische Verbindungen miteinander ein, so dass die meisten Metalle bei Raumtemperatur Festkörper sind (z. B. Kupfer Cu: Schmelzpunkt  $1084^\circ\text{C}$ , Siedepunkt  $2595^\circ\text{C}$ ). Die Energieverteilung der beweglichen Leitungselektronen im Kristall wird nicht durch die *Maxwell-Boltzmann*-Statistik, sondern wegen der Kräfte im Kristall durch die quantenmechanisch begründete **Fermi-Dirac-Statistik** beschrieben (siehe Kap. T: Solarzelle).

Für die Energietechnik ist die in fossilen Energieträgern (Erdöl, Erdgas, Steinkohle, Braunkohle) „gespeicherte“ chemisch gebundene Energie wichtig. Am Beispiel des Erdöls und Erdgases ist dies die kovalente Bindung zwischen C- und H-Atomen, die diese zu Kettenmolekülen als Kohlenwasserstoffketten, den Alkanen, verbindet. Mit  $n$  als der Anzahl der Kohlenstoffatome je Alkan-Molekül ergibt sich die Strukturformel  $\text{C}_n\text{H}_{2n+2}$ .

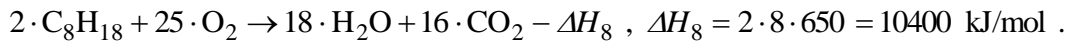
Die vollständige Oxidation (vollständige Verbrennung) der Alkane (G2.5-22)



zu Wasser(dampf) und Kohlestoffdioxid setzt als Reaktionsenthalpie je  $\text{CH}_2$ -Gruppe  $\Delta H_n/(2n) = 650 \text{ kJ/mol}$  frei. Dabei ist die Bindungsenergie der beiden H-Atome an den Kettenenden nicht erfasst, so dass dieser Wert besonders bei langkettigen Alkanen ( $n$  groß) gut stimmt.

**Beispiel G2.5-10:** Octan  $\text{C}_8\text{H}_{18}$ , bestehend aus  $^{12}\text{C}$ -Atomen mit der Protonenzahl und Neutronenzahl 6 und Wasserstoff  $^1\text{H}$ .

Reaktionsgleichung gemäß (G2.5-23) mit  $n = 8$ :



Mit  $\text{C}_8\text{H}_{2 \times 8 + 2}$  ( $8 \times 12 + 18 \times 1 = 114$ ) ergibt das die Masse eines Octan-Moleküls zu  $114 \cdot m_u$

(atomare Masseneinheit  $1 m_u = 1.66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ ).

Octan-Molekülmasse:  $^{12}\text{C} : 12 m_u, ^1\text{H} : m_u \Rightarrow \text{C}_8\text{H}_{18} : (8 \cdot 12 + 18 \cdot 1) \cdot m_u = 114 \cdot m_u$ .

Je Octan-Molekül sind acht  $\text{CH}_2$ -Gruppen vorhanden, so dass die Verbrennungswärme („Brennwert  $H_s$ “) je 1 mol =  $L' = 6.023 \cdot 10^{23}$  sich ergibt gemäß

$$H_s = \frac{\Delta H_8}{2 \cdot 6.023 \cdot 10^{23} \cdot 114 \cdot 1.66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}} = 45.6 \text{ MJ/kg} . \quad (\text{G2.5-24})$$

Der typische Brennwert  $H_s$  von Heizöl beträgt real ca. 44 MJ/kg, und der Heizwert  $H_i$  von Öl ca. 42 MJ/kg (ohne Nutzung der Kondensationswärme des Wasserdampfs). Mit der Öl-Dichte von ca. 0.85 kg/l ergibt sich der Heizwert  $H_i = \text{ca. } 9.9 \text{ kWh/l}$ .

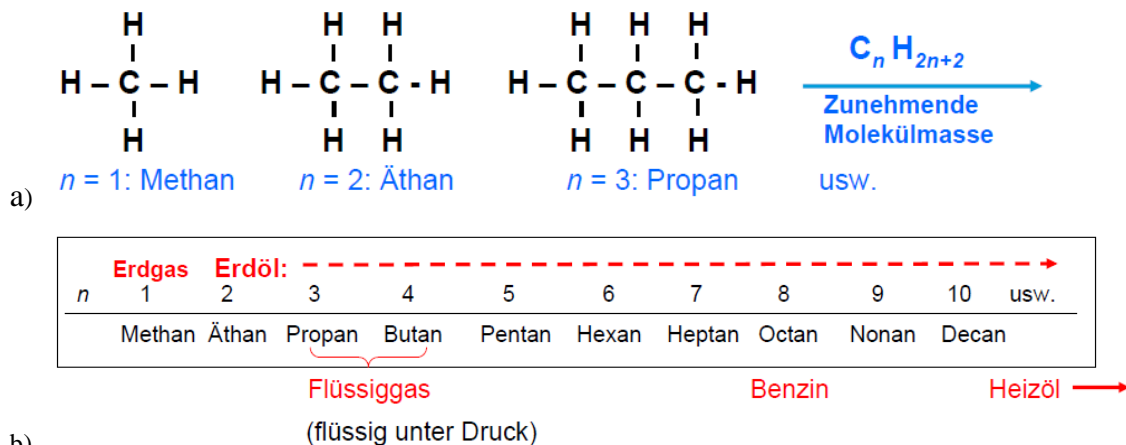
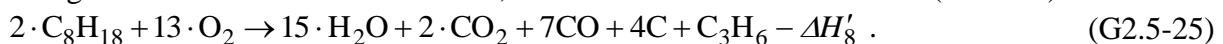


Bild G2.5-13: a) Chemische Struktur der Alkane und b) ihr Auftreten in Erdöl und Erdgas

**Unvollständige Verbrennung** tritt bei Sauerstoffmangel auf. Es sind je Alkan-Molekül zu wenige Sauerstoffmoleküle vorhanden, z. B. beim Octan nur 13 statt 25 (G2.5-25).



Es bilden sich dann als Verbrennungsprodukte neben Wasser und Kohlenstoffdioxid auch UNERWÜNSCHTE Nebenprodukte wie das giftige Kohlenstoffmonoxid  $\text{CO}$ , reiner Kohlenstoff als Russ und andere Moleküle wie Propen  $\text{C}_3\text{H}_6$ . Auch die Reaktionsenthalpie ist geringer  $\Delta H'_8 < \Delta H_8 = 10400 \text{ kJ/mol}$ , da noch ungenutzte Bindungsenergie z. B. im Propen verbleibt. Der **Ruß** als „schwarzer“ Rauch ist ein auffälliges Merkmal unvollständiger Verbrennung.

Das kleinste Alkanmolekül ist **Methan  $\text{CH}_4$**  mit einer Dichte  $0.72 \text{ kg/m}^3$  bei  $0^\circ\text{C}$ , 1013 hPa und einem Siedepunkt von  $-162^\circ\text{C}$ . Die vollständige Methanverbrennung mit reinem Sauerstoff wird nicht durch (G2.5-23) exakt wiedergegeben, da wegen der Kürze der Kette die beiden H-Atome an den Enden mit ihrer Bindungsenergie berücksichtigt werden müssen. Daher ist die Reaktionsenthalpie (Brennwert) höher (G2.5-26).



Der Erdgas-Heizwert  $H_i = \text{ca. } 0.9 \cdot H_s$  ist ca. 90% des Brennwertes  $H_s$ , da bei  $H_i$  die Kondensationswärme des Wasserdampfs nicht berücksichtigt wird. Die Berechnung des Heizwerts führt über die Methan-Molekülmasse

$$^{12}\text{C} \Leftrightarrow 12 \cdot m_u, \quad ^1\text{H} \Leftrightarrow 1 \cdot m_u : \text{CH}_4 \Leftrightarrow 16 \cdot m_u = 16 \cdot 1.66 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 26.56 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \quad (\text{G2.5-27})$$

und die Masse je Mol ( $1 \text{ mol} = 6.023 \cdot 10^{23} \Leftrightarrow 6.023 \cdot 10^{23} \cdot 26.56 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 16 \text{ g}$ ) auf

$$H_i = 802.4 \cdot 10^3 / 0.016 = 50.16 \text{ MJ/kg} = 0.72 \cdot 50.16 \text{ MJ/m}^3 = 36.1 \text{ MJ/m}^3. \quad (\text{G2.5-28})$$

Bei  $0^\circ\text{C}$  erhalten wir den Brennwert

$$H_s \approx H_i / 0.9 = (50.16 / 0.9) \text{ MJ/kg} = 55.7 \text{ MJ/kg} \Rightarrow 0.72 \cdot 55.7 \text{ MJ/m}^3 = 40.1 \text{ MJ/m}^3. \quad (\text{G2.5-29})$$

Der Brennwert des bei Raumtemperatur gasförmigen Methans ist wie bei jedem Gas von der Temperatur und damit vom Gasdruck abhängig! Bei niedrigerer Temperatur hat das Gas eine höhere Dichte und damit einen höheren Brennwert je  $\text{m}^3$ . Die Umrechnung von z. B. bei  $0^\circ\text{C}$  auf  $25^\circ\text{C}$  ist im nachfolgend gezeigt.

$$0^\circ\text{C} : H_s = 55.7 \text{ MJ/kg} \Rightarrow \gamma_{25^\circ} = \gamma_{0^\circ} \cdot 273.15 / (273.15 + 25) = 0.67 \text{ kg/m}^3 \Rightarrow 25^\circ\text{C} : 36.7 \text{ MJ/m}^3$$

Je nach Erdgastyp schwankt der Brennwert real ( $25^\circ\text{C}$ ) zwischen **30 ... 50 MJ/kg** bzw. **25 ... 35 MJ/m<sup>3</sup>**.

Das Erdgas ist nicht zu verwechseln mit dem Stadtgas (Leuchtgas), das aus Kohlevergasung künstlich hergestellt wird (wurde). Es enthält ca. 50 % Wasserstoff  $\text{H}_2$ , 20 % Methan  $\text{CH}_4$ , ca. 15 % Stickstoff  $\text{N}_2$  und 10 % Kohlenmonoxid  $\text{CO}$  (giftig)! Es war für die städtische Gasversorgung („Gaslicht“, Gasherde) seit Beginn der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts von großer Bedeutung. In *Deutschland* waren erste Gasbeleuchtungen z. B. in *Hannover* (1825) und *Berlin* (1826) installiert. Das Gaslicht als „Auer“-Glühstrumpf-Lampe (1885, *C. Auer v. Welsbach*) wurde später abgelöst durch die elektrische Beleuchtung ab ca. 1900 bis 1930, zunächst durch die Kohlefaden-Glühlampe 1879 (*Th. A. Edison*), später durch die moderne Metallfaden-Glühlampe 1898 (*C. Auer v. Welsbach*). Die Stadtgas-Ablösung durch ungiftiges Erdgas (in *Deutschland* Import!) für Heizzwecke fand ab ca. 1960 bis 1990 statt.

## G2.6 Atom- und Kernenergie

a) In der **Atomhülle** wirkt die elektrische Bindungsenergie der elektrisch negativ geladenen Elektronen an den positiv geladenen Atomkern.

b) Im **Atomkern** wirkt die Kernbindungsenergie auf sehr kurzer Distanz etwa eines Kernradius von ca.  $10^{-15} \text{ m}$ . Die dabei wirksame „**starke Wechselwirkungskraft**“ im Kern bindet die Nukleonen (Kernbausteine) als elektrisch positiv geladene Protonen und ungeladene Neutronen aneinander.

Bei leichteren Atomkernen bis zum Eisen (Fe) wird Kernbindungsenergie frei, wenn Kerne miteinander verschmelzen (**Fusion**). Diese Elemente entstehen im Sterninneren durch Fusion aus elementarem Wasserstoff. Bei schwereren Kernen als Fe wird Kernbindungsenergie frei, wenn Kerne gespalten werden (**Fission**). Diese Elemente entstehen bei hohem Druck, die am Ende einer Sternlebensdauer bei den Sternexplosionen („Supernovae“) auftreten.

Die **Kernladungszahl (Ordnungszahl) Z** zählt die Protonenzahl im Kern des Elements (z. B. H:  $Z = 1$ ). Mit der Neutronenanzahl  $N$  ergibt sich die **Atomzahl (Massenzahl) A**  $A = Z + N$  mit der Notation z. B. für das Element Wasserstoff  $^A_Z\text{H}$ .

Mit den Ruhemassen der Atombauusteine

Elektron	$m_e = 9.1083 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$	0.055%
Neutron	$m_n = 1.67470 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$	100.14%
Proton	$m_p = 1.67239 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$	100.0%

ergeben sich die Verhältnisse für

Proton  ${}^1_1\text{H} = 1p$ ,  $m_p = 1818 \cdot m_e$ , Proton-Ladung:  $1e$ ;

Neutron  ${}^1_0\text{n} = 1n$ ,  $m_n = 1839 \cdot m_e$ , Neutron: Ungeladen.

Der **Atomkern** der Elemente besteht aus Protonen und Neutronen (Bild 2.6-1a). Die positiv geladenen Protonen stoßen einander über die *Coulomb*-Kraft ab und werden durch die stärkere „starke Wechselwirkungskraft“ zusammengehalten. Die anziehende Gravitationskraft wäre dafür viel zu klein. **Isotope** sind Atomarten, deren Atomkerne gleich viele Protonen (gleiche Ordnungszahl bzw. Kernladungszahl  $Z$ ), aber unterschiedlich viele Neutronen enthalten (Bild 2.6-1b). Sie haben daher unterschiedliche Massenzahlen  $A$ , stellen aber dasselbe chemische Element dar. Die Isotope eines Elements verhalten sich chemisch fast identisch. He-Kerne werden als  **$\alpha$ -Teilchen** bezeichnet:  ${}^4_2\text{He}$ .

Beispiel G2.6-1:

Isotope: Stickstoff:  ${}^{13}_7\text{N}$ ,  ${}^{14}_7\text{N}$ ,  ${}^{15}_7\text{N}$ , Wasserstoff:  ${}^1_1\text{H}$ ,  ${}^2_1\text{H}$ : Deuterium,  ${}^3_1\text{H}$ : Tritium.

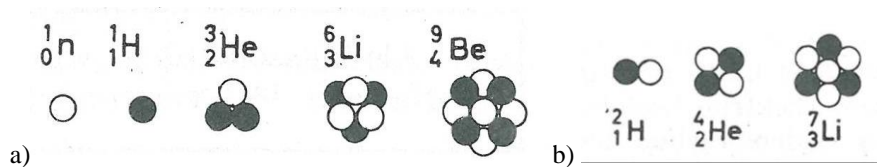


Bild G2.6-1: a) Neutron und Atomkerne, b) Atomkernisotope (Quelle: Schreiner, Physik)

Die **Atomkern-Radien** steigen mit Ordnungszahl  $Z$ , so z. B. der Vergleich zwischen dem zweitkleinsten Kern He und dem größten natürlich vorkommenden und bereits instabilen (radioaktiven = zerfallenden) Kern Uran:

Helium  ${}^3_2\text{He}$ :  $r = 2 \cdot 10^{-15} \text{ m}$ , Uran  ${}^{238}_{92}\text{U}$ :  $r = 10 \cdot 10^{-15} \text{ m}$ .

Im **Vergleich** zur Atomhülle ist der Kern, wie bereits erwähnt, viel kleiner:

a) **Atom-Radius**  $R \approx 10^{-10} \text{ m}$  (= 1 Angström),

b) **Atomkern-Radius**:  $r \approx 5 \cdot 10^{-15} \text{ m}$ .

Fazit: Atomradius / Kernradius  $\approx 10000 \dots 50\,000$

Beispiel 2.6-2: Heliumisotop  ${}^3_2\text{He}$ : 2 Protonen, 1 Neutron im Kern.

Der Abstand zwischen den beiden Protonen liegt in der Größenordnung des Kernradius  $\Delta = 10^{-15} \text{ m}$ , daher beträgt die abstoßende *Coulomb*-Kraft zwischen den beiden Protonen

etwa  $F_C = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\Delta^2} = -\frac{(1.6 \cdot 10^{-19})^2}{4\pi \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-30}} = -230 \text{ N}$  mit der zugehörigen potentiellen

elektrostatischen Energie des einen Protons im  $E$ -Feld des benachbarten Protons im Kern von

ca.  $W_p = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\Delta} = \frac{(1.6 \cdot 10^{-19})^2}{4\pi \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-15}} = 2.3 \cdot 10^{-13} \text{ J} = 1.436 \text{ MeV}$ .

Die anziehende Gravitationskraft zwischen beiden Protonen ist enorm klein, so dass sie für den Zusammenhalt der Kerne KEINE Rolle spielt:

$F_G = G \cdot \frac{m_p^2}{\Delta^2} = 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{(1.67 \cdot 10^{-27})^2}{10^{-30}} = 18.6 \cdot 10^{-35} \text{ N}$ .

Erst die anziehend wirkende „starke Wechselwirkungskraft“ kann die *Coulomb*-Abstoßung überwinden, wirkt aber nur über die sehr kurze Distanz des Kernradius von ca.  $10^{-15} \text{ m}$ .

Beispiel 2.6-3:

Potentielle el. Energie eines Protons im  $E$ -Feld der restlichen  $Z-1$  Protonen im Kern:

$$a) \text{ Heliumkern: } \Delta = 10^{-15} \text{ m, } Z = 2: W_p = \frac{(Z-1) \cdot e \cdot e}{4\pi\epsilon_0\Delta} = 1.436 \text{ MeV}$$

b) Urankern (deutlich größer als der He-Kern):  $\Delta = 10^{-14} \text{ m, } Z = 92:$

$$W_p = \frac{91}{10} \cdot 1.436 \text{ MeV} = \text{ca. } 13.2 \text{ MeV} .$$

Im Vergleich zur potentiellen el. Energie der Kernteilchen und damit ihrer Abstoßungskraft ist die potentielle Energie der Hüllenelektronen um ca.  $10^6$  viel kleiner, z. B.: H-Atom: größter Wert  $-13.6 \text{ eV}$ ! Sie ist negativ, da sie eine Bindungskraft darstellt!

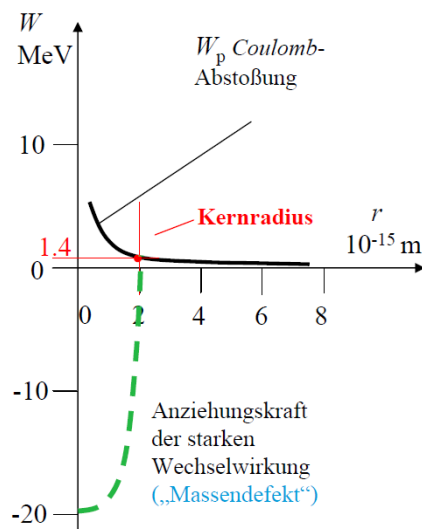


Bild G2.6-2: Abstoßende el. potentielle Energie und anziehende potentielle Energie der starken Wechselwirkungskraft für den He-Kern mit 2 p und 1 n (Quelle: Gerthsen, Physik)

Auch die „starke Wechselwirkungskraft“ kann durch eine negative (= anziehend wirkende) potentielle Energie  $W_{sw}$  dargestellt werden. Die Summenenergie  $W = W_{sw} + W_p$  muss dann innerhalb des Kerns einen negativen Energieverlauf („Potentialtopf“) der Kernbindung ergeben (Bild G2.6-2). Je größer aber  $A$  und  $Z$  sind, desto größer ist der Kernradius und damit auch der mittlere Abstand zwischen den Kern-Protonen. Dadurch können die Rand-Protonen auf Grund der abstoßenden *Coulomb*-Kraft im Kern leichter aus dem Kern entweichen, was die „natürliche Radioaktivität“ schwerer Kerne (Kernzerfall) erklärt. Dieser natürliche Zerfall z. B. eines U-Kerns ( $Z = 92$ ) endet mit jenen ausreichend kleineren Kernen, die STABIL sind, nämlich Pb (Blei-Kerne:  $Z = 82$ ). Beim Zerfall des Kerns entstehen teilweise vom Mutterkern ausgesandte He-Kerne ( $\alpha$ -Teilchen), was  **$\alpha$ -Zerfall** genannt wird. Teilweise wandeln sich Kern-Neutronen in jeweils ein Proton und Elektron um, wobei das Elektron den Kern als  $\beta^-$ -Teilchen verlässt ( **$\beta^-$ -Zerfall**, Bsp. 2.6-4). Fallweise wandeln sich Kern-Protonen in jeweils ein Positron  $e^+$  und ein Neutron um, wobei das Positron den Kern als  $\beta^+$ -Teilchen verlässt ( **$\beta^+$ -Zerfall**). Die beim  $\beta$ -Zerfall wirksame Kraft ist die „schwache Wechselwirkungskraft“. Beim Kernzerfall wird auch Energie in Form energiereicher elektromagnetischer Wellen ( **$\gamma$ -Strahlung**) frei, oft als Begleitung von  $\alpha$ -Zerfall und  $\beta$ -Zerfall. Während die  $\alpha$ -Teilchen schon durch ein Papierblatt abgefangen werden, ist bei  $\beta$ -Teilchen bereits eine 1 cm dicke Plexiglasplatte zur Abschirmung nötig. Für die energiereiche  $\gamma$ -Strahlung sind zur Abschirmung bereits ca. 5 cm dicke Bleiplatten nötig, oder eine 50 cm dicke Wasserschicht. Beides kommt in Kernkraftwerken zum Einsatz. So werden z. B. im offenen Kernreaktor (während der Wartung!) die durch die Nutzung bereits radioaktiven Brennelemente mit

Wasser geflutet. Das Wasser leuchtet dabei blau wegen der „Bremsstrahlung“ der im Wasser abgebremsten el. geladenen  $\alpha$ - und  $\beta$ -Teilchen. Da unser Körper (Zellgewebe) wegen der Zellflüssigkeit einen hohen Wasseranteil hat, ist die Reichweite radioaktiver Strahlung in Wasser etwa jene im organischen Gewebe. Folgende Eindringtiefen sind im Gewebe typisch:

$\alpha$ -Strahlung bei einer Energie von 5 MeV: 40  $\mu\text{m}$ ,

$\beta$ -Strahlung bei einer Energie von 1 MeV: 7 mm,

$\gamma$ -Strahlung bei einer Energie von 1 MeV: 65 cm.

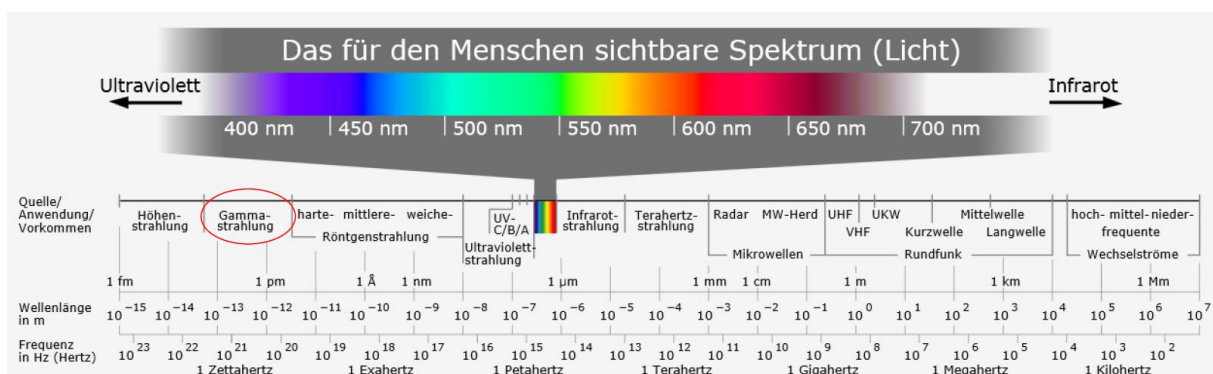
#### Beispiel 2.6-4:

Beispiel für  $\alpha$ -Zerfall:  ${}_{92}^{238}\text{U} \rightarrow {}_{90}^{234}\text{Th} + {}_2^4\text{He} = {}_{90}^{234}\text{Th} + \alpha$

Beispiel für  $\beta^-$ -Zerfall:  ${}_{90}^{234}\text{Th} \rightarrow {}_{91}^{234}\text{Pa} + {}_{-1}^0e + \bar{\nu}_e = {}_{91}^{234}\text{Pa} + \beta^-$ : Ein Neutron hat sich in ein Proton  $p$ , ein ausgesandtes Elektron  $e$  und ein Antineutrino (Ruhemasse 0, ungeladen) umgewandelt!

Beim Alpha-Zerfall emittiert also der Atomkern ein  $\alpha$ -Teilchen (bestehend aus  $2p$  und  $2n$ ) mit dessen kinetischer Energie. Die Massenzahl sinkt  $A \rightarrow A-4$ , die Kernladungszahl ebenfalls  $Z \rightarrow Z-2$ . Beim Beta-Minus-Zerfall emittiert der Atomkern ein Elektron  $e^-$  mit dessen kinetischer Energie und ein Antineutrino. Beide entstehen im Atomkern bei der Umwandlung eines Neutrons in ein Proton. Die Massenzahl bleibt wegen des leichten Elektrons gleich:  $A = \text{konst.}$ , aber die Ordnungszahl nimmt zu  $Z \rightarrow Z+1$  (Bild 2.6-4). Beim Gamma-Zerfall emittiert der Atomkern ein hochenergetisches Lichtquant (Photon) mit der Strahlungsenergie  $W = h \cdot f$  bei Frequenzen  $f = 10^{20} \dots 10^{21}$  bzw. Energien  $W = h \cdot f = (0.4 \dots 4) \cdot 10^6$  MeV (Bild G2.6-3). Die Massen- und Ordnungszahl bleiben gleich:  $A, Z = \text{konst.}$  Der Anregungszustand (Energiezustand) des Kerns verringert sich aber. Gammazerfall tritt meist als unmittelbare Folge eines vorangegangenen  $\alpha$ - oder  $\beta$ -Zerfalls auf.

**Radioaktivität** ist somit die Eigenschaft instabiler Atomkerne, spontan ionisierende Strahlung ( $\alpha$ -,  $\beta$ -,  $\gamma$ -Strahlung) auszusenden. Der Kern wandelt sich dabei unter Aussendung von Teilchen in einen anderen Kern um oder ändert unter Energieabgabe seinen Zustand. Die „**natürlich vorkommenden Radioaktiv-Zerfalls-Familien**“ sind die **Zerfallsreihen** der drei Radionuklide Uran-238 (Uran-Radium-Reihe, Bild 2.6-4), Uran-235 (Uran-Actinium-Reihe) und Thorium-232. Die dabei auftretenden **Radionuklide** sind Atomsorten mit instabilen Kernen ( $Z > 82$ ). Sie zeigen einen **natürlichen Kernzerfall** in der Form der Alpha- und Beta-Zerfälle, die mehr oder weniger regelmäßig abwechselnd aufeinander folgen. Endprodukte sind die o. g. stabilen Pb-Kerne  $Z = 82, A = 208$ , während Kerne mit  $Z > 82$  instabil (radioaktiv) sind und zerfallen!



**Bild G2.6-3:** Das Spektrum elektromagnetischer Wellen (Quelle: Wikipedia). Die Gamma-Strahlung tritt bei Frequenzen  $f = 10^{20} \dots 10^{21}$  Hz auf und ist „härter“ (energiereicher) als die Röntgen-Strahlung.

Der Kernzerfall ist ein statistischer Vorgang und wird daher für eine große Anzahl  $N$  von Kernen beschrieben. Ist die Anzahl der Radionuklidkerne bei Zerfallsbeginn  $t = 0$  die Größe  $N_0$ , so zerfallen zum Zeitpunkt  $t$  in der kurzen Zeitspanne  $dt$  die Anzahl  $dN$  Radionuklidkerne. Diese Anzahl  $dN$  ist erfahrungsgemäß proportional zur Anzahl der zum Zeitpunkt  $t$  noch vorhandenen Kerne  $N$ , wobei die Proportionalitätskonstante  $\lambda$  vom Radionuklidtyp abhängt!

$$|dN| = \lambda \cdot N \cdot dt \rightarrow \text{Abnahme} : dN = -\lambda \cdot N \cdot dt < 0 \quad (\text{G2.6-1})$$

$$dN = -\lambda \cdot N \cdot dt \rightarrow \frac{dN}{dt} = -\lambda \cdot N \rightarrow \frac{dN(t)}{dt} + \lambda \cdot N(t) = 0 \quad (\text{G2.6-2})$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten ist

$$N(t) = C \cdot e^{-\lambda \cdot t} \text{ mit der Integrationskonstante } N(0) = C \cdot e^{-\lambda \cdot 0} = C = N_0. \quad (\text{G2.6-3})$$

Es ist  $T = 1/\lambda$  die **Zeitkonstante**, nach der nur noch  $1/e = 0.37 = 37\%$  Kerne vorhanden sind.

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-t/T} \quad (\text{G2.6-4})$$

Hingegen ist nach der **Halbwertszeit**  $\tau$  noch die Hälfte der Kerne vorhanden.

$$N(\tau) = N_0/2 = N_0 \cdot e^{-\tau/T} \rightarrow 1/2 = e^{-\tau/T} \rightarrow \tau = T \cdot \ln 2 = \ln 2 / \lambda \quad (\text{G2.6-5})$$

Demnach ist die Halbwertszeit gemäß  $\tau = 0.7 \cdot T$  kürzer als die Zeitkonstante.

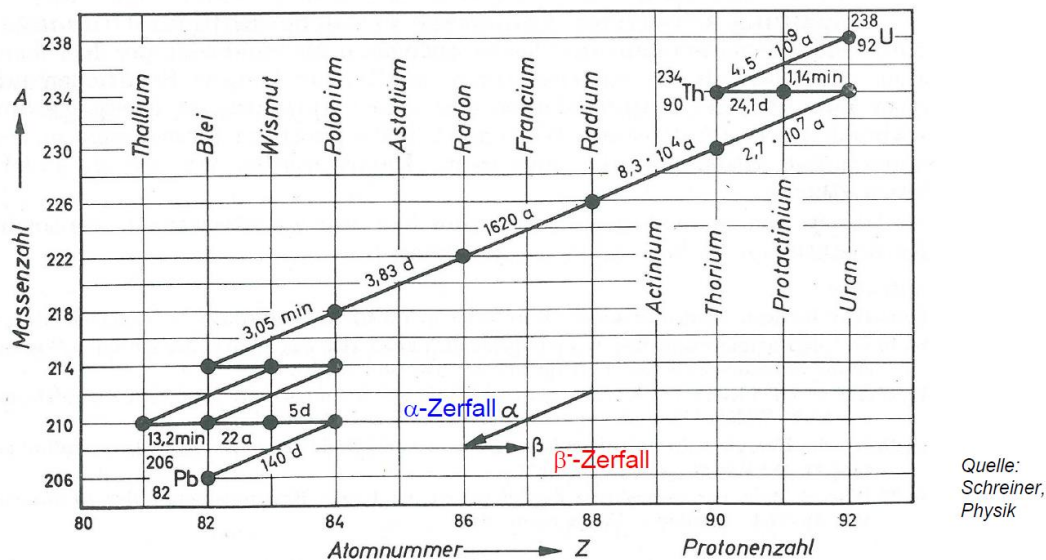


Bild G2.6-4: Natürliche Zerfallsreihe des Radionuklids Uran-238 (Quelle: Schreiner, Physik)

### Beispiel 2.6-5:

Abnahme einer großen Anzahl von Atomkernen des Elements Radium ( $Z = 88$ ) über der Zeit:

$$\lambda = 0.428 \cdot 10^{-3} / \text{a} \quad T = 1/\lambda = 2336.4 \text{ a} \quad \tau = 2336.4 \text{ a} \cdot \ln 2 = 1620 \text{ a} \quad (\text{Bild 2.6-5}).$$

Experimentelle Bestimmung von  $\lambda = \frac{|\Delta N|}{N} \cdot \frac{1}{\Delta T}$  aus der Abnahme an Kernen  $\Delta N$  während der

Messzeit  $\Delta T$ . Nach der Zeitkonstante  $T = 2336$  Jahre sind 63 % der Kerne zerfallen! Nach der Halbwertszeit  $\tau = 1620$  Jahre sind nur 50 % der Kerne zerfallen!

Die Einheit  $1 \text{ Bq} = 1/\text{s}$  (Becquerel) bedeutet einen radioaktiven Kernzerfall pro Sekunde. Je größer die Zerfallsrate  $\lambda$  (in Bq) ist, desto kürzer ist die Halbwertszeit. Die Zerfallsprozesse von Uran dauern sehr lang (z. B.  $^{238}\text{U}$ :  $> 4.5$  Milliarden Jahre) und gehen daher mit sehr geringer Intensität vor sich, weshalb diese radioaktive Elemente seit seiner Entstehung in einer Sternexplosion auch heute noch existiert. Das Isotop  $^{235}\text{U}$  zerfällt deutlich rascher als  $^{238}\text{U}$  und ist deshalb in der Erdkruste deutlich seltener anzutreffen. Natürlich vorkommendes

Uran besteht zu 99.3 % aus  $^{238}\text{U}$  und nur zu 0.72 % aus  $^{235}\text{U}$ . Schwerere Kerne als U zerfallen deutlich schneller und daher mit deutlich größerer Strahlungsintensität, weshalb sie auf der Erde i. A. nicht mehr natürlich vorkommen (z. B. Pu, Bsp. 2.6-6).

### Beispiel 2.6-6:

Halbwertszeit  $\tau$  für: Uran  $^{238}\text{U}$ :  $\tau = 4468$  Mio. Jahre (12 Bq/mg); Uran  $^{235}\text{U}$ :  $\tau = 703$  Mio. Jahre (80 Bq/mg); Plutonium  $^{239}\text{Pu}$ :  $\tau = 24110$  Jahre ( $2.3 \cdot 10^6$  Bq/mg). Das deutlich rascher zerfallende Pu hat wegen der im Vergleich zu U sehr geringen Halbwertszeit ( $1: 10^{-6}$ !; für die menschliche Zeitskala aber noch immer enorm lang!) eine wesentlich höhere

$$\text{Strahlungsintensität: } \frac{\tau_{^{239}\text{Pu}}}{\tau_{^{238}\text{U}}} = \frac{24110}{4468 \cdot 10^6} = \frac{\lambda_{\text{U}}}{\lambda_{\text{Pu}}} = \frac{12}{2.3 \cdot 10^6}.$$

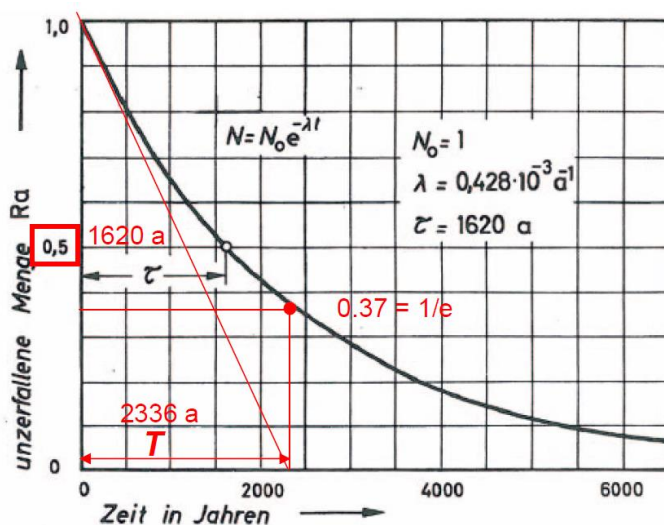


Bild G2.6-5: Unzerfallene Menge an Radiumkernen über der Zeit, gültig für große Kernanzahl (Quelle: Schreiner, Physik)

## G3 Repetitorium: Grundlagen der Elektrotechnik

Die **Wirkprinzipien** der elektromagnetischen Energiewandlung werden mit Hilfe der elektromagnetischen Grundgesetze beschrieben (siehe G2.3.3).

- Die Erzeugung statischer und „langsam“ veränderlicher magnetischer Felder durch stromdurchflossene Spulen beschreibt der **AMPÈRE'sche Durchflutungssatz**.
- Die berührungslose Energieübertragung von ruhenden auf bewegte Teile oder von einer Spule auf eine zweite, galvanisch getrennte Spule wird durch das **FARADAY'sche Induktionsgesetz** bestimmt.
- Die Erzeugung mechanischer Kräfte durch die Wirkung magnetischer Felder auf stromdurchflossene Leiter beschreibt das **LORENTZ'sche Kraftgesetz**.
- Die **Feldlinien von B sind stets geschlossen**, d. h. Nord- und Südpole treten immer paarweise auf. Es sind bis jetzt keine magnetischen "Monopole" bekannt.

**Werkstoffgesetze** beschreiben:

- Die Wirkung von Permanentmagneten zur Magnetfelderzeugung.
- Den Stromfluss in Leiterwerkstoffen (**OHM'sches Gesetz**).
- Die Magnetfeldverstärkung durch magnetisierbare Stoffe (z. B. Eisen).
- Die isolierende Wirkung von Isolierwerkstoffen z. B. zwischen spannungsführendem Leiter und geerdetem Gehäuse des Wandlers.

Leiterwerkstoffe: Kupfer, Aluminium (in Ausnahmefällen Supraleiter)



Isolierwerkstoffe: Kunststoffe, Glas, Glimmer, Kunstharze

### G3.1 OHM'sches Gesetz

Als wesentliches Werkstoffgesetz wird das *OHM'sche* Gesetz (G3.1-1) erläutert.

$$R = \frac{U}{I} = \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{l}{A} = \rho \cdot \frac{l}{A} \quad (\text{G3.1-1})$$

$R = R_{20^\circ\text{C}} \cdot [1 + \alpha \cdot (\vartheta - 20^\circ\text{C})]$	Silber	Kupfer	Aluminium	Eisen
Elektrische Leitfähigkeit $\kappa$	$62.5 \cdot 10^6 \text{ S/m}$	$57.0 \cdot 10^6 \text{ S/m}$	$34.0 \cdot 10^6 \text{ S/m}$	$10.0 \cdot 10^6 \text{ S/m}$
Dichte $\gamma$	$10.5 \text{ kg/dm}^3$	$8.9 \text{ kg/dm}^3$	$2.7 \text{ kg/dm}^3$	$7.9 \text{ kg/dm}^3$
Widerstandskoeffizient $\alpha$	$0.0036 / \text{K}$	$0.0039 / \text{K}$	$0.0040 / \text{K}$	$0.0045 / \text{K}$
Wärmedehnung (linear) $\alpha_l$	$19.3 \cdot 10^{-6} / \text{K}$	$16.8 \cdot 10^{-6} / \text{K}$	$24 \cdot 10^{-6} / \text{K}$	$11.5 \cdot 10^{-6} / \text{K}$

Tabelle G3.1-1: Vergleich von Stoffwerten ausgewählter Werkstoffe (reine Stoffe) bei  $\vartheta = 20^\circ\text{C}$ . Die Zunahme des OHM'schen Widerstands  $R$  mit der Temperatur  $\vartheta$  (gemessen in  $^\circ\text{C}$ ) ist im Temperaturbereich von ca.  $-40^\circ\text{C}$  bis  $+250^\circ\text{C}$  linear.

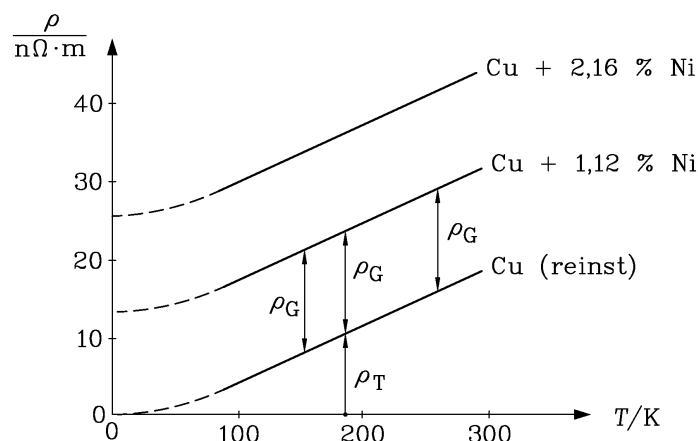


Bild G3.1-1: *Mathiessen'sche* Regel: Beispiel: Im mit Ni-Atomen verunreinigten Kupferleiter Cu verbleibt auch beim absoluten Nullpunkt  $T = 0 \text{ K}$  ein spezifischer Restwiderstand  $\rho_G$  infolge Kollision der Leitungselektronen mit den Störstellen im Kristallgitter, während der Anteil  $\rho_T$  mit sinkender Temperatur abnimmt.

Der OHM'sche Widerstand eines elektrischen Leiterwerkstoffs ist proportional zur Länge  $l$  des Leiters, und umgekehrt proportional zum Querschnitt  $A$  des Leiters und dessen elektrischer Leitfähigkeit  $\kappa$ . Die inverse Größe  $\rho = 1/\kappa$  heißt spezifischer elektrischer Widerstand und ist im Allgemeinen **temperaturabhängig**. Da üblicherweise Drahtlängen in Meter und Drahtquerschnitte in Quadratmillimeter angegeben werden, wird für  $\rho$  die Einheit  $\Omega\text{mm}^2/\text{m}$  bevorzugt (SI-Einheit:  $\Omega\text{m}$ ). Für die SI-Einheit der elektrischen Leitfähigkeit  $\kappa$  wird  $\text{S/m}$  verwendet ( $\text{S} = 1/\Omega$ : 1 Siemens = 1/Ohm). Der spezifische elektrische Widerstand setzt sich in Metallen aus zwei Anteil zusammen (*Mathiessen'sche* Regel, Bild G3.1-1):

- Kollisionen der Leitungselektronen mit den um ihre Ruhelage schwingenden Atomrümpfen der Metallkristallstruktur. Mit sinkender Temperatur sinkt die Schwingungsamplitude der Atomrümpfe und ist beim absoluten Temperatur-Nullpunkt  $T = 0$  Null. Daher sinkt dieser Anteil  $\rho_T$  (Index T: temperaturabhängig) mit sinkender Temperatur auf Null.
- Kollisionen der Leitungselektronen mit Störstellen (Fremdatomen) und Gitterfehlern (Kristalldefekten). Diese Defekte sind temperaturunabhängig, so dass auch bei  $T = 0$  ein endlicher spezifischer Widerstand  $\rho_G$  (Index G: Gitter) verbleibt.

Die Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstands beschreibt man häufig nicht mit der absoluten Temperatur  $T$  (gemessen in Kelvin K), sondern mit der Temperatur

$\vartheta = T - 273.15$  in Grad Celsius ( $^{\circ}\text{C}$ ). Die Temperaturdifferenz  $\Delta\vartheta = \vartheta - \vartheta_0$  ist die „Erwärmung“ des Leiterwerkstoffs (gemessen in K), und  $\vartheta_0$  ist die Bezugstemperatur in  $^{\circ}\text{C}$ . Aus Bild G3.1-1 folgt der **Temperaturkoeffizient**  $\alpha(\vartheta_0)$  bei  $\vartheta_0$  (gemessen in  $1/\text{K}$ ). Die Formel in Tab. G3.1-1 gilt für  $\vartheta_0 = 20^{\circ}\text{C}$  und  $\alpha(20^{\circ}\text{C}) = \alpha_{20} = 0.0039 / \text{K}$ . Über die (gemessene) Leiter-Widerstandszunahme kann dessen Temperatur berechnet werden.

*Beispiel G3.1-1:*

$$\frac{R(\vartheta)}{R(20^{\circ}\text{C})} = R_{\vartheta} / R_{20} = 1.45 : \vartheta = 20^{\circ}\text{C} + \frac{1}{\alpha_{20}} \cdot \left( \frac{R_{\vartheta}}{R_{20}} - 1 \right) = 20 + \frac{1}{0.0039} \cdot (1.45 - 1) = \underline{\underline{135^{\circ}\text{C}}}$$

### G3.2 Erzeugung magnetischer Felder

#### a) Magnetfelderzeugung durch stromdurchflossene Spulen

*Vorteile:*

- Beliebig hohe Felder möglich
- Magnetfeld veränderbar über den Strom
- Bei großen Wandlern kostengünstiger als Permanentmagnete

*Nachteile:*

- Stromwärmeverluste in den Spulen (Ausnahme: Supraleitende Spulen)
- Stromversorgung nötig

#### b) Magnetfelderzeugung durch Permanentmagnete

- Al-Ni-Co-Legierung
- Ferrite (z.B. Barium-Ferrit)
- Selten-Erd-Magnete: Sinterwerkstoffe auf Basis der magnetisierbaren Stoffe Eisen, Nickel, Kobalt mit "seltenen Erden" wie z. B. Samarium (Sm) als  $\text{Sm}_2\text{Co}_{17}$ ,  $\text{SmCo}_5$  oder mit Neodymium (Nd) als NdFeB-Magnete (Neodym-Eisen-Bor).

*Vorteile:*

- Keine "Erregerverluste"
- Einfacher Aufbau des Wandlers

*Nachteile:*

- Magnetfeld nicht veränderbar
- Magnetwerkstoff (noch) teuer
- $B$ -Felder auf etwa 1.2 T begrenzt
- Gefahr der Entmagnetisierung im großen Gegenfeld anderer stromführender Spulen

### G3.3 Stromerregte Magnetfelder - AMPÈRE'scher Durchflutungssatz

**AMPÈRE'scher Durchflutungssatz:**

In einem magnetischen Feld  $\vec{H}$  ist das Linienintegral über die magnetische Feldstärke  $H$  entlang einer geschlossenen Linie  $C$  gleich der gesamten elektrischen Durchflutung  $\Theta$  (Bild G3.3-1: "Durchflutung"  $\Theta = N \cdot I$ ), die durch die von  $C$  aufgespannte Fläche  $A_C$  hindurch tritt.

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = \Theta \Rightarrow \text{Bild T1.3-1: } \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = \Theta = N \cdot I \approx H_1 \cdot l_1 + H_2 \cdot l_2 + \dots + H_n \cdot l_n \quad (\text{G3.3-1})$$

Der **Durchflutungssatz** in seiner allgemein gültigen Form (G3.3-1 links) wird für die spezielle Geometrie von Bild G3.3-1 vereinfacht. Die geschlossene Kurve  $C$  wird identisch mit der gestrichelten Feldlinie gewählt, so dass der differentielle Tangentenvektor  $d\vec{s}$  stets parallel mit dem Vektor  $\vec{H}$  ist. Daher wird das Skalarprodukt  $\vec{H} \cdot d\vec{s}$  durch ein gewöhnliches Produkt  $H \cdot ds$  ersetzt. Das Feld in den einzelnen Jochabschnitten mit den Längen  $l_i$ ,  $i = 1 \dots n$

(Bild G3.3-1:  $n = 6$  Abschnitte inklusive Luftspalt) ist nahezu homogen, daher wird das Integral durch eine Summe ersetzt. In Bild G3.3-1 sind  $N = 4$  Spulenwindungen gegeben:  $\mathcal{O} = N \cdot I = 4 \cdot I$ . Der Strom fließt in die Fläche  $A_C$  hinein. Das zugehörige Magnetfeld umkreist die Durchflutung im Rechtsdreh Sinn (positive Feldrichtung, **Rechtsschrauben- bzw. Rechte-Hand-Regel**). Dies ist eine willkürliche, aber allgemein eingehaltene Zählrichtung. Wegen den geschlossenen  $B$ -Feldlinien ist bei Vernachlässigung von aus dem Eisenkreis austretenden Streufeldern der magnetische Fluss  $\Phi$  in jedem Querschnitt  $A$  des Eisens konstant.

$$\Phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} \approx B \cdot A \quad (\text{G3.3-2})$$

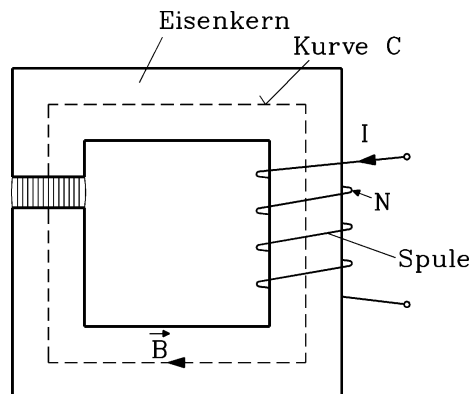


Bild G3.3-1: Eisenjoch mit Luftspalt und Erregerspule: Im Luftspalt soll eine magnetische Flussdichte  $B$  erregt werden. Gestrichelt: Idealisierte Feldlinie von  $B$  (geschlossene Kurve  $C$ ). Die Größe von  $\vec{B}$  (Vektorfeld) variiert ortsabhängig nach Betrag, Richtung und Orientierung.

### G3.4 Verstärkung von Magnetfeldern durch Eisen (magnetisches Werkstoffgesetz)

Im Luftspalt ist die Flussdichte  $B$  zur Feldstärke  $H$  über  $\mu_0$  direkt proportional.

$$B = \mu_0 H \quad (\text{G3.4-1})$$

Eisen besteht aus vielen kleinen "Elementarmagneten" (*WEISS'sche Bezirke*), die sich im  $H$ -Feld der Spule parallel zu dieser Feldrichtung ausrichten und so ein eigenes resultierendes Magnetfeld  $J$  erzeugen. Diese zusätzliche Flussdichte  $J$  (**magnetische Polarisation**) verstärkt das  $H$ -Feld der Spule zur resultierenden magnetischen Flussdichte  $B$  (siehe Kap. G2.3).

$$B = \mu_0 H + J = \mu \cdot H \gg \mu_0 \cdot H \quad (\text{G3.4-2})$$

Diese "**spontane**" **Magnetisierbarkeit** ("**Ferromagnetismus**") besitzen Eisen, Nickel, Kobalt und die *HEUSLER*-Legierungen. Oberhalb der *CURIE*-Temperatur (Eisen: 744 °C) erlischt diese spontane Magnetisierbarkeit. Da die Isolierwerkstoffe der Erregerspule schon ab ca. 180 ... 240 °C zerstört werden, ist die *CURIE*-Temperaturgrenze i. a. irrelevant. Wenn alle "Elementarmagnete" parallel zum äußeren  $H$ -Feld ausgerichtet sind, ist der Maximalwert von  $J$  (**Sättigungspolarisation**  $J_s$ ) erreicht. Dieser Sättigungseffekt tritt bei Eisen ab ca. 1.7 T auf. Die Permeabilität  $\mu$  ist daher bei kleinen Werten von  $B$  groß ("**ungesättigt**",  $\mu = \text{ca. } 5000\mu_0$ ), und nimmt mit steigenden  $B$ -Werten ab, um im Grenzfall  $\mu_0$  zuzustreben (vollständige Sättigung).

Bild G3.4-1 zeigt mit Kurve 1 qualitativ die  $B(H)$ -Abhängigkeit von Eisen. Nach dem Abschalten des Spulenstroms  $I$  verschwindet wegen (G3.3-1) das  $H$ -Feld, aber es verbleibt eine Restpolarisation  $J_R$ , da nicht alle "Elementarmagnete" sich beliebig regellos im Eisen ausrichten. Diese **Remanenzflussdichte**  $B_R = J_R$  ist bei Eisen klein. Erst durch Anlegen eines negativen Felds  $-_B H_C = -H_C$  ("**Koerzitivfeldstärke**") wird  $B$  als resultierendes Feld Null. Die

so entstandene  $B(H)$ -Schleife heißt **Hysteresekurve** (hysteresis (gr.): Nachhinken, da  $B$  dem  $H$  "nachhinkt"). Die Fläche unter der  $B-H$ -Kurve ist ein Maß für die im Eisen umgesetzte Wärme durch innere Reibung der "Elementarmagnete" beim Ummagnetisieren, also beim Durchfahren eines vollen Zyklus von  $+H_{\max}$  auf  $-H_{\max}$  und wieder zurück zu  $+H_{\max}$ , etwa wenn  $I$  ein Wechselstrom ist (**Hystereseverluste**  $P_{\text{hys}}$ ). Bei Eisen sind  $B_R$  und  $H_C$  klein, so dass die Schleife schmal ist und die **Hystereseverluste** klein sind ("**weichmagnetischer Werkstoff**"). Bei Permanentmagneten ist die Hystereseschleife durch geeignete Werkstoffwahl stark vergrößert, so dass z. B. bei NdFeB eine Remanenzflussdichte  $B_{R,20^\circ\text{C}} = J_{R,20^\circ\text{C}} = 1 \dots 1.3 \text{ T}$  und eine Koerzitivfeldstärke  $H_C = 900 \dots 1000 \text{ kA/m}$  möglich ist ("**hartmagnetischer Werkstoff**", Bild G3.4-1, Kurve 2). Die Permanentmagnete werden nicht ummagnetisiert, sondern dienen zur Erzeugung von magnetischen Gleichfeldern z. B. in Gleichstrommaschinen oder im Polrad von Synchronmaschinen. Für die Permanentmagnete interessiert nur der Arbeitsbereich mit positiver Flussdichte  $B$  unter dem Einfluss entmagnetisierender (negativer) äußerer Felder  $H$ , also der zweite Quadrant der  $B(H)$ -Schleife (Bild G3.4-2). Die gleichzeitig hohen Werte von  $B_R$  und  $B_H C$  erklären, warum Selten-Erd-Magnete trotz ihrer relativ hohen Anschaffungskosten immer weitere Verbreitung finden.

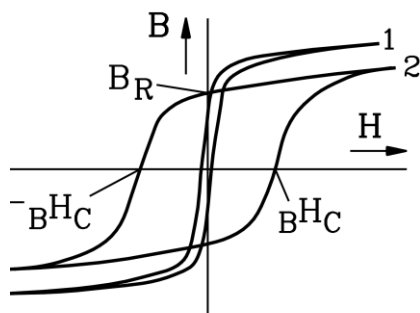


Bild G3.4-1: Weichmagnetische (Kurve 1), hartmagnetische (Kurve 2)

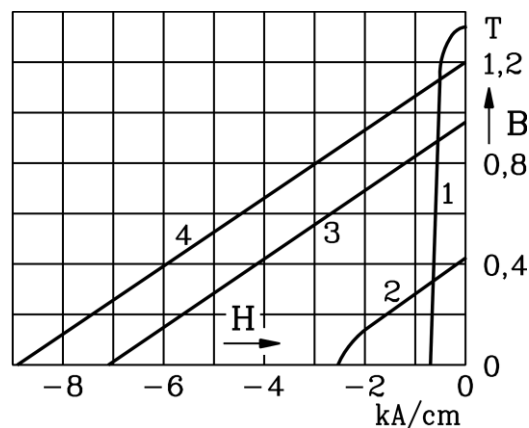


Bild G3.4-2:  $B(H)$ -Kennlinien von Permanentmagneten im zweiten Quadranten der  $B-H$ -Ebene  
1: Al-Ni-Co-Magnet, 2: Ba-Ferrit,  
Selten-Erden-Magnete: 3:  $\text{Sm}_2\text{Co}_{17}$ , 4: NdFeB

### Beispiel G3.4-1:

#### Berechnung eines einfachen magnetischen Eisenkreises

Ungesättigtes Eisen:  $\mu = 5000\mu_0$ , Geometrie wie Bild T1.3-1; die Eisenabschnitte weisen stets denselben Querschnitt  $A$  auf. Da  $\mu$  groß ist, verlaufen die Feldlinien von  $B$  (bis auf den Luftspaltbereich) gänzlich im Eisen. Der magnetische Fluss  $\Phi$  im Eisenkern ist konstant. Daher ist die magnetische Flussdichte  $B$  im Eisen (Index  $Fe$ ) und im Luftspalt (Index  $\delta$ ) gleich groß.

$$B_{Fe} = \Phi / A = B_{\delta} \quad (\text{G3.4-3})$$

Die magnetische Feldstärke ist gemäß (G3.4-1, G3.4-2) im Luftspalt:  $H_{\delta} = \frac{B_{\delta}}{\mu_0}$ , im Eisen

$$H_{Fe} = \frac{B_{Fe}}{\mu} = \frac{B_{\delta}}{\mu} = \frac{H_{\delta}}{5000} \ll H_{\delta} \quad (\text{G3.4-4})$$

Im Eisen ist die magnetische Feldstärke  $H_{Fe}$  nahezu Null, da das Feld  $B_{Fe}$  hauptsächlich durch den Beitrag  $J$  der "Elementarmagnete" aufgebracht wird. Der Durchflutungssatz erlaubt auf Grund der hier gewählten einfachen Geometrie die Unterscheidung von nur zwei Abschnitten: Eisen (Länge  $s_{Fe}$ ) und Luft (Weite  $\delta$ ).

$$H_{\text{Fe}} s_{\text{Fe}} + H_{\delta} \delta = N \cdot I = V_{\text{Fe}} + V_{\delta} \quad (\text{G3.4-5})$$

Die einzelnen Beiträge  $V$  zur Gesamtdurchflutung  $NI$  heißen in Analogie zum elektrischen Kreis "**magnetische Spannungen**" (Einheit: A!). In der Regel ist der Luftspalt  $\delta$  deutlich kleiner als die Länge der Kurve  $C$  im Eisen  $s_{\text{Fe}}$ , z.B.  $\delta/s_{\text{Fe}} = 1/100$ . Daher ist das Verhältnis der magnetischen Spannungen im Luftspalt und Eisenkreis klein: 0.02.

$$\frac{V_{\text{Fe}}}{V_{\delta}} = \left( \frac{B_{\text{Fe}} \cdot s_{\text{Fe}}}{\mu_{\text{Fe}}} \right) / \left( \frac{B_{\delta} \cdot \delta}{\mu_0} \right) = \frac{s_{\text{Fe}} \cdot \mu_0}{\delta \cdot \mu_{\text{Fe}}} = \frac{100 \cdot 1}{1 \cdot 5000} = 0.02$$

**Fazit:**

Die magnetische Spannung im Eisen ist im ungesättigten Fall trotz des längeren Wegabschnitts  $s_{\text{Fe}}$  der Kurve  $C$  somit vernachlässigbar. Es muss nur die Luftspaltweite  $\delta$  von der Erregerspule magnetisiert werden.

Für z. B.  $B_{\delta} = 1 \text{ T}$  bei einem Luftspalt  $\delta = 3 \text{ mm}$  ist der Erregerbedarf  $\Theta = \underline{2390 \text{ A}}$ .

$$B_{\delta} \approx \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{\delta} \quad (\text{G3.4-6})$$

$$B_{\delta} = 1 \text{ T} = \frac{\mu_0 \cdot \Theta}{\delta} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs}/(\text{Am}) \cdot \Theta}{0.003 \text{ m}} \Rightarrow \Theta = N \cdot I = \frac{1 \cdot 0.003}{4\pi \cdot 10^{-7}} = \underline{\underline{2390 \text{ A}}}$$

**Fazit:**

Die Erregerspule kann mit  $N = 100$  Windungen ausgerüstet werden, was einen Strombedarf (Gleichstrom)  $I = 23.9 \text{ A}$  ergibt, oder z. B. mit  $N = 250$  Windungen bei einem Strombedarf von  $I = 9.56 \text{ A}$  (freie Wahl der Windungszahl!).

### G3.5 Das FARADAY'sche Induktionsgesetz

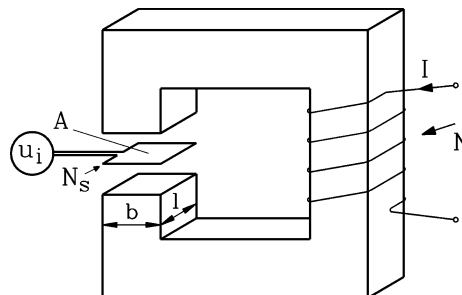


Bild G3.5-1: Leiterschleife ( $N_s = 1$  Windung) im Luftspalt eines Magnetkreises (Spulenfläche  $A = b \cdot l$ , angeschlossenes Voltmeter),  $N$  Windungen der Erregerspule, Erregerstrom  $I$

**a) Ruhinduktion**

In dem Luftspalt des Magnetkreises Bild G3.5-1 befindet sich eine Spule mit  $N_s$  Windungen. Die Spulenfläche  $A = b \cdot l$  ist gleich groß gewählt wie der Jochquerschnitt des Eisens. Der Erregerstrom in der Erregerspule sei zeitlich veränderlich:  $I = i(t)$ . Auf Grund von Abschnitt G3.4 ändert sich die Luftspaltflussdichte zeitlich in gleicher Weise  $B_{\delta}(t) \sim i(t)$ . Für  $\mu_{\text{Fe}} \rightarrow \infty$  gilt exakt:

$$B_{\delta}(t) = \mu_0 \cdot N \cdot i(t) / \delta. \quad (\text{G3.5-1})$$

Gemäß (G3.3-2) ändert sich der von der Luftspaltspule umfasste Fluss gleichfalls:  $\Phi(t) = B_{\delta}(t) \cdot A$ .

Das **FARADAY'sche Induktionsgesetz** (G3.5-2) besagt, dass in der Luftspaltspule eine (als außen an den Klemmen wirksame) elektrische Spannung  $u_i(t)$  induziert wird, die je Windung der negativen zeitlichen Änderung des mit jeder Windung verketteten Flusses entspricht. Weil die Luftspaltspule relativ zum Magnetkreis ruht, spricht man von "**Ruhinduktion**". Auf Grund der Serienschaltung der einzelnen Windungen wird an den Spulenklammern eine  $N_s$ -mal so große Spannung gemessen. Die Größe  $N_s \cdot \Phi = \Psi$  heißt "**Flussverkettung**".

$$u_i(t) = -N_s \cdot \frac{d\Phi(t)}{dt} = -\frac{d\Psi(t)}{dt} \quad (\text{G3.5-2})$$

### b) Bewegungsinduktion

Eine zeitliche Änderung des mit der Luftspaltspule verketteten Flusses kann auch dadurch erreicht werden, dass bei zeitlich konstantem Luftspaltfeld  $B_\delta$  die Spule z. B. seitlich nach links aus dem Luftspalt gezogen wird. Dann ändert sich die Fläche  $A(t)$  innerhalb der Spule, durch die die magnetische Flussdichte (im Bild G3.5-2a entgegen dem Normalenvektor  $d\vec{A}$ ) hindurch tritt:  $\Phi(t) = -B_\delta \cdot dA(t)$  (Bild G3.5-2a).

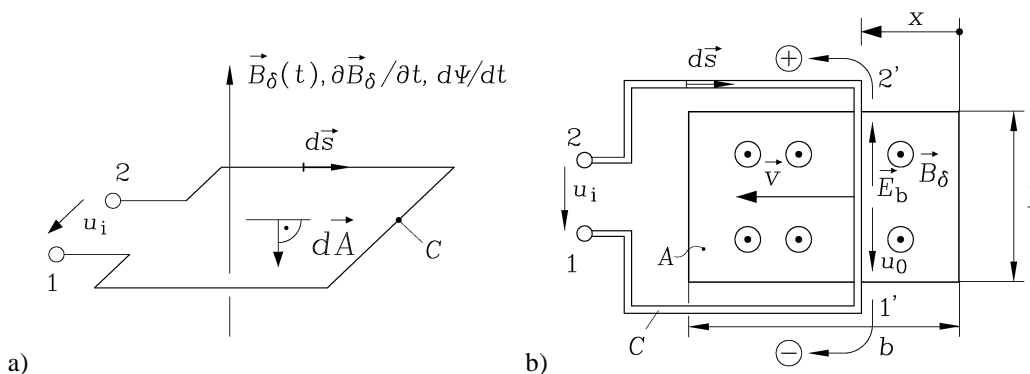


Bild G3.5-2: Bewegte Leiterschleife von Bild G3.5-1, Aufsicht, bewegungsinduzierte Spannung

Wird die Luftspaltspule seitlich mit z. B. konstanter Geschwindigkeit  $v$  aus dem Luftspalt gezogen, so nimmt die Fläche  $A(t)$  gemäß (G3.5-3) ab.

$$A(t) = (b - v \cdot t) \cdot l \quad (\text{G3.5-3})$$

Mit (G3.5-2) folgt, dass trotz zeitlich konstanten Magnetfelds  $B_\delta$  eine induzierte Spannung  $u_i$  im Voltmeter von Bild G3.5-1 von 2 nach 1, Bild G3.5-2, gemessen wird.

$$u_i(t) = -N_s \cdot \frac{d\Phi(t)}{dt} = -N_s \cdot (-B_\delta \cdot \frac{dA(t)}{dt}) = -N_s \cdot v \cdot B_\delta \cdot l \quad (\text{G3.5-4})$$

Diese "**Bewegungsinduktion**" (Luftspaltspule **bewegt** sich relativ zum Magnetfeld) lautet allgemein formuliert: In einem elektrischen Leiter mit der Länge  $l$ , der in einem Magnetfeld  $\vec{B}$  mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  bewegt wird, tritt eine bewegungsinduzierte elektrische Feldstärke  $\vec{E}_b = \vec{v} \times \vec{B}$  auf. Sie wird in Bild G3.5-2b von 2 nach 1 gezählt und ist im Beispiel negativ. Mit der an den Klemmen von 2 nach 1 messbaren Spannung  $u$  gilt mit dem Spulenwiderstand  $R_c$  und dem Spulenstrom  $i$  (positiv gezählt in Richtung von  $d\vec{s}$  in Bild G3.5-2a)  $u + u_i = R_c \cdot i$ .

Bei Leerlauf ( $i = 0$ ) ist die gemessene Leerlaufspannung  $u$  wegen  $u + u_i = 0 \Rightarrow u = -u_i$ . Sie wird in Bild G3.5-2b von 2 nach 1 positiv gezählt. Im Beispiel von Bild G3.5-2b ist sie wegen der positiv aufgeladenen Klemme 2 positiv, was zu  $u = -u_i > 0$  passt, da  $u_i$  im Beispiel von 2 nach 1 negativ ist. Die induzierte Spannung ist maximal, wenn  $B$ ,  $v$  und die Leiterachse zueinander rechte Winkel aufweisen. Ein rechter Winkel zwischen  $\vec{v}$  und  $\vec{B}$  führt auf

$$\vec{E}_b = \vec{v} \times \vec{B}_\delta \uparrow \uparrow d\vec{s} \Rightarrow E_b = v \cdot B_\delta \text{ in Richtung } d\vec{s}. \quad (\text{G3.5-5})$$

$$\vec{E}_b \text{ und } d\vec{s} \text{ parallel: } u_i = \int_0^l \vec{E}_b \cdot d\vec{s} = \int_0^l E_b \cdot ds = E_b \cdot l = v \cdot B_\delta \cdot l \text{ von 1 nach 2} \quad (\text{G3.5-6})$$

In (G3.5-6) wird angenommen, dass sich  $E_b$  entlang der Leiterlänge  $l$  nicht ändert. Bei  $N_s$  Windungen ergibt sich mit  $B = B_\delta$  in Übereinstimmung mit (G3.5-4) von 2 nach 1:

$$u_i = -N_s \cdot v \cdot B_\delta \cdot l. \quad (\text{G3.5-7})$$

Fallweise wird die induzierte Spannung  $u_i$  als in der Spule wirksame „innere“ Spannung (**Quellenspannung** oder **Urspannung**  $u_0 = -u_i$ ) aufgefasst, so dass bei Leerlauf die Klemmenspannung von 2 nach 1  $u = u_0 = -u_i$  ist. Sie wirkt wegen  $u_0 = -u_i$  im Spuleninneren GEGEN die induzierte Feldstärke  $E_b$  (Bild G3.5-2b). Diese Spannung  $u_0$  ist analog zur Batterie definiert, wo die Quellenspannung  $U_0$  ebenfalls entgegengesetzt zum elektrochemisch erzeugten  $E$ -Feld positiv gezählt wird. Häufig wird diese „innere“ Spannung (etwas inkorrekt) als induzierte Spannung bezeichnet, also  $u_0 = "u_i"$ . Wir werden dies meist so verwenden, aber jeweils hinweisen, dass  $u_i$  dann als „innere“ Quellenspannung gemeint ist.

### G3.6 Die elektromagnetische Kraft

Das **LORENTZ'sche Kraftgesetz** besagt (siehe Abschn. G2.3), dass auf einen stromdurchflossenen Leiter mit der Leiterlänge  $l$ , dem (differentiellen) Leiterrichtungsvektor  $d\vec{s}$  und dem Strom  $I$ , der sich in einem Magnetfeld  $\vec{B}$  befindet, eine Kraft  $\vec{F}$  (LORENTZ-Kraft) ausgeübt wird, deren Richtung im rechten Winkel zu der von  $d\vec{s}$  und  $\vec{B}$  aufgespannten Ebene liegt.

$$\vec{F} = \int_l I \cdot (d\vec{s} \times \vec{B}) \quad (\text{G3.6-1})$$

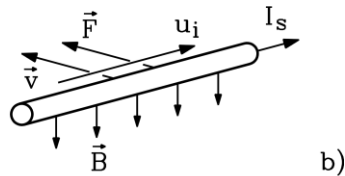
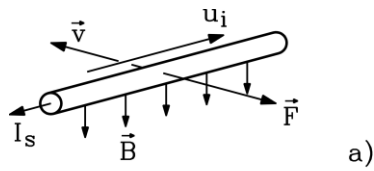
Die Kraft  $F$  (G3.6-1) ist maximal, wenn das  $B$ -Feld und die Leiterachse (Richtung von  $l$ ) zueinander rechte Winkel aufweisen. In (G3.6-2) ist angenommen, dass sich  $B$  entlang der Leiterlänge  $l$  nicht ändert.

$$\text{Rechter Winkel zwischen } d\vec{s} \text{ und } \vec{B}: \vec{F} = \int_l I \cdot (d\vec{s} \times \vec{B}) = \int_0^l I \cdot B \cdot ds = I \cdot B \cdot l \quad (\text{G3.6-2})$$

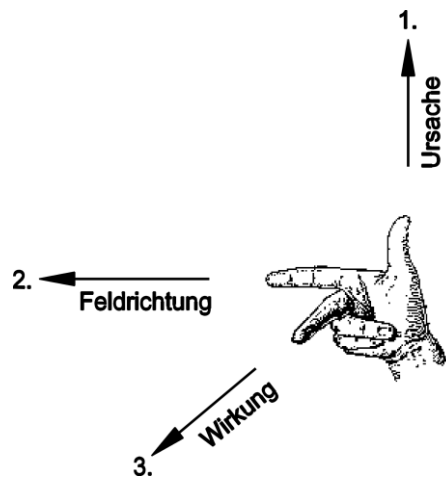
In Bild G3.6-1 ist das LORENTZ'sche Kraftgesetz auf die Luftspaltspule von Bild G3.5-2 angewendet (Strom  $I_s$ : Spulenstrom), wobei die induzierte Spannung  $u_i$  als „innere“ Quellenspannung gegen die Richtung  $\vec{E}_b = \vec{v} \times \vec{B}$  eingetragen ist. Bei  $N_s$  Windungen liegen  $N_s$  Leiter im Magnetfeld, so dass die Gesamtkraft auf die Spule  $N_s$ -mal so groß ist wie in (G3.6-2).

$$F = N_s \cdot I_s \cdot B_\delta \cdot l \quad (\text{G3.6-3})$$

Mit der **Dreifinger-Regel** (Bild G3.6-2) wird die Richtung der Kraft ermittelt. Der Daumen zeigt in Richtung der **U**rsache (Stromfluss), der Zeigefinger in Richtung des **F**elds (**V**ermittlung zwischen Ursache und Wirkung), der Mittelfinger in Richtung der **W**irkung (Kraft) – "**UVW-Regel**". In Bild G3.6-1 ist die Richtung von  $v$  und  $B$  stets gleich, folglich auch die Richtung der bewegungsinduzierten „inneren“ Spannung  $u_i$ . Ihre Richtung wird ebenfalls mit der UVW-Regel bestimmt: Ursache  $v$ , Vermittlung  $B$ , Wirkung  $E_b$ , „innere“ Spannung  $u_i$  entgegen  $E_b$  positiv gezählt. In Bild G3.6-1a fließt der Strom gegen die  $u_i$ -Richtung (**Generator**). Die Kraft  $F$  ist entgegen  $v$  gerichtet und **bremst** den Leiter. In Bild G3.6-1b fließt der Strom in die  $u_i$ -Richtung (**Motor**). Die Kraft  $F$  ist in  $v$ -Richtung gerichtet und treibt den Leiter an.



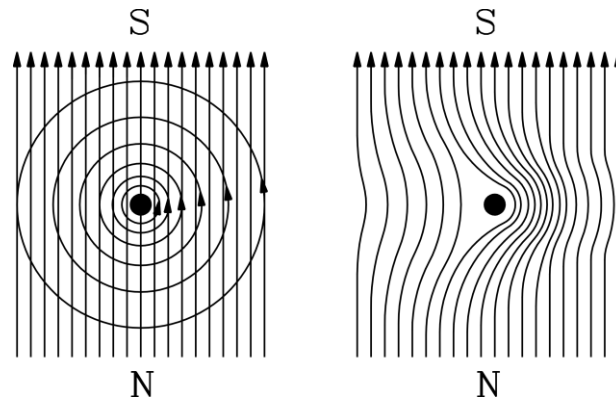
$$\vec{F} = \int_l I_s \cdot d\vec{s} \times \vec{B}$$



**Bild G3.6-1:** Bewegter Leiterabschnitt der Luftspaltspule von Bild G3.5-1 im Magnetfeld  
 a) Generator (bremsende *LORENTZ*-Kraft),  
 b) Motor (antreibende *LORENTZ*-Kraft)

**Bild G3.6-2:** Dreifinger-Regel für das *LORENTZ*'sche Kraftgesetz („UVW-Regel“)

Diese Kraftwirkung kann unmittelbar aus dem **B-Feldlinienbild** verstanden werden (Bild G3.6-3). Das Fremdfeld (Homogenfeld) ist von unten nach oben orientiert (unten N-Pol, oben S-Pol). Der Strom fließt aus der Zeichenebene auf den Betrachter zu und erregt ein kreisförmiges Feldlinienbild, dessen Richtung im Gegen-Uhrzeigersinn orientiert ist (Rechtsschraubenregel). Die Überlagerung beider Felder ergibt das resultierende *B*-Feld, das links vom Leiter kleiner als rechts vom Leiter ist. Die Feldlinien dürfen in ihrer Wirkung wie "elastische Gummischnüre" aufgefasst werden (**MAXWELL'scher Zug**), die sich nach Möglichkeit verkürzen wollen und daher auf den Leiter eine nach links gerichtete *LORENTZ*-Kraft ausüben. Zu demselben Ergebnis kommt man auch mit (G3.6-2) und der UVW-Regel.



**Bild G3.6-3:** *B*-Feldlinienbild und *Lorentz*-Kraftwirkung nach links auf einen stromdurchflossenen Leiter im Fremdfeld. Links die beiden Einzelfelder, rechts deren Summenfeld.

### G3.7 Magnetflüsse und Induktivitäten

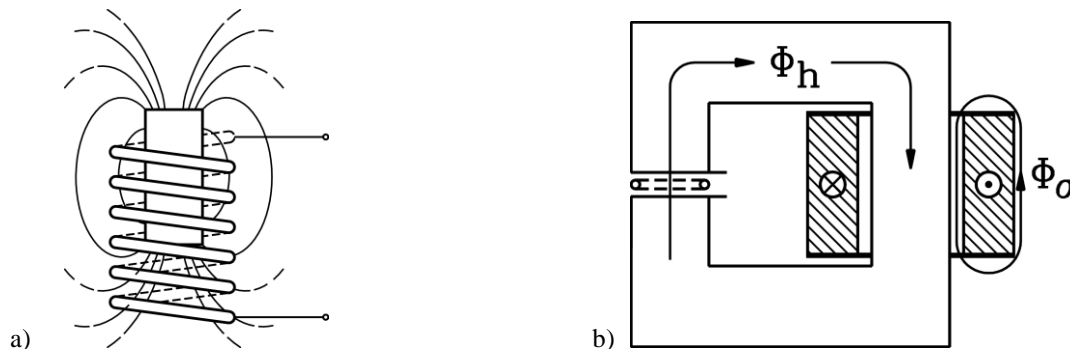
#### a) Magnetflüsse

Reale Magnetfelder in Luft sind – abgesehen von der stets geschlossenen *B*-Feldlinienform – relativ kompliziert verteilt, wie das Feldbild eines Permanentmagnet-Stabmagneten in einer Zylinderspule zeigt (Bild G3.7-1a). Einzelne Windungen der Spule sind mit einer unterschiedlichen Anzahl von Feldlinien verkettet, so dass die Flussverkettung  $\Psi$  von Windung zu



Windung variiert. Bei Verwendung der feldverstärkenden Wirkung des Eisens bildet sich das Magnetfeld nahezu zur Gänze im Eisen aus ("**gebündelter Fluss**": **Hauptfluss**  $\Phi_h$ ). Nur ein kleiner Anteil der Feldlinien schließt sich in der Luft (**Streufloss**  $\Phi_\sigma$ , Bild G3.7-1b). Jede einzelne Windung der Erregerspule (schraffierter Querschnitt) ist mit dem gesamten Haupt- und Streufloss verkettet. Da nur der Hauptfluss im Luftspalt z. B. zur Spannungsinduktion in der eingezeichneten Luftspaltspule genutzt werden kann, soll der Streufloss möglichst klein sein (kleine **Streuziffer**  $\sigma = \Phi_\sigma / \Phi_h$ ).

$$\sigma = \frac{\Phi_\sigma}{\Phi_h} < 1 \quad (\text{G3.7-1})$$



**Bild G3.7-1:** Magnetflüsse: a) Permanent-Stabmagnet in einer Zylinderspule: Deren einzelne Windungen sind in unterschiedlichem Ausmaß mit dem Feld verkettet. b) Schematische Aufteilung des Gesamtflusses in Hauptfluss  $\Phi_h$  und Streufloss  $\Phi_\sigma$ , erregt von der Erregerspule.

### b) Induktivitäten

Die  $N$  Windungen der Erregerspule (Bild T1.7-1b) sind mit Haupt- **und** Streufloss verkettet:

- **Hauptflussverkettung:**  $\Psi_h = N \cdot \Phi_h$ , **Streuflossverkettung:**  $\Psi_\sigma = N \cdot \Phi_\sigma$ . (G3.7-2)

Die Luftspaltspule ( $N_s$  Windungen) ist **nur** mit dem Hauptfluss verkettet:

- Hauptflussverkettung:  $\Psi_{h,N_s} = N_s \cdot \Phi_h$ . (G3.7-3)

Wird die Erregerspule mit Wechselstrom  $i(t)$  (Frequenz  $f$ ) gespeist, so pulsieren wegen  $B \sim i(t)$  auch die Flüsse und damit die Flussverkettungen. Gemäß dem Induktionsgesetz wird die Spannung  $u_{i,N_s}$  in der Luftspaltspule induziert (**Gegeninduktion**, da das induzierende Feld von einer anderen, nämlich der Erregerspule erzeugt wird). Dies führt zum Begriff der **Gegeninduktivität**  $M$ .

$$u_{i,N_s} = -\frac{d\Psi_{h,N_s}(t)}{dt} = -N_s \cdot \frac{d\Phi_h(t)}{dt} = -M \cdot \frac{di(t)}{dt} \quad (\text{G3.7-4})$$

$$M = \frac{\Psi_{h,N_s}}{i} = \frac{N_s \Phi_h}{i} = \frac{N_s B_\delta A}{i} = N_s \cdot A \cdot \frac{\mu_0 N i / \delta}{i} = N_s \cdot N \cdot \mu_0 \cdot \frac{A}{\delta} = N_s \cdot N \cdot A_h \quad (\text{G3.7-5})$$

In der Erregerspule wird die Selbstinduktionsspannung  $u_{i,N}$  induziert (**Selbstinduktion**, da das induzierende Feld von der Spule selbst erregt wurde). Die zugehörige **Selbstinduktivität**  $L$  besteht aus den Komponenten **Haupt- und Streu-Selbstinduktivität**  $L_h$  und  $L_\sigma$ .

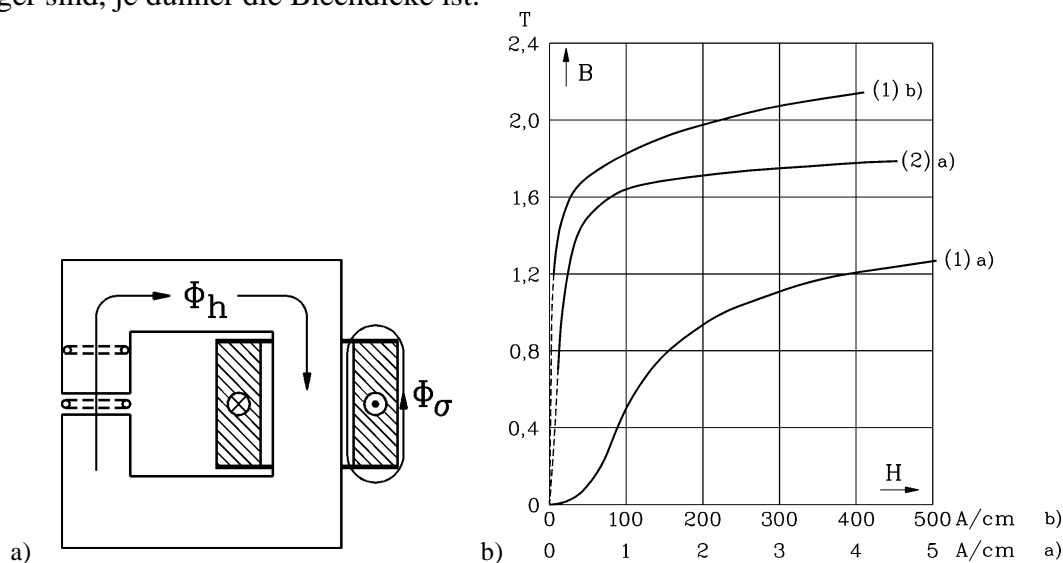
$$u_{i,N} = -\frac{d\Psi_{h+\sigma}(t)}{dt} = -N \cdot \frac{d\Phi_{h+\sigma}(t)}{dt} = -L \cdot \frac{di(t)}{dt} \quad (\text{G3.7-6})$$

$$L = \frac{\Psi_{h+\sigma}}{i} = \frac{N(\Phi_h + \Phi_\sigma)}{i} = \frac{N B_\delta A}{i} + \frac{N \Phi_\sigma}{i} = N^2 \cdot A_h + N^2 \cdot A_\sigma = L_h + L_\sigma \quad (\text{G3.7-7})$$

Die Selbstinduktivität ist proportional zum Quadrat der Spulenwindungszahl, die Gegeninduktivität proportional zum Produkt der Windungszahlen der verketteten Spulen.

### G3.8 Ummagnetisierungsverluste

Bei Wechselstromspeisung der Erregerspule pulsiert der Hauptfluss  $\Phi_h$  mit derselben Frequenz  $f$  wie der Erregerstrom  $i$ . Nicht nur in der Luftspaltspule Bild G3.8-1a, sondern auch im Eisenjoch wird eine Spannung induziert, da auch das Eisenjoch mit dem Hauptfluss „verkettet“ ist. Im elektrisch leitfähigen Eisen fließen daher Ströme auf in sich geschlossenen Strombahnen (**Kreis-** oder **Wirbelströme**), die OHM'sche Verluste im Eisen verursachen (**Wirbelstromverluste**  $P_{Ft}$ ). Wenn das Eisenjoch aus einzelnen gegeneinander isolierten Blechen geringer Dicke geschichtet wird, so werden diese Strombahnen wirkungsvoll unterbrochen. Es können nur noch sehr kleine Wirbelströme in jedem Blech fließen, die umso geringer sind, je dünner die Blechdicke ist.



**Bild G3.8-1:** a) In das elektrisch leitfähige Eisenjoch wird durch den veränderlichen Fluss  $\Phi_h$  eine Spannung induziert, die Wirbelströme (Kreisströme) im Eisen treibt. b) Gleichstrom-Magnetisierungskurven  $B(H)$ , Hystereseschleife vernachlässigt: (1) warmgewalztes Elektroblech, 0,5 mm dick,  $\nu_{10} = 3$  W/kg; (2) kaltgewalztes, kornorientiertes Blech, 0,35 mm dick, Vorzugsrichtung,  $\nu_{10} = 0,45$  W/kg.

Die Summe aus Wirbelstromverlusten  $P_{Ft}$  und Hystereseverlusten  $P_{hys}$  heißt **Ummagnetisierungsverluste** ("Eisenverluste")  $P_{Fe}$ . Die Verluste werden z. B. bei  $B = 1$  T Amplitude und  $f = 50$  Hz Frequenz in speziellen Geräten (EPSTEIN-Rahmen) gemessen und je 1 kg Masse als Verlustziffer  $\nu_{10}$  in W/kg vom Blechhersteller angegeben. Zusätzlich zur Schichtung von Eisenkreisen aus Blechen kann die spezifische elektrische Leitfähigkeit der Bleche durch Beimengung von Silizium herabgesetzt werden, um die Wirbelstromverluste zu verringern ("**Dynamo- oder Elektroblech**", Bild G3.8-1b, Kurve 1). Allerdings sinkt dadurch auch die Permeabilität  $\mu$  etwas. Beim Magnetkreis von Bild G3.8-1a, aber auch bei Transformatoren, ist die Richtung der Feldlinien stets parallel zu den Eisenjochlängsrichtungen. Für diese Blechkörper wurden kaltgewalzte Bleche in den USA entwickelt, so dass in Walzrichtung die "Elementarmagnete" bevorzugt angeordnet sind. Daher ist in Blechlängsrichtung, also der Walz- bzw. Vorzugsrichtung die Permeabilität  $\mu$  deutlich erhöht, in Querrichtung aber deutlich verringert ("**kornorientiertes Blech**", Bild G3.8-1b, Kurve 2). Für rotierende elektrische Maschinen, wo die Feldrichtung in der Blechebene ständig dreht, ist dieses Blech daher nicht geeignet.

### G3.9 Elektrische Leistung

#### a) Effektivwert eines sinusförmigen Wechselstroms

An einem Leitungswiderstand  $R$  verursacht eine sinusförmige Wechselspannung (Frequenz  $f$ , Kreisfrequenz  $\omega = 2\pi f$ ) mit dem Momentanwert  $u(t) = \hat{U} \cdot \sin \omega t$  den phasengleichen Wechselstrom  $i(t) = \hat{I} \cdot \sin \omega t = (\hat{U} / R) \cdot \sin \omega t$ . Die elektrische Momentanleistung ist gemäß Bild G3.9-1)

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = \frac{u^2(t)}{R} = Ri^2(t) = u(t) \cdot i(t) = \frac{\hat{U}^2}{R} \cdot \sin^2(\omega t) . \quad (\text{G3.9-1})$$

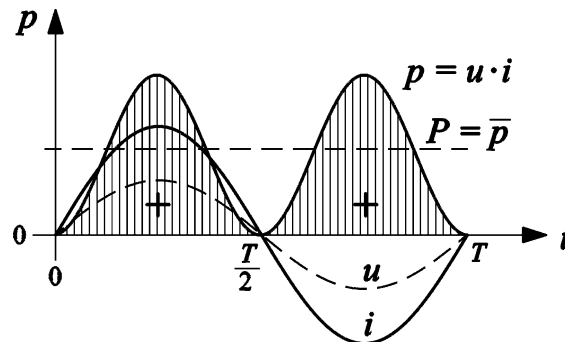


Bild G3.9-1: Momentanwerte von Spannung, Strom und Leistung an einem *Ohm'schen* Widerstand

In Bild G3.9-1 sind  $u$ ,  $i$  und  $p$  im Intervall einer Periode  $T = 1/f$  dargestellt. Der dort ersichtliche Verlauf der Leistung wird durch die Umformung

$$p(t) = \hat{U}\hat{I} \cdot \sin^2(\omega t) = \hat{U}\hat{I} \cdot \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} = \frac{\hat{U}\hat{I}}{2} - \frac{\hat{U}\hat{I}}{2} \cos(2\omega t) = P + p_{\sim}(t) \quad (\text{G3.9-2})$$

klarer ausgedrückt: Der Ausdruck  $\bar{p} = \hat{U}\hat{I} / 2$  stellt eine von der Zeit **unabhängige** Leistung dar; sie wird durch die gestrichelte Gerade in Bild G3.9-1 dargestellt. Dieser konstanten Leistung ist eine mit der doppelten Frequenz des Wechselstromes  $2f$  periodische Leistung

$$p_{\sim}(t) = -\frac{\hat{U}\hat{I}}{2} \cos(2\omega t)$$

überlagert. Für die Praxis ist die **Momentanleistung**  $p(t)$  des Wechselstromes meist belanglos. Es interessieren nur die **mittlere Leistung**  $\bar{p}$  als **Wirkleistung** und

**Arbeit** des Stromes  $W = \int_0^{\tau} p(t) \cdot dt$  über so lange Zeit  $\tau$ , dass diese mit vernachlässigbarem

Fehler einer ganzen Zahl von Perioden  $T$  gleichgesetzt werden kann.

$$W = \int_0^{\tau} p(t) \cdot dt \approx \bar{p} \cdot \tau \quad (\text{G3.9-3})$$

Die mittlere Leistung  $\bar{p}$  über eine ganze Zahl von Perioden wird durch  $P$  in (G3.9-2)

$$P = \bar{p} = \frac{\hat{U}\hat{I}}{2} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}} = U \cdot I = \frac{U^2}{R} \quad (\text{G3.9-4})$$

angegeben, da die Leistungskurve in Bild G3.9-1 oberhalb und unterhalb der gestrichelten Geraden gleich große Flächen einschließt. Die eingeführten Abkürzungen  $U = \hat{U} / \sqrt{2}$ ,  $I = \hat{I} / \sqrt{2}$  heißen **Effektivwert der Spannung** und **Effektivwert der Stromstärke**. Sie bedeuten die Spannung und Stromstärke jenes Gleichstroms, dessen Leistung  $P$  gleich der

mittleren Leistung des Wechselstroms ist. Für die Arbeit des Wechselstroms während einer ganzen Zahl  $N$  von Perioden  $T$  gilt gemäß (G3.9-3)  $W = P \cdot NT = U \cdot I \cdot N \cdot T$ .

Diese **Arbeit** kommt in Bild G3.9-1 als **Fläche unter der Leistungskurve**  $p(t)$  zum Ausdruck. Sie wird durch die im Bereich einer ganzen Zahl von Perioden gleich großen Flächen unter der gestrichelten Geraden ersetzt. Der Effektivwert  $I$  einer sinusförmig veränderlichen Größe  $i(t)$  ist der **Sonderfall** einer aus einer mittleren Leistung  $\bar{p}$  ermittelten **Ersatzgröße** einer **allgemein periodischen Größe**  $i(t)$  (Periode  $T$ ), deren Leistung an einem Widerstand  $R$  gleich groß ist wie die einer Gleichgröße  $I$ .

$$P = \bar{p} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) \cdot R \cdot dt = I^2 R \quad \Rightarrow \quad I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) \cdot dt} \quad (\text{G3.9-5})$$

Das **Ohm'sche Gesetz** für Wechselgrößen wird mit den Effektivwerten  $U$ ,  $I$  in der Form  $U = R \cdot I$  geschrieben, obwohl es sich um zeitlich periodisch veränderliche Größen handelt, wenn ein Betrachtungszeitraum gemeint ist, der zumindest eine Periode umfasst und wenn nur die mittlere im Widerstand umgesetzte Leistung  $P$  interessiert.

### **Fazit:**

*Unter dem Effektivwert einer Wechselspannung (eines Wechselstromes) verstehen wir jene Gleichspannung (jenen Gleichstrom), die an einem Leitungswiderstand während einer ganzen Zahl von Perioden dieselbe Arbeit wie der Wechselstrom verrichtet.*

### **b) Leistung und Arbeit des Wechselstroms**

Wenn im Wechselstromkreis kapazitive und induktive Widerstände auftreten, weisen Strom und Spannung im Allgemeinen eine Phasenverschiebung zueinander auf. Es sei der Strom durch die Funktion  $i(t) = \hat{I} \sin(\omega t)$  und die Spannung durch die Funktion  $u(t) = \hat{U} \sin(\omega t + \varphi)$  gegeben. Im Zeitintervall  $dt$  wird gemäß (G3.9-3) die differentiell kleine Arbeit  $dW = u(t) \cdot i(t) \cdot dt$  verrichtet. Die Leistung im Zeitpunkt  $t$  ist  $p(t) = dW / dt = u(t) \cdot i(t)$ . Wir betrachten im Folgenden vier Sonderfälle.

**Fall a)**  $\varphi = 0$ : An **OHM'schen Widerständen**  $R$  sind Strom und Spannung **in Phase**, also die Phasenverschiebung zwischen ihnen Null. Der Verlauf von  $u(t)$ ,  $i(t)$  und  $p(t)$  (Bild G3.9-1) zeigt:  $u$  und  $i$  stets gleiches Vorzeichen, also ist die Leistung  $p = u \cdot i$  **stets positiv**. Die Arbeit während einer Periode ist  $W(T) = U \cdot I \cdot T$  und wird in **Wärme** umgesetzt. Diese erhöht die Temperatur im Widerstand und die der umgebenden "Kühl"luft.

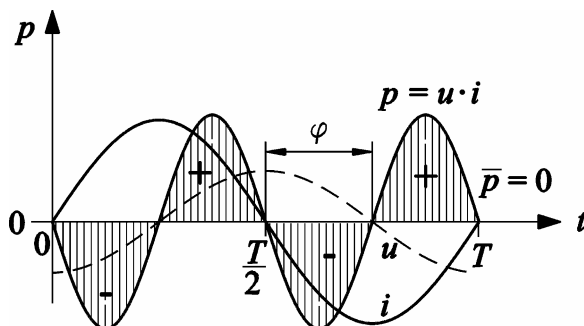
**Fall b)**  $\varphi = -\pi/2$ : Beim **kapazitiven Widerstand** (idealer Kondensator) eilt der Strom der Spannung um  $90^\circ$  vor (Verlauf von  $u(t)$ ,  $i(t)$  und  $p(t)$  in Bild G3.9-2). Der Phasenwinkel  $\varphi$  wird vom Strom zur Spannung gezählt und ist bei Voreilen des Stroms **NEGATIV**.

**Fall c)**  $\varphi = \pi/2$ : Beim **induktiven Widerstand** (ideale Magnetspule ("**Drossel**")) eilt der Strom der Spannung um  $90^\circ$  nach. Der Phasenwinkel  $\varphi$  ist daher **POSITIV**.

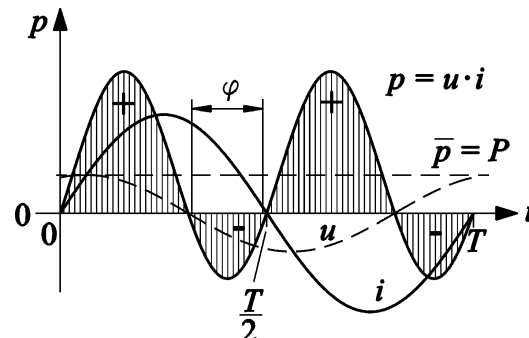
Gemäß Bild G3.9-2 wird im Fall b) während der Dauer einer Periode ebensoviel positive wie negative Arbeit verrichtet; gleiches gilt für Fall c). Die mittlere Leistung und die Arbeit im Verlauf einer ganzen Zahl von Perioden **sind daher Null**; der zugehörige Strom, der im zeitlichen Mittel keine Arbeit verrichtet, heißt **wattloser Strom oder Blindstrom**. Kapazitive und induktive Widerstände werden daher **Blindwiderstände** genannt. Die zugehörige Leistung mit dem Mittelwert Null wird als Pendelleistung zwischen Spannungsquelle und Blindwiderstand mit doppelter Netzfrequenz  $2f$  verlustlos ausgetauscht. Ihre Leistungsamplitude heißt **Blindleistung**  $Q$ . Für  $\varphi = \pm\pi/2$  folgt

$$p(t) = \hat{U} \sin(\omega t + \varphi) \cdot \hat{I} \cdot \sin \omega t = \pm \hat{U} \sin \omega t \cdot \hat{I} \cdot \cos \omega t = \pm UI \cdot \sin(2\omega t) = \pm Q \sin(2\omega t)$$

$$\overline{p(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = 0 \quad (\text{G3.9-6})$$



**Bild G3.9-2:** Momentanwerte von Spannung, Strom und Leistung an einem idealen Kondensator:  $\varphi = -90^\circ$



**Bild G3.9-3:** Momentanwerte von Spannung, Strom und Leistung an einer realen Spule (reale Drossel):  $0 < \varphi < 90^\circ$

In realen Schaltungen treten stets auch OHM'sche Widerstände auf (z. B. leitfähige Verbindungen wie Anschlussdrähte aus Kupferlackdraht zwischen Spannungsquelle und Blindwiderstand), die zu einer in Wärme umgesetzten elektrischen Leistung führen, was zu Fall d) führt.

**Fall d)**  $0 < \varphi < \pi/2$ : Eine **reale Spule** besteht aus einem OHM'schen Widerstand der Spulenwicklung und aus einer induktiven Komponente infolge der Selbstinduktion durch das Spulen-Magnetfeld. Daher liegt der Phasenwinkel im Bereich  $0 < \varphi < \pi/2$ . Nach Bild G3.9-3 überwiegt im Laufe einer Periode die positive Arbeit, und es wird Wirkleistung  $P$  in Wärme umgesetzt. Um diesen Mittelwert der Leistung pendelt die Momentanleistung mit dem Wechselanteil  $p_{\sim}(t)$ . Dieser Wechselanteil kann in den Leistungsanteil mit der Amplitude  $Q$  (bedingt durch den induktiven Anteil der Spule) und den Anteil mit der Amplitude  $P$  (bedingt durch den Widerstand  $R$ ) zerlegt werden.

$$p(t) = \hat{U} \sin(\omega t + \varphi) \cdot \hat{I} \cdot \sin \omega t = \hat{U} \cdot \hat{I} \cdot \sin \omega t \cdot [\sin \omega t \cdot \cos \varphi + \cos \omega t \cdot \sin \varphi]$$

$$p(t) = \frac{\hat{U}\hat{I}}{2} \cdot \cos \varphi \cdot (1 - \cos 2\omega t) + \frac{\hat{U}\hat{I}}{2} \cdot \sin \varphi \cdot \sin 2\omega t = P \cdot (1 - \cos 2\omega t) + Q \cdot \sin 2\omega t$$

$$p(t) = P + p_{\sim}(t) = UI \cos \varphi + UI \cos(2\omega t - \varphi) = P + S \cdot \cos(2\omega t - \varphi)$$

$$\text{Momentanleistung: } p(t) = P \cdot (1 - \cos 2\omega t) + Q \cdot \sin 2\omega t \quad (\text{G3.9-7})$$

$$\text{Wirkleistung: } P = U \cdot I \cdot \cos \varphi \quad (\text{G3.9-8})$$

$$\text{Blindleistung: } Q = U \cdot I \cdot \sin \varphi \quad (\text{G3.9-9})$$

$$\text{Scheinleistung: } S = \sqrt{P^2 + Q^2} = U \cdot I \quad (\text{G3.9-10})$$

Mit den Zeigerdiagrammen aus Bild G3.9-4 wird Fall d) auf die Fälle a), c) zurückgeführt: Das Zerlegen des Spannungszeigers  $\underline{U}$  in eine zum Stromzeiger  $\underline{I}$  parallele Komponente  $\underline{U}_w$  und eine dazu normale Komponente  $\underline{U}_b$  ergibt  $U_b = U \cdot \sin \varphi$ , welche eine Spannung mit der Phasenverschiebung  $90^\circ$  darstellt, die zur Arbeit während einer Periode nichts beiträgt (**Blindkomponente**). Es folgt aus dem Zeigerdiagramm die Blindleistung  $U_b \cdot I = UI \cdot \sin \varphi = Q$  in Übereinstimmung mit (G3.9-9). Die Parallelkomponente ist eine Spannung ohne Phasenverschiebung (Phasenwinkel Null) gegenüber dem Strom:  $U_w = U \cdot \cos \varphi$ . Ihre **mittlere** Leistung während einer Periode ist die mittlere Leistung (Wirkleistung) des Gesamtstromes

$U_w \cdot I = UI \cdot \cos \varphi = P$  in Übereinstimmung mit (G3.9-8). Man kommt zum selben Ergebnis mit einer Zerlegung des Stroms in eine parallel und normal zur Spannung wirkende Komponente:  $I_w = I \cdot \cos \varphi$ ,  $I_b = I \cdot \sin \varphi$ ,  $U \cdot I_w = UI \cdot \cos \varphi = P$ ,  $U \cdot I_b = UI \cdot \sin \varphi = Q$ .

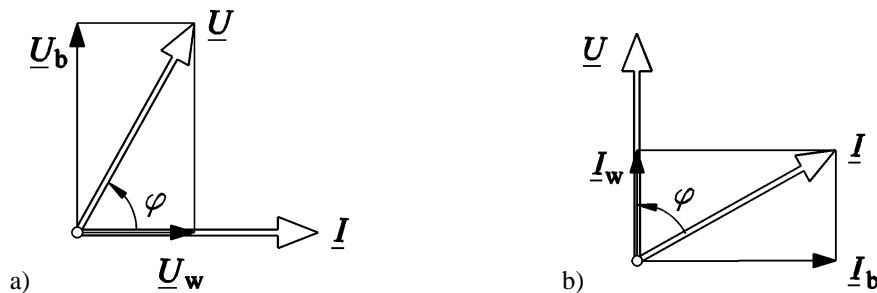


Bild G3.9-4: Reale Spule (Drossel): Zwei gleichwertige Zeigerdiagramme zu Bild G3.9-3: a) Zerlegung der Spannung, b) Zerlegung des Stroms in Wirk- und Blindkomponente.

### c) Wattmeter zur Messung der elektrischen Leistung

Digitale **elektronische Wattmeter** („Multimeter“) bestimmen aus einem zeitlich beliebigen Stromsignal  $i(t)$  (Strompfad) und einem zeitlich beliebigen Spannungssignal  $u(t)$  (Spannungspfad), die an den Messeingängen anliegen, mit einer vorgegebenen Mittelwertzeit  $\tau$  eine mittlere Leistung als Wirkleistung (G3.9-11). Speziell für sinusförmige Strom- und Spannungssignale konstruierte Wattmeter (z. B. analog arbeitende **elektrodynamische Wattmeter**, die über Magnetkräfte zwischen ruhenden und drehenden Spulen auf ein Zeigergerät arbeiten), ermitteln die Wirkleistung  $\overline{p(t)} = UI \cdot \cos \varphi$ .

$$\overline{p(t)} = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} u(t)i(t)dt \quad (\text{G3.9-11})$$

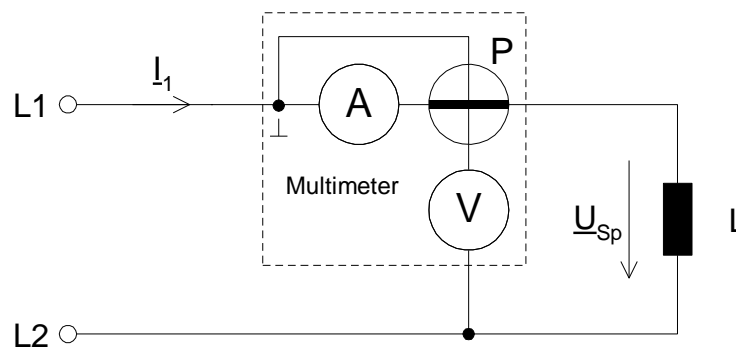


Bild G3.9-5: Elektrische Leistungsmessung  $P$  an einer Spule  $L$  über ein Wattmeter (Multimeter)

**Beachten Sie, dass ein Phasenwinkel nur zwischen sinusförmigen Signalen definiert ist.** Die Spannung an einer Schaltung, in der die in Wärme umgesetzte elektrische Verlustleistung messtechnisch bestimmt werden soll, wird an die Spannungsklemmen ("Spannungspfad") des Wattmeters angeschlossen, während die Stromzufuhr in die Schaltung über die Stromklemmen ("Strompfad") des Wattmeters realisiert wird (Bild G3.9-5).

### G3.10 Beispiel eines einfachen elektromechanischen Energiewandlers

Eine Spule mit  $N_s$  Windungen wird durch eine mechanische Kraft  $F_{\text{mec}}$  in einem Magnetfeld  $B_\delta$ , das zwischen zwei Polen eines magnetischen Eisenkreises von einer Erregerspule ( $N$

Windungen, Erregerstrom  $I$  erzeugt wird, mit der Geschwindigkeit  $v$  bewegt. In die bewegte Spule wird durch Bewegungsinduktion eine elektrische Spannung  $u_i$  induziert, die bei konstanter Geschwindigkeit  $v$  und räumlich konstantem Feld  $B_\delta$  (Homogenfeld) eine Gleichspannung  $U_i$  ist (Bild G3.10-1).

$$U_i = N_s \cdot v \cdot B_\delta \cdot l \quad (\text{G3.10-1})$$

Wird die Spule ( $R_i$ : Spuleninnenwiderstand) mit dem Widerstand  $R$  belastet, so fließt ein Spulenstrom

$$I_s = U_i / (R + R_i) \quad (\text{G3.10-2})$$

GEGEN die Richtung der als „innere“ Quellenspannung eingetragenen induzierten Spannung  $U_i$  und IN Richtung des äußeren Spannungsfalls  $U$  am Widerstand  $R$  (Bild G3.10-2a).

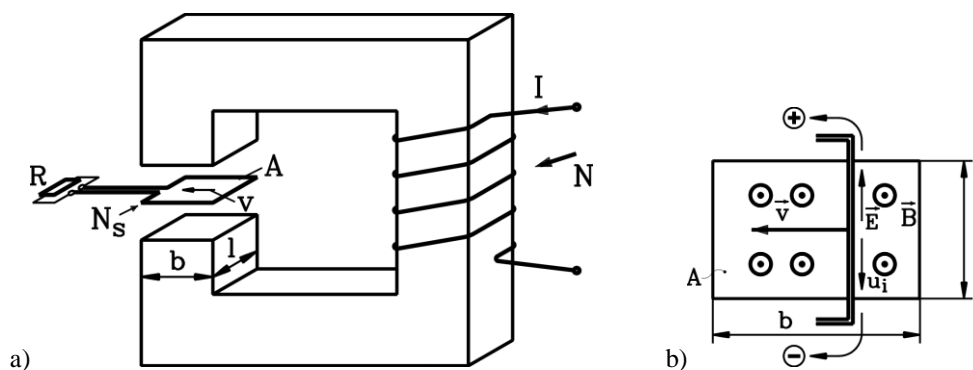


Bild G3.10-1: Einfacher elektromechanischer Energiewandler: a) Eine Spule (Windungszahl  $N_s$ ) wird durch eine mechanische Kraft  $F_{\text{mec}}$  in einem Magnetfeld  $B$ , das zwischen zwei Eisen-Polen von einer Erreger-spule (Windungszahl  $N$ ) erzeugt wird, mit der Geschwindigkeit  $v$  bewegt. b) In die bewegte Spule wird über  $\vec{E} = \vec{v} \times \vec{B}$  eine elektrische Spannung induziert (hier eingetragen als „innere“ Quellenspannung  $u_i$ ), so dass bei Belastung der Spule mit einem Widerstand  $R$  ein Strom  $I$  fließen kann. Es wird die mechanische Leistung  $F_{\text{mec}} \cdot v$  der Spule in elektrische Leistung  $R \cdot I^2$  umgewandelt; die bewegte Spule wirkt als elektrischer Generator.

Es tritt eine bremsende LORENTZ-Kraft

$$F = N_s \cdot I_s \cdot B_\delta \cdot l \quad (\text{G3.10-3})$$

an der Spule auf (Bild G3.10-2b). Um die Bewegung der Spule mit konstanter Geschwindigkeit  $v$  aufrecht zu erhalten, muss daher ständig eine mechanische Kraft  $F_{\text{mec}} = F$  entgegen der Richtung von  $F$  aufgebracht werden. Von dem die Spule antreibenden mechanischen Antriebssystem wird der Spule die **mechanische Leistung**

$$P_{\text{mec}} = F_{\text{mec}} \cdot v = P_{\text{in}} \quad (\text{G3.10-4})$$

zugeführt, die in elektrische, „innere“ Leistung  $P_i$  umgewandelt wird. Abgegeben wird die **elektrische Leistung**  $P_{\text{out}}$  an den Belastungswiderstand  $R$ .

$$P_{\text{in}} = F_m \cdot v = F \cdot v = N_s \cdot I_s \cdot l \cdot B_\delta \cdot v = I_s \cdot (N_s \cdot v \cdot B_\delta \cdot l) = I_s \cdot U_i = P_i \quad (\text{G3.10-5})$$

$$P_{\text{out}} = R \cdot I_s^2 = \frac{R \cdot U_i^2}{(R + R_i)^2} \quad (\text{G3.10-6})$$

Das Verhältnis von abgegebener zu zugeführter Leistung ist der **Wirkungsgrad**  $\eta$ .

$$\eta = \frac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}} = \frac{R}{R_i + R} < 1 \quad (\text{G3.10-7})$$

### Beispiel G3.10-1:

Zahlenwerte zum einfachen elektromechanischen Energiewandler:

Spule:  $N_s = 5$ , Magnetfeld  $B_\delta = 1.2$  T, Geschwindigkeit  $v = 100$  m/s = 360 km/h, Länge der Spulenseite  $l = 0.5$  m,  $R_i = 0.1$  Ohm,  $R = 1$  Ohm:

$$U_i = N_s \cdot v \cdot B_\delta \cdot l = 5 \cdot 100 \cdot 1.2 \cdot 0.5 = 300 \text{ V}, \quad I_s = U_i / (R + R_i) = 300 / (0.1 + 1) = 272.73 \text{ A},$$

$$F = N_s \cdot I_s \cdot B_\delta \cdot l = 5 \cdot 272.73 \cdot 1.2 \cdot 0.5 = 818.18 \text{ N},$$

$$P_{\text{mec}} = F_{\text{mec}} \cdot v = P_{\text{in}} = 818.18 \cdot 100 = 81818 \text{ W}.$$

$$\text{Kontrolle: } P_{\text{in}} = P_i = I_s U_i = 272.73 \cdot 300 = 81818 \text{ W}, \quad P_{\text{out}} = R I_s^2 = 1 \cdot 272.73^2 = 74382 \text{ W},$$

$$\eta = \frac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}} = \frac{74382}{81818} = 0.909 \quad \text{bzw.} \quad \eta = \frac{1}{0.1 + 1} = 0.909.$$

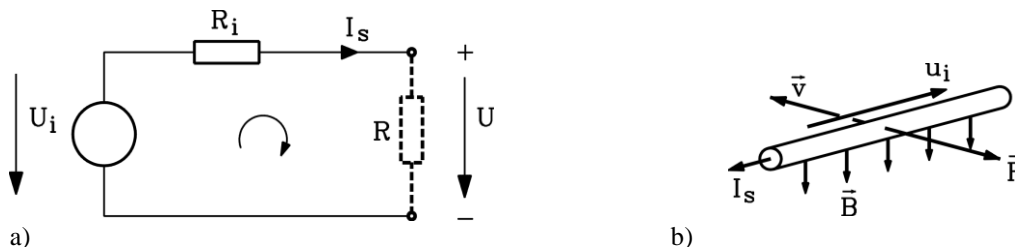


Bild G3.10-2: a) Elektrisches Ersatzschaltbild der bewegten Spule als Generator, induzierte Spannung  $U_i$  als „innere“ Quellenspannung, b) bremsende LORENTZ-Kraft auf die stromdurchflossenen Leiter im Magnetfeld

### G3.11 Zählfeilsysteme

Fasst man den Energiewandler als **Black-Box** auf, so kann gemäß Bild G3.11-1a) bei positiver an den Klemmen anliegender Spannung  $U$  ein IN den Wandler fließender Strom positiv gezählt werden. Dann ist auch die zugeführte elektrische Leistung  $P = U \cdot I$  positiv zu zählen. Sie wird dem Wandler zugeführt; er "verbraucht" diese Leistung. Dieses Zählfeilsystem heißt "**Verbraucher-Zählfeilsystem**", weil die vom Wandler **aufgenommene elektrische Leistung positiv gezählt wird**. In gleicher Weise wird die vom Wandler abgegebene mechanische Leistung positiv gezählt.

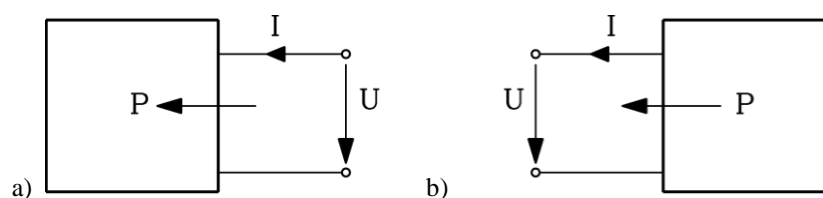


Bild G3.11-1: Positive Strom-, Spannungs- und Leistungsflussrichtung, a) Verbraucher-Zählfeilsystem, b) Erzeuger-Zählfeilsystem

#### Beispiel G3.11-1: Elektromotor, VZS:

Ein Elektromotor nimmt elektrische Energie auf und wandelt sie in mechanische Energie um. Er ist ein elektrischer Verbraucher.

Elektromotor: Nennleistung = mechanische Abgabeleistung: 10 kW, Wirkungsgrad: 0.9

- Zugeführte elektrische Leistung:  $P_1 = 10/0.9 = 11.1 \text{ kW} > 0$

- Abgegebene mechanische Leistung:  $P_2 = 10 \text{ kW} > 0$

- Verluste im Motor:  $P_d = P_1 - P_2 = 11.1 - 10 = 1.1 \text{ kW} > 0$

#### Beispiel G3.11-2: Elektrischer Generator, VZS:

Ein Generator nimmt mechanische Energie auf und wandelt sie in elektrische Energie um. Er ist ein elektrischer Erzeuger.

Lichtmaschine im Auto: Nennleistung = el. Abgabeleistung: 750 W, Wirkungsgrad: 0.7

- Abgegebene elektrische Leistung:  $P_1 = -750 \text{ W} < 0$



- Zugeführte mechanische Leistung:  $P_2 = -750/0.7 = -1071 \text{ W} < 0$
- Verluste im Generator:  $P_d = P_1 - P_2 = -750 - (-1071) = 321 \text{ W} > 0$

Die Verluste sind "verbrauchte" Leistung und daher im VZS stets positiv. Wird umgekehrt ein AUS dem Wandler fließender Strom positiv gezählt, so ist auch die zugehörige, vom Wandler abgegebene elektrische Leistung  $P$  positiv ("**Erzeuger-Zählfeilsystem**", EZS). **In dieser Vorlesung wird bevorzugt das Verbraucher-Zählfeilsystem (VZS) verwendet.**

Elektrische Verbraucher wie Heizwiderstände, Elektromotoren, Batterien im Ladezustand, etc. nehmen im VZS positive Wirkleistung ( $P > 0$ ) aus dem Netz auf.

Elektrische Erzeuger wie Generatoren, Batterien im Entladezustand, energieliefernde Brennstoffzellen etc. nehmen im VZS negative Wirkleistung aus dem Netz auf ( $P < 0$ ); sie liefern Wirkleistung ins Netz.

In gleicher Weise ist im VZS bei sinusförmig veränderlichen Strom und Spannung der kapazitive Strom der Spannung um  $90^\circ$  voreilend und die zugehörige Blindleistung negativ, im EZS der Strom um  $90^\circ$  nacheilend und die Blindleistung positiv. Im VZS ist der induktive elektrische Strom der Spannung um  $90^\circ$  nacheilend und die zugehörige Blindleistung positiv, im EZS der induktive Strom um  $90^\circ$  voreilend und die Blindleistung negativ.

Beispiel G3.11-3: Energiewandler von Bsp. G3.11-1 im Verbraucher-Zählfeilsystem: Der Energiewandler arbeitet als Generator, daher ist bei positiver Geschwindigkeit  $v$  und positivem Feld  $B_\delta$  die Spannung  $U_i$  positiv (Tab. G3.11-1), aber der Strom gemäß Bild 1.5a im VZS negativ:  $I_s = -272.73 \text{ A}$ , ebenso  $P_e = -81818 \text{ W}$  und  $P_m = -74382 \text{ W}$ .

Generatorischer Betrieb	Motorischer Betrieb
$v > 0, B_\delta > 0 \Rightarrow U_i > 0$	
$I_s < 0, v > 0$	$I_s > 0, v > 0$
$P_i = U_i I_s < 0$	$P_i = U_i I_s > 0$
$P_{\text{out}} < 0$	$P_{\text{out}} > 0$
$P_m = P_{\text{in}} < 0$	$P_m = P_{\text{in}} > 0$
$I_s$ - $v$ -Ebene: <b>2. Quadrant</b>	$I_s$ - $v$ -Ebene: <b>1. Quadrant</b>

Tabelle G3.11-1: Generatorische und motorische Energiewandlung im Verbraucherzählfeilsystem

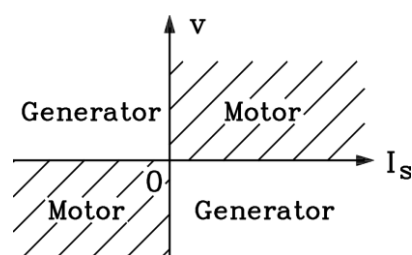


Bild G3.11-2: Vier-Quadrantenbetrieb: Verbraucher-Zählfeilsystem (VZS):

$v > 0, I_s > 0$  und  $v < 0, I_s < 0$ : Motor       $v > 0, I_s < 0$  und  $v < 0, I_s > 0$ : Generator

Bei Umkehr der Stromrichtung (Stromzufuhr aus einer externen Spannungsquelle, Vorzeichenumkehr bei  $I_s$ ) wirkt die LORENTZ-Kraft in Richtung der Spulenbewegung und bewegt sie daher (MOTOR-Prinzip). In der  $I_s$ - $v$ -Ebene kann Generator- und Motorbetrieb durch Einteilung in "Quadranten" dargestellt werden. Bei negativer Geschwindigkeit  $v < 0$  (= umgekehrte Bewegungsrichtung) können ebenfalls motorischer und generatorischer Betrieb der Spule eingestellt werden (**3. und 4. Quadrant**).

Beispiel G3.11-4:

Gleichspannungsquelle  $U_0$  mit Verbraucher  $R_a$  (Bild G3.11-3a):

Kurzschlussstrom, also  $R_a = 0$ :  $I_k = U_0 / R_i$ , Laststrom:  $I = \frac{U_0}{R_i + R_a}$ ,

bezogener Laststrom:  $i = I / I_k$ ,

Lastspannungscharakteristik:  $U = U_0 - I \cdot R_i = U_0 \cdot (1 - I / I_k) = U_0 \cdot (1 - i) = U(i)$ ,

Abgabeleistung:  $P_{out} = U \cdot I = U_0 I_k \cdot (1 - i) \cdot i$ ,

Wirkungsgrad:  $\eta = P_{out} / P_{in} = (U \cdot I) / (U_0 \cdot I) = U / U_0 = 1 - i \Rightarrow P_{out} = U_0 I_k \cdot \eta \cdot (1 - \eta)$

Den Verlauf von Lastspannung, Wirkungsgrad und Abgabeleistung in Abhängigkeit des auf den Kurzschlussstrom bezogenen Laststroms zeigt Bild G3.11-3b.

Bsp. G3.11-4 kennzeichnet die unterschiedlichen Arbeitsbereiche der el. Energietechnik und der Nachrichtentechnik. Wenn die Spannungsquelle  $U_0$  mit dem Innenwiderstand  $R_i$  als elektrisches Netz betrachtet werden, dann muss der Einsatzbereich der Energietechnik bei möglichst geringem Innenwiderstand  $R_i \ll R_a$  erfolgen, um einen hohen Wirkungsgrad zwischen Generatorklemme und Endnutzer zu erzielen (Bild G3.11-4). Dadurch ist aber die bei Kurzschluss auftretende Netzkurzschlussleistung  $U_0 I_k = U_0^2 / R_i$  viel höher als die genutzte Leistung und zerstörerisch groß. Netzkurzschlüsse müssen somit vermieden oder durch schnelle Leistungsschalter sicher abgeschaltet werden. In der Nachrichtentechnik ist das oberste Ziel die verzerrungsfreie und damit unverfälschte Übertragung einer Nachricht. Da auf dem Weg vom Sender (Spannungsquelle  $U_0$ ) zum Empfänger ( $R_a$ ) eine Abschwächung des Signalpegels (Widerstand  $R_i$ ) erfolgt, so dass dieser im Störungsrauschen des Nachrichtenkanals unterzugehen droht, muss bei gegebener Sendeleistung eine möglichst hohe Empfangsleistung  $P_{out}$  angestrebt werden („Leistungsanpassung“  $R_i = R_a$ )! Dass dabei nur ein kleiner Wirkungsgrad von 50 % erreichbar ist, ist wegen der im Vergleich zur Energietechnik deutlich kleineren Sendeleistungen hinnehmbar (Bild G3.11-4)!

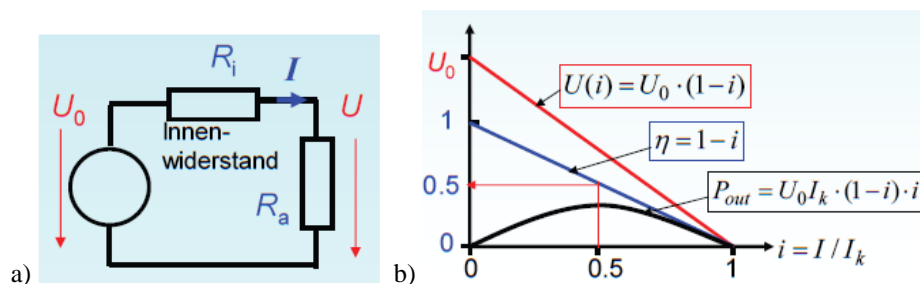


Bild G3.11-3: a) Gleichspannungsquelle  $U_0$  mit Verbraucher  $R_a$ , b) Lastspannung, Wirkungsgrad und Abgabeleistung in Abhängigkeit des auf den Kurzschlussstrom bezogenen Laststroms

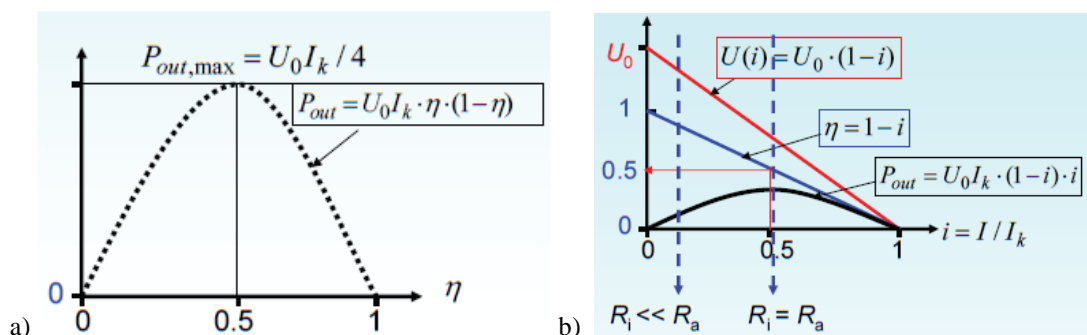


Bild G3.11-4: a) Abgabeleistung in Abhängigkeit des Wirkungsgrads, b) Betrieb bei hohem Wirkungsgrad ( $R_i \ll R_a$ ,  $\eta \approx 0.9$ ) und bei max. Abgabeleistung ( $R_i = R_a$ ,  $\eta = 0.5$ , Leistungsanpassung)

### G3.12 Transformatorprinzip

Ein allgemeiner elektromagnetischer Transformator besteht aus mindestens zwei, i. A. elektrisch („galvanisch“) voneinander getrennten elektrischen Wicklungen, die eine gemeinsame Verkopplung durch ein magnetisches Feld  $B$  aufweisen (Bild G3.12-1a). Ein magnetischer Fluss  $\Phi$  ist gemäß Bild G3.12-1a zunächst nicht definierbar, da keine eindeutige Flussdurchtrittsfläche  $A$  angegeben werden kann, die von dem Draht der Wicklungen 1 oder 2 berandet ist (wie das sonst z. B. bei schleifenförmigen Drahtanordnungen mit abzählbaren Windungszahlen üblich ist). Wohl aber wird durch z. B. Wicklung 1 mit dem dort fließenden zeitlich veränderlichen Strom  $i_1(t)$  gemäß dem *Ampere*'schen Durchflutungssatz ein zeitveränderliches Feld  $H(t)$  bzw.  $B(t)$  erregt, das „irgendwie“ mit Wicklung 2 als  $\psi_2(t)$  verkettet ist. Es wird daher dort gemäß dem *Faraday*'schen Induktionsgesetz eine Spannung  $u_{i,2}(t) = -d\psi_2(t)/dt$  induziert. Derselbe Vorgang gilt auch bei Stromfluss  $i_2(t)$  in Wicklung 2 für die Induktion  $u_{i,1}(t) = -d\psi_1(t)/dt$  in Wicklung 1. Die magnetischen Flussverkettungen  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  der beiden Wicklungen 1 (primär) und 2 (sekundär) sind demnach bei gleichzeitigem Stromfluss  $i_1(t)$ ,  $i_2(t)$

$$\psi_1(t) = L_1 \cdot i_1(t) + M_{12} \cdot i_2(t) \quad , \quad \psi_2(t) = L_2 \cdot i_2(t) + M_{21} \cdot i_1(t) \quad . \quad (\text{G3.12-1})$$

Mit  $L_1$ ,  $L_2$  sind die Selbstinduktivitäten der beiden Wicklungen 1 und 2 und mit  $M_{12}$  die Gegeninduktivität von Wicklung 2 nach Wicklung 1 und mit  $M_{21}$  die Gegeninduktivität von Wicklung 1 nach Wicklung 2 bezeichnet. Die Beziehung

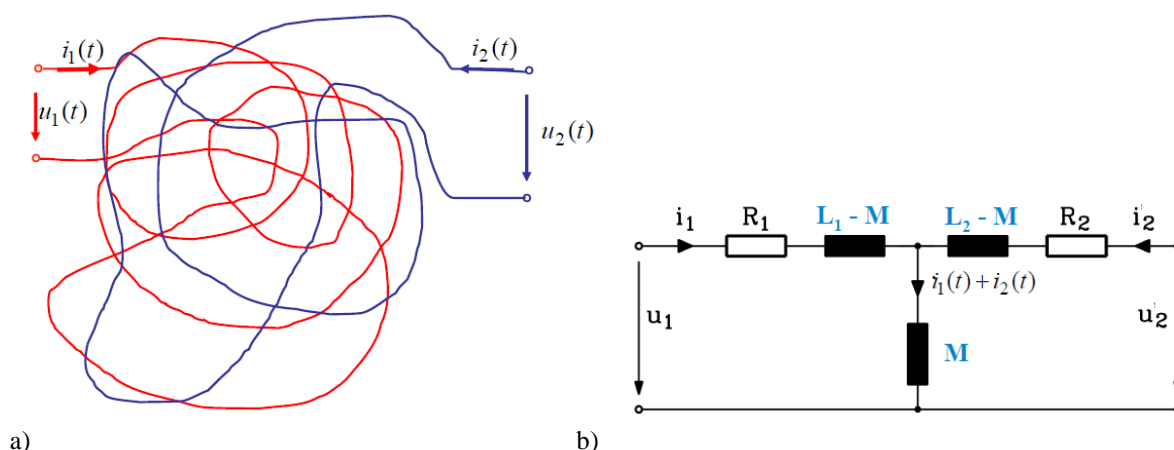
$$M_{12} = M_{21} = M \quad (\text{G3.12-2})$$

weist darauf hin, dass in diesem einfachen Fall eines einphasigen Zweiwicklungstransformators die beiden Wicklungen 1 und 2 sich zueinander „reziprok“ verhalten. Die Zeitverläufe der auf diese beiden Wicklungen 1 und 2 eingprägten elektrischen Spannungen  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  sind i. A. beliebig. Mit  $R_1$ ,  $R_2$  sind die *ohm*'schen Widerstände der Wicklungen 1 und 2 bezeichnet. Daraus folgen mit dem *Faraday*'schen Induktionsgesetz die Gleichungen zur Berechnung der beiden Wicklungsströme  $i_1(t)$ ,  $i_2(t)$ .

$$u_1(t) = R_1 \cdot i_1(t) + d\psi_1(t)/dt \quad , \quad u_2(t) = R_2 \cdot i_2(t) + d\psi_2(t)/dt \quad . \quad (\text{G3.12-3})$$

$$u_1(t) = R_1 \cdot i_1(t) + L_1 \cdot di_1(t)/dt + M_{12} \cdot di_2(t)/dt \quad , \quad (\text{G3.12-4})$$

$$u_2(t) = R_2 \cdot i_2(t) + L_2 \cdot di_2(t)/dt + M_{21} \cdot di_1(t)/dt \quad . \quad (\text{G3.12-5})$$



**Bild G3.12-1:** a) Allgemeiner einphasiger Zweiwicklungstransformator mit beliebiger Anordnung der beiden magnetisch gekoppelten Wicklungen 1 und 2, b) Zu a) gehörendes T-Ersatzschaltbild

Mit (G3.12-2) folgt aus (G3.12-4) und (G3.12-5)

$$u_1(t) = R_1 \cdot i_1(t) + (L_1 - M) \cdot di_1(t)/dt + M \cdot (d(i_1(t) + i_2(t)))/dt \quad , \quad (\text{G3.12-6})$$

$$u_2(t) = R_2 \cdot i_2(t) + (L_2 - M) \cdot di_2(t)/dt + M \cdot d(i_1(t) + i_2(t))/dt \quad . \quad (G3.12-7)$$

Die beiden Spannungsgleichungen (G3.12-6, -7) werden durch das elektrische T-Ersatzschaltbild Bild G3.12-1b beschrieben, wobei der „fiktive“ Summenstrom  $i_1(t) + i_2(t)$  in der koppelnden Gegeninduktivität  $M$  fließt. Die Parameter  $L_1 - M$ ,  $L_2 - M$  sind i. A. NICHT die später im Kapitel T verwendeten Begriffe der „Streuinduktivitäten“  $L_{1\sigma}$ ,  $L_{2\sigma}$ , denn beim „allgemeinen“ Transformator ist die gegenseitige magnetische Kopplung von 1 und 2 so schwierig nachzuvollziehen, dass man den z. B. mit Wicklung 1 verketteten Fluss i. A. nicht eindeutig in einen Anteil, der nur mit Wicklung 1 verkettet ist („Streufluss“), und einen Anteil, der mit Wicklung 1 UND Wicklung 2 verkettet ist („Hauptfluss“), auftrennen kann.

$$\sigma = 1 - \frac{M^2}{L_1 \cdot L_2} = 1 - k^2 \quad , \quad k = \frac{M}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}} \quad . \quad (G3.12-8)$$

Die **BLONDEL'sche Streuziffer**  $\sigma$  und der **Kopplungsfaktor**  $k$  (G3.12-8) beschreiben daher beide nur das Verhältnis der magnetischen Kopplung in Bezug auf die Parameter  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $M$  der beiden Wicklungen 1 und 2, die jederzeit messtechnisch durch z. B. Leerlauf- und/oder Kurzschlussmessungen ermittelt werden können.

$$\begin{aligned} \text{z. B.: Leerlauf sekundär:} \quad & i_2 = 0 : u_1(t) = R_1 \cdot i_1(t) + L_1 \cdot di_1(t)/dt, \quad u_2(t) = M \cdot di_1(t)/dt; \\ \text{Leerlauf primär:} \quad & i_1 = 0 : u_1(t) = M \cdot di_2(t)/dt, \quad u_2(t) = R_2 \cdot i_2(t) + L_2 \cdot di_2(t)/dt. \end{aligned}$$

Zwei Extremfälle der Kopplung sind zu unterscheiden:

a)  $M = 0$ : Es existiert keine magnetische Kopplung zwischen Wicklung 1 und 2. Es ist  $\sigma = 1$  und  $k = 0$ . Die primäre und sekundäre Flussverkettung  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  ist ausschließlich mit der jeweils erregenden Wicklung verkettet. Beide sind reine STREUFLUSS-Verkettungen. Es existiert kein koppelnder Hauptfluss.

$$u_1(t) = R_1 \cdot i_1(t) + L_1 \cdot di_1(t)/dt \quad , \quad u_2(t) = R_2 \cdot i_2(t) + L_2 \cdot di_2(t)/dt \quad . \quad (G3.12-9)$$

b)  $M^2 = L_1 L_2$ : Es tritt die maximal mögliche magnetische Kopplung zwischen Wicklung 1 und 2 auf. Dann ist  $\sigma = 0$  und  $k = 1$ . Das magnetische Feld ist vollständig mit jeweils beiden Wicklungen verkettet. Folglich tritt KEIN STREUFLUSS auf. Beide Flussverkettungen stellen die koppelnde Hauptflussverkettung der jeweiligen Wicklung dar.

$$i_1 = (\psi_1 - \sqrt{L_1 L_2} \cdot i_2) / L_1 \Rightarrow \psi_2 = L_2 \cdot i_2 + \sqrt{L_2 / L_1} \cdot \psi_1 - L_2 \cdot i_2 = \sqrt{L_2 / L_1} \cdot \psi_1 \quad (G3.12-10)$$

Wegen der vollkommenen Kopplung sind bei  $L_1 = L_2$  beide Flussverkettungen  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  identisch. Um auf einen magnetischen Fluss  $\Phi$  schließen zu können, müssen die Wicklungen 1 und 2 Flussflächen  $A$ , durch welche die magnetische Flussdichte  $B$  hindurch tritt, als Windungen umschließen, so dass Windungszahlen  $N_1$ ,  $N_2$  definiert werden können. Wenn alle Windungen gleichartig sind, also  $A$  stets dieselbe Größe hat, sind wegen der dann möglichen Definitionen  $\psi_1 = N_1 \cdot \Phi_1$ ,  $\psi_2 = N_2 \cdot \Phi_2$  nun die Flüsse  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  angebar. Wegen der dann gültigen Beziehungen  $L_1 \sim N_1^2$ ,  $L_2 \sim N_2^2$  (siehe Kap. T) folgt aus (G3.12-10)  $\psi_2 = (N_2 / N_1) \cdot \psi_1$  und daher  $\Phi_1 = \Phi_2$ , also gleicher magnetischer (Haupt-)Fluss  $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_h = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$  für beide Wicklungen, ohne jeglichen Streufluss  $\Phi_{1\sigma} = 0$ ,  $\Phi_{2\sigma} = 0$ .

Allgemein sind sowohl Hauptfluss als auch Streuflüsse vorhanden.

Die Spannungsgleichungen (G3.12-4, -5) können auch mit einem willkürlich wählbaren Übersetzungsverhältnis  $\ddot{u}$  formuliert werden (G3.12-11, -12). Die Gleichungen ändern sich trotz  $\ddot{u}$  mathematisch nicht!

$$u_1 = R_1 \cdot i_1 + L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} + M \cdot \ddot{u} \cdot \frac{d(i_2 / \ddot{u})}{dt} \quad , \quad (G3.12-11)$$

$$u_2 \cdot \ddot{u} = R_2 \cdot \ddot{u}^2 \cdot (i_2 / \ddot{u}) + L_2 \cdot \ddot{u}^2 \cdot \frac{d(i_2 / \ddot{u})}{dt} + M \cdot \ddot{u} \cdot \frac{di_1}{dt} \quad (G3.12-12)$$

Mit den „gestrichenen Größen“

$$u'_2 = u_2 \cdot \ddot{u}, \quad i'_2 = \frac{i_2}{\ddot{u}}, \quad M' = \ddot{u} \cdot M, \quad R'_2 = \ddot{u}^2 \cdot R_2, \quad L'_2 = \ddot{u}^2 \cdot L_2 \quad (G3.12-13)$$

als Abkürzung erhalten wir die „neuen“ Spannungsgleichungen

$$u_1 = R_1 \cdot i_1 + L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} + M' \cdot \frac{di'_2}{dt}, \quad u'_2 = R'_2 \cdot i'_2 + L'_2 \cdot \frac{di'_2}{dt} + M' \cdot \frac{di_1}{dt} \quad (G3.12-14)$$

Durch die Einführung des willkürlich wählbaren Faktors  $\ddot{u} \neq 0$  werden

a) der sekundäre Strom und

b) die sekundären Spannungen bzw. Spannungsfälle

für weitere Rechnungen mit  $\ddot{u}$  skalierbar, was nützlich ist, weil sie dann trotz großer Unterschiede primär und sekundär als „gestrichene Größen“ nahezu gleich groß sind:  $u'_2 \approx u_1$ ,  $i'_2 \approx i_1$ ,  $R'_2 \approx R_1$ ,  $L'_2 \approx L_1$ . Mit der Umstellung

$$u_1 = R_1 \cdot i_1 + (L_1 - M') \cdot \frac{di_1}{dt} + M' \cdot \frac{d(i_1 + i'_2)}{dt}, \quad (G3.12-15)$$

$$u'_2 = R'_2 \cdot i'_2 + (L'_2 - M') \cdot \frac{di'_2}{dt} + M' \cdot \frac{d(i_1 + i'_2)}{dt} \quad (G3.12-16)$$

tritt wieder ein „fiktiver Summenstrom“  $i_1 + i'_2$  auf, der aber nun von  $\ddot{u}$  abhängt. Je nach Wahl von  $\ddot{u}$  treten unterschiedliche Ersatzschaltbilder auf. Wir diskutieren drei wichtige Beispiele:

1)  $\ddot{u} = \sqrt{L_1 / L_2}$  : Damit wird

$$L_1 - M' = L_1 - \sqrt{L_1 / L_2} \cdot M, \quad L'_2 - M' = (\sqrt{L_1 / L_2})^2 \cdot L_2 - \sqrt{L_1 / L_2} \cdot M = L_1 - M'$$

erhalten. Folglich ist

$$L_1 - M' = L_1 \cdot (1 - k) = L'_2 - M', \quad R'_2 = (L_1 / L_2) \cdot R_2, \quad M' = k \cdot L_1, \quad (G3.12-17)$$

was dem Ersatzschaltbild Bild G3.12-2 entspricht, bei dem primär und sekundär induktive Symmetrie herrscht.

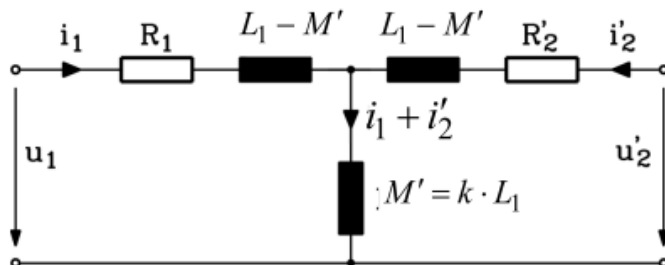


Bild G3.12-2: Einphasiger Zweiwicklungstransformator: Für  $\ddot{u} = \sqrt{L_1 / L_2}$  ist das T-Ersatzschaltbild induktiv symmetrisch. Der Kopplungsfaktor  $k$  tritt in der Kopplungsinduktivität direkt proportional auf.

2)  $\ddot{u} = L_1 / M$  : Damit wird wegen

$$L_1 - M' = 0, \quad L'_2 - M' = \frac{\sigma}{1 - \sigma} \cdot L_1, \quad M' = L_1 \quad \text{die primäre Induktivität außerhalb des}$$

Kopplungszweigs Null (Bild G3.12-3a).

3)  $\ddot{u} = M / L_2$  : Damit wird wegen

$$L_1 - M' = \sigma \cdot L_1, \quad L'_2 - M' = 0, \quad M' = L_1 \cdot (1 - \sigma) \quad \text{die sekundäre Induktivität außerhalb des}$$

Kopplungszweigs Null (Bild G3.12-3b). Die Gesamtstreuung tritt über  $\sigma$  direkt in der

Primärinduktivität außerhalb des Kopplungszeigs auf, während der Kopplungszeig proportional zu  $k^2 = 1 - \sigma$  ist.

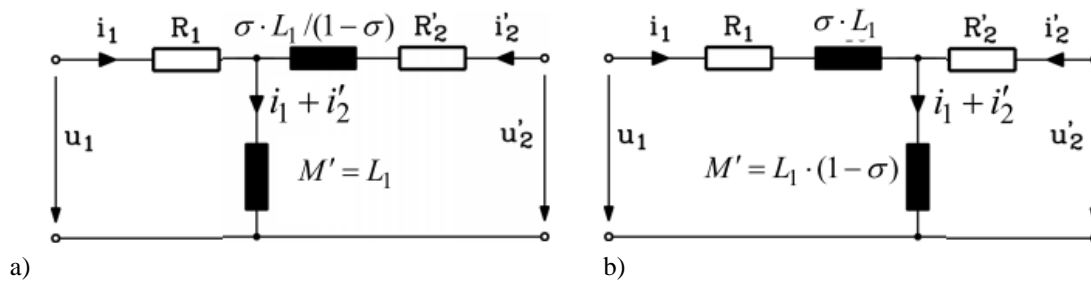


Bild G3.12-3: Einphasiger Zweiwicklungstransformator: T-Ersatzschaltbild für a)  $\ddot{u} = L_1 / M$  und b)  $\ddot{u} = M / L_2$

Im Kapitel T wird der „technische Transformator“ als weitaus häufigster Sonderfall in der Elektrotechnik und vor allem in der elektrischen Energietechnik behandelt. Über einen Hauptfluss-führenden Eisenkreis wird erzwungen, dass für alle Primär- und Sekundärwindungen der Hauptfluss je Windung identisch ist. Als Übersetzungsverhältnis wird dann  $\ddot{u} = N_1 / N_2$  verwendet, so dass aus der Kopplung  $M' \cdot (i_1 + i_2')$  in (G3.12-15, -16) mit  $M \sim N_1 N_2$  (siehe Kap. T) gemäß

$$\Phi_h = \frac{M' \cdot (i_1 + i_2')}{N_1} = \frac{\ddot{u} \cdot M}{N_1} \cdot (i_1 + \frac{i_2}{\ddot{u}}) = \frac{M}{N_1} \cdot (\ddot{u} \cdot i_1 + i_2) = \frac{M}{N_1 N_2} \cdot (N_1 \cdot i_1 + N_2 \cdot i_2) \quad (\text{G3.12-18})$$

direkt sichtbar wird, dass der Hauptfluss

$$\Phi_h \sim \Theta = N_1 \cdot i_1 + N_2 \cdot i_2 \quad (\text{G3.12-19})$$

gemeinsam von Primär- und Sekundärwicklung gemäß dem *Ampere'schen* Durchflutungssatz von der gesamten Durchflutung  $\Theta = N_1 \cdot i_1 + N_2 \cdot i_2$  magnetisch erregt wird. Mit den Bezeichnungen „**Hauptinduktivität**“  $L_h = M'$  und „**Magnetisierungsstrom**“  $i_m = i_1 + i_2'$  tritt dann im T-Ersatzschaltbild als Kopplung  $M' \cdot (i_1 + i_2') = L_h \cdot i_m = N_1 \cdot \Phi_h$  direkt der Hauptfluss auf und macht so den physikalischen Vorgang der magnetischen Kopplung auch unmittelbar sichtbar.