

Energietechnik



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Kapitel G Grundlagen

Technische Universität Darmstadt
Institut für Elektrische Energiewandlung

Prof. Dr.-Ing. habil. Dr. h.c. Andreas Binder



G Grundlagen



E Einleitung

G Grundlagen **Wird vorausgesetzt**

R Ressourcen und Energieströme

B Bedarf und Wachstum

P Prozesse

T Transformatoren und Generatoren

V Elektrische Energieversorgung

S Speicher **Ergänzung**



G0 Literatur, verwendete Quellen, Formelzeichen

Gute Bücher über fundierte Grundlagen



Grundlagen der Elektrotechnik

Clausert Horst al. (G.Wiesemann/J.Stenzel/V.Hinrichsen):
Grundgebiete der Elektrotechnik 1 u. 2, Oldenbourg-Verlag, München, 11. Aufl., 2011

Theoretische Elektrotechnik

Küpfmüller, Karl; (Mathis, Karl; Reibiger, Albrecht): 19. Aufl., Springer, Heidelberg, 2013

Gerthsen Physik

Gerthsen, Christian; (Meschede, Dieter): 24. Aufl.; Springer, Heidelberg, 2013

Mathematik

Arens, Tilo u. a.: 2. Aufl.; Spektrum Akad. Verlag, 2012

Dubbel Taschenbuch für den Maschinenbau

Grote, Karl-Heinrich; Feldhusen, Jörg (Hsg.): 24. Aufl.; Springer-Vieweg, Heidelberg, 2014



G0 Literatur, verwendete Quellen, Formelzeichen

Grundlagen, Komponenten und Systeme



Literaturliste in „Energietechnik – Aufgabensammlung: Einleitung“

z. B.

▪ **Komponenten:**

- [Fis] Fischer, R.: Elektrische Maschinen, 12. Auflage, Hanser-Verlag, München, 2004

▪ **Vertiefung zu Systemen:**

- [Qua] Quaschnig, V.: Regenerative Energiesysteme, Hanser-Verlag, München, 9. Aufl., 2015
- [Boh] Bohn, T. (Hsg.): Elektrische Energietechnik, Handbuchreihe Energie, 4. Bd., Verlag TÜV Rheinland, 1987



G0 Literatur, verwendete Quellen, Formelzeichen

Formelzeichen - Das griechische Alphabet



- **Formelzeichen-Liste** in:
„Energietechnik – Aufgabensammlung: Einleitung“

z. B.:

Das griechische Alphabet

$A \alpha$	Alpha	$B \beta$	Beta	$\Gamma \gamma$	Gamma
$\Delta \delta$	Delta	$E \varepsilon$	Epsilon	$Z \zeta$	Zeta
$H \eta$	Eta	$\Theta \vartheta$	Theta	$I \iota$	Jota
$K \kappa$	Kappa	$\Lambda \lambda$	Lambda	$M \mu$	My (mue)
$N \nu$	Ny (nue)	$\Xi \xi$	Xi	$O \omicron$	Omikron
$\Pi \pi$	Pi	$\rho \rho$	Rho	$\Sigma \sigma$	Sigma
$T \tau$	Tau	$\Upsilon \upsilon$	Ypsilon	$\Phi \phi$	Phi
$X \chi$	Chi	$\Psi \psi$	Psi	$\Omega \omega$	Omega



G0 Energiebegriffe und Energieeinheiten

Einheiten für Energie und Leistung



Energie W :

Unterschiedliche Formen:

elektrisch, magnetisch, elektromagnetisch, mechanisch, thermisch, chemisch, nuklear

SI-Einheit: 1 Joule = 1 J = 1 Watt · Sekunde = 1 W·s (SI: Système internationale)

Andere Einheiten: Wh, kWh, SKE (Steinkohleeinheit), ...

1 k = 1000, 1 M = 1000 000, 1 G = 1000 000 000 = 10^9 , 1 T = 10^{12}

Leistung P :

Energie je Zeiteinheit: $P = W / t$, $P = \Delta W / \Delta t$, $P = dW / dt$

Unterschiedliche Formen: siehe oben

SI-Einheit: 1 Watt = 1 W

Andere Einheiten: PS (Pferdestärke) = 736 W, hp (U.S. horse-power), ...



G0 Energiebegriffe und Energieeinheiten

SI-Einheit und andere Einheiten

Einheit „Joule“ wird aus SI-Basis-Einheiten abgeleitet: $1 \text{ J} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s}^2$

Einheit	Bezeichnung	Umrechnung in J
J	Joule	$1 \text{ J} = 1 \text{ J}$
Wh	Wattstunde	$1 \text{ Wh} = 3.6 \text{ kJ}$
cal	Kalorie	$1 \text{ cal} = 4.186 \text{ J}$
(kg) SKE	(Kilogramm) Steinkohleeinheit	$1 \text{ kg SKE} = 29\,308 \text{ kJ}$
oe	Oil Equivalent	$1 \text{ kg oe} = 41\,868 \text{ kJ}$
eV	Elektronenvolt	$1 \text{ eV} = 160.2 \text{ zJ} = 160.2 \cdot 10^{-21} \text{ J}$
m ³ Erdgas	Kubikmeter Erdgas	$1 \text{ m}^3 \text{ Erdgas} = 31\,736 \text{ kJ}$

G0 Energiebegriffe und Energieeinheiten

Leistungseinheiten



Einheit „Joule/Sekunde“ aus SI-Basis-Einheiten abgeleitet: $1 \text{ J/s} = 1 \text{ W} = 1 \text{ Watt}$

Einheit	Bezeichnung	Umrechnung in W
W	Watt	$1 \text{ W} = 1 \text{ W}$
PS	Pferdestärke	$1 \text{ PS} = 735.75 \text{ W}$ $1 \text{ PS} = 75 \text{ kp} \cdot \text{m/s} = 75 \cdot 9.81 \text{ N} \cdot \text{m/s} = 735.75 \text{ W}$
hp	Horse-power (U.S.)	$1 \text{ hp} = 745.8 \text{ W}$ $1 \text{ hp} = 550 \text{ lbf} \cdot \text{ft/s} = 550 \cdot 4.448 \text{ N} \cdot 0.3048 \text{ m/s} = 745.8 \text{ W}$



G0 Energiebegriffe und Energieeinheiten

Häufig verwendete Vorsätze bei Energieeinheiten

Symbol	Name	Wert		Symbol	Name	Wert
Y	Yotta	10^{24}		d	Dezi	10^{-1}
Z	Zetta	10^{21}		c	Zenti	10^{-2}
E	Exa	10^{18}		m	Milli	10^{-3}
P	Peta	10^{15}		μ	Mikro	10^{-6}
T	Tera	10^{12}		n	Nano	10^{-9}
G	Giga	10^9		p	Piko	10^{-12}
M	Mega	10^6		f	Femto	10^{-15}
k	Kilo	10^3		a	Atto	10^{-18}
h	Hekto	10^2		z	Zepto	10^{-21}
da	Deka	10^1		y	Yokto	10^{-24}

G0 Energiebegriffe und Energieeinheiten

Beispiel: Einheiten-Vorsätze



Beispiel:

a) 1 Exa-Joule = 10^{18} J = 1 000 000 000 000 000 000 J

b) 10 Tera-Wattstunden = 10 TWh = $10 \cdot 10^{12}$ Wh = 10 000 000 000 000 Wh

Frage:

Welche der beiden Energiemengen ist **größer**?

$$10 \text{ TWh} = 10 \cdot 10^{12} \cdot 3600 \text{ J} = 36 \cdot 10^{15} \text{ J} < 10^{18} \text{ J}$$

Antwort:

a) Ist größer als b) (28-fach) !



G Grundlagen

G1 Was ist Energie?



G1 Was ist Energie?

G2 Energieformen

G3 Repetitorium: Grundlagen der Elektrotechnik



G1 Was ist Energie?

Die vier Grundkräfte (1)

Energie in physikalischen Systemen wird stets durch **Kräfte** vermittelt !

Vier Grund-Kräfte:

1) **Gravitationskraft:**

Stets anziehende Kraft zwischen massebehafteten Körpern

2) **Elektromagnetische Kraft (Lorentz-Kraft):**

Coulomb-Anteil: Anziehende / abstoßende Kraft zwischen elektrisch ungleichnamig / gleichnamig geladenen Teilchen (elektrische Feldwirkung)

Lorentz-Anteil: Seitlich im rechten Winkel zur Bewegungsrichtung bewegter geladener Teilchen im Magnetfeld auftretende Kraft

3) **„Starke Kraft“ (starke Wechselwirkung):**

Anziehend wirkende Kraft nur auf sehr kurzer Distanz einiger Atomkerndurchmesser zwischen Protonen und Neutronen, wirkt gegen die *Coulomb*-Abstoßungskraft der gleichnamig geladenen Protonen.

4) **„Schwache Kraft“ (schwache Wechselwirkung):**

Wirkt nur auf sehr kurze Distanz; tritt bei Kernumwandlungsprozessen auf, wo ein Neutron in ein Protonen und Elektron umgewandelt wird, wobei das Elektron vom Kern ausgesandt wird (*Beta-Zerfall des Atomkerns*)

G1 Was ist Energie?

Die vier Grundkräfte (2)



Es ist bisher gelungen,
die „elektromagnetische Kraft“ (2), die „starke“ (3) und „schwache“ (4) Kraft in
einer **gemeinsamen Theorie** zusammenzufassen!

Die Gravitationskraft (1) entzieht sich bisher dieser „grand unified theory“

Diese vier Grundkräfte „halten unsere Welt zusammen“.

Für (1) und (2) sind Formelausdrücke der **klassischen Physik** verfügbar
Für (3) und (4) sind **quantenmechanische** Beschreibungen erforderlich

Die **Trägheitskraft** ist keine Grundkraft, sondern ergibt sich aus der Änderung des
Bewegungsimpulses eines massebehafteten Körpers !

Beispiel: a) Translationsbewegung $\vec{F} = d\vec{p} / dt = d(m \cdot \vec{v}) / dt = \dot{m} \cdot \vec{v} + m \cdot d\vec{v} / dt$
b) Rotationsbewegung \Rightarrow Fliehkraft, „Coriolis“-Kraft

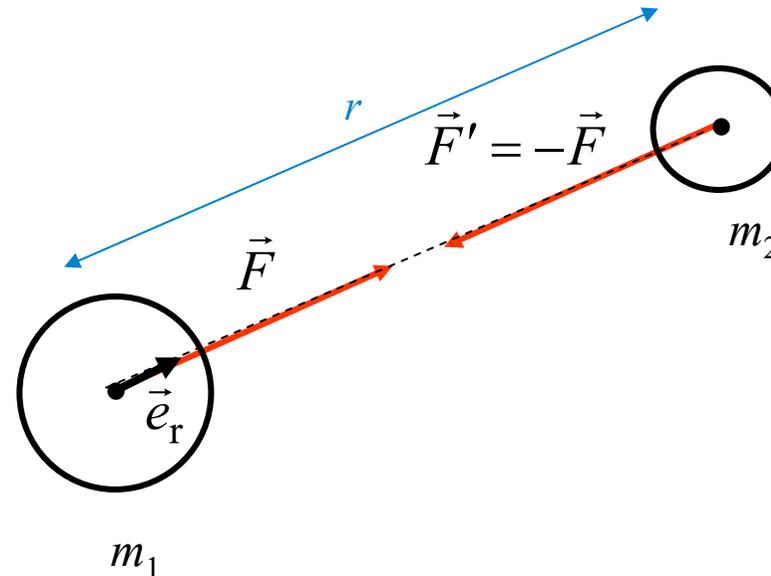
Diese „träge“ **Masse** ist dabei IDENTISCH
mit der **schweren Masse** der Gravitationskraft!



G1 Was ist Energie?

Gravitationskraft

$$\vec{F} = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \vec{e}_r$$



Zwei Massen m_1 , m_2 ziehen einander mit den Kräften F bzw. $F' = -F$ auf Grund der **Gravitation** an, wobei die Wirkungslinie der Kräfte die gerade Verbindungslinie der Massenmittelpunkte der beiden Massen ist.

Gravitationskonstante: $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 / (\text{kg} \cdot \text{s}^2)$

G1 Was ist Energie?

Beispiel: Gravitationskraft

Die Erde (Masse m_E) ist im Mittel $L = 1.497 \cdot 10^8$ km von der Sonne entfernt

Sonnenmasse $m_S = 1.98 \cdot 10^{30}$ kg

a) Mit welcher Gravitationskraft F ziehen sich Sonne und Erde gegenseitig an?

$$m_E = 5.98 \cdot 10^{24} \text{ kg} \Rightarrow F = 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5.98 \cdot 10^{24} \cdot 1.98 \cdot 10^{30}}{(1.497 \cdot 10^{11})^2} = 35.241 \cdot 10^{21} \text{ N}$$

b) Mit welcher Geschwindigkeit v muss sich der Erde auf (näherungsweise) einer Kreisbahn bewegen, damit die Fliehkraft F_F der Sonnenanziehungskraft das Gleichgewicht hält?

$$F_F = m_E \cdot v^2 / L = F$$

$$v = \sqrt{F \cdot L / m_E} = \sqrt{35.241 \cdot 10^{21} \cdot 1.497 \cdot 10^{11} / (5.98 \cdot 10^{24})} = 2.97 \cdot 10^4 \text{ m/s}$$

$$v = 2.97 \cdot 10^4 \cdot 3.6 = 106920 \text{ km/h}$$

G1 Was ist Energie?

Elektromagnetische Kraft (Lorentz-Kraft) F

$$\vec{F} = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B} + \vec{E})$$

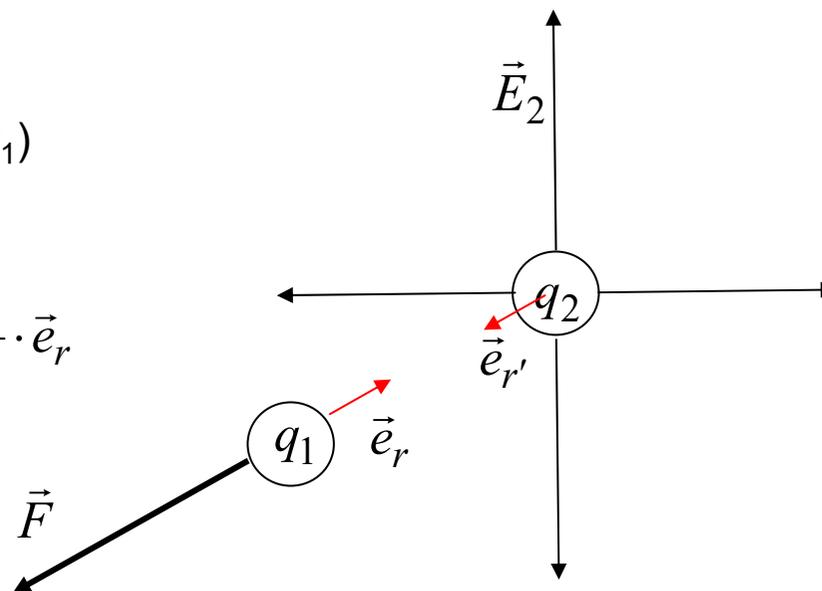
Ein mit der Geschwindigkeit v bewegtes Teilchen mit der elektrischen Ladung q erfährt im elektrischen Feld E und im magnetischen Feld B eine Kraft.

a) **Coulomb-Anteil:** Wirkt auch beim ruhenden Teilchen $v = 0$

Beispiel:

Ruhendes geladenes Teilchen (Ladung $q = q_1$)
im E -Feld der „Punktladung“ q_2

$$\left. \begin{aligned} \vec{F} &= q_1 \cdot \vec{E}_2 \\ \vec{E}_2 &= \frac{q_2}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2} \cdot \vec{e}_{r'} \\ \vec{e}_r &= -\vec{e}_{r'} \end{aligned} \right\} \vec{F} = -\frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2} \cdot \vec{e}_r$$



$\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ As/(Vm)}$ Dielektrizitätszahl des leeren Raums

G1 Was ist Energie?

Coulomb-Kraft

Beispiel:

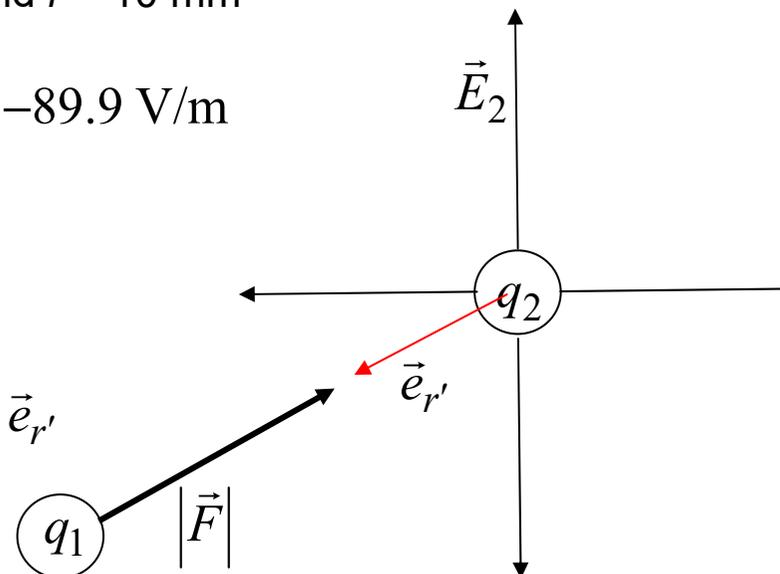
Ruhendes geladenes Teilchen, Ladung $q = q_1 = 10^{-13}$ As

im E -Feld der „Punktladung“ $q_2 = -10^{-12}$ As im Abstand $r = 10$ mm

$$E_2 = \frac{q_2}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2} = \frac{-10^{-12}}{4\pi \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} \cdot (10^{-2})^2} = -89.9 \text{ V/m}$$

$$F = q_1 \cdot E_2 = -10^{-13} \cdot 89.9 = -8.99 \cdot 10^{-12} \text{ N}$$

Die Kraft F ist gegen den Einheits-Ortsvektor $\vec{e}_{r'}$
gerichtet $\Rightarrow q_1$ wird von q_2 **angezogen!**



Coulomb-Kräfte sind in technischen Anwendungen **i. A. klein**, weil große Ladungsmengen zu hohen E -Feldern (beim Ladungsabstand Δ) und damit zur Stoßionisation der Luftmoleküle („Durchschlag“) führen! z. B. Homogenfeld: $E_{\text{Luft}} < 30 \text{ kV/cm}$ bei $\Delta = 1 \text{ cm}$

G1 Was ist Energie?

Coulomb-Kraft dominiert über Gravitationskraft



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Beispiel:

Zwei ruhende geladene Teilchen (Proton) im Abstand r :

Ladung $q = e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ As, Ruhemasse $m_p = 1.67239 \cdot 10^{-27}$ kg

$$\vec{F}_G = G \cdot \frac{m_p \cdot m_p}{r^2} \cdot \vec{e}_r$$

$$\vec{F}_C = - \frac{e \cdot e}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} \cdot \vec{e}_r$$

anziehend

abstoßend

$$\frac{F_G}{F_C} = G \cdot 4\pi\epsilon_0 \cdot \left(\frac{m_p}{e}\right)^2 = 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 4\pi \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} \cdot \left(\frac{1.67 \cdot 10^{-27}}{1.6 \cdot 10^{-19}}\right)^2 = 8.08 \cdot 10^{-37}$$

Im Bereich der Elementarteilchen ist die Gravitationskraft gegenüber der elektromagnetischen Kraft – UNABHÄNGIG vom Abstand r - vernachlässigbar



G1 Was ist Energie?

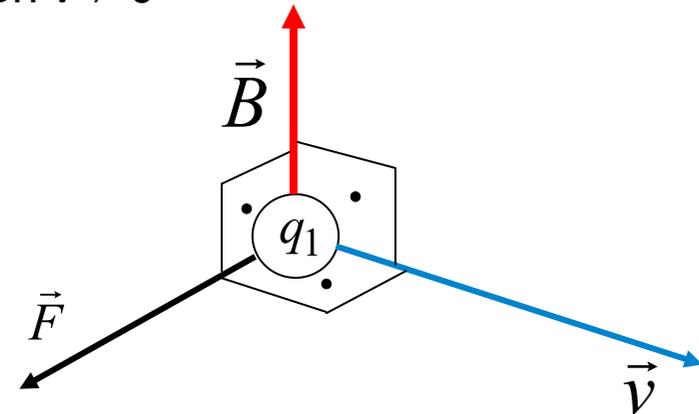
Elektromagnetische Kraft (*Lorentz-Kraft*)

b) *Lorentz-Anteil*: Wirkt NUR beim bewegten Teilchen $v \neq 0$

$$\vec{F} = q_1 \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

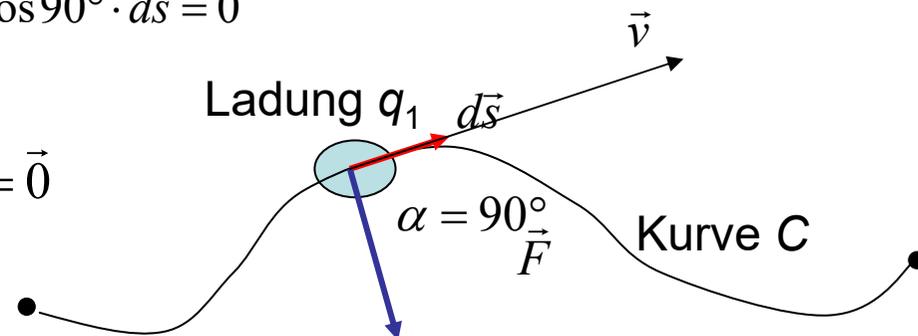
Die *Lorentz-Kraft* F ist normal auf die Bewegungs- und Feldrichtung gerichtet!

Die *Lorentz-Kraft* kann **KEINE mechanische Arbeit** am Teilchen verrichten!



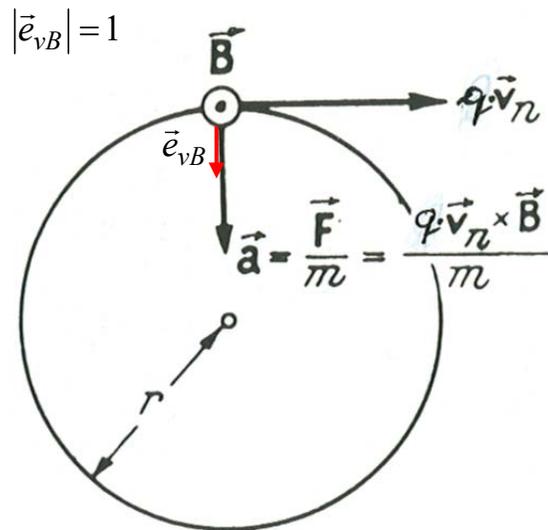
$$W = \int_C dW = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_C F \cdot \cos \alpha \cdot ds = \int_C F \cdot \cos 90^\circ \cdot ds = 0$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{s} = q_1 (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s} = q_1 \left(\frac{d\vec{s}}{dt} \times \vec{B} \right) \cdot d\vec{s} = \vec{0}$$



G1 Was ist Energie?

Kreisbahn eines geladenen Teilchens im B -Feld



- Magnetfeld B , Teilchengeschwindigkeit v :
 v zerlegt in $v_t \uparrow \uparrow B$ und $v_n \perp B$.

- **LORENTZ-Kraft** auf ele. Ladung q :

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B}) = q \cdot v_n B \cdot \vec{e}_{vB}$$

Das Teilchen wird normal zu B und v beschleunigt: $\vec{a} = \vec{F} / m$

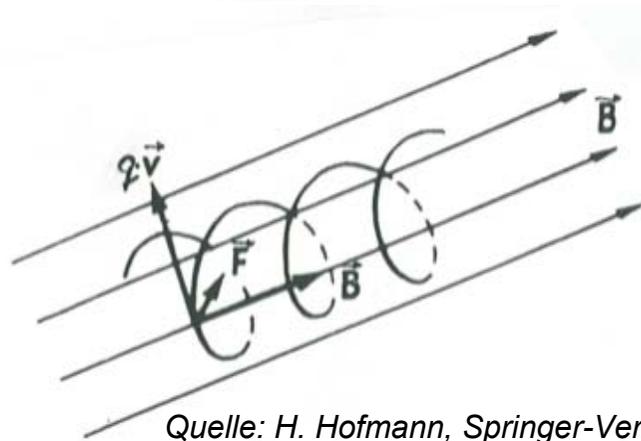
Das führt zur **Kreisbahn** mit dem Radius r

- Fliehkraft auf der Kreisbahn: $F_F = m \cdot v_n^2 / r$
- Kräftegleichgewicht: $F = F_F : r = m \cdot v_n / (q \cdot B)$
- **Kreisfrequenz**: $\omega = v_n / r = (q \cdot B) / m = 2\pi \cdot f$

Beispiel: Tritiumkern: $q = e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ As}$

$m = \text{Ruhmasse: } 5.1 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

Bei $B = 5 \text{ T}$: $f = 25 \text{ MHz}$



Quelle: H. Hofmann, Springer-Verlag

G1 Was ist Energie?

Elektromagnetische Kraft (Lorentz-Kraft)



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Beispiel:

Elektronenstrom im metallischen Leiter (Kupfer):

el. Strom $I = 10 \text{ A}$, $v = 0.7 \text{ mm/s}$, im externen Magnetfeld $B = 1 \text{ T}$

Bewegte Ladungsmenge ΔQ durch den Leiterquerschnitt je Zeiteinheit Δt

$$I = \Delta Q / \Delta t$$

Anteil der Lorentz-Kraft auf diese bewegte Ladungsmenge:

$$\Delta \vec{F} = \Delta Q \cdot \vec{v} \times \vec{B} = \Delta Q \cdot \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t} \times \vec{B} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \cdot \Delta \vec{s} \times \vec{B} = I \cdot \Delta \vec{s} \times \vec{B} \Rightarrow d\vec{F} = I \cdot d\vec{s} \times \vec{B}$$

Lorentz-Kraft auf geraden Leiterabschnitt
(Länge l) im Homogenfeld $B = \text{konst.}$:

$$\vec{F} = \int_0^l d\vec{F} = \int_0^l I \cdot d\vec{s} \times \vec{B} = I \cdot \vec{l} \times \vec{B} \quad \boxed{\vec{F} = I \cdot \vec{l} \times \vec{B}}$$

Bei Leiterlänge $l = 1 \text{ m}$: $|\vec{F}| = |I \cdot \vec{l} \times \vec{B}| = I \cdot l \cdot B = 10 \cdot 1 \cdot 1 = 10 \text{ N}$

Lorentz-Kräfte sind in technischen Anwendungen i. A. groß, so dass elektromechanische Energiewandler meist mit Magnetkräften arbeiten!



G1 Was ist Energie?

Lorentz-Kraft zwischen zwei parallelen Leitern



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Beispiel:

Zwei parallele metallische Leiter: el. Ströme I_1, I_2 , Abstand r

Lorentz-Kraft auf Leiter 1 im B -Feld des Leiters 2:

$$\vec{F} = I \cdot \vec{l} \times \vec{B}$$

$$\vec{B}_2 = \mu_0 \cdot \frac{I_2}{2\pi \cdot r} \cdot \vec{e}_\varphi \quad \begin{array}{l} \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/(Am)} \\ \text{Permeabilität des leeren Raums} \end{array}$$

Lorentz-Kraft auf Leiterlänge l :

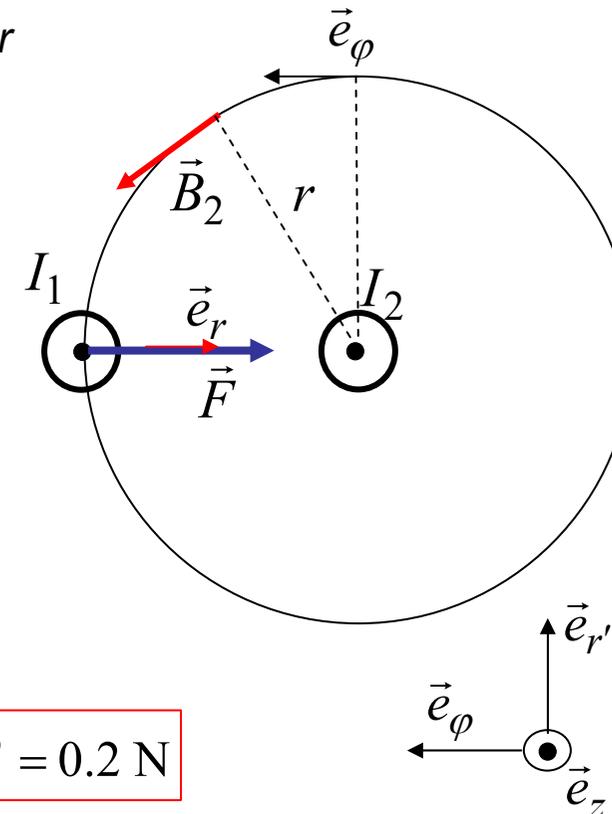
$$\vec{F} = I_1 \cdot \vec{l} \times \vec{B}_2 = I_1 \cdot l \cdot B_2 \cdot (\vec{e}_z \times \vec{e}_\varphi) = -I_1 \cdot l \cdot B_2 \cdot \vec{e}_r'$$

$$\vec{e}_r = -\vec{e}_r' \quad \vec{F} = I_1 \cdot l \cdot B_2 \cdot \vec{e}_r$$

$l = 1\text{m}, r = 1\text{m}, I_1 = 100\text{ A}, I_2 = 10\,000\text{ A}$:

$$B_2 = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10000}{2\pi \cdot 1} = 2\text{ mT}$$

$$F = 100 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 0.2\text{ N}$$



Seitlich wirkende Lorentz-Kraft wird zu Erzeugung von Drehbewegung eingesetzt (elektrische Maschinen als **elektromechanische Energiewandler**)



G Grundlagen

G1 Was ist Energie?



Zusammenfassung

- **Unterschiedliche Energieformen** auf Grund unterschiedlicher physikalischer **Kräfte**
- **Physikalisches Grundlagenwissen** erforderlich, um Energie mathematisch zu beschreiben
- **Energieformen** (die nun zu besprechen sind):
 - Mechanische Energie (Bewegungsenergie, Lageenergie),
 - elektromagnetische Energie,
 - thermische Energie,
 - chemische Energie,
 - Atomenergie,
 - Kernenergie



G Grundlagen

G2 Energieformen



G1 Was ist Energie?

G2 Energieformen

G3 Repetitorium: Grundlagen der Elektrotechnik



G2 Energieformen

Übersicht



▪ Mechanische Energie:

a) Kinetische Energie W_k (Bewegungsenergie): $W_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$

Aufzuwendende Arbeit für eine Änderung der Geschwindigkeit v eines Körpers
(m : Körpermasse, v : Geschwindigkeit)

b) Potentielle Energie W_p (Lageenergie):

Aufzuwendende Arbeit für eine Änderung in der Höhenlage h eines Körpers in
Bezug auf einen anderen massebehafteten Körper (z. B. Erde)

Beispiel: Sonderfall: „Große“ Erde und kleiner Körper:

Erddurchmesser \gg Körperabmessungen

Erde (g : Erdbeschleunigung, h : Höhenniveau, m : Körpermasse) $W_p = m \cdot g \cdot h$



G2 Energieformen

Potentielle Energie W_p im Schwerfeld einer Masse m_1

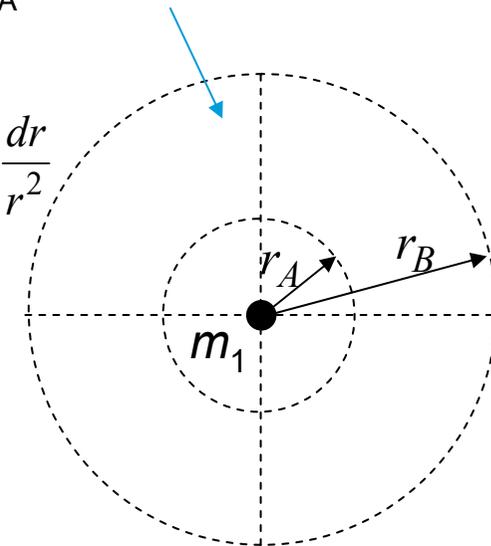


TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Arbeit W_{AB} muss verrichtet werden, um Masse m_2 von r_A nach $r_B > r_A$ im **Schwerfeld** der Punktmasse m_1 zu befördern:

$$W_{AB} = \int_{r_A}^{r_B} \left(G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \vec{e}_r \right) \cdot d\vec{s} = \int_{r_A}^{r_B} \left(G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \vec{e}_r \right) \cdot \vec{e}_r \cdot dr = -G \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2}$$

$$W_{AB} = \frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{r} \Big|_{r_A}^{r_B} = -G \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) < 0$$



$W_{AB} < 0$: Es muss Arbeit aufgewendet (ins System „gesteckt“) werden, um m_2 von m_1 zu entfernen!

Potentielle Energie W_p der Masse m_2 am Ort r (im **Schwerfeld** der Punktmasse m_1):

$$W_p(r) = -\frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{r}$$

$$W_{AB} = W_p(r_A) - W_p(r_B) = -G \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) < 0$$



G2 Energieformen

Potentielle Energie im Schwerfeld einer Punktmasse m_1



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

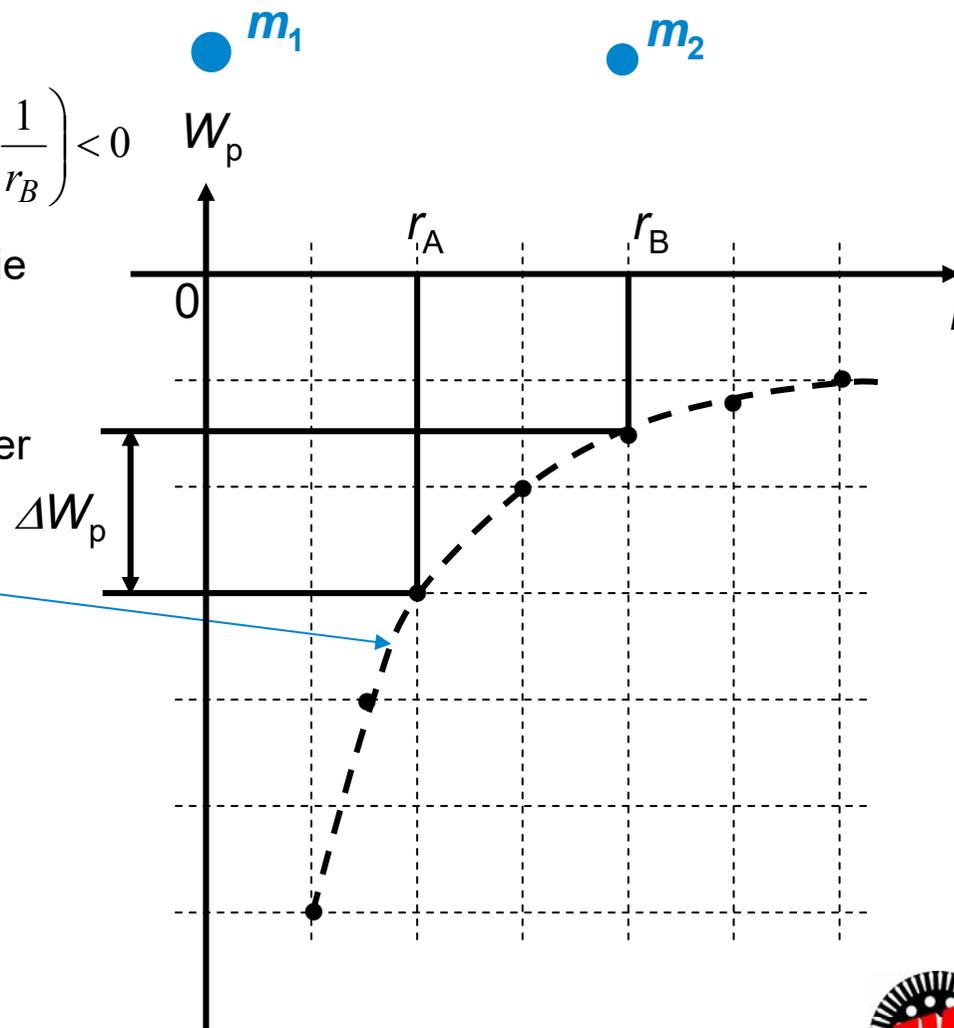
$$W_{AB} = W_p(r_A) - W_p(r_B) = -G \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) < 0$$

Unendlich weit weg von der Masse m_1 ist die potentielle Energie Null (Definition!).

Bei Annäherung von m_2 an m_1 nimmt sie negativ steigende Werte an = sie wird kleiner
⇒ ANZIEHUNGSKRAFT!

Trichterförmiger „Potentialtopf“ $W_p(r)$

$$W_p(r) = -\frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{r}$$



G2 Energieformen

Potentielle Energie $W_p(h)$ über der Erdoberfläche



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

a) Masse m_1 : Erde m_E

b) Masse m_2 : Abmessungen deutlich kleiner als der mittlere Erdradius r_E .

m_2 befindet sich im Abstand $h \ll r_E$ oberhalb der Erdoberfläche: $r_A = r_E$, $r_B = r_A + h$

$1/(1+x) \approx 1-x$ für $x \ll 1$

$$\left. \begin{aligned} h/r_A \ll 1: \frac{1}{r_B} &= \frac{1}{r_A+h} = \frac{1}{r_A \cdot (1+h/r_A)} \approx \frac{1-h/r_A}{r_A} \\ \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} &= \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_A+h} \approx \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_A} + \frac{h}{r_A^2} = \frac{h}{r_A^2} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} W_p(r_B) - W_p(r_A) &= G \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) \approx \\ &\approx \frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{r_A^2} \cdot h = m_2 \cdot \frac{G \cdot m_E}{r_E^2} \cdot h \end{aligned}$$

„Erdbeschleunigung“: $g = \frac{G \cdot m_E}{r_E^2} = \frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 5.98 \cdot 10^{24}}{(12700000/2)^2} \approx 9.81 \text{ m/s}^2$

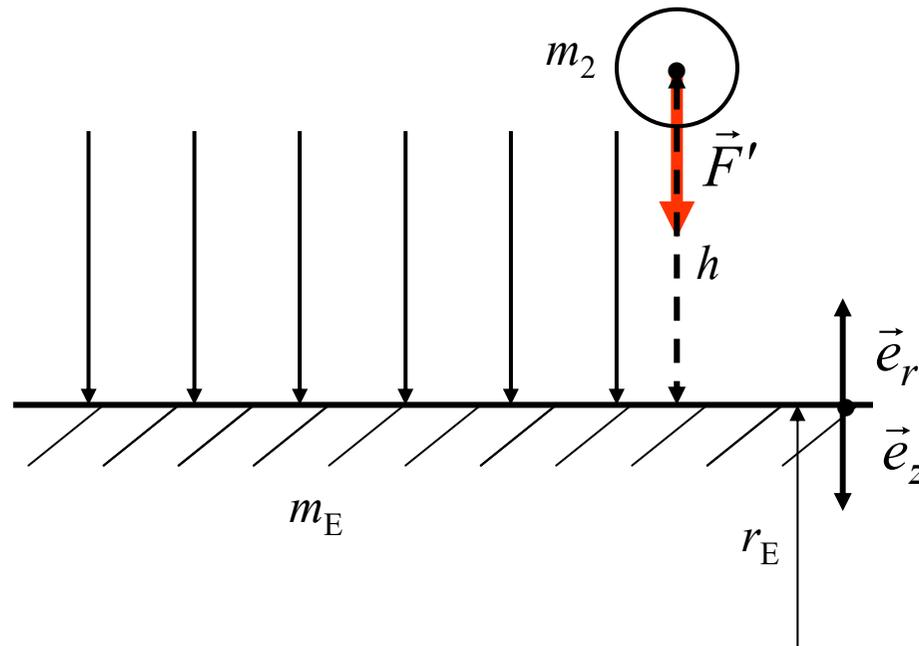
Potentielle Energie:

$$W_p(h) = m_2 \cdot g \cdot h$$



G2 Energieformen

Potentielle Energie an der Erdoberfläche



▪ Beispiel: Potentielle Energie

Stein $m_2 = 1.0$ kg auf dem
Kirchturmdach $h = 20$ m:

$$W_p = m_2 \cdot g \cdot h = 1 \text{ kg} \cdot 9.81 \text{ m/s}^2 \cdot 20 \text{ m} =$$
$$= 196.2 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \text{m} = 196.2 \text{ J}$$

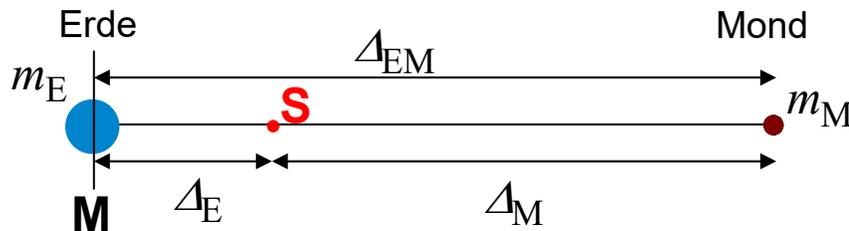
Potentielle Energie: $W_p(h) = m_2 \cdot g \cdot h$

G2 Energieformen

Gezeiten: Rotation des Monds um die Erde

Gemeinsamer Schwerpunkt (Baryzentrum **S**) liegt **innerhalb der Erde**:

$$m_E = 59.8 \cdot 10^{23} \text{ kg}, r_E = 6378 \text{ km}, m_M = 0.73 \cdot 10^{23} \text{ kg}, \Delta_{EM} = 384000 \text{ km}$$



$$m_E \Delta_E = m_M \Delta_M, \Delta_E + \Delta_M = \Delta_{EM}$$
$$\Delta_E = \frac{m_M}{m_E + m_M} \cdot \Delta_{EM} = 4631 \text{ km} < 6378 \text{ km}$$

Rotation der Erde um S (Winkelgeschwindigkeit Ω) führt zur Fliehkraft F_F im Erdmittelpunkt M:

Fliehkraft F_F in M hält Anziehungskraft F_{EM} in M zwischen Erde-Mond das Gleichgewicht:

„Siderische“ Mondumlaufzeit T_M : Etwas weniger als 1 Monat

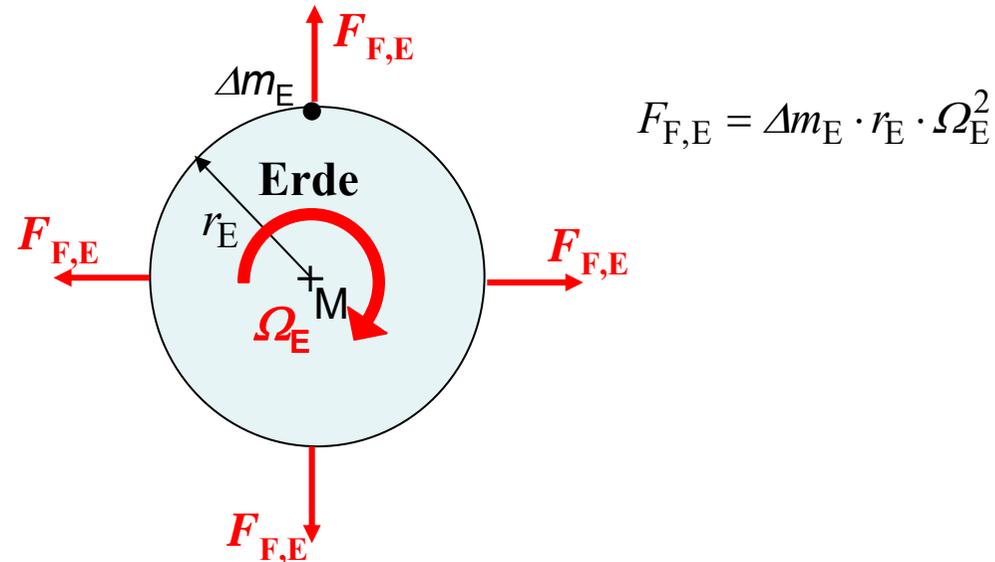
$$F_F = m_E \cdot \Delta_E \cdot \Omega^2 = F_{EM} = G \cdot \frac{m_E \cdot m_M}{\Delta_{EM}^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \Omega = \frac{2\pi}{T_M} = \sqrt{\frac{G \cdot m_M}{\Delta_{EM}^2 \Delta_E}} = \sqrt{\frac{G \cdot (m_M + m_E)}{\Delta_{EM}^3}} \quad T_M = 0.0746 \text{ a} = 27.3 \text{ d}$$

G2 Energieformen

Gezeiten: Erd-Eigenrotation um Erdmittelpunkt M: Keine Gezeitenwirkung



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

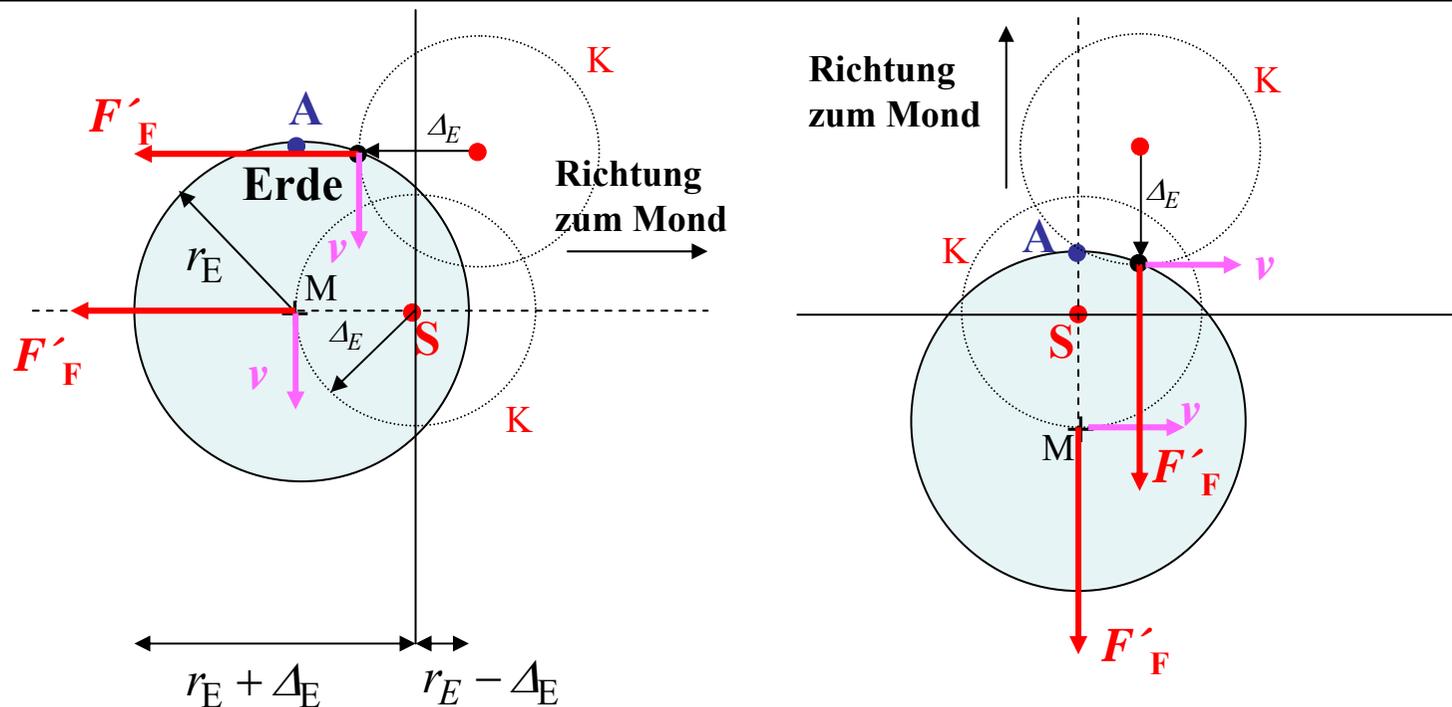


- **Eigenrotation** der Erde um Erdmittelpunkt M bewirkt allseitig wirkende Fliehkraft $F_{F,E}$ auf Massepunkte Δm_E an der Erdoberfläche \Rightarrow **kein** Beitrag zur Gezeitenwirkung!



G2 Energieformen

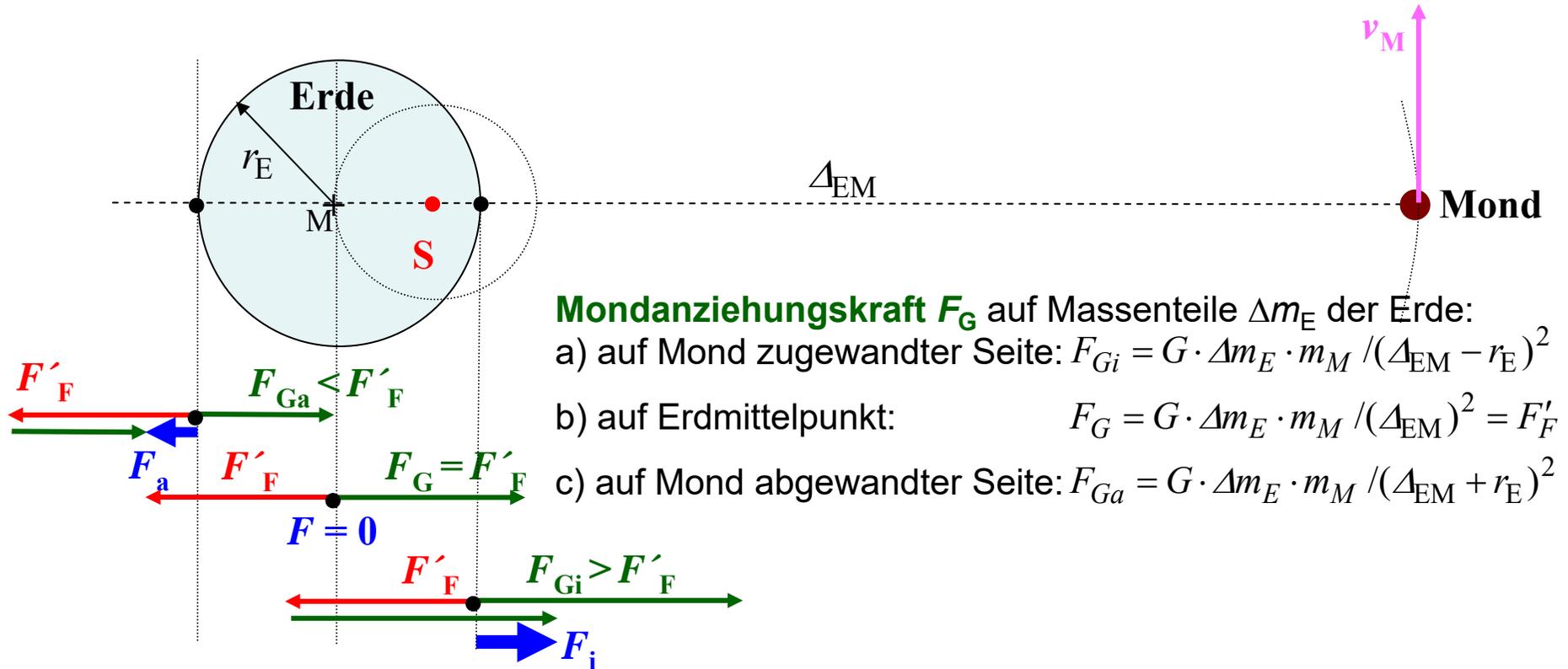
Gezeiten: Erdrotation um S (ohne Eigenrotation)



- Alle Punkte der Erde drehen auf gleichen raumfesten Kreisen K mit Winkelgeschwindigkeit Ω
- Alle Punkte (Massenteile Δm_E) erfahren gleiche **Fliehkraft** F'_F : $F'_F = \Delta m_E \cdot \Delta_E \cdot \Omega^2$
- **Mondanziehungskraft** F_G auf Erdoberfläche auf Mond zugewandter Seite F_{Gi} größer als auf Mond abgewandter Seite F_{Ga} !

G2 Energieformen

Gezeiten: Fliehkraft F_F und Gravitationskraft F_G



Resultierende Gezeitenkraft F_a bzw. F_i je Massenteil Δm_E :

$$\begin{cases} F_a = F'_F - F_{Ga} \\ F_i = F_{Gi} - F'_F \end{cases}$$

G2 Energieformen

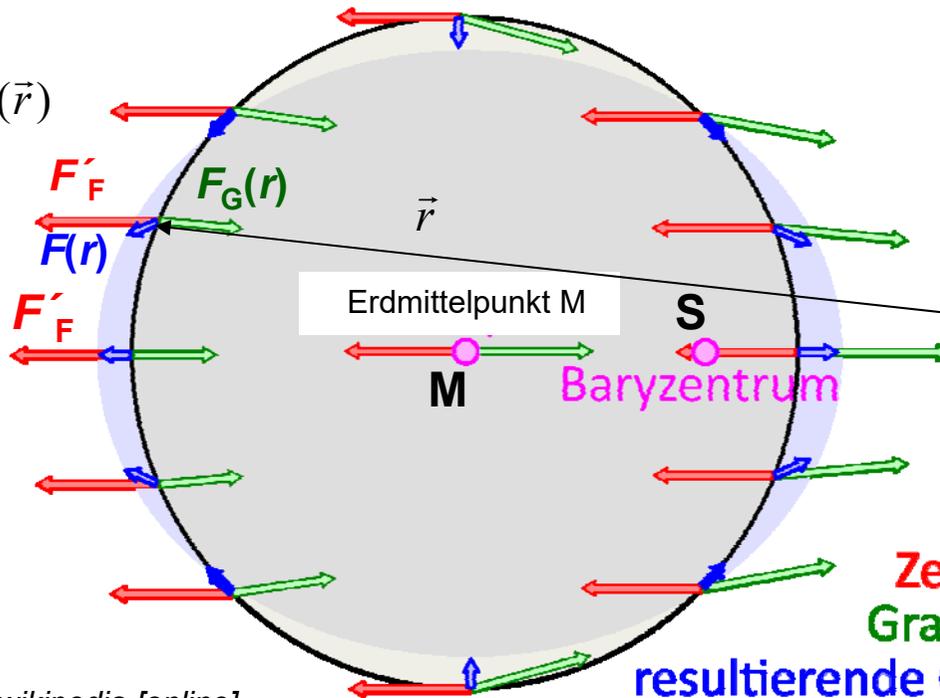
Gezeiten: Entstehung der Gezeitenkraft

- Gezeiten entstehen durch das Zusammenwirken von:

- a) Fliehkraft F'_F auf Meerwasser, da Erde und Mond um einen gemeinsamen Schwerpunkt (Baryzentrum S) rotieren, der außerhalb des Erdmittelpunkts M liegt
- b) Gravitationskraft F_G zwischen Mond und Meerwasser

Am Ort \vec{r} :

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}'_F + \vec{F}_G(\vec{r})$$



$$|\vec{F}'_F| = \Delta m_E \cdot \Delta_E \cdot \Omega^2$$

$$\vec{F}_G(\vec{r}) = \frac{G \cdot \Delta m_E \cdot m_M}{r^2} \cdot \vec{e}_r$$

Zentrifugalkräfte
Gravitationskräfte
resultierende Gezeitenkräfte

Quelle: wikipedia [online]

G2 Energieformen

Gezeiten: Gezeitenkräfte F_a und F_i



$$F_a = F'_F - F_{Ga} = F_G - F_{Ga} = \frac{G \cdot \Delta m_E \cdot m_M}{(\Delta_{EM})^2} - \frac{G \cdot \Delta m_E \cdot m_M}{(\Delta_{EM} + r_E)^2} = \frac{G \cdot \Delta m_E \cdot m_M}{(\Delta_{EM})^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{r_E}{\Delta_{EM}}\right)^2}\right)$$

$$\vec{F}_a = F_a \cdot \vec{e}_r$$

$$F_i = F_{Gi} - F'_F = F_{Gi} - F_G = \frac{G \cdot \Delta m_E \cdot m_M}{(\Delta_{EM} - r_E)^2} - \frac{G \cdot \Delta m_E \cdot m_M}{(\Delta_{EM})^2} = -\frac{G \cdot \Delta m_E \cdot m_M}{(\Delta_{EM})^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{\left(1 - \frac{r_E}{\Delta_{EM}}\right)^2}\right)$$

$$\vec{F}_i = -F_i \cdot \vec{e}_r$$

$$\frac{r_E}{\Delta_{EM}} = \frac{6370}{384000} \ll 1: \quad F_a \approx \frac{2G \cdot \Delta m_E \cdot m_M \cdot r_E}{(\Delta_{EM})^3} \approx -F_i$$

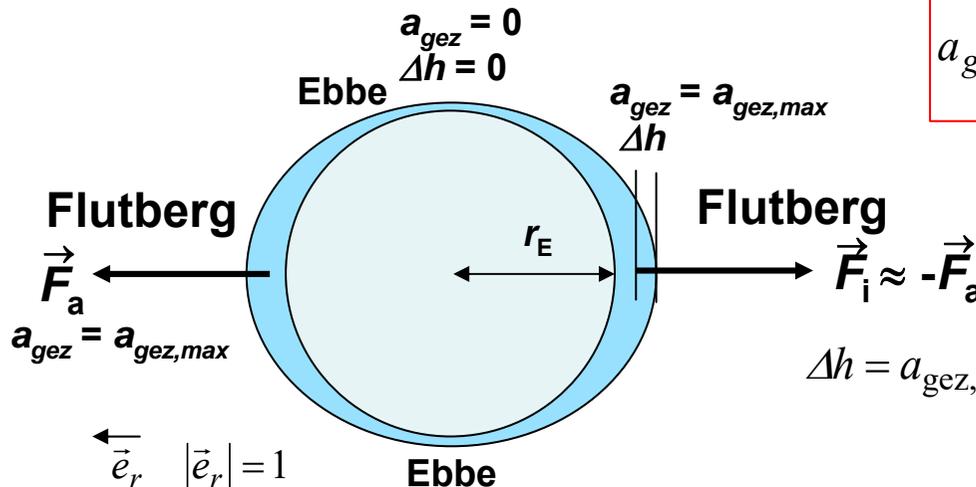
Gezeitenbeschleunigung a_{gez} sehr klein:

$$a_{gez,max} = F_a / \Delta m_E = \frac{2G \cdot m_M \cdot r_E}{(\Delta_{EM})^3} = 1.1 \cdot 10^{-6} \frac{m}{s^2}$$

Abschätzung: Flutberghöhe $\Delta h \approx 0.7$ m

$$F_a \cdot r_E = m_{H_2O} \cdot a_{gez,max} \cdot r_E = m_{H_2O} \cdot g \cdot \Delta h$$

$$\Delta h = a_{gez,max} \cdot r_E / g = 1.1 \cdot 10^{-6} \cdot 6378 \cdot 10^3 / 9.81 = 0.7 \text{ m}$$



G2 Energieformen

Gezeiten: Nebenrechnung zu Gezeitenkräften F_a und F_i



$$\xi = \frac{r_E}{\Delta_{EM}} = \frac{6370}{384000} = 0.0166 \ll 1:$$

Herleitung

$$F_a = \frac{G \cdot \Delta m_E \cdot m_M}{(\Delta_{EM})^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{r_E}{\Delta_{EM}}\right)^2}\right) = A \cdot \left(1 - \frac{1}{(1 + \xi)^2}\right) = A \cdot \left(1 - \frac{1}{1 + 2\xi + \xi^2}\right) \approx A \cdot \left(1 - \frac{1}{1 + 2\xi}\right) \approx$$

$$\approx A \cdot (1 - (1 - 2\xi)) = A \cdot 2\xi$$

$$F_i = -\frac{G \cdot \Delta m_E \cdot m_M}{(\Delta_{EM})^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{\left(1 - \frac{r_E}{\Delta_{EM}}\right)^2}\right) = A \cdot \left(1 - \frac{1}{(1 - \xi)^2}\right) \approx A \cdot 2\xi$$

$$A = \frac{G \cdot \Delta m_E \cdot m_M}{(\Delta_{EM})^2}$$

$$F_a \approx A \cdot 2\xi \approx F_i$$

$$\frac{r_E}{\Delta_{EM}} = \frac{6370}{384000} \ll 1: \quad F_a \approx \frac{2G \cdot \Delta m_E \cdot m_M \cdot r_E}{(\Delta_{EM})^3} \approx F_i$$



G2 Energieformen

Gezeiten: Gezeitenwirkung der Sonne

Herleitung

$$\text{Erde – Mond – Wirkung: } F_{a,M} \approx \frac{2G \cdot \Delta m_E \cdot m_M \cdot r_E}{(\Delta_{EM})^3} \approx F_{i,M}$$

$$\text{Erde – Sonne – Wirkung: } F_{a,S} \approx \frac{2G \cdot \Delta m_E \cdot m_S \cdot r_E}{(\Delta_{ES})^3} \approx F_{i,S}$$

$$F_{a,S} / F_{a,M} = \frac{m_S \cdot (\Delta_{EM})^3}{m_M \cdot (\Delta_{ES})^3} = \frac{1.98 \cdot 10^{30} \text{ kg} \cdot (384 \cdot 10^6 \text{ m})^3}{0.73 \cdot 10^{23} \text{ kg} \cdot (150 \cdot 10^9 \text{ m})^3} = \frac{1}{2.2}$$

- Die Sonnengezeitenkraft ist um den Faktor **1/2.2 kleiner als die Mondgezeitenkraft!**

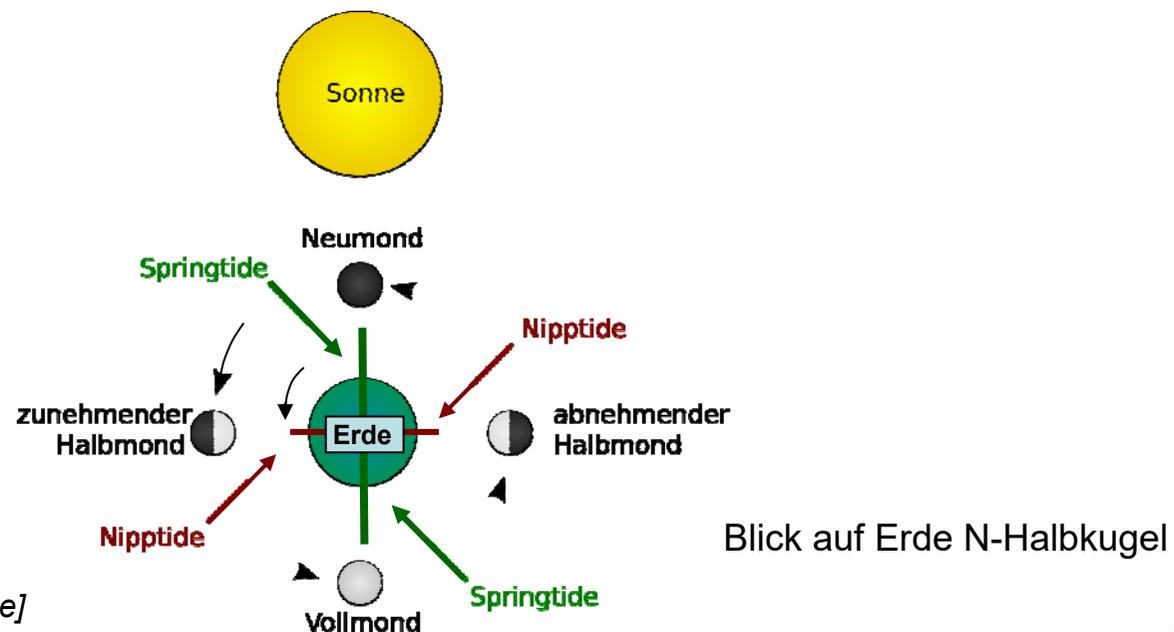
G2 Energieformen

Gezeiten: Gezeitenwirkung der Sonne

- Der Mondgezeitenkraft überlagert sich die um **1/2.2 kleinere Sonnengezeitenkraft!**
- **Gemeinsamer Sonnen- und Mondphasen-Einfluss:**
 - a) **Voll- und Neumond:**

Mond, Erde, Sonne in einer Linie: **Springtide:** erhöhter Flutberg,
da Mond- u. Sonnengezeitenkraft addiert
 - b) **Halbmond (zu- od. abnehmend):**

Mond, Erde, Sonne bilden rechten Winkel: **Nipptide:** verminderter Flutberg



G2 Energieformen

Gezeiten: Gezeitenbremse



- Erde dreht **sich schneller** ($T_E = 1$ d) als der Mond um die Erde ($T_M = 27.3$ d) (gleichsinnig):

$$\Omega_E = 2\pi/T_E$$

$$\Omega_M = 2\pi/T_M$$

Flutberge laufen bezüglich der Erdoberfläche in O-W-Ri. mit der Differenzgeschwindigkeit um:

a) Strömen der beiden Flutwellenberge (Wasserreibung)

b) Anprall der beiden Flutberge an die Kontinentalküsten

⇒ Effekte a) + (vor allem) b) = **bremsende Kraft auf Erdrotation!**

- Reibungswärme dabei gering, aber Spin-Drehimpuls der Erde $L_E = J_E \Omega_E$ **verringert sich**

- **Bremskraft verschwindet, wenn Erde so abgebremst, dass $T'_E = T'_M$ ($\Omega_E = \Omega_M = \Omega'$) !**

- Konstanz des Gesamtdrehimpulses von Mond und Erde $L = L_E + L_M = \text{konst.}$:

= Bahn-Drehimpuls des Mondes um Erde erhöht sich: $L_M = M_M \cdot \Delta_M^2 \cdot \Omega_M$

= **Mond entfernt sich von Erde!**

$$L_E + L_M = J_E \Omega_E + M_M \cdot \Delta_M^2 \cdot \Omega_M = J_E \Omega' + M_M \cdot (\Delta'_M)^2 \cdot \Omega' \Rightarrow \Delta'_M / \Delta_M = 1.56$$

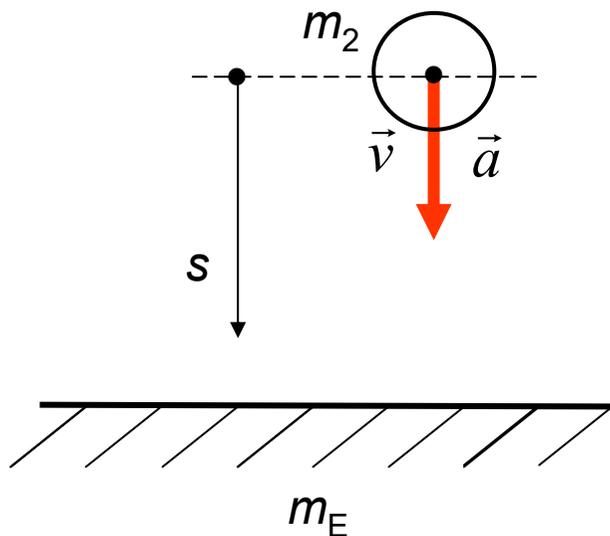
▪ **Endzustand:**

- $T'_E = T'_M = 56$ d = $2\pi/\Omega'$: Der „Erd-Tag“ verlängert sich auf **56 jetzige Erdentage!**
- Der Mond wird 1.56-mal so weit von der Erde entfernt sein wie jetzt: **599 000 km**
- Die Flutberge und Ebbenbereiche **bewegen sich** bezüglich der Erdoberfläche **nicht mehr!**



G2 Energieformen

Kinetische Energie einer fallenden Masse



Newton'sches Axiom:

Trägheitskraft F ist Änderung des **Bewegungsimpulses** p einer mit der Geschwindigkeit v bewegten trägen Masse m

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

$$\vec{F} = d\vec{p} / dt = (dm / dt) \cdot \vec{v} + m \cdot d\vec{v} / dt$$

Bei konstanter Masse: $dm / dt = \dot{m} = 0$

$$\vec{F} = m \cdot d\vec{v} / dt = m \cdot \vec{a} = \vec{F}_G = m_2 \cdot \vec{g}$$

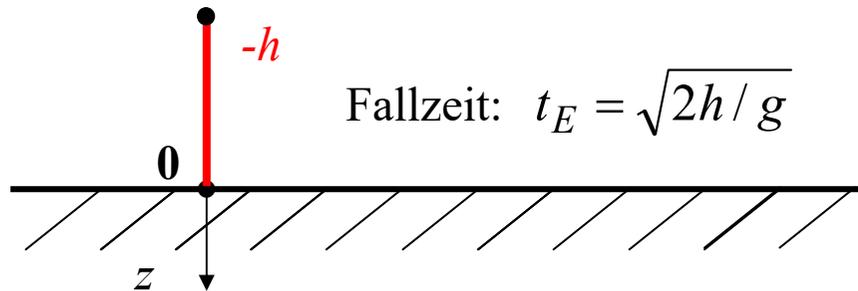
„Träge“ Masse $m =$ „schwere“ Masse m_2

$$W = \int_0^s (m_2 \cdot g) \cdot ds = \int_0^s (m_2 \cdot a) \cdot ds = \int_0^s (m_2 \cdot \frac{dv}{dt}) \cdot ds = \int_0^s (m_2 \cdot \frac{d^2s}{dt^2}) \cdot ds = \int_0^t (m_2 \cdot \frac{d^2s}{dt^2}) \cdot \frac{ds}{dt} \cdot dt$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{dv}{dt} \cdot v = \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) \quad W = \int_0^t m_2 \cdot \frac{d(v^2 / 2)}{dt} \cdot dt = \int_0^{v^2/2} m_2 \cdot d(v^2 / 2) = m_2 \cdot v^2 / 2 = W_k$$

G2 Energieformen

Kinetische Energie einer fallenden Masse



$$v(0) = 0:$$

$$g = dv/dt \Rightarrow v(t) = g \cdot t + v(0) = g \cdot t$$

$$z(t) = g \cdot t^2 / 2 + v(0) \cdot t + z(0) = g \cdot t^2 / 2 - h$$

$$z(t_E) = 0 = g \cdot t_E^2 / 2 - h: t_E = \sqrt{2h/g}$$

$$v_E = g \cdot t_E = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

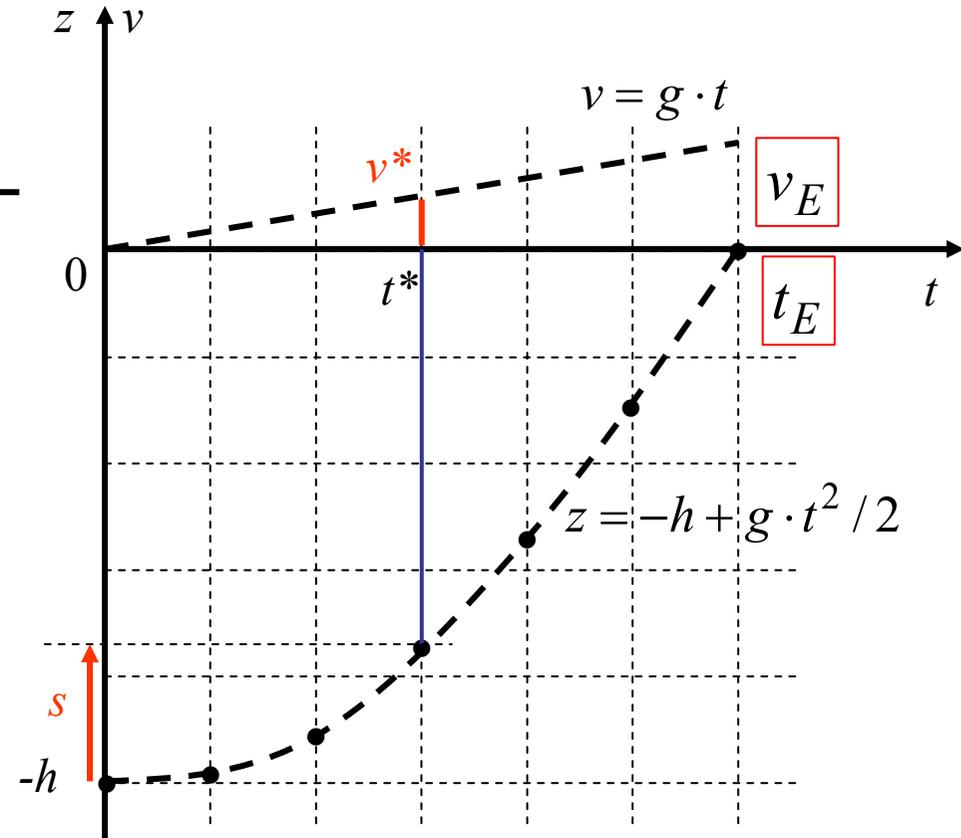
Energieerhaltung:

$$W_p(t) + W_k(t) = W_p(t=0) + W_k(t=0)$$

$$m_2 \cdot g \cdot h + m_2 \cdot (v(0))^2 / 2 = m_2 \cdot g \cdot h = W_p(t=0)$$

$$m_2 \cdot g \cdot 0 + m_2 \cdot v_E^2 / 2 = m_2 \cdot v_E^2 / 2 = W_k(t_E)$$

$$W_p(0) = W_k(t_E): v_E = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$



G2 Energieformen

Energieerhaltungssatz im abgeschlossenen System



Energieerhaltungssatz:

Die Gesamtenergie eines abgeschlossenen Systems ändert sich nicht mit der Zeit. Die Energie kann zwischen verschiedenen Energieformen umgewandelt werden (z. B von potentieller in kinetische Energie)

hier:

Die Summe aus potentieller und kinetischer Energie ist zeitunabhängig konstant:

$$W_p(t) + W_k(t) = -m_2 \cdot g \cdot z(t) + m_2 \cdot v(t)^2 / 2 = -m_2 \cdot \cancel{g^2 \cdot t^2} / 2 + m_2 \cdot g \cdot h + \cancel{m_2 \cdot (g \cdot t)^2} / 2$$

$$W_p(t) + W_k(t) = \text{konst.} \quad W_p(t) + W_k(t) = m_2 \cdot g \cdot h = m_2 \cdot v_E^2 / 2$$

Abgeschlossenes System (hier. m_E und m_2):

Über die Systemgrenzen hinweg erfolgt KEIN Energieaustausch!

Offenes System:

Energie kann aus einem System in ein anderes System transportiert werden.

ABER: Die Summe der Energien ALLER Systeme („Über-System“) ist konstant.

Es ist daher nicht möglich, Energie zu erzeugen oder zu vernichten



G2 Energieformen

Beispiel: Kinetische Energie

Beispiel: Frei fallender Körper, Masse $m = 1.5 \text{ t}$, $h = 25 \text{ m}$, $v(0) = 0$:

$$v_E = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 25} = 22.1 \text{ m/s} = 79.7 \approx 80 \text{ km/h}$$

$$W_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_E^2 = 370370 \text{ J} = 0.1 \text{ kWh}$$

Beispiel: Automobil, teilbeladen, $m = 1.5 \text{ t}$, $v = 80 \text{ km/h}$:

$$W_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = 0.5 \cdot 1500 \text{ kg} \cdot (80/3.6)^2 (\text{m/s})^2 = 370370 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \text{m} = 370370 \text{ J}$$

Bei Aufprall:

Deformationsenergie: $W_D = F_D \cdot l_D = 370370 \text{ J}$

Knautsch-Weg: $l_D = 0.5 \text{ m}$:

Deformationskraft: $F_D = 740 \text{ kN} \leftrightarrow 74 \text{ Tonnen}$

Beispiel: Automobil

Crash-Test frontal: bei 64 km/h , kinetische Energie
in KURZER Zeit in Deformationsenergie
gewandelt

Crash-Test bei GM



Quelle: Wikipedia.de

G2 Energieformen

Linear- und Drehbewegung

Impulserhaltungssatz:

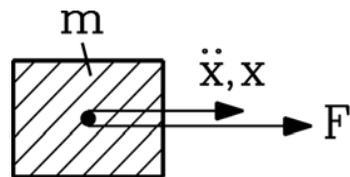
Der Gesamtimpuls in einem abgeschlossenen System ist konstant ist:

Konstanz des Impulses p

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} = \text{konst.}$$

Trägheits-**Kraft** = Impulsänderung

$$\vec{F} = d\vec{p} / dt$$

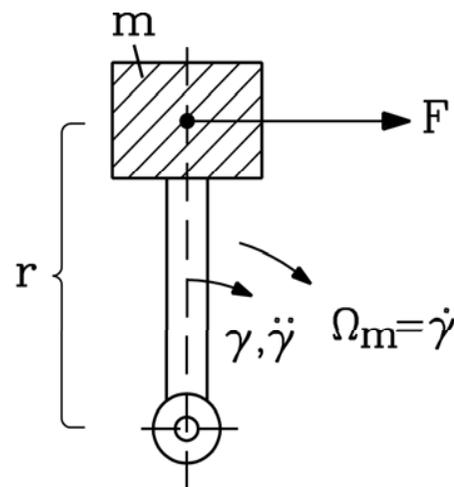


$$v = \dot{x}$$

$m = \text{konst.}$

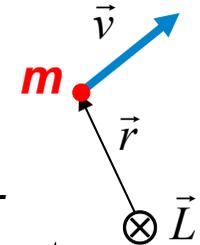
$$\vec{F} = m \cdot d\vec{v} / dt$$

$$F = m \cdot \ddot{x}$$



Konstanz des Drehimpulses L

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m \cdot (\vec{r} \times \vec{v}) = \text{konst.}$$



Trägheits-**Drehmoment** = Drehimpulsänderung

$$\vec{M} = d\vec{L} / dt$$

Beispiel: Drehbewegung: $r = \text{konst.}$

Drehwinkel γ , Winkelgeschwindigkeit $\Omega_m = \dot{\gamma}$

Drehzahl $n = \Omega_m / (2\pi)$

$$x = r \cdot \gamma: \quad \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \Rightarrow M = r \cdot F$$

$$M = r \cdot m \cdot \ddot{x} = r \cdot m \cdot r \cdot \ddot{\gamma} = m \cdot r^2 \cdot \dot{\Omega}_m$$

$$M = J \cdot \dot{\Omega}_m$$

Polares Trägheitsmoment $J = m \cdot r^2$



G2 Energieformen

Kinetische Energie der Linear- und Drehbewegung



- **Energie** als geleistete Arbeit = Kraft x Weg: $W = \int_x F \cdot dx \quad dW = F \cdot dx$
 $W = F \cdot x$

- **Leistung** = Energie / Zeit = Kraft x Geschwindigkeit

$$P = W/t = F \cdot x/t = F \cdot v \quad P = dW/dt = F \cdot dx/dt = F \cdot \dot{x} = F \cdot v$$

- **Leistung** = Energie / Zeit = Drehmoment x Winkelgeschwindigkeit

$$P = W/t = (F \cdot r) \cdot (x/r) / t = M \cdot \gamma / t = M \cdot \Omega_m$$

- **Gespeicherte** mechanische Energie W als kinetische Energie W_k

$$dW = P \cdot dt = F \cdot v \cdot dt = m \cdot \ddot{x} \cdot \dot{x} \cdot dt = m \cdot d(\dot{x}^2 / 2) \Rightarrow W_k = m \cdot v^2 / 2$$

$$dW = P \cdot dt = M \cdot \Omega_m \cdot dt = J \cdot \dot{\Omega}_m \cdot \Omega_m \cdot dt = J \cdot d(\Omega_m^2 / 2) \Rightarrow W_k = J \cdot \Omega_m^2 / 2$$

$$W_k = m \cdot v^2 / 2 \text{ (translatorisch)}$$

$$W_k = J \cdot \Omega_m^2 / 2 \text{ (rotatorisch)}$$



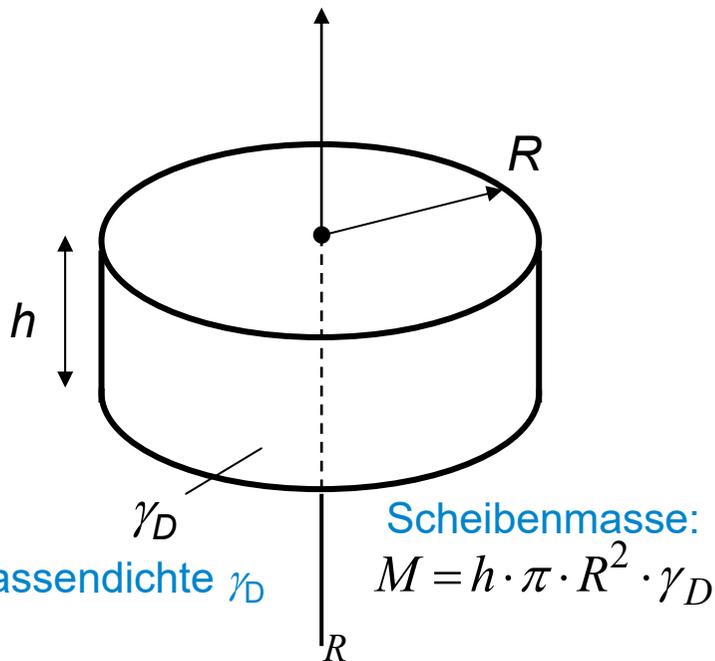
G2 Energieformen

Beispiel: Rotierende zylindrische Scheibe



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Polares Trägheitsmoment $J =$
Trägheitsmoment um die Hochachse



$$J = \int_M r^2 \cdot dm = h \cdot 2\pi \int_0^R r^2 \cdot \gamma_D \cdot r \cdot dr = h \cdot 2\pi \cdot \gamma_D \cdot R^4 / 4$$

$$J = M \cdot R^2 / 2$$

Beispiel: Schwungradspeicher

Stahlzylinder, Radius $R = 0.1$ m,
Höhe $h = 0.2$ m, Dichte $\gamma_D = 7850$ kg/m³

$$M = 0.2 \cdot \pi \cdot 0.1^2 \cdot 7850 = 49.3 \text{ kg}$$

$$J = 49.3 \cdot 0.1^2 / 2 = 0.2466 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Drehzahl $n = 10000$ /min:

$$\Omega_m = 2\pi \cdot n = 2\pi \cdot (10000 / 60) = 1047.2/\text{s}$$

Gespeicherte kinetische Energie:

$$W_k = J \cdot \Omega_m^2 / 2$$

$$W_k = 0.247 \cdot 1047.2^2 / 2 = 135433 \text{ J} = 0.0376 \text{ kWh}$$



G2 Energieformen

Mechanische Energie in Flüssigkeiten



Fluide:

Gase = kompressible Fluide: Dichte γ ist nicht konstant!

Flüssigkeiten = i. A. nicht kompressible Fluide: Dichte γ ist konstant!

1) Ruhende Flüssigkeiten: Lageenergie und

a) Druckenergie:

durch den nach allen Seiten gleichmäßig wirkenden hydrostatischen Druck p_H

b) Oberflächenenergie:

Zwischenmolekulare Kräfte (el. Kohäsionskräfte) wirken an der Flüssigkeitsoberfläche einseitig nach innen = Oberflächenspannung σ

2) Strömende Flüssigkeiten: Lageenergie und

a) Druckenergie + b) kinetische Energie + c) Reibungsenergie (Wärmeentwicklung)

(i) Instationäre Strömung:

Die räumliche Geschwindigkeitsverteilung $\vec{v}(x, y, z, t)$ ändert sich mit der Zeit!

(ii) Stationäre Strömung: Die räumliche Geschwindigkeitsverteilung $\vec{v}(x, y, z)$

ändert sich NICHT mit der Zeit = unveränderliches „Strömungsbild“!

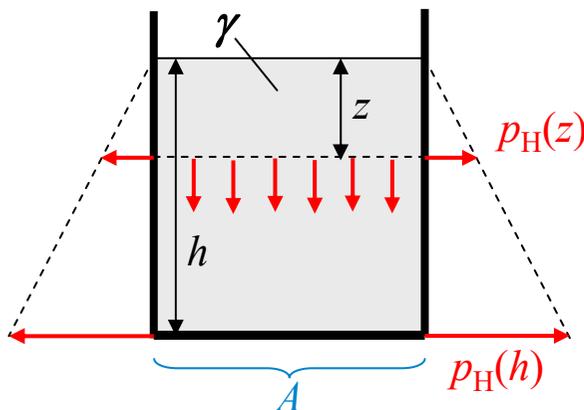


G2 Energieformen

Hydrostatischer Druck p_H , Druckenergie W_d

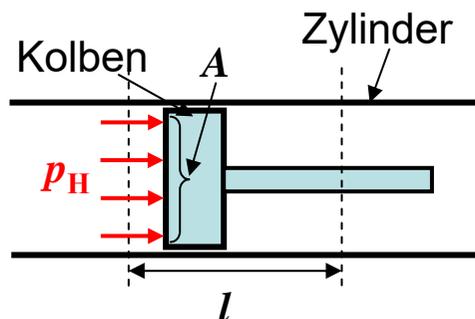


TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT



Hydrostatischer Druck p_H in einer ruhenden Flüssigkeit (Dichte γ) wirkt allseitig (an einem Ort) mit gleicher Größe, nimmt mit der „Flüssigkeitstiefe“ z linear zu:

$$p_H(z) = \frac{m(z) \cdot g}{A} = \frac{A \cdot z \cdot \gamma \cdot g}{A} = z \cdot \gamma \cdot g$$



Druckenergie W_d : Eine unter Druck stehende Flüssigkeit kann z. B. an einem in einem Zylinder beweglichen Kolben mechanische Arbeit $W = W_d$ leisten

$$W_d = F \cdot l = p_H \cdot A \cdot l$$

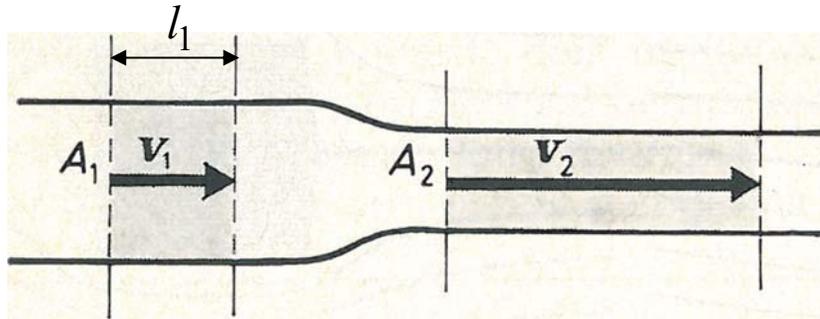


G2 Energieformen

Beispiel: Stationäre Strömung - Kontinuitätsgleichung



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT



Flüssigkeit (Masse m , Dichte γ) strömt STATIONÄR von einem großen Kanalquerschnitt (Fläche A_1) zu einem verengten Kanalquerschnitt mit der Fläche $A_2 < A_1$

„Massestrom“ = die pro Zeiteinheit durch die Fläche A_1 strömende Masse:

Geschwindigkeit $v_1 = l_1/t$, Volumenstrom \dot{V} = Volumendurchtritt je Zeiteinheit „ V/t “

$$\dot{V} = V/t = A \cdot l/t = A \cdot v \quad \dot{m} = l_1 A_1 \gamma / t = v_1 A_1 \gamma = \dot{V} \cdot \gamma$$

Inkompressibel: Derselbe Massestrom fließt ZEITGLEICH auch durch Fläche A_2

$$\dot{m} = v_1 A_1 \gamma = v_2 A_2 \gamma = \dot{V} \cdot \gamma \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{A_1}{A_2}$$

Kontinuitätsgleichung: $v_1 A_1 = v_2 A_2$

Geschwindigkeits**erhöhung** bei **verengtem** Strömungsquerschnitt: $v_2 > v_1$, ($A_2 < A_1$)



G2 Energieformen

Strömungsformen

Reynolds-Zahl Re : $Re = F_T / F_\eta$

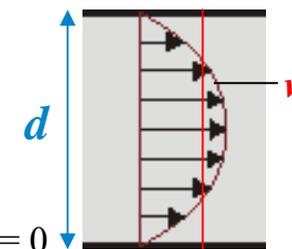
a) Laminare (geschichtete) Strömung (keine Verwirbelung): „Niedrige“ Reynolds-Zahl Re

Die inneren Reibungskräfte F_η (dynamische Zähigkeit η bzw. $\nu = \eta/\gamma$ kinematische Zähigkeit der Flüssigkeit) dominieren über die Trägheitskräfte F_T

Beispiele: laminar:

- Ausfließender Honig
- Menschlicher Blutkreislauf
- „Langsame“ Strömung: v_{av} klein

Rohrströmung laminar:
Parabolische
Geschwindigkeitsverteilung v



Reibung an der Wand: $v = 0$

v_{av} : mittlere
Geschwindigkeit

b) Turbulente (verwirbelte) Strömung: „Hohe“ Reynolds-Zahl Re

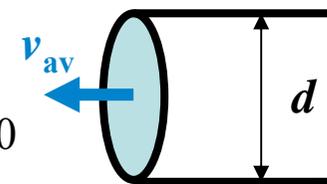
Die inneren Reibungskräfte F_η sind klein gegenüber den Trägheitskräften F_T

Beispiele: turbulent:

Windströmung, Flussströmung (strömendes Wasser)

Beispiel: Rohrströmung: Turbulent ab $Re = \frac{d \cdot v_{av}}{\nu} = \frac{d \cdot v_{av}}{\eta/\gamma} > Re_{krit} = 2320$

d : Rohrdurchmesser



G2 Energieformen

Stromfadentheorie der Strömung

- Inkompressible, turbulente (= näherungsweise reibungsfreie) stationäre Strömung:
„Mittlere“ (nicht tatsächliche!) Bahn eines Teilchens im Strömungsfeld = **Stromfaden**
- Energieanteile im Stromfaden:
 - a) Kinetische Energie W_k
 - b) Druckenergie W_d
 - c) Potentielle Energie W_p
- Summe $W_k + W_d + W_p$ ist an unterschiedlichen Stellen entlang des Stromfadens **konstant**, da die Reibungswärme vernachlässigt wird

$$W_k + W_d + W_p = m \cdot v^2 / 2 + p \cdot A \cdot l + m \cdot g \cdot h = \text{konst.} \quad m = \gamma \cdot A \cdot l$$

$$v^2 / 2 + p / \gamma + g \cdot h = \text{konst.} \quad \text{Bernoulli-Gleichung entlang des Stromfadens}$$

- An zwei unterschiedlichen Orten 1 und 2 (h_1, h_2) entlang des Stromfadens gilt daher:

$$v_1^2 / 2 + p_1 / \gamma + g \cdot h_1 = v_2^2 / 2 + p_2 / \gamma + g \cdot h_2 = \text{konst.}$$

G2 Energieformen

Beispiel: Offene Wasserrinne

Offenes Gerinne: Luftdruck $p = p_0$

Aus Becken (1) bei Höhe h fließt mit sehr kleiner Geschwindigkeit $v_1 \approx 0$ Wasser in die Wasserrinne.

Ausflussgeschwindigkeit v_2 bei (2)?

$$v_1^2 / 2 + p_1 / \gamma + g \cdot h_1 = v_2^2 / 2 + p_2 / \gamma + g \cdot h_2$$

Ort 1:

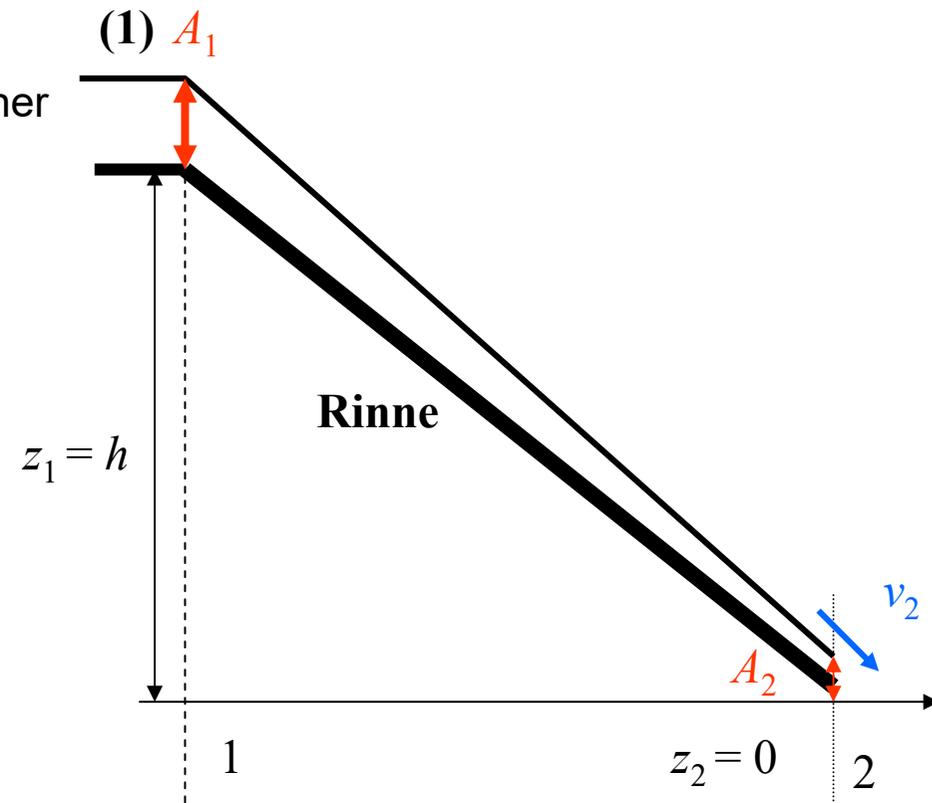
$$v_1^2 / 2 + p_0 / \gamma + g \cdot (h_2 + h) \approx p_0 / \gamma + g \cdot (h_2 + h)$$

Ort 2:

$$v_2^2 / 2 + p_0 / \gamma + g \cdot h_2 \approx p_0 / \gamma + g \cdot (h_2 + h)$$

$$v_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \quad \text{„Ausfluss-Formel“}$$

„Ausfluss-Formel“ entspricht (ohne Reibung!)
der frei fallenden Flüssigkeit im Schwerfeld!



$$h = 100 \text{ m} :$$

$$v_2 = \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 100} = 44.3 \text{ m/s} = 159 \text{ km/h}$$

G2 Energieformen

Elektrische Kraft und potentielle el. Energie einer Punktladung q_1 bzgl. Punktladung q_2



Elektrische Kraft (Coulomb) auf Punktladung q_1 im E -Feld der

$$\text{Punktladung } q_2: \vec{F} = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} \cdot \vec{e}_{r'} \quad \vec{E}_2 = \vec{F} / q_1 = \frac{q_2}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} \cdot \vec{e}_{r'}$$

Punktladung q_1 von r_A nach r_B bewegt:

Bei $q_1, q_2 > 0$ abstoßende Kraft $F =$

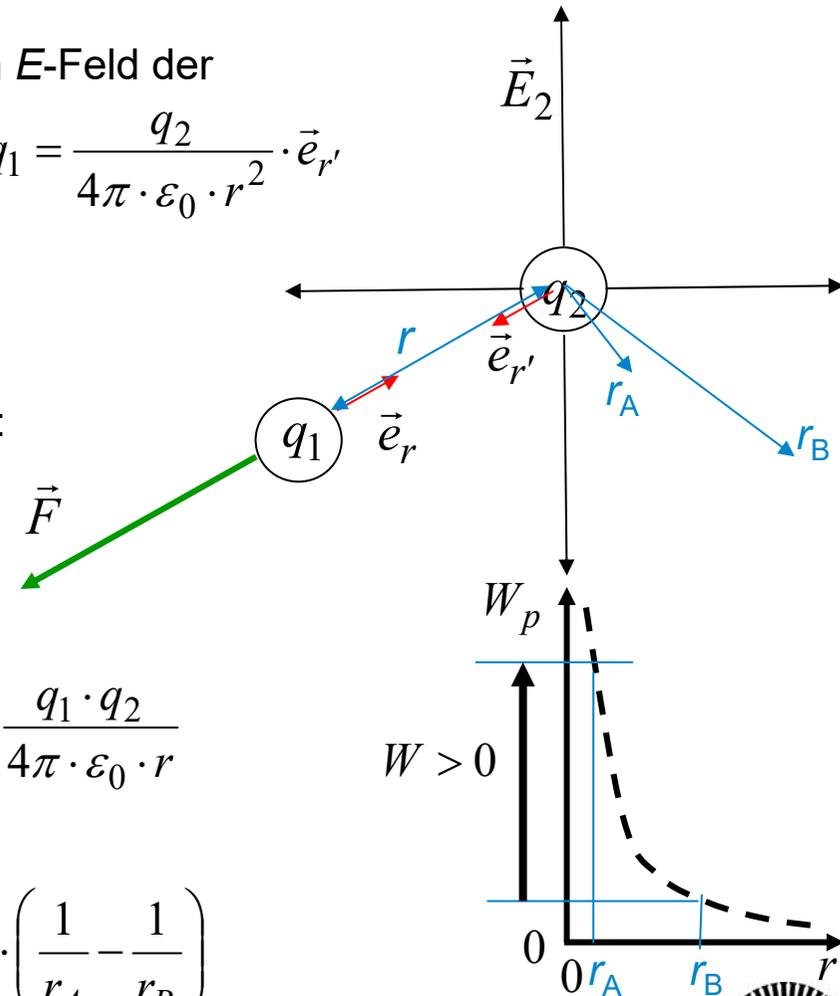
= es wird Arbeit $W > 0$ gewonnen aus dem E -Feld:

$$W = \int_{r_A}^{r_B} \vec{F} \cdot dr \cdot \vec{e}_{r'} = -\frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) = W_{pA} - W_{pB}$$

Potentielle el. Energie W_p von q_1 im E -Feld: $W_p = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot r}$

Elektrisches Potential φ : $\varphi = W_p / q_1 = \frac{q_2}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot r}$

Elektrische Spannung: $U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = \frac{q_2}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$



G2 Energieformen

Elektrisches Potential φ und Spannung U beim kugelsymmetrischen E -Feld

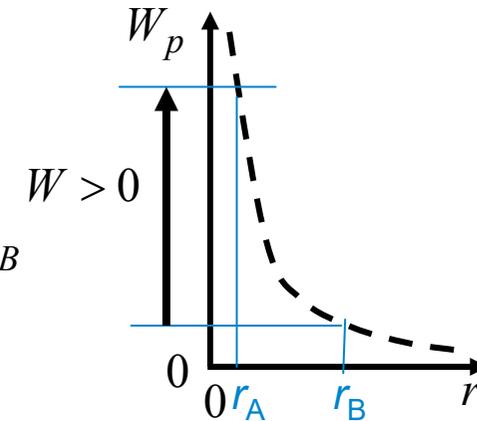


1) Elektrisches Potential φ : $\varphi = W_p / q_1 = \frac{q_2}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot r}$

Elektrische Spannung U :

$$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = \frac{q_2}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) \quad U_{AB} = \int_{r_A}^{r_B} \vec{E}_2 \cdot dr \cdot \vec{e}_{r'} = \varphi_A - \varphi_B$$

$$W = U_{AB} \cdot q_1 = W_{pA} - W_{pB}$$

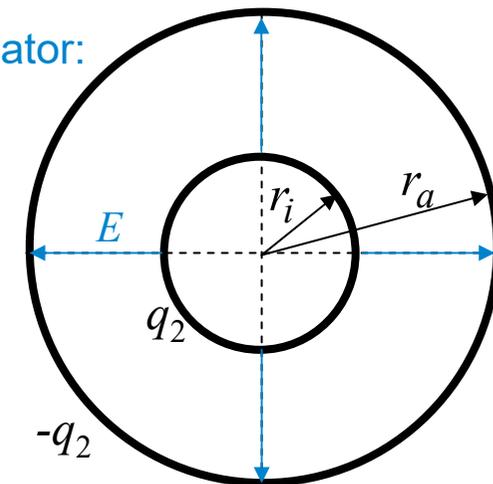


2) Reale, innerhalb $r_i < r < r_a$ identische Feldanordnung: **Kugelkondensator:**

Metallische Kugeloberflächen (Elektroden) tragen q_2 und $-q_2$!

$$U_{ia} = \varphi_i - \varphi_a = \frac{q_2}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_a} \right) = \frac{q_2}{C}$$

„Geometrie“-Faktor **Kapazität C** : $\frac{1}{C} = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_a} \right)$



Da die Erde insgesamt elektrisch neutral ist, musste die Ladungstrennung q_2 und $-q_2$ mit Arbeit W vollbracht werden



G2 Energieformen

Elektrische Energie W_e

Ladungstrennungsarbeit W wird als elektrische Energie W_e gespeichert:

Es wird kleine Ladung dq von i nach a transportiert \Rightarrow

Es verbleibt bei i die negative Ladung $-dq$ bzw. später $-q$.

Arbeit dW gegen deren Anziehungskraft = NEGATIVE Kraft!

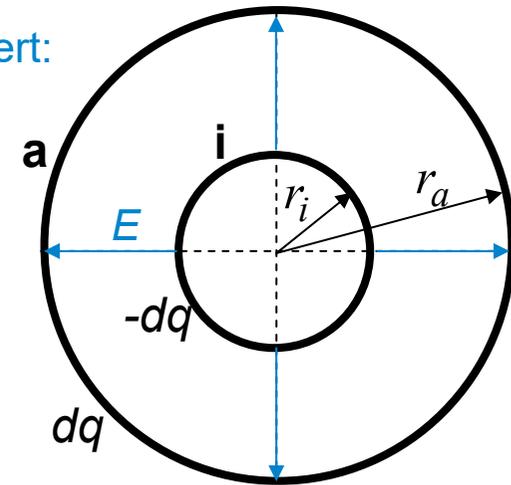
Mit dq statt q_1 und $-q$ statt q_2 und i, a statt A, B (vorige Folie) folgt:

$$dW = \frac{dq \cdot (-q)}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_a} \right) = dq \cdot U_{ia} = -dq \cdot U_{ai} = -dW_e$$

$$W_e = \int dW_e = \int_0^{q_a} U_{ai} \cdot dq = \int_0^U C \cdot U_{ai} \cdot dU_{ai} = C \cdot U^2 / 2$$

$$W_e = C \cdot U_{ai}^2 / 2 = U_{ai} \cdot \frac{CU_{ai}}{2} = U_{ai} \cdot \frac{q_a}{2} = \frac{\varphi_a q_a}{2} - \frac{\varphi_i q_a}{2} = \frac{\varphi_a q_a}{2} + \frac{\varphi_i q_i}{2}$$

$(q_a = -q_i)$



$$U_{ia} = \frac{q_i}{C} \Rightarrow dU_{ia} = \frac{-dq}{C}$$

$$dU_{ai} = \frac{dq}{C}$$

Die im elektrischen Feld E einer Kondensatoranordnung C gespeicherte elektrostatische Energie ist:

$$W_e = C \cdot U^2 / 2$$

G2 Energieformen

Elektrisch polarisierbare Materie

- **Dielektrika:** i. A. elektrisch nicht oder schwach leitfähige Stoffe, deren Moleküle versuchen, sich im äußeren elektrischen Feld E in oder gegen die Feldrichtung E auszurichten („polarisieren“). Dadurch erregen sie ein zusätzliches elektrisch wirksames Feld, die **elektrische Polarisation P**

- Das resultierend wirksame elektrische Feld ist die **dielektrische Verschiebung (el. Flussdichte) D** :

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P}$$

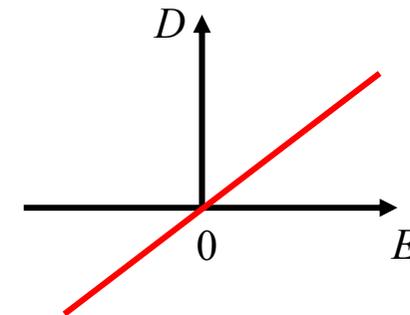
- **Isotrope Dielektria:** Wirkung der Polarisierung unabhängig von der Raumrichtung: $P \uparrow \uparrow E$

- **Lineares Material:** $\vec{P} \sim \vec{E} \Rightarrow \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon \cdot \vec{E} = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \vec{E}$ ε_r : Relative Permittivität
 $P \uparrow \uparrow E: \varepsilon_r \geq 1$

- **Elektrostatische Energiedichte w_e („lineares“ Material):**

Durch elektrische Ladungen Q UND polarisierbare Materie (P):

$$w_e = \frac{\vec{D} \cdot \vec{E}}{2} \Big|_{\text{isotrop}} = \frac{\varepsilon}{2} \cdot |\vec{E}|^2 = \frac{\varepsilon}{2} \cdot (E)^2$$



G2 Energieformen

Elektrische Energie W_e im elektrischen Feld lokalisiert

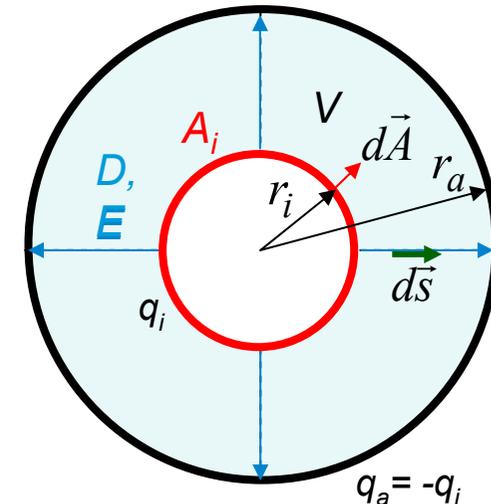


TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Innere Elektrodenoberfläche A_i , Feldvolumen V :

$$\begin{aligned} W_e &= U_{ai} \cdot \frac{q_a}{2} = -U_{ia} \cdot \frac{q_a}{2} = U_{ia} \cdot \frac{q_i}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\int_{r_i}^{r_a} \vec{E} \cdot d\vec{s} \right) \cdot \oint_{A_i} \vec{D} \cdot d\vec{A} \\ &= \frac{1}{2} \int_{r_i}^{r_a} \oint_{A_i} (\vec{D} \cdot d\vec{A}) \cdot (\vec{E} \cdot d\vec{s}) = \frac{1}{2} \int_{r_i}^{r_a} \oint_{A_i} (\vec{D} \cdot \vec{E}) \cdot (d\vec{A} \cdot d\vec{s}) = \frac{1}{2} \int_V \vec{D} \cdot \vec{E} \cdot dV \end{aligned}$$

$$W_e = \int_V w_e \cdot dV = \frac{1}{2} \int_V \vec{D} \cdot \vec{E} \cdot dV \quad \text{Energiedichte (J/m}^3\text{): } w_e = \frac{\vec{D} \cdot \vec{E}}{2}$$



- Die Energie W_e ist im felderfüllten Raum lokalisiert, der mit der **Energiedichte w_e** „erfüllt“ ist!
- Die beiden Elektroden i und a stehen unter mechanischer Spannung der sich gegenseitig anziehenden elektrischen Ladungen q_i und $q_a = -q_i$ (**Coulomb-Kraft = „Fernwirkungsmodell“**)
- Diese Kraft wird durch die wie „Gummischnüre“ ziehende Kraftwirkung des elektrischen Felds E zwischen den Elektroden als **„Maxwell“scher Zug p_e** vermittelt (**„Nahwirkungsmodell“**)



G2 Energieformen

Maxwell'scher Zug p_e

„Maxwell“scher Zug: Die durch das elektrische Feld E zwischen den Elektroden wirkende Kraft F_e , bezogen auf die Elektrodenoberfläche A , als mechanische Zugspannung $p_e = F / A$

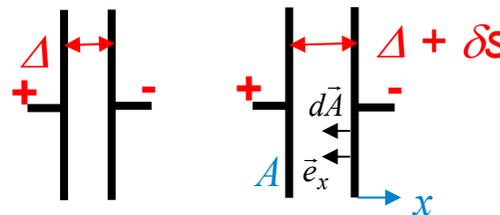
Berechnung von p_e für den einfachsten Geometrie-Fall: Homogenfeld $\Rightarrow w_e = \text{konst.}$:

$$dV = dA \cdot dx : F_e = F_{e,x} = \frac{dW_e}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\int \int_{x A} w_e \cdot dA \cdot dx \right) = w_e \cdot \int_A dA \cdot \frac{d}{dx} \left(\int dx \right) = w_e \cdot A$$

$$F_{e,x} = \int_A p_{e,x} \cdot dA = p_{e,x} \cdot A$$

$$p_{e,x} = \frac{\vec{D} \cdot \vec{E}}{2} = \frac{D_x \cdot E_x}{2}$$

$$\vec{p}_{e,x} = p_{e,x} \cdot \vec{e}_x$$



Einfachster (einachsiger) Fall einer „Maxwell“schen Zugspannung in x -Richtung, wirkt gegen die Vergrößerung des Plattenabstands

Energiedichte w_e : $\text{J/m}^3 = \text{N} \cdot \text{m/m}^3 = \text{N/m}^2$ „Maxwell“sche Zugspannung p_e

G2 Energieformen

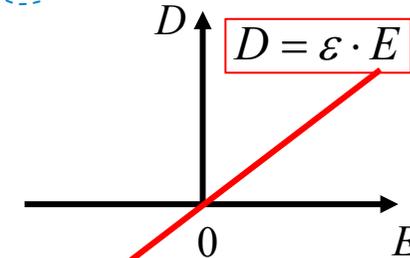
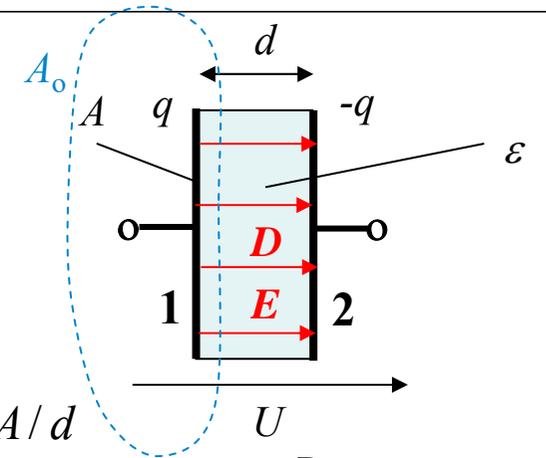
Beispiel: Plattenkondensator

Annahme: $d = 1 \text{ mm}$, $A = 1 \text{ m}^2$, $\epsilon_r = 4$, $U = 1 \text{ kV}$
 Material zwischen den Elektroden 1 und 2 des
 Plattenkondensators homogen und isotrop polarisierbar

$$\vec{D} = \epsilon_r \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{E} = \epsilon \cdot \vec{E} \quad \epsilon_r \geq 1$$

$$q = \oint_{A_0} \vec{D} \cdot d\vec{A} = D \cdot A = \epsilon \cdot E \cdot A$$

$$U = U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{s} = E \cdot d \quad C = q/U = \frac{\epsilon \cdot A \cdot E}{E \cdot d} = \epsilon \cdot A/d$$



Gespeicherte el. Energie W_e :

$$W_e = C \cdot U^2 / 2 = \frac{\epsilon}{2} \cdot E^2 \cdot A \cdot d = \frac{D \cdot E}{2} \cdot V$$

$$\left. \begin{aligned} E &= U/d = 10^3 / 10^{-3} = 10^6 \text{ V/m} = 10 \text{ kV/cm} \\ D &= 4 \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 10^6 = 35.4 \cdot 10^{-6} \text{ As/m}^2 \end{aligned} \right\} w_e = \frac{D \cdot E}{2} = 17.7 \text{ J/m}^3$$

$$\left. \begin{aligned} q &= D \cdot A = 35.4 \mu\text{C} \\ C &= \frac{q}{U} = \frac{35.4 \cdot 10^{-6}}{10^3} = 35.4 \text{ nF} \end{aligned} \right\} W_e = \frac{C \cdot U^2}{2} = \frac{35.4 \cdot 10^{-9} \cdot (10^3)^2}{2} = 17.7 \text{ mJ}$$

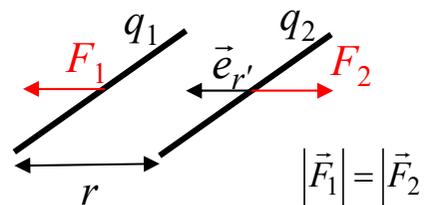
$$p_e = D \cdot E / 2 = 17.7 \text{ N/m}^2 \quad \text{Plattenkraft } F = 17.7 \text{ N}$$

sehr geringe Energiedichte!

G2 Energieformen

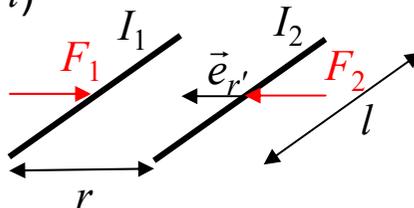
Elektrostatik versus Magnetostatik

Coulomb-Kraft zwischen zwei parallelen
Linienladungen $q = \tau \cdot l$ (Länge l)

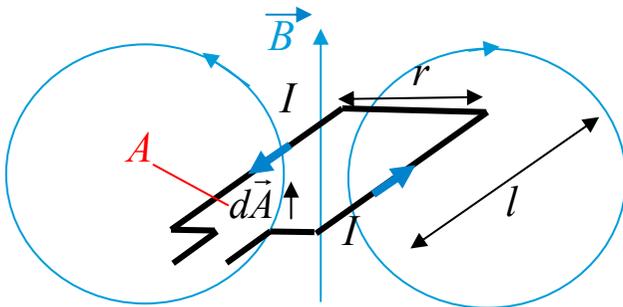
$$\vec{F}_1 = \frac{\tau_1 \cdot \tau_2}{2\pi \cdot \epsilon_0 \cdot r} \cdot l \cdot \vec{e}_{r'}$$


$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$

Lorentz-Kraft zwischen zwei parallelen
Linienströmen I (Länge l)

$$\vec{F}_1 = -\mu_0 \cdot \frac{I_1 \cdot I_2}{2\pi \cdot r} \cdot l \cdot \vec{e}_{r'}$$


Im Magnetfeld bei gleicher Geometrie **gleichartige Kräfte** wie im elektrischen Feld,
wenn statt der Linienladungen $\tau = q/l$ geschlossene Stromkreise I verwendet werden



Magnetfluss Φ durch Schleifenfläche $A = r \cdot l$: $\Phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$

Schleifen-Flussverkeftung (Schleifen-Windungszahl N):

$$\Psi = N \cdot \Phi$$

„Geometriefaktor“ Selbstinduktivität L der Schleife:

$$L = \Psi / I = N \cdot \Phi / I$$

G2 Energieformen

Magnetisierbare Materie

- **Magnetisierbare Werkstoffe (z. B. Ferromagnetika, ...):** i. A. el. leitfähige Stoffe, deren Atome versuchen, ihre magnetischen Achsen im äußeren magnetischen Feld H in oder gegen die Feldrichtung H auszurichten. Dadurch erregen sie ein zusätzliches magnetisch wirksames Feld, die **magnetischen Polarisation J_M** (bzw. Magnetisierung $M = J_M/\mu_0$).

- Das resultierend wirksame magnetische Feld ist die **magnetische Induktion (mag. Flussdichte) B** : $\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H} + \vec{J}_M = \mu_0 \cdot \vec{H} + \mu_0 \cdot \vec{M}$

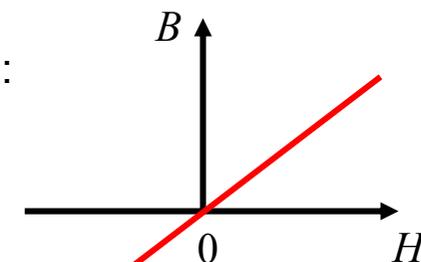
- **Isotrope Magnetika:** Magnetisierungswirkung unabhängig von der Raumrichtung: $M \uparrow \uparrow H$:

- **Lineare Magnetika:** $\vec{J}_M \sim \vec{H} \Rightarrow \vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{J}_M = \mu \cdot \vec{H} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \vec{H}$ μ_r : Relative Permeabilität

- **Magnetostatische Energiedichte w_m („lineares“ Material):**

Durch elektrische Gleichströme I UND magnetisierte Materie (J_M):

$$w_m = \frac{\vec{B} \cdot \vec{H}}{2} \Big|_{\text{isotrop}} = \frac{\mu}{2} \cdot |\vec{H}|^2 = \frac{\mu}{2} \cdot (H)^2$$



$M \uparrow \uparrow H: \mu_r \geq 1$



G2 Energieformen

Elektrostatische & magnetostatische Energie



- Energie im elektrischen Quellenfeld E , erregt von $q = C \cdot U$
 C : Kapazität = „Geometriefaktor“ der Ladungsanordnung,
 U : Elektrische Spannungsdifferenz zw. den Ladungsanordnungen

$$W_e = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2$$

$$U = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

- Energie im magnetostatischen Feld H , erregt vom Gleichstrom $I = q/t$
 L : Induktivität = „Geometriefaktor“ der Stromleiteranordnung

$$W_m = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2$$

- Einsetzen der „Geometrie-Faktoren“ C bzw. $L \Rightarrow$ statische Energie pro Feldvolumen w
a) im „leeren Raum“: $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$, b) in isotroper, nichtlinearer Materie $\varepsilon(E)$, $\mu(H)$:

$$w_e(x, y, z) = \frac{\varepsilon}{2} \cdot (E(x, y, z))^2$$

$$w_m(x, y, z) = \frac{\mu}{2} \cdot (H(x, y, z))^2$$

$$W_e = \int_V w_e \cdot dV$$

$\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ As/(Vm)}$
 Permittivität
 (Dielektrizitätszahl) des
 leeren Raums

$$W_m = \int_V w_m \cdot dV$$

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/(Am)}$
 Permeabilität des leeren
 Raums



G2 Energieformen

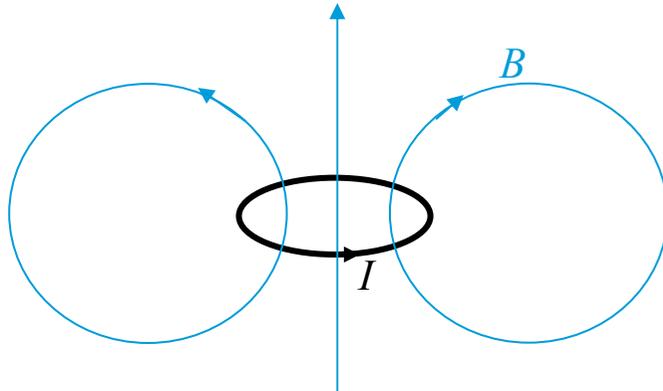
Korrespondierend: Elektrostatik vs. Magnetostatik

	Elektrostatik	Magnetostatik
Flussdichte	D (A·s/m ²)	B (V·s/m ²)
Feldstärke	E (V/m)	H (A/m)
Polarisation	P (A·s/m ²)	J_M (V·s/m ²)
rel. Werkstoffparameter	ϵ_r (-)	μ_r (-)
Feldkonstante	$\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}$ A·s/(V·m)	$\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$ V·s/(A·m)
"Geometriefaktor"	C (A·s/V)	L (V·s/A)
Energiedichte (lineares Material)	$\vec{D} \cdot \vec{E} / 2$	$\vec{B} \cdot \vec{H} / 2$
Energie (lineares Material)	$C \cdot U^2 / 2 = q \cdot U / 2$	$L \cdot I^2 / 2 = \Psi \cdot I / 2$

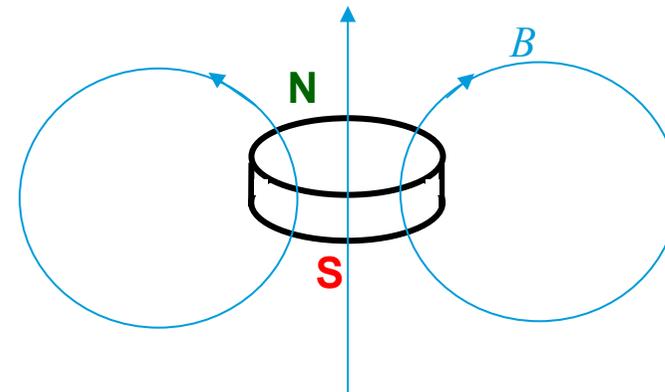
G2 Energieformen

Magnetische Energie W_m

- Beispiel: Magnetfeld: a) einer Kreisschleife



- b) eines Dauermagneten



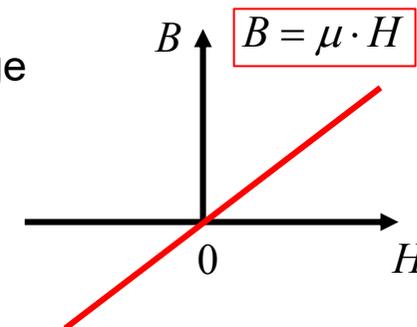
- Um **zweite Schleife 2 (Magnet)** von **erster Schleife 1 (Magnet)** zu trennen, muss Arbeit W gegen **Lorentz-Kraft F** zwischen beiden aufgewendet werden, die dann als **magnetische Energie $W_m = W = L_1 i_1^2 / 2 + L_2 i_2^2 / 2 + M i_1 i_2$** im Magnetfeld zwischen den beiden Schleifen (Magneten) mit Selbst-/Gegeninduktivität L_1, L_2, M gespeichert ist.

Gespeicherte mag. Energie W_m (im Feldvolumen V) für eine einzige Schleife: Materie im Feldraum homogen & isotrop magnetisierbar

$$\vec{B} = \mu_r \cdot \mu_0 \cdot \vec{H} = \mu \cdot \vec{H}$$

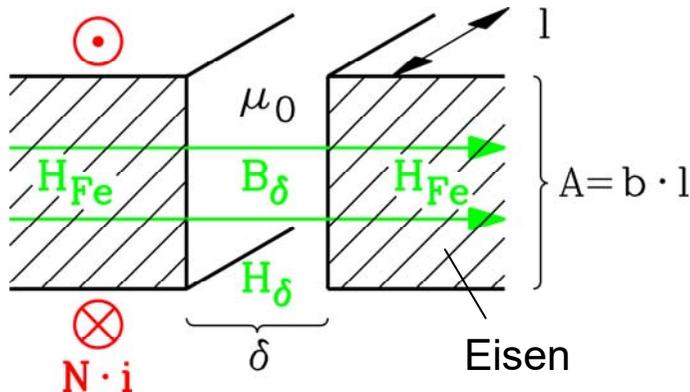
$$\mu_r \geq 1$$

$$W_m = L \cdot I^2 / 2 = \int_V \frac{\vec{B} \cdot \vec{H}}{2} \cdot dV$$



G2 Energieformen

Beispiel: Magnetfeld zwischen zwei Polschuhen



Eisenpolschuhe (Eisenrückschluss nicht dargestellt)

Eisenpermeabilität $\mu_{Fe} \gg \mu_0$, s_{Fe} : B -Feldlinienlänge im Fe

H -Feld-Erregung durch Spule (N Windungen, Strom i)

Magnetischer Fluss: $\Phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = B_\delta \cdot A = B_{Fe} \cdot A$

Durchflutungssatz: $N \cdot i = \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = H_{Fe} \cdot s_{Fe} + H_\delta \cdot \delta$

$$H_\delta = B_\delta / \mu_0, \quad H_{Fe} = B_{Fe} / \mu_{Fe} = B_\delta / \mu_{Fe} \ll H_\delta \Rightarrow H_{Fe} \approx 0, \quad B_\delta = \mu_0 \cdot \frac{N \cdot i}{\delta}$$

Selbstinduktivität: $L = \Psi / i = N \cdot \Phi / i = N \cdot B_\delta \cdot A / i = \mu_0 N^2 A / \delta$

Feld-Energiedichte: $w_m = B_\delta \cdot H_\delta / 2$ **Zugkraft je Pol:** $F = p_m \cdot A = (B_\delta \cdot H_\delta / 2) \cdot A$

$b = l = 5 \text{ cm}, \quad \delta = 1 \text{ mm}, \quad N = 500, \quad i = 1 \text{ A:}$

$H_\delta = 500 \cdot 1 / 10^{-3} = 500 \text{ kA/m}, \quad B_\delta = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 0.5 \cdot 10^6 = 0.628 \text{ T}$ **Energie überwiegend in Luft und nicht im Eisen gespeichert ($H_{Fe} \approx 0$)!**

$L = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 500^2 \cdot 5^2 \cdot 10^{-4} / 10^{-3} = 0.785 \text{ H} \Rightarrow W_m = L \cdot i^2 / 2 = 0.785 \cdot 1^2 / 2 = 0.39 \text{ J}$

$w_m = 0.628 \cdot 500 \cdot 10^3 / 2 = 157 \text{ kJ/m}^3, \quad F = 25 \cdot 10^{-4} \cdot 157 \cdot 10^3 = 392.5 \text{ N}$ **HOHE Kraft und Energiedichte!**

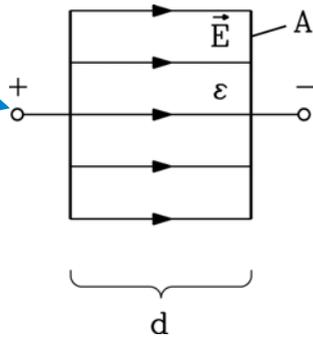
G2 Energieformen

Beispiel: Elektrost. & magnetostat. Energie

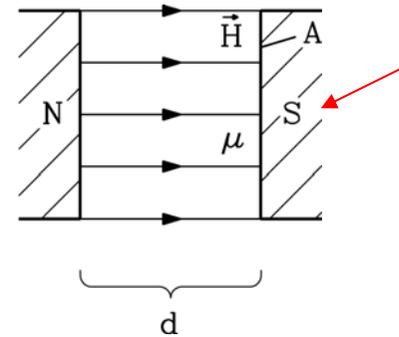
Vergleich der gespeicherten Energie im elektrostatischen und magnetostatischen Feld:

a) Plattenkondensator:

- $A = 1 \text{ m}^2, d = 1 \text{ mm}$
- $\mu = \mu_0, \epsilon = \epsilon_0$



b) Eisen-Polschuhe:



- Energie im elektrostatischen Feld: $E = 40 \text{ kV/cm}$ (Durchschlagsfeldstärke in Luft bei $d = 1 \text{ mm}$)

$$W_e = A \cdot d \cdot \frac{\epsilon \cdot E^2}{2} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \frac{8.854 \cdot 10^{-12} \text{ As/(Vm)} \cdot (4 \cdot 10^6)^2 \left(\frac{\text{V}}{\text{m}}\right)^2}{2} = 0.071 \text{ J}$$

- Energie im magnetostatischen Feld $B = 1 \text{ T}$ ($< 1.7 \text{ T}$ als Sättigungsfeldstärke von Eisen)

$$W_m = A \cdot d \cdot \frac{B^2}{2\mu} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \frac{1^2 (\text{Vs/m}^2)^2}{2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/(Am)}} = 397.9 \text{ J}$$

- $W_e = 0.07 \text{ J}, W_m = 400 \text{ J}$

$$\frac{W_m}{W_e} = 5700!$$

Magn. Feld erlaubt höhere Energiedichten \Rightarrow
bevorzugter Einsatz für elektrische Energiewandler

G2 Energieformen

Elektromagnetische Grundgesetze

▪ Elektromagnetische Grundgesetze (**MAXWELL-Gleichungen in integraler Form**):

$$\oint_{C=\partial A} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \Theta + \frac{\partial \Phi_e}{\partial t}$$

Ampere-Maxwell-Gesetz

$$\oint_{C=\partial A} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

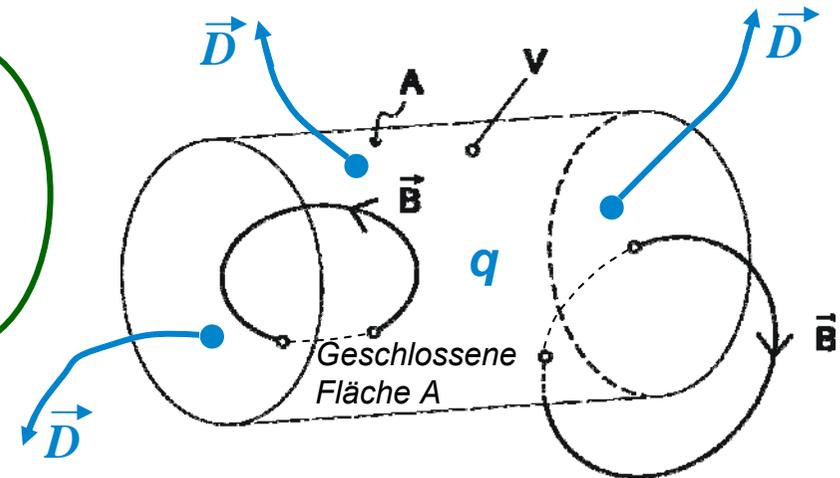
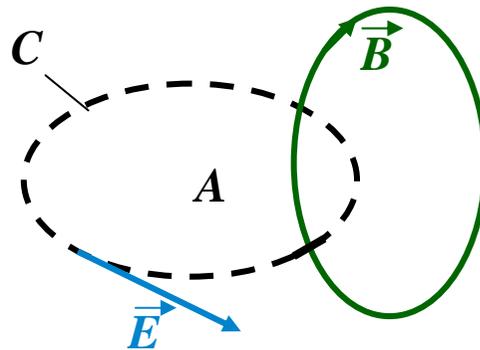
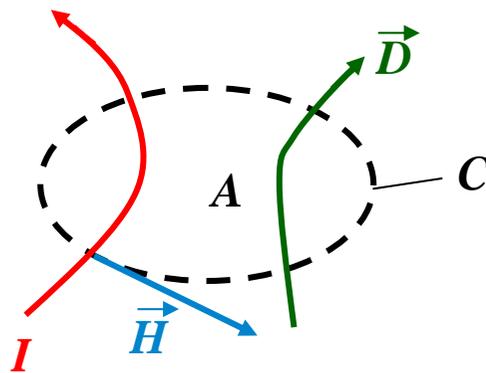
Faraday-Gesetz

$$\Phi = \oint_{A, \partial A=0} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

Magn. Hüllenfluss

$$\Phi_e = \oint_{A, \partial A=0} \vec{D} \cdot d\vec{A} = q$$

Ei. Hüllenfluss



$$\Theta = \sum_k N_k I_k$$

Ei. Durchflutung

$$\int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = \Phi$$

Magnetischer Fluss

$$\int_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = \Phi_e$$

Elektrischer Fluss

$C = \partial A$: (geschlossene) Randkurve der Fläche A

G2 Energieformen

Elektromagnetische Energie W_{em}

- **Elektromagnetische Energie W_{em} :**

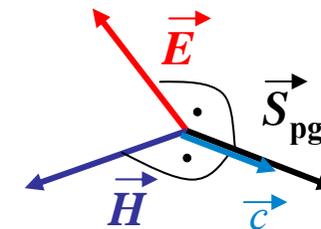
Ist im elektromagnetischen E - H -Feld gespeichert ist, wobei elektrisches Feld E und magnetisches Feld H über ihre zeitlichen Änderungen **miteinander verkoppelt sind**

- Durch die zeitlichen Änderungen dE/dt und dH/dt breiten sich E - und H -Feld im Raum mit **Lichtgeschwindigkeit c** aus („Feldwellenausbreitung“, **elektromagnetische Strahlung**) und transportieren dabei die Energie W_{em}

- In jedem Punkt des Raumes wird dieser Energietransport durch den **Poynting-Vektor S_{pg}** beschrieben:

$$\vec{S}_{pg} = \vec{E} \times \vec{H}$$

$$P = dW_{em} / dt = \int_A \vec{S}_{pg} \cdot d\vec{A}$$



$$\vec{E} = c \cdot \mu_0 \cdot \vec{H}$$

Lichtgeschwindigkeit c :
Im Vakuum:
 $c_0 = 299\,792\,458$ m/s

- **Beispiel:**

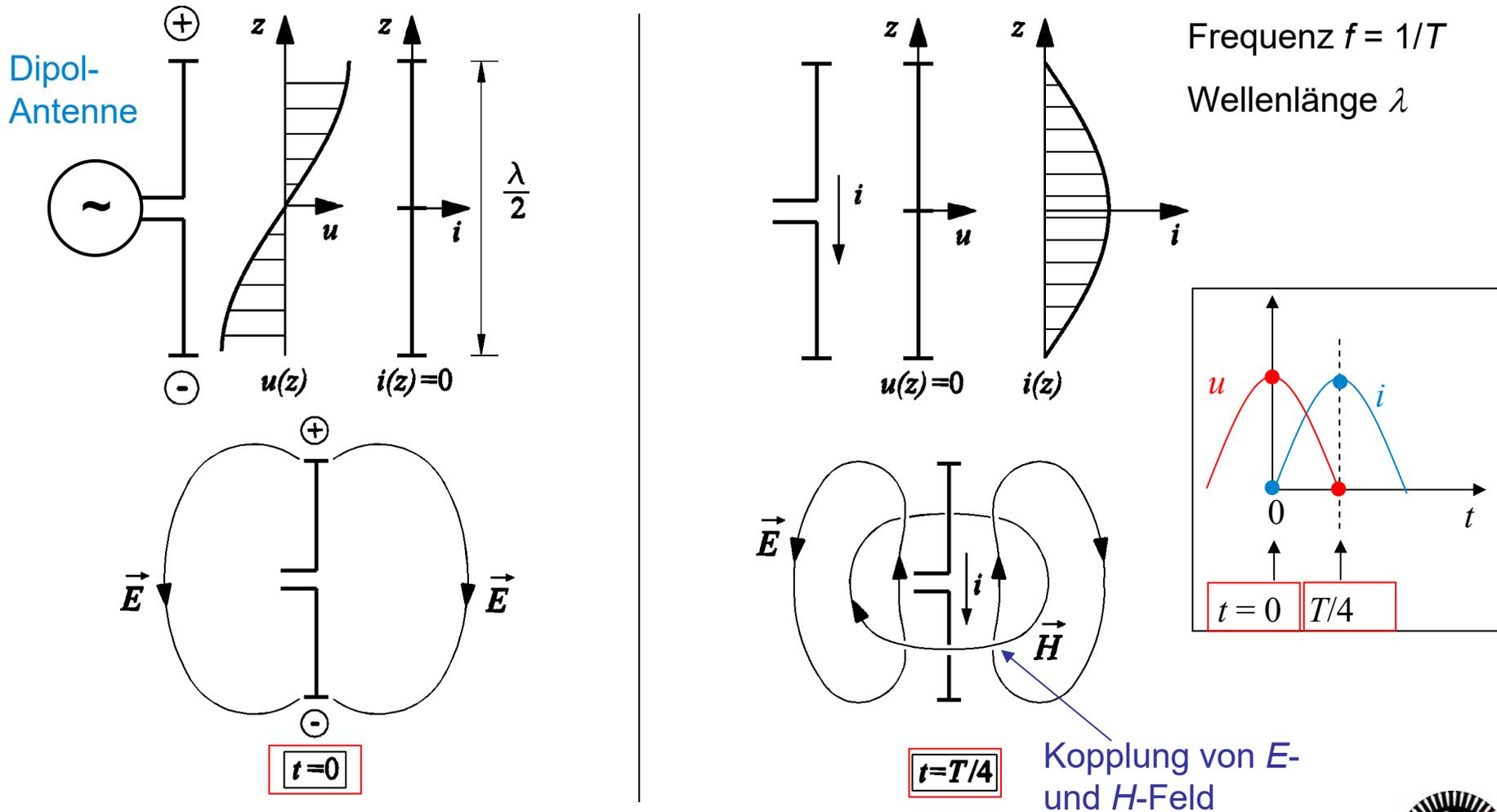
$$E = 1000 \text{ V/m}, H = 2.65 \text{ A/m} \rightarrow S_{pg} = 2653 \text{ V}\cdot\text{A/m}^2 = 2653 \text{ W/m}^2$$

Es wird je Sekunde durch die Fläche von 1 m^2 die Energie von $W_{em} = 2.65 \text{ kJ}$

transportiert = **Strahlungsleistung $P = W_{em}/t = 2.65 \text{ kW}$**

G2 Energieformen

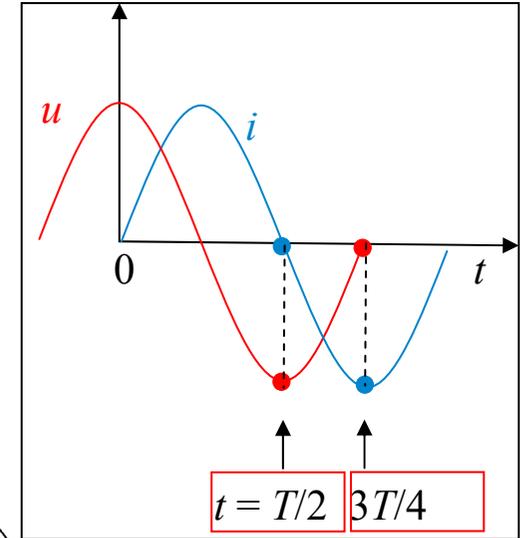
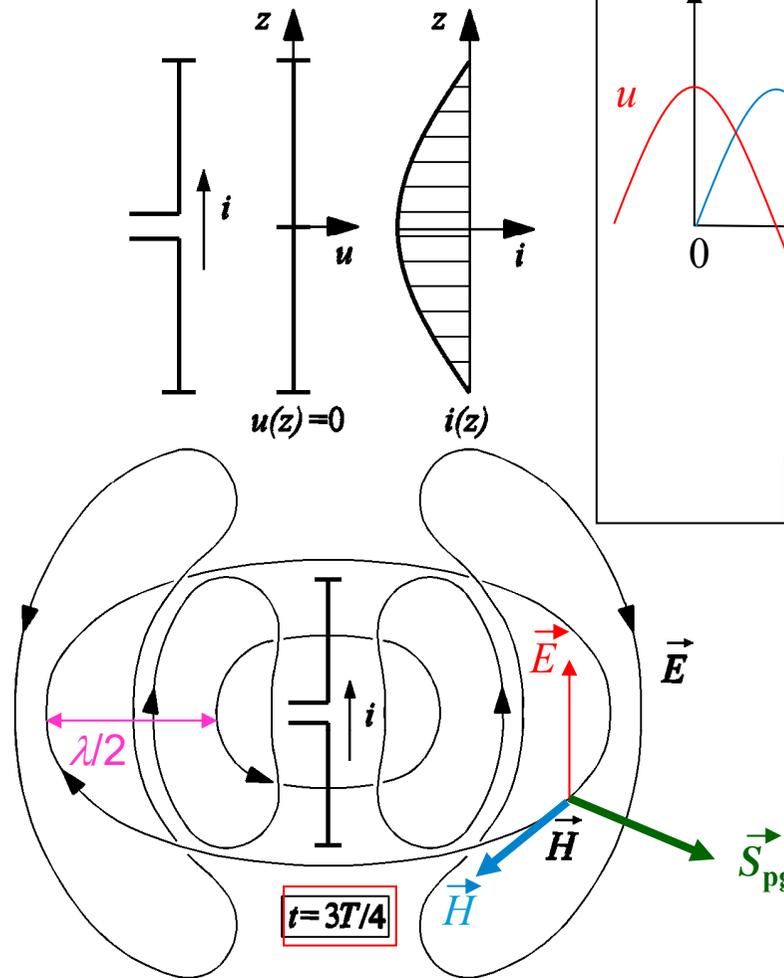
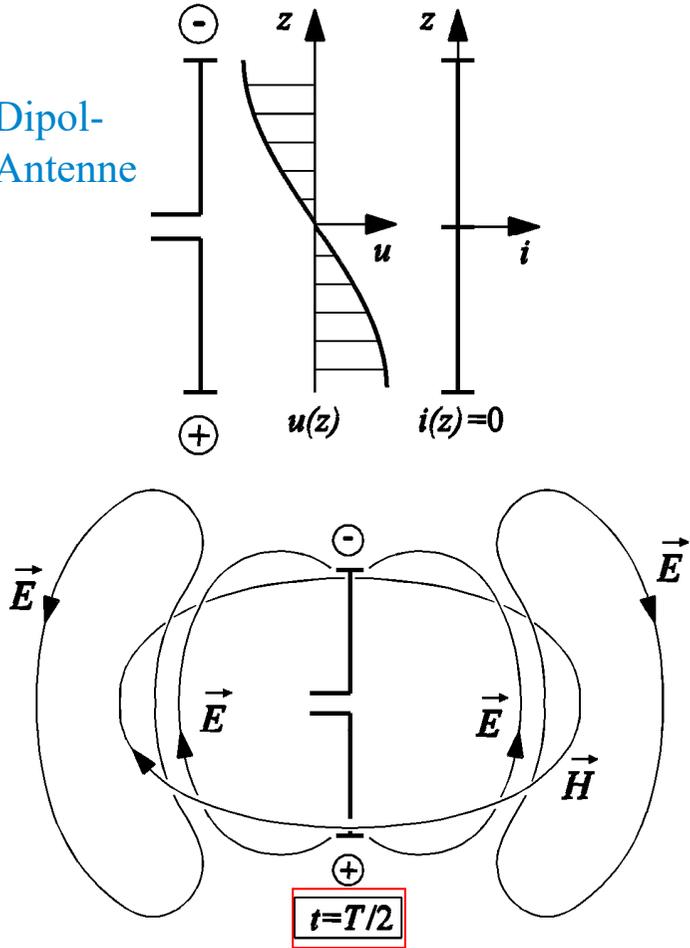
Elektromagnetische Wellenausbreitung (1)



G2 Energieformen

Elektromagnetische Wellenausbreitung (2)

Dipol-
Antenne



G2 Energieformen

Rayleigh-Jeans'sches Strahlungsgesetz



Legt man die mit **kontinuierlicher Energie** erfolgende elektromagnetische Strahlung W_{em} bei der Frequenz f (z. B. Antenne) auch der Abstrahlung schwingender (= beschleunigter) geladener Teilchen zugrunde (z. B. heiße Metalloberfläche mit schwingenden Atomrümpfen des Kristallgitters, Temperatur T), so ergibt sich für diese **Wärmestrahlung** das

Strahlungsgesetz von Rayleigh-Jeans:

$$I_f(f) = \frac{2\pi \cdot f^2}{c_0^2} \cdot k \cdot T \quad \text{gilt nur für } h \cdot f \ll k \cdot T$$

$I_f(f)$: **Strahlungsleistung** P_{th} je Wellenfrontfläche A im Frequenzintervall $[f, f + df]$
(W·s/m²)

$I = P/A$: **Intensität**

Vakuumlichtgeschwindigkeit: $c_0 = 299\,792\,458$ m/s

Boltzmann'sche Konstante: $k = 1.3805 \cdot 10^{-23}$ J/K

Planck'sches Wirkungsquantum: $h = 6.625 \cdot 10^{-34}$ Js

Strahlungsgesetz von **Rayleigh-Jeans** ist für hohe Frequenzen $f > k \cdot T / h$ **aber falsch!**

Beispiel:

Heiße Metalloberfläche 400°C: $T = 273.15 + 400 = 673.15$ K,

$$f_{krit} = k \cdot T / h = k \cdot 673.15 / h = 140 \cdot 10^{11} = 14 \text{ THz}$$

Für $f > 14$ THz Strahlungsleistung falsch (**zu groß**) berechnet!



G2 Energieformen

Planck'sches Strahlungsgesetz



- Planck'sche Annahme: Lichtwellen mit der Frequenz f können nur mit bestimmten Energieportionen ΔW („**Quanten**“) abgestrahlt werden, die ganzzahlige Vielfache von

$$W_{\text{photon}} = h \cdot f$$

$h = 6.625 \cdot 10^{-34}$ Js **Planck'sches Wirkungsquantum**

sind.

- Damit hat Licht nicht nur einen **Wellen-**, sondern auch **Teilchencharakter**.
- **Lichtteilchen (Photonen)** mit Energie $h \cdot f$ und ganzzahligen Vielfachen stellen als Teilchenstrom die elektromagnetische Strahlung dar, also auch die **Wärmestrahlung**.

Strahlungsgesetz von Planck (für alle Frequenzen gültig!):

$I_f(f)$: **Strahlungsleistung/Fläche** im Frequenzintervall $[f, f + df]$

Wellen-Phasengeschwindigkeit $\lambda \cdot f = c_0$

$$I_f(f) = \frac{2\pi \cdot h \cdot f^3}{c_0^2} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h \cdot f}{k \cdot T}} - 1}$$

$I_\lambda(\lambda)$: **Strahlungsleistung/Fläche** im Wellenlängenintervall $[\lambda, \lambda + d\lambda]$

$$I_\lambda(\lambda) = \frac{2\pi \cdot h \cdot c_0^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h \cdot c_0}{\lambda \cdot k \cdot T}} - 1}$$

Planck'sche Annahme der „Quantelung“ war der Beginn der Quantenmechanik!



G2 Energieformen

Schwarzer Strahler

Schwarzer Strahler („Schwarzer Körper“) =
Hypothetische Strahlungsquelle:

z. B. als innen verspiegelter Hohlraum
mit darin eingepprägter stehender elektromagnetischer Welle
mit Frequenz f („Hohlraumstrahlung“)

Reflexion der (Licht)-Welle an den Spiegelwänden
führt zu stehenden Wellen von E und H mit
bestimmten Eigenfrequenzen $f \Rightarrow$

\Rightarrow Zugehörige eingeschlossene Strahlungsenergie
bestimmt die **Temperatur T des schwarzen Strahlers**.

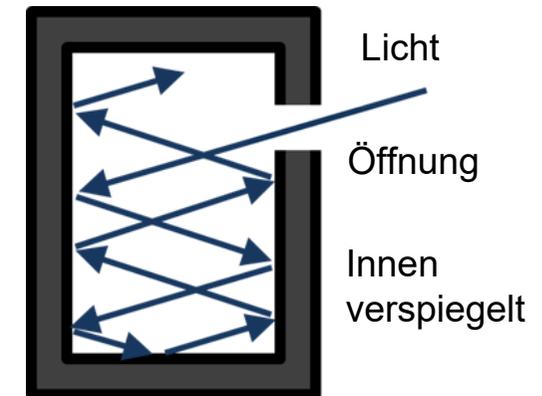
Durch eine **Öffnung** in einer Wand des Hohlraums
tritt die Strahlung aus, in **gequantelten Energiemengen**:

$$n \cdot h \cdot f \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Diese austretende Strahlung gehorcht dem *Planck*-Strahlungsgesetz!

Beispiel: $T = 6000 \text{ K}$:

„Schwarzer Körper“ strahlt im Wellenlängenbereich $\lambda = 499 \text{ nm} \dots 500 \text{ nm}$ je cm^2
($A = 1 \text{ cm}^2$) die Energie $W_{\text{em}} = 10 \text{ J}$ je Sekunde ab!



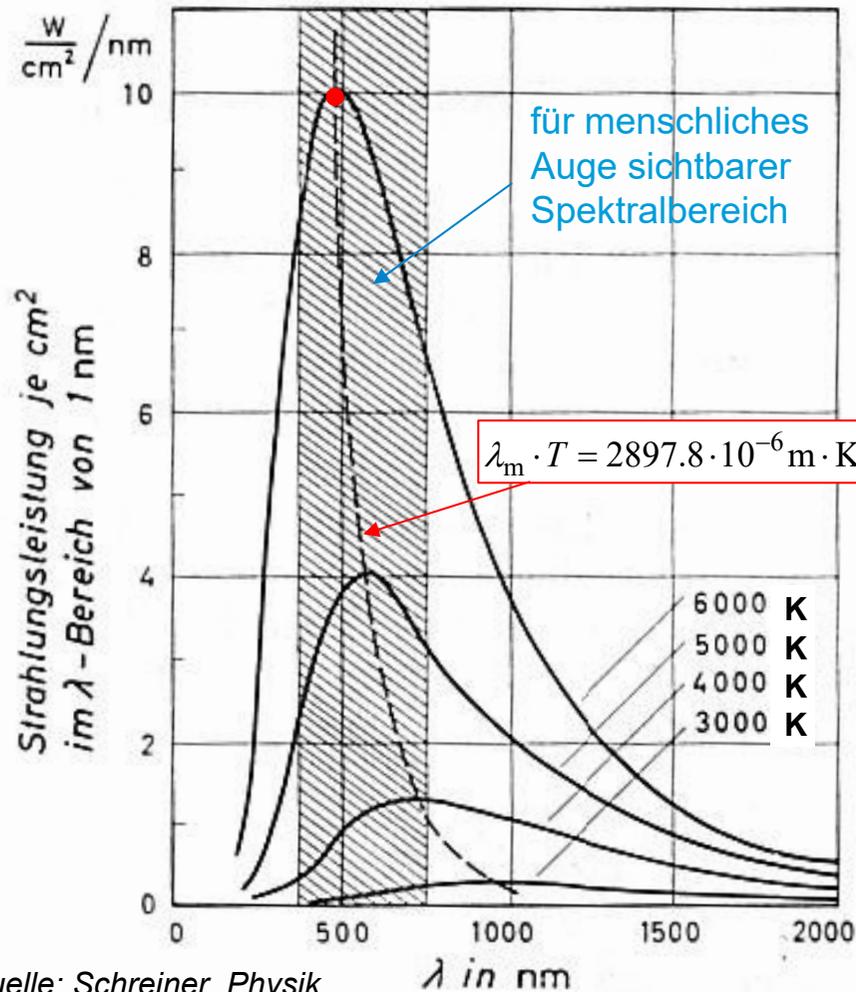
Quelle: Wikipedia (engl.)

Schwarzer Körper:

Absorbiert alle auftreffende
elektromagnetische Strahlung
jeglicher **Wellenlänge** vollständig

G2 Energieformen

Spektralverteilung: *Planck'sches* Strahlungsgesetz



Spektrale Verteilung der emittierten Strahlungsleistung je Flächeneinheit des schwarzen Strahlers für:

$T = 3000 \text{ K}, 4000 \text{ K}, 5000 \text{ K}, 6000 \text{ K}$

$$I_\lambda(\lambda) = \frac{2\pi \cdot h \cdot c_0^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{\frac{h \cdot c_0}{\lambda \cdot k \cdot T} - 1}$$

Schwarzer Strahler

sendet als Wärmestrahlung eine elektromagnetische Strahlung aus, die nach Intensität und spektraler Verteilung

- unabhängig von der weiteren Beschaffenheit des Körpers und seiner Oberfläche ist und
- nur von seiner absoluten Temperatur T abhängt

Beispiel: Wärmestrahlung (Infrarot) $60^\circ\text{C} = 333 \text{ K}$:

max. Strahlung bei $\lambda_m = 8.7 \mu\text{m} \approx 10^{-5} \text{ m}$

Quelle: Schreiner, Physik

G2 Energieformen

Spektralverteilung: Wien'sches Verschiebungsgesetz



Strahlungsmaximum

bei einer festen (Oberflächen-)Temperatur des schwarzen Strahlers:

Tritt gemäß $dI_\lambda(\lambda)/d\lambda = 0$ auf bei der Wellenlänge:

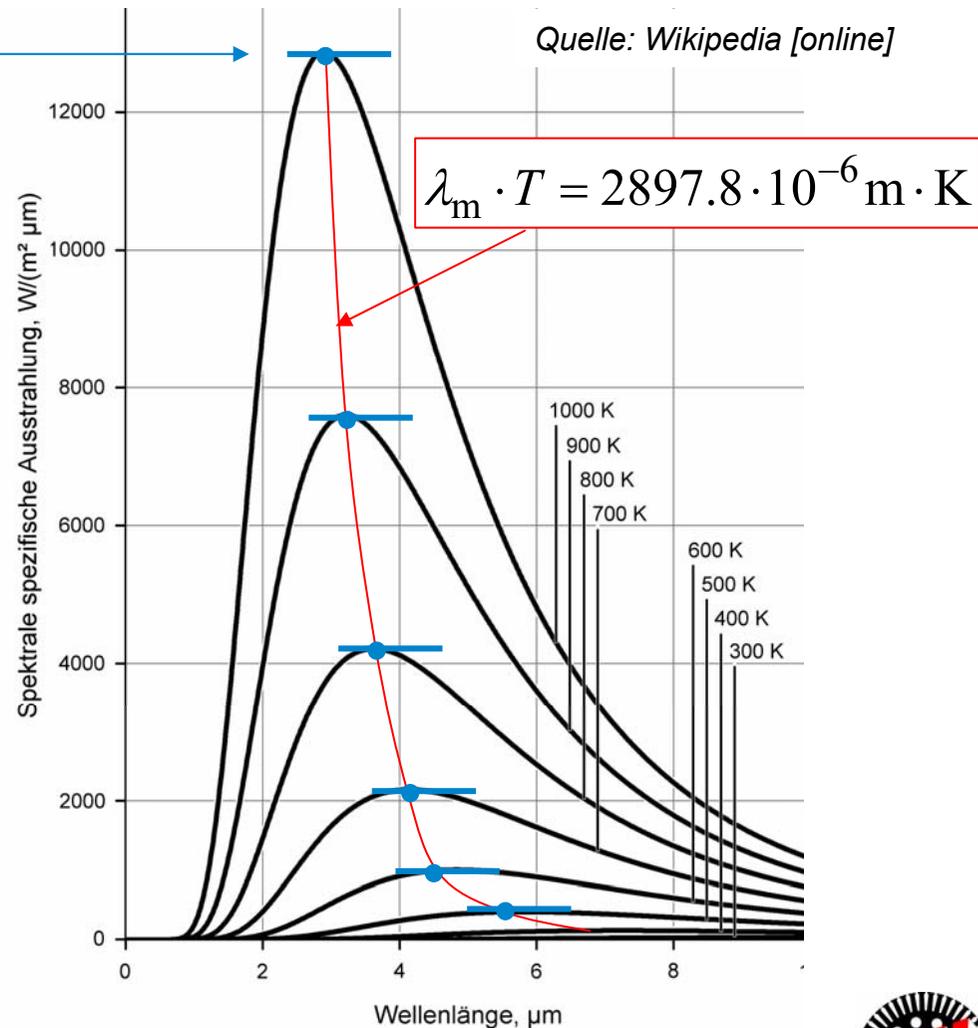
$$\lambda_m = \frac{h \cdot c_0}{4.9621 \cdot k \cdot T}$$

$$\lambda_m \cdot T = \frac{h \cdot c_0}{4.9621 \cdot k} = 2897.8 \cdot 10^{-6} \text{ m} \cdot \text{K}$$

$$\lambda_m \cdot T = 2897.8 \cdot 10^{-6} \text{ m} \cdot \text{K}$$

Wien'sches Verschiebungsgesetz:

Mit steigender absoluter Temperatur T verschieben sich die Strahlungsmaxima zu kleineren Wellenlängen λ_m !



G2 Energieformen

Stefan-Boltzmann'sches Strahlungsgesetz



Gesamte je Flächeneinheit A abgestrahlte Leistung P_{th} des schwarzen Strahlers (= Summe über alle Wellenlängen λ) entspricht der Fläche unter der Kurve $I_\lambda(\lambda)$

⇒ ergibt **Stefan-Boltzmann'sches Strahlungsgesetz**:

$$P_{th} / A = \int_0^{\infty} I_\lambda(\lambda) \cdot d\lambda = \sigma \cdot T^4$$

$$\sigma = \frac{2\pi^5 \cdot k^4}{15 \cdot h^3 c_0^2} = 0.56697 \cdot 10^{-7} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4}$$

Stefan-Boltzmann-Strahlungskoeffizient
(für schwarzen Körper)

Die je Fläche A vom heißen (T_2) zum kalten Ort ($T_1 < T_2$) abgestrahlte Wärmeleistung ist die Differenz der Strahlungsleistungen beider Orte (mit gleicher Strahlungsfläche A):

$$P_{th} / A = \sigma \cdot (T_2^4 - T_1^4)$$

$$P_{th} / A = c_s \cdot (T_2^4 - T_1^4)$$

Reale Strahler haben kleinere Strahlungskoeffizienten: $c_s = \varepsilon \cdot \sigma < \sigma$ $0 \leq \varepsilon \leq 1$
(ε : Emissionskoeffizient)



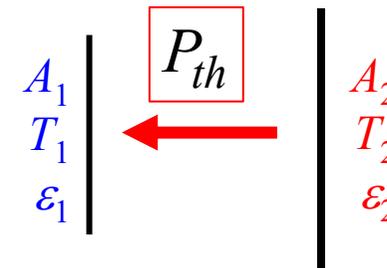
G2 Energieformen

Kirchhoff'sches Strahlungsgesetz

Kirchhoff'sches Strahlungsgesetz:

Berechnung der ausgetauschten Strahlungsleistung zwischen zwei Oberflächen $A_1 \neq A_2$ mit unterschiedlichen Emissionskoeffizienten $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ ($0 \leq \varepsilon \leq 1$):

$$P_{th} = A_1 \cdot \frac{\sigma \cdot (T_2^4 - T_1^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{A_1}{A_2} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_2}\right)}$$



Beispiel: $T_2 > T_1$: Emissionskoeffizient: ε_2 der strahlenden heißen Fläche A_2
 ε_1 der strahlenden kalten Fläche A_1

Sonderfall:

$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 = 1$ („schwarze Strahler“): $P_{th} / A_1 = \sigma \cdot (T_2^4 - T_1^4)$

Es ergibt sich wieder das *Stefan-Boltzmann'sche* Strahlungsgesetz!

G2 Energieformen

Beispiel: Wärmestrahlung: Magn. Energiespeicher

Supraleitende Spule als magnetischer Energiespeicher in Kältebehälter (Kryostat):

Innen-Gefäß I mit Spule (Temperatur 4.2 K) und flüssigem Helium (Kältemittel),
Außen-Gefäß A mit evakuiertem Zwischenraum (keine Wärmeleitung oder Konvektion):

- a) Aus warmer Umgebung möglichst keine Wärme auf Außenwand des Außen-Gefäßes (Außenverspiegelung)
- b) Von Innenwand des Außen-Gefäßes (Heißseite) möglichst keine Wärme zur Außenwand des Innen-Gefäßes (Kaltseite mit Außenverspiegelung)

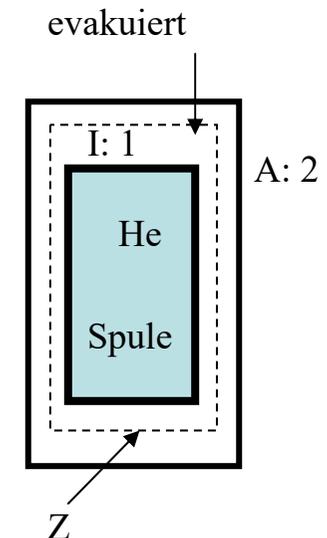
Kaltseite I außen: Polierte Metalloberfläche: $\varepsilon_1 = 0.05$, $T_1 = 4.2$ K,

Heißseite A innen: Oxydiertes (mattes) Blech: $\varepsilon_2 = 0.5$; $A_2 \sim A_1$, $T_2 = 293$ K

$$q_{th} = \frac{P_{th}}{A_1} = \frac{0.56697 \cdot 10^{-7} \cdot (293^4 - 4.2^4)}{\frac{1}{0.05} - 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{0.5}\right)} = 19.9 \text{ W/m}^2 \quad \text{Zu hoher Wärmeeintrag bei I}$$

Deshalb: Zwischengefäß Z mit flüssigem N₂ gekühlt: $T_2 = \text{ca. } 80$ K

$$q_{th} = \frac{P_{th}}{A_1} = \frac{0.56697 \cdot 10^{-7} \cdot (80^4 - 4.2^4)}{\frac{1}{0.05} - 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{0.5}\right)} = 0.11 \text{ W/m}^2 \quad \text{Wärmeeintrag bei I auf 0.55% verringert!}$$



G2 Energieformen

Strahlungsenergie W_{rad} = Elektromagn. Energie W_{em}



▪ Strahlungsenergie:

Energie W_{rad} (*Radiation*) der elektromagnetischen Strahlung (z. B. Wärmestrahlung, Licht):

(Wellenmodell des Lichts)
$$W_{\text{rad}} = \int_t \int_A \vec{S}_{\text{pg}} \cdot d\vec{A} \cdot dt = W_{\text{em}}$$

▪ Teilchenmodells des Lichts:

Elektromagnetischen Strahlung ist ein Lichtteilchen-Strom (Photonen-Strom).

Jedes Lichtteilchen hat Ruhemasse Null, aber bei der Frequenz f der el.-magn. Welle

(einfarbige Lichtwelle) die „Bewegungsenergie“ $W_{\text{photon}} = h \cdot f$

▪ Strahlungsenergie bei N Photonen: $W_{\text{rad}} = h \cdot f \cdot N$

Beispiel:

Sichtbares Licht $f = 600$ THz, Wellenlänge 500 nm, $N = 10^{26}$ Teilchen:

$$W_{\text{rad}} = h \cdot f \cdot N = 6.625 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot 600 \cdot 10^{12} \frac{1}{\text{s}} \cdot 10^{26} = 39.75 \text{ MJ}$$



G2 Energieformen

Strahlungsdruck („Lichtdruck“) F_{rad}/A



- (**Strahlungs-)Energie** eines Photons (Lichtteilchens): $W_{\text{photon}} = h \cdot f$
- Geschwindigkeit aller Photonen: $v = c$ (Lichtgeschwindigkeit)
- Lichtteilchen ruhen NICHT = **Ruhmasse m_0 der Lichtteilchen ist Null!**
- Masse m der mit c fliegenden Photonen gemäß **EINSTEIN-Relation** $W_{\text{photon}} = m \cdot c^2$

$$W_{\text{photon}} = m \cdot c^2 = h \cdot f \Rightarrow m = \frac{h \cdot f}{c^2}$$

- **Bewegungsimpuls** eines Photons: $\vec{p}_{\text{photon}} = m \cdot \vec{v} = m \cdot \vec{c}$
- Auftreffen von N Lichtteilchen auf „**ideal schwarze**“ (= vollständig absorbierende) Fläche $A \Rightarrow \Rightarrow \varepsilon = 1 \Rightarrow$ Vollständige Teilchen-Abbremsung = vollständiger Impulsverlust

- Impulsänderung: $\Delta p = N \cdot p_{\text{photon}} = N \cdot m \cdot c$
- Kraft F_{rad} auf Fläche $A =$ Impulsänderung je Zeit $\Delta p/t = F_{\text{rad}}$

$$\frac{F_{\text{rad}}}{A} = \frac{I_{\text{rad}}}{c}$$

- **Strahlungsdruck:** $\frac{F_{\text{rad}}}{A} = \frac{\Delta p/t}{A} = \frac{N \cdot m \cdot c}{A \cdot t} = \frac{N \cdot m \cdot c^2}{A \cdot t \cdot c} = \frac{W_{\text{rad}}}{t} \cdot \frac{1}{A \cdot c} = \frac{P_{\text{rad}}}{A} \cdot \frac{1}{c} = \frac{I_{\text{rad}}}{c}$



G2 Energieformen

Strahlungsdruck der Sonne

- **Strahlungsdruck** $F_{\text{rad}}/A = \text{Strahlungsintensität } I_{\text{rad}} / \text{Lichtgeschwindigkeit } c$:

a) Ideal absorbierende Fläche A ($\varepsilon = 1$): $\frac{F_{\text{rad}}}{A} = \frac{I_{\text{rad}}}{c}$

- b) Ideal verspiegelte Fläche $A = \text{Ideale Reflexion der Photonen } (\varepsilon = 0)$:

$$\vec{p}_{\text{photon}} = m \cdot \vec{c} \Rightarrow -m \cdot \vec{c} \quad \text{Impulsänderung: } \Delta p = 2 \cdot m \cdot c \Rightarrow \frac{F_{\text{rad}}}{A} = 2 \cdot \frac{I_{\text{rad}}}{c}$$

- Beispiel:

Extraterrestrische Sonneneinstrahlung: $I_{\text{rad}} = P_{\text{rad}} / A = 1328 \text{ W/m}^2 = I_0$

Strahlungsdruck: $\frac{F_{\text{rad}}}{A} = \frac{I_0}{c} = \frac{1328}{3 \cdot 10^8} = 4.42 \cdot 10^{-6} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$

Gesamte Strahlungskraft auf die Erde: mit $A = r_E^2 \cdot \pi = (6378 \cdot 10^3)^2 \cdot \pi = 1.28 \cdot 10^{14} \text{ m}^2$

NUR: $F_{\text{rad}} = 4.42 \cdot 10^{-6} \cdot 1.28 \cdot 10^{14} = 565.7 \text{ MN} \Leftrightarrow 0.1 \cdot 10^{-24}$ der Sonnen-Anziehungskraft!

$$W_{\text{rad}} = N \cdot h \cdot f \Rightarrow E(t) = \hat{E} \cdot \cos(2\pi f t), H(t) = \hat{H} \cdot \cos(2\pi f t), \quad f = 1/T$$

$$\bar{S}_{\text{pg}} = \frac{1}{T} \int_0^T E(t) \cdot H(t) \cdot dt = \hat{E} \cdot \hat{H} / 2 = I_0, \quad \hat{E} = \hat{H} \cdot c_0 \cdot \mu_0$$

$$\left. \begin{array}{l} I_0 = 1328 \text{ W/m}^2 : \\ \hat{E} = 1 \text{ kV/m} = 0.01 \text{ kV/cm} \\ \hat{H} = 2.65 \text{ A/m} \end{array} \right\}$$

G2 Energieformen

Elektrostatische & magnetostat. Energie



- **Sonderfall der elektromagnetischen Energie bei der Frequenz $f = 0$:**

Unveränderliches („statisches“) E - und H -Feld: $dE/dt = 0$, $dH/dt = 0$

- Die el.-magn. Energie kann in einen **elektrischen** und einen **magnetischen Teil** aufgespaltet und **jeweils getrennt** betrachtet werden.

- Im statischen Fall wird

- das E -Feld nur von ruhenden elektrischen Ladungen q („Feldquellen“) verursacht =

elektrisches E -Quellenfeld, $B = 0$

- das H -Feld nur von verlustlos fließenden Gleichströmen $I = q / t$

(= gleichförmig bewegte Ladungen) erregt = **keine Induktionswirkung**: $E = 0$

Anmerkung:

Da entweder H oder E Null ist, ist der *Poynting*-Vektor $S_{pg} = 0$: $\vec{S}_{pg} = \vec{E} \times \vec{H} = \vec{0} = (0,0,0)$

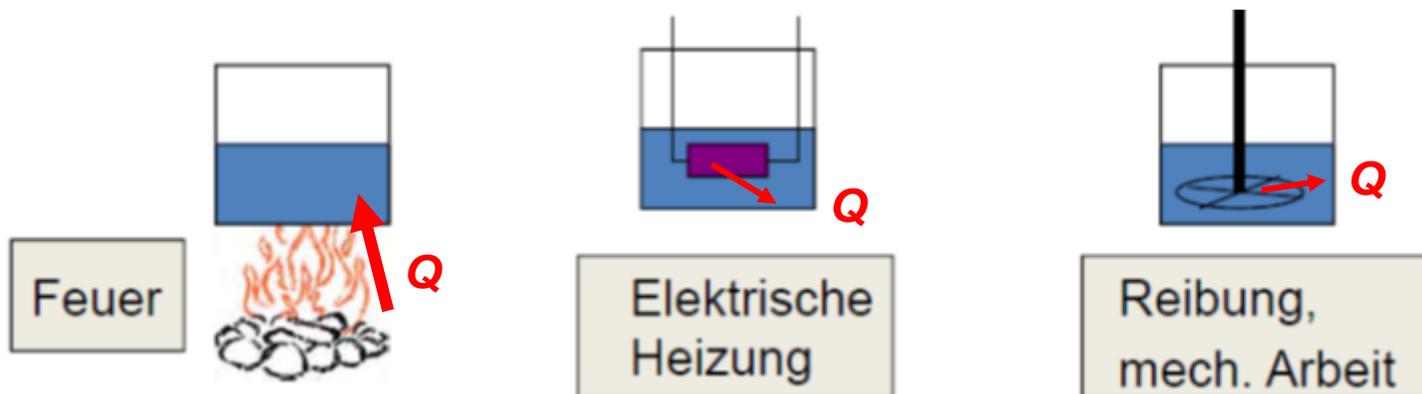
Es wird im statischen Feld KEINE Energie transportiert!



G2 Energieformen

Wärmemenge Q als thermische Energieform

- Wärme ist eine Form der Energieübertragung auf Stoffe, die sich überträgt in die stochastisch verteilte, ungerichtete mechanische Bewegung der Teilchen (Atome, Moleküle) des betrachteten Stoffs \Rightarrow Die dem Stoff zugeführte Wärmeenergie ist in der kinetische Energie W_k der Teilchen gespeichert
- Wärmemenge Q : Maßeinheit: Joule (J)
- Beispiel:
Verschiedene Methoden der Wärmezufuhr in einen Körper („Stoff“)



G2 Energieformen

Innere Energie U als thermische Energieform



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

- **Innere Energie U :**

Ist (im einfachsten Fall) die **kinetische** Energie W_k der in **ungeordneter Bewegung** befindlichen

a) Atome und Moleküle eines Gases oder einer Flüssigkeit bzw.

b) die Schwingungsenergie der Atomrümpfe bzw. Atome in einem Festkörper.

- U kann durch zu-/abgeführte Wärme Q erhöht/erniedrigt werden.

- Sind **keine weiteren inneren Energieformen wirksam**, so ist $W_k = U$ die **innere Energie** des Systems (Körpers, Stoffs)

⇒ **Innere Energie U** ist die gesamte für einen thermodynamischen Umwandlungsprozess zur Verfügung stehende Energie U eines sich im thermodynamischen Gleichgewicht befindlichen physikalischen Systems

⇒ Die **kinetische und potentielle Energie** $W_{k,ges}$, $W_{p,ges}$ des betrachteten Systems selbst (= resultierend aus gemeinsamer mittlerer Geschwindigkeit und „Höhenlage“) ist **NICHT Teil der inneren Energie U !**



G2 Energieformen

Reales Gas

Reales Gas eines bestimmten Stoffs (z. B. Wasserstoff):

- N kleine identische Teilchen (z. B. Wasserstoffmolekül H_2 , Molekülmasse m), **frei** beweglich.
- Molekülabmessung d (\sim einige *Ångström*, $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$) **klein** gegenüber mittleren Teilchen-Abständen (\sim mittlere freie Weglänge l eines Teilchens zwischen zwei Stößen)
- Teilchen bewegen sich auch im ruhenden Gas mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten v_i (unterschiedliche kinetische Energien $W_{k,i}$).
- Ungeladene nicht-polare Moleküle: Keine *Coulomb*-Kräfte, sehr kleine Gravitationskraft

Beispiel: H_2 -Gas, Druck 1 bar, Gastemperatur 0°C : $l \approx 2.7 \cdot 10^{-7} \text{ m}$, $m_{H_2} \approx 3.4 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

$$r_{av} = l/2 : F = G \cdot \frac{m_{H_2} \cdot m_{H_2}}{r_{av}^2} = 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot (3.4 \cdot 10^{-27})^2 / (1.35 \cdot 10^{-7})^2 = 4.2 \cdot 10^{-50} \text{ N}$$

(sehr kleine Gravitationskraft)

G2 Energieformen

Ideales Gas



Ideales Gas:

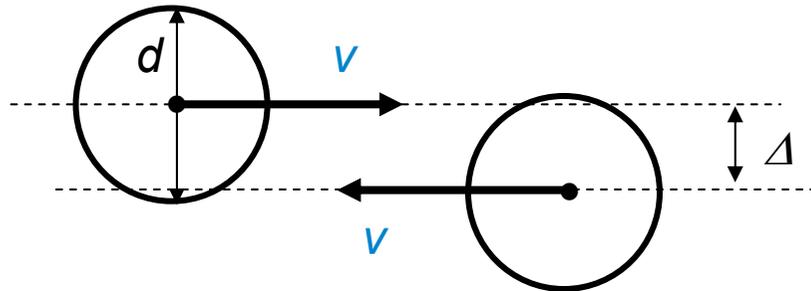
- **Nichtunterscheidbare** punktförmige Teilchen:
Masse, aber kein Volumen, Teilchenabmessung „Durchmesser“) $d \rightarrow 0$,
- **Gleiche** Teilchenmassen m , die **keine** Kräfte aufeinander ausüben:
ohne gegenseitige Wechselwirkung
- **Stöße** zwischen den einzelnen Teilchen erfolgen wegen der vernachlässigten Teilchengröße stets **zentral** und **elastisch**



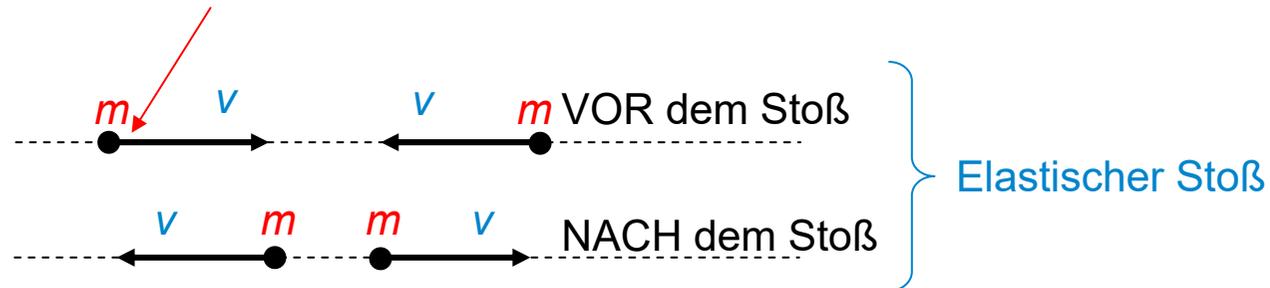
G2 Energieformen

Stöße zwischen Gasteilchen

- Reale Gasteilchen idealisiert als Kugeln, $d > 0$: Nichtzentrale Stöße möglich $\rightarrow \Delta > 0$



- Ideale Gasteilchen punktförmig, $d = 0$: Nur zentrale Stöße möglich $\rightarrow \Delta = 0$



- **Elastischer Stoß**: Gesamte kinetische Energie W_k und Gesamt-Bewegungsimpuls p VOR und NACH dem Stoß **konstant (Energie- und Impulserhaltung)**

G2 Energieformen

Zustandsgrößen des idealen Gases

- Makroskopisch wird das ideale Gas durch die **Zustandsgrößen** T , V , p beschrieben:

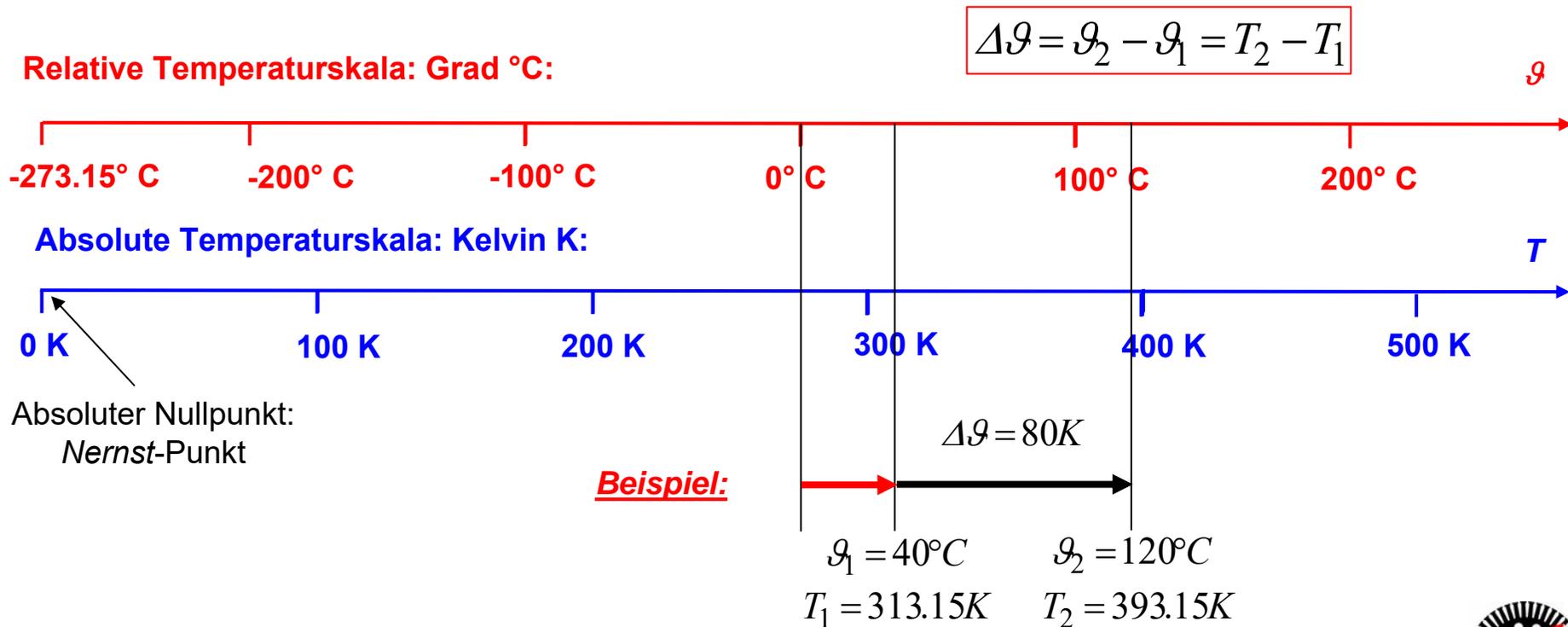
Formelzeichen	Zustandsgröße	SI-Einheit
T	Temperatur	K
V	Volumen	m^3
p	Druck	$\text{Pa} = \text{N}/\text{m}^2$

- **Normalbedingungen:**
 - mittlerer Luftdruck auf Höhe des Meeresspiegels $p_0 = 1013 \text{ hPa} = 760 \text{ Torr}$
 - Temperatur $T_0 = 273 \text{ K}$
- Bei Normalbedingungen verhalten sich **Luft, Wasserstoff und Edelgase** annähernd als **ideale Gase**

G2 Energieformen

Temperatur T und ϑ

- Nach *L. Boltzmann* ist die von uns körperlich fühlbare (Gas-)Temperatur T durch die kinetische Energie W_k der bewegten Teilchen des Gases bedingt.
- Wenn alle Gasteilchen ruhen (= ihre kinetische Energie ist Null): $W_k = 0 \Rightarrow$ „Absolute Temperatur T “ ist Null: $T = 0 \text{ K}$ (*Kelvin*).



G2 Energieformen

Geschwindigkeitsverteilung der idealen Gasteilchen

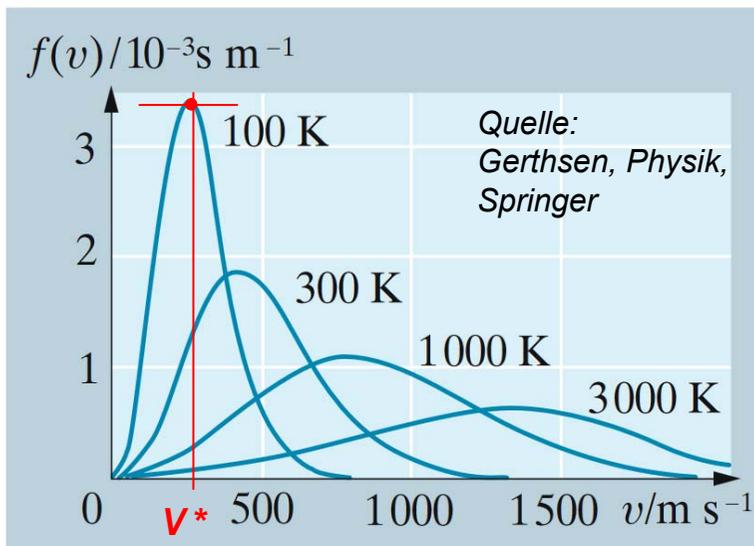


Maxwell und *Boltzmann* haben die Häufigkeitsfunktion $f(v)$ der Geschwindigkeitsverteilung der idealen Gasteilchen (Masse m) berechnet (*Maxwell-Boltzmann-Verteilung*), wobei die *Boltzmann'sche Konstante* $k = 1.3805 \cdot 10^{-23}$ J/K eingeführt wurde.

$dn_s = f(v) \cdot dv$: Jene Teilchenzahl (bezogen auf Teilchen-Gesamtzahl N ; $dn_s = dN/N$), die mit Geschwindigkeiten $v \dots v + dv$ bei Temperatur T fliegt.

$$f(v) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \left(\frac{m}{kT}\right)^{3/2} \cdot v^2 \cdot e^{-m \cdot v^2 / (2 \cdot k \cdot T)}$$

$\int_0^1 dn_s = \int_0^{\infty} f(v) \cdot dv = 1$ *Diskrete* Verteilung v_i der $i = 1, \dots, N$ Teilchen durch *kontinuierliche* Funktion $f(v)$ ersetzt!



Beispiel:

Maxwell-Boltzmann-Verteilung der Molekülgeschwindigkeiten in Luft für vier unterschiedliche Lufttemperaturen $T = 100$ K, 300 K, 1000 K, 3000 K

$$T = 100 \text{ K: } v^* \approx 300 \text{ m/s}$$

$$\text{Raumtemperatur } T = 300 \text{ K} \approx 27^\circ\text{C: } v^* \approx 400 \text{ m/s}$$

Je heißer das Gas, desto höher die Geschwindigkeiten und kinetische Energie!

$$U = f(T): \text{Ideales Gas: } U \sim T$$



G2 Energieformen

Energieverteilung $g(W_k)$ der idealen Gasteilchen



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Kinetische Energie eines punktförmigen Masse-Teilchens: $W_k = m \cdot v^2 / 2$

$$dW_k / dv = d(m \cdot v^2 / 2) / dv = m \cdot v \Rightarrow dW_k = m \cdot v \cdot dv$$

Die Anzahl der Teilchen $dn_s = g(W_k) \cdot dW_k$ hat die Energie W_k ! $g(W_k) = f(v) / (m \cdot v)$

Verteilungsfunktion der kinetischen Energie $g(W_k)$ auf die einzelnen Teilchen:

$$dn_s = f(v) \cdot dv = \frac{f(v)}{m \cdot v} \cdot m \cdot v \cdot dv = g(W_k) \cdot dW_k$$

$$g(W_k) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{W_k}}{(k \cdot T)^{3/2}} \cdot e^{-W_k / (k \cdot T)}$$

Mittlere kinetische Energie je Teilchen: $\bar{W}_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N m \cdot v_i^2 / 2 = \frac{m}{2 \cdot N} \sum_{i=1}^N v_i^2 = \frac{m \cdot (v^2)_{av}}{2}$

$$\bar{W}_k = \int_0^{\infty} W_k \cdot g(W_k) \cdot dW_k = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{W_k^{3/2}}{(k \cdot T)^{3/2}} \cdot e^{-W_k / (k \cdot T)} \cdot dW_k$$

Diskrete Verteilung W_{ki} durch *kontinuierliche* Funktion $g(W_k)$ ersetzt!

$$\bar{W}_k = \frac{2 \cdot kT}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^{\infty} \underbrace{w^{3/2} \cdot e^{-w} \cdot dw}_{3\sqrt{\pi}/4} = \frac{2 \cdot kT}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{3\sqrt{\pi}}{4} = \frac{3}{2} \cdot k \cdot T$$

$w = W_k / k \cdot T$

$$\bar{W}_k = \frac{3}{2} \cdot k \cdot T = \frac{m \cdot (v^2)_{av}}{2}$$



G2 Energieformen

Energie und Temperatur T des idealen Gases



- Gasteilchen mit v_x in x -Richtung, mit v_y in y -Richtung und mit v_z in z -Richtung bewegt:

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad \Rightarrow \quad (v^2)_{av} = (v_x^2)_{av} + (v_y^2)_{av} + (v_z^2)_{av}$$

- **Mittlere kinetische Energie** je Teilchen ist zur **absoluten Temperatur T** direkt proportional

$$\overline{W}_k = \frac{m \cdot (v^2)_{av}}{2} = m \cdot \frac{(v_x^2)_{av} + (v_y^2)_{av} + (v_z^2)_{av}}{2} = \frac{3}{2} \cdot k \cdot T$$

- **Gleichverteilungsprinzip („Äquipartitionsprinzip“)** der Thermodynamik =

Im Mittel ist keine der drei Raumrichtungen bevorzugt = 3 lineare Bewegungs-Freiheitsgrade

$$(v_x^2)_{av} = (v_y^2)_{av} = (v_z^2)_{av} \quad \Rightarrow \quad (v_x^2)_{av} = \frac{k \cdot T}{m}$$

- Je Freiheitsgrad ist die mittlere Bewegungsenergie $\overline{W}_{k,FG} = k \cdot T / 2$ vorhanden

Beispiel:

H_2 -Gas, 1 bar, $0^\circ C = 273.15$ K, Molekül-(Ruhe)-Masse: $m_{H_2} \approx 3.4 \cdot 10^{-27}$ kg

$$\sqrt{(v^2)_{av}} = \sqrt{\frac{3 \cdot k \cdot T}{m_{H_2}}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 1.3805 \cdot 10^{-23} \cdot 273.15}{3.4 \cdot 10^{-27}}} = 1824 \text{ m/s} \quad \overline{W}_k = \frac{m_{H_2} \cdot (v^2)_{av}}{2} = 5.66 \cdot 10^{-21} \text{ J}$$



G2 Energieformen

Innere Energie U im idealen vs. realen Gas



- **Ideales Gas** mit der Temperatur T mit N Gasteilchen hat den Energieinhalt

$$U = N \cdot \overline{W}_k$$

$$\text{ideales Gas: } \overline{W}_k = \frac{3}{2} \cdot k \cdot T \Rightarrow U = N \cdot \frac{3}{2} \cdot k \cdot T$$

- Diese „innere Gasenergie“ U ist beim **idealen Gas** die **kinetische Energie** seiner Teilchen, da andere Energieformen nicht auftreten.
- Die **innere Energie U** ist beim idealen Gas nur von der **Zustandsgröße T** abhängig.
- Wenn ein Gas bei $T = 0$ die innere Energie $U = 0$ hat, und ihm wird die **Wärme Q** zugeführt, hat es **danach** die innere Energie $U = Q$ und eine entsprechende absolute Temperatur $T > 0$.
- **„Reales“ Gas:** Weitere Energieanteile erhöhen „innere Gasenergie“ U
 - a) Potentielle Energie der Wechselwirkungskräfte zwischen den Teilchen
 - b) Chemische Bindungsenergie der Teilchen als Moleküle
 - c) Atombindungsenergie der Atome,

je nach dem, welcher physikalische Vorgang betrachtet wird.



G2 Energieformen

Einfluss der Teilchenart auf innere Energie U



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Änderung der Teilchenart

- a) in unterschiedliche Molekülformen durch chemische Reaktionen
(Verbindungen, Dissoziationen):
 U erhöht sich
um die Energie der chemischen Bindungen der beteiligten Atomarten
- b) in Atomrümpfe und Elektronen durch Ionisation:
 U erhöht sich
um die Ionisationsenergien der Moleküle und Atome.
- c) Bei Kernreaktionen (Radioaktivität, Kernfusion, Kernspaltung):
 U erhöht sich
um die Kernbindungsenergie.



G2 Energieformen

Ideales Gas: Gasdruck p (Herleitung)

Bewegung der Moleküle in einem ruhenden Gas (Gastemperatur T) führt zu Stößen der Moleküle gegen die Gefäßwand = **Gasdruck p**

- Molekül (Masse m) prallt in x -Richtung mit v_x senkrecht auf eine **Gefäßwand** (Wandfläche A_x , Gefäßvolumen V), wird von dieser mit $-v_x$ **elastisch reflektiert**.
- **Impulsänderung** des Teilchens, auf Wand übertragen: $m \cdot v_x - (-m \cdot v_x) = 2 \cdot m \cdot v_x$
- **Mittlere Geschwindigkeitskomponente** von je $N/2$ Teilchen in $\pm x$ -Richtung: $\pm v_x = \pm \sqrt{(v_x^2)_{av}}$
- **Im Zeitintervall Δt** erreichen jene Moleküle die Wand, die sich innerhalb der Entfernung $\Delta t \cdot v_x$ von der Wand befinden, also im Volumen $A_x \cdot \Delta t \cdot v_x$

$(N/2) \cdot A_x \cdot \Delta t \cdot v_x / V$ Teilchen übertragen auf die Wand während Δt den Impuls:

$$(2m \cdot v_x) \cdot (N/2) \cdot A_x \cdot \Delta t \cdot v_x / V = A_x \cdot \Delta t \cdot m \cdot v_x^2 \cdot N / V$$

Auf die Wand wirkende Kraft $F_x =$ Impulsänderung pro Zeit Δt : $F_x = (A_x \cdot \Delta t \cdot m \cdot v_x^2 \cdot N / V) / \Delta t$

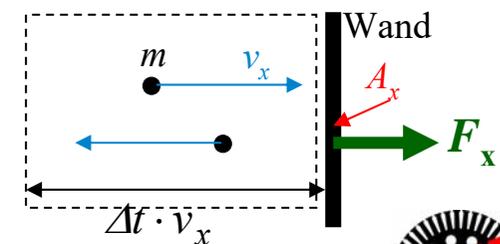
Wanddruck: $p_x = F_x / A_x = m \cdot v_x^2 \cdot N / V$ Gasdichte: $\gamma = N \cdot m / V$

Allseitig wirkender **Gasdruck p** :

Bei mittlerer Geschwindigkeit

$$(v_x^2)_{av} = (v^2)_{av} / 3$$

$$p = \frac{(v^2)_{av}}{3} \cdot N \cdot m / V = \frac{(v^2)_{av}}{3} \cdot \gamma$$



G2 Energieformen

Zustandsgleichung des idealen Gases

- Allseitig wirkender **Gasdruck** p : $p = \frac{(v^2)_{av}}{3} \cdot N \cdot m / V = \frac{(v^2)_{av}}{3} \cdot \gamma$

$$p \cdot V = \frac{m \cdot (v^2)_{av}}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot N = \overline{W}_k \cdot \frac{2}{3} \cdot N = \frac{3 \cdot k \cdot T}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot N = N \cdot k \cdot T$$

$$p \cdot V = N \cdot k \cdot T = (N / L) \cdot (L \cdot k) \cdot T = \nu_m \cdot R \cdot T$$

**Zustandsgleichung
des idealen Gases**

- Anzahl von Gasmolekülen **je** Volumen $n = N/V$: $p = n \cdot k \cdot T$
- **Loschmidt-Zahl** $L = 6.023 \cdot 10^{26} / \text{kmol}$, $L' = 6.023 \cdot 10^{23} / \text{mol}$
- **Kilomolzahl** $\nu_m = N / L$ (Molzahl $\nu'_m = N / L'$)
- **Universelle Gaskonstante**: $R = L \cdot k = 6.023 \cdot 10^{26} \cdot 1.3805 \cdot 10^{-23} = 8314 \text{ J}/(\text{kmol} \cdot \text{K})$
- Bei speziellen Zustandsänderungen bleibt jeweils eine **Zustandsgröße konstant**:

Isobar: $p = \text{konst.}$

Isotherm: $T = \text{konst.}$

Isochor: $V = \text{konst.}$

Aus der Zustandsgleichung folgen **Trajektorien** für die Zustandsänderungen

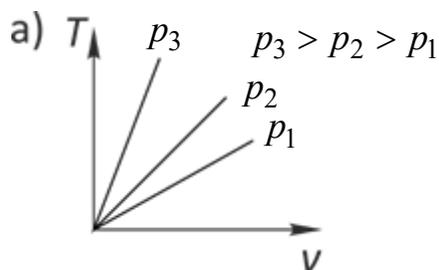
G2 Energieformen

Ideales Gas: Zustandsänderungen

- Zustandsgleichung für eine abgeschlossene Gasmenge (Teilchenzahl $N = \text{konst.}$)

$$\frac{p \cdot V}{T} = N \cdot k = \nu_m \cdot R = \text{konst.}$$

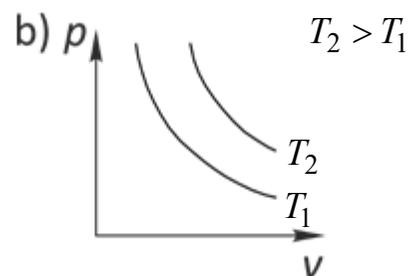
Trajektorien für Zustandsänderungen:



Isobar ($p = \text{const.}$)

$$\frac{T}{V} = \text{const.}$$

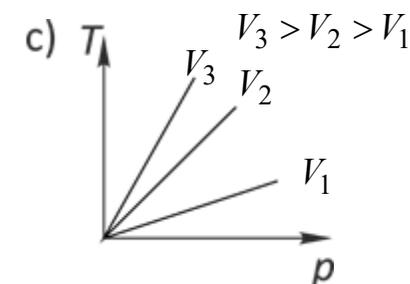
1. *Gay-Lussac*-Gesetz



Isotherm ($T = \text{const.}$)

$$p \cdot V = \text{const.}$$

Boyle-Mariotte-Gesetz



Isochor ($V = \text{const.}$)

$$\frac{T}{p} = \text{const.}$$

2. *Gay-Lussac*-Gesetz

G2 Energieformen

Teilchenzahl im ideales Gas

Beispiel:

$\vartheta = 0^\circ\text{C}$ ($T = 273.15\text{ K}$), Luftdruck 1 bar ($= 10^5\text{ Pa}$):

1 Kubikmeter ($V = 1\text{ m}^3$) eines idealen Gases enthält $N_A = 2.652 \cdot 10^{25}$ Teilchen (*Avogadro-Zahl*)

$$N_A = \frac{p \cdot V}{k \cdot T} = \frac{10^5 \cdot 1}{1.3805 \cdot 10^{-23} \cdot 273.15} = 2.652 \cdot 10^{25}$$

Beispiel:

Stoffmenge mit der *Masse 1 kg*:

Jedes Teilchen hat *atomare Masseneinheit* ($^{12}\text{C}/12$): $1\ m_u = 1.66 \cdot 10^{-27}\text{ kg}$

1 kg / $1\ m_u = L$:

$$L = \frac{1\text{ kg}}{m_u} = \frac{1\text{ kg}}{1.66 \cdot 10^{-27}\text{ kg}} = 6.023 \cdot 10^{26}$$

Stoffmenge 1 kmol (1 Kilo-Mol): $L = 6.023 \cdot 10^{26}$ (**Loschmidt'sche Zahl**)

Vorsicht: Im Nicht-Deutschsprachigen wird umgekehrt L als *Avogadro-Zahl* N_A bezeichnet und N_A als L , obwohl L von *Josef Loschmidt* (A) berechnet

G2 Energieformen

Zustandswahrscheinlichkeit w

- **Wahrscheinlichkeit w** für einen bestimmten Gaszustand
z. B. a) Anordnung der N Gasteilchen (Moleküle) in einem bestimmten Volumen,
b) Energieverteilung auf die einzelnen Moleküle eines Kollektivs von N Molekülen

Beispiel: Gasgefäß: Zustand 1: Alle N Teilchen in linker Gefäßhälfte

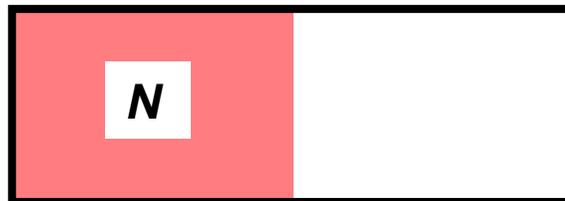
Zustand 2: $N/2$ Teilchen jeweils in linker u. rechter Gefäßhälfte

Wahrscheinlichkeit: $w = \frac{\text{Anzahl günstiger Möglichkeiten}}{\text{Anzahl aller Möglichkeiten}} \leq 1 \quad 0 \leq w \leq 1$

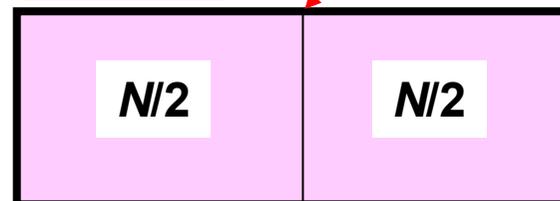
Zustand 1: „unwahrscheinlich“: z. B. $N = 2$ Teilchen Nr. 1 und Nr. 2
(links und rechts je 2 „Plätze“) $w_1 = 2/12 = 17\%$

Zustand 2: „wahrscheinlicher“: $w_2 = 6/12 = 50\%$

Zustand 1:



Zustand 2:



o	o	o	o
1	2	.	.
1	.	2	.
1	.	.	2
2	1	.	.
2	.	1	.
2	.	.	1
.	1	2	.
.	1	.	2
.	2	1	.
.	2	.	1
.	.	1	2
.	.	2	1

G2 Energieformen

Entropie S

- Definition der **Entropie S**:

$$S = k \cdot \ln(w) \quad k = 1.3805 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$$

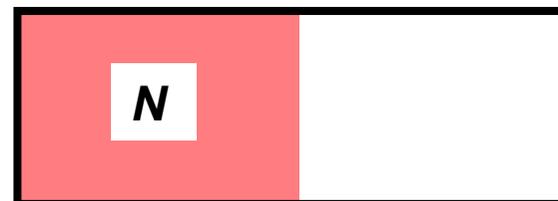
Um wieviel ist Zustand 2 wahrscheinlicher als 1? $\frac{w_2}{w_1} = \frac{6/12}{2/12} = 3 \Rightarrow \ln(3) = 1.099$

$$\Delta S = k \cdot \ln\left(\frac{w_2}{w_1}\right) = k \cdot (\ln(w_2) - \ln(w_1)) = k \cdot (\ln 0.5 - \ln 0.17) = k \cdot 1.099 = 1.52 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$$

$$\Delta S = k \cdot (\ln w_2 - \ln w_1) = 1.52 \cdot 10^{-23} \text{ J/K} \approx k \cdot N \cdot \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = k \cdot N \cdot \ln 2 = 1.9 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$$

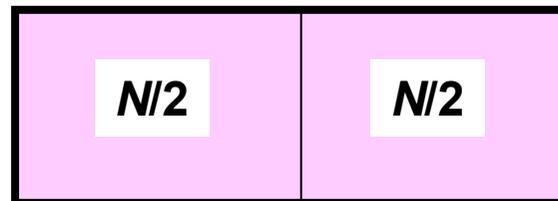
Bei großem N

z.B.: $N = L' = 6 \cdot 10^{23} : \Delta S = 4.2 \text{ J/K}$



Zustand 1

Volumen $V_1 = V/2$



Zustand 2

Volumen $V_2 = V$

G2 Energieformen

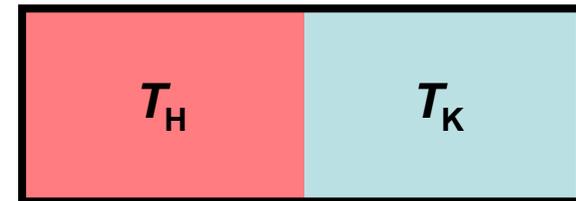
Beispiel: Entropie S

Beispiel:

Gasgefülltes Gefäß mit hoher Teilchenzahl N (z. B. $10^{23} / \text{m}^3$):

Zustand 1: Wahrscheinlichkeit $\sim S$ ist klein!

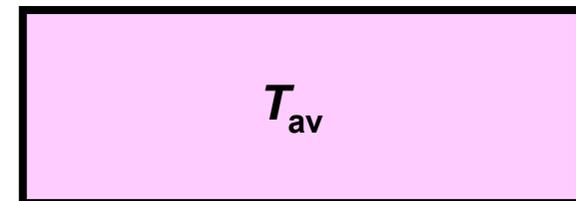
Linke Hälfte mit Teilchen hoher Energie (heißes Gas T_H),
rechte Hälfte mit Teilchen niedriger Energie (kaltes Gas T_K)



$$T_K < T_{av} < T_H$$

Zustand 2: Wahrscheinlichkeit $\sim S$ ist groß

Gesamtes Gefäß ist mit Teilchen mittlerer Energie gefüllt
(„warmes“ Gas T_{av})



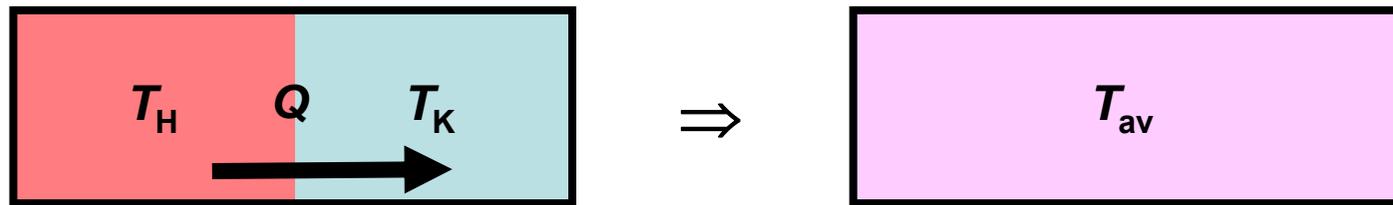
G2 Energieformen

Thermischer Ausgleichsvorgang

Thermischer Ausgleichsvorgang:

Wärme Q fließt von selbst (durch Stöße zwischen den Teilchen)
vom heißeren zum kälteren Gasteil \Rightarrow

\Rightarrow Zustand 1 geht von selbst in Zustand 2 über und erhöht dabei $S \Rightarrow \Delta S > 0$



Ein System hört erst dann auf, von selbst seinen Zustand zu ändern, bis es den wahrscheinlichsten Zustand, also den Zustand mit der größten Entropiezunahme, erreicht hat.

Die Erhöhung der Entropie ΔS bzw. dS eines auf der Temperatur T befindlichen Gases (Entropie S) bei Wärmezufuhr dQ ist (ohne Herleitung!):

$$dS = \frac{dQ}{T}$$

Ein System im thermodynamischen Gleichgewicht ändert sich in seinen Zuständen nicht mehr $\Rightarrow dS = 0$:

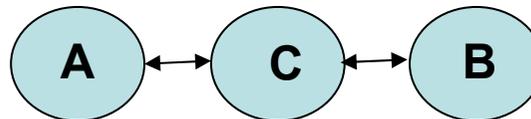
$$dS = \frac{dQ}{T} = 0$$

G2 Energieformen

Nullter und erster Hauptsatz der Wärmelehre

- **Nullter Hauptsatz:**

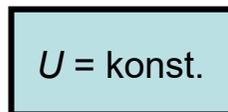
Ist ein System A mit einem System C im thermodynam. Gleichgewicht, und ebenso ein System B mit diesem System C, so sind auch A und B miteinander im thermodynam. Gleichgewicht



- **Erster Hauptsatz:**

Die Energiemenge in einem (thermodynam.) abgeschlossenen System ist konstant =
Es gilt der Energieerhaltungssatz.

Beispiel:



Abgeschlossenes System



Nicht abgeschlossenes System

Im nicht abgeschlossenen System kann U erhöht werden

- durch Wärmezufuhr Q und
- durch am System durch äußere Kräfte verrichtete mechanische Arbeit W

$$\text{Zustand 1} \rightarrow \text{Zustand 2} : \Delta U = U_2 - U_1 = Q + W$$
$$\text{differentiell kleine Zustandsänderung} : dU = dQ + dW$$

G2 Energieformen

Zweiter und dritter Hauptsatz der Wärmelehre



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

- **Zweiter Hauptsatz:**

Wärme Q geht VON SELBST nur vom wärmeren zum kälteren Körper über.

- Zweiter Hauptsatz gilt nur im statistischen Mittel für Kollektive aus sehr vielen Molekülen oder Atomen = Teilchenzahl N muss groß sein!
- Bei kleinem N ist die mittlere Energiebetrachtung wegen möglicher großer Abweichungen einzelner Teilchenenergien vom Mittel nicht mehr sinnvoll.

Bei wenigen Teilchen (N z. B. 30) ist es möglich, dass bei den Stößen zufällig die schnelleren Teilchen auf Kosten der langsameren Teilchen noch schneller werden.

Dies ist prinzipiell auch bei großem N möglich, aber sehr unwahrscheinlich

$$0 \leq w \ll 1 \Rightarrow w \approx 0$$

- Es erfolgt also VON SELBST eine Zustandsänderung „stets“ von w_1 zu $w_2 \geq w_1$:

$$\Delta S = k \cdot \ln\left(\frac{w_2}{w_1}\right) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta S = \frac{\Delta Q}{T} \geq 0$$

- **Dritter Hauptsatz: (W. Nernst, 1905)**

Bei Annäherung an den absoluten Nullpunkt $T = 0$ geht $S \rightarrow 0$.

Deshalb kann $T = 0$ nicht exakt erreicht werden.



G2 Energieformen

Gas: Wärmezufuhr Q bei konstantem Volumen



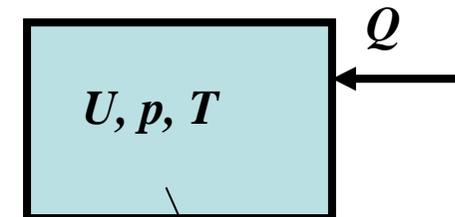
- Ein System „ideales Gas“ mit konstanter Masse $M = \text{konst.}$ wird betrachtet
- Die im idealen Gas bei **konstantem Gasvolumen $V = \text{konst.}$** (z. B. in einem abgeschlossenen Gefäß) zugeführte Wärmenergie Q wird gänzlich in „innerer Energie“ (kinetische Translationsenergie) gespeichert.
- Die Gastemperatur **erhöht sich dabei um ΔT** :

$$W = 0: \text{Zustand 1} \rightarrow \text{Zustand 2}: \Delta U = U_2 - U_1 = Q$$

$$Q = \Delta U = N \cdot \frac{3}{2} \cdot k \cdot \Delta T = \nu_m \cdot R \cdot \frac{3}{2} \cdot \Delta T = \nu_m \cdot C_{mV} \cdot \Delta T$$

Differentiell kleine Wärmemenge: $dQ = dU = \nu_m \cdot C_{mV} \cdot dT$

$$\boxed{dU / dT = \nu_m \cdot C_{mV}} \quad U = \nu_m \cdot \int_0^T C_{mV}(T) \cdot dT = \nu_m \cdot \int_0^T C_{mV} \cdot dT = \nu_m \cdot C_{mV} \cdot T = Q$$



$V, M = \text{konst.}$

- **Molare Wärmekapazität** des idealen Gases bei konstantem Volumen: $V = \text{konst.}$

$$\boxed{C_{mV} = R \cdot (3/2) = R \cdot (f/2)} \quad f: \text{Anzahl der Bewegungs-Freiheitsgrade je Gasteilchen}$$

ist die erforderliche Wärmemenge, um die Gasmenge von 1 kmol (Gasteilchenzahl $N = L$) um $\Delta T = 1$ K bei konstantem Volumen zu erwärmen.



G2 Energieformen

Gas: Mechanische Arbeit W als Volumenarbeit

- Die an einem idealen Gas verrichtete mechanische Arbeit W einer äußeren Kraft F wird bei einem thermisch isolierten System (= kein Wärmeaustausch $\Delta Q = 0$) gänzlich in „innerer Energie“ U gespeichert.

- Gasvolumen **verringert sich**: $\Delta V < 0$

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad \vec{F} = p \cdot A \cdot \vec{e}_s \quad d\vec{s} = ds \cdot \vec{e}_s$$

$$dW = p \cdot A \cdot ds = -p \cdot dV \quad dV = A \cdot dx = -A \cdot ds$$

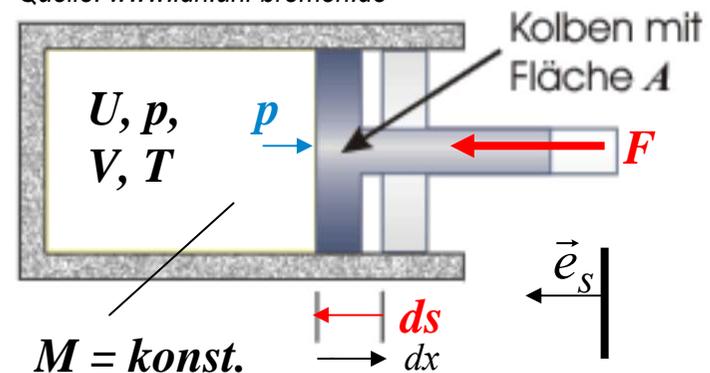
$$W = \int_{s_1}^{s_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = - \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV > 0 \quad (V_1 > V_2)$$

$$\Delta Q = 0: \text{Zustand 1} \rightarrow \text{Zustand 2}: \Delta U = U_2 - U_1 = W_{12} = -p \cdot \Delta V > 0$$

$$dQ = 0: dU = -p \cdot dV$$

- Gas nimmt mechanische Arbeit $W_{12} > 0$ auf, indem sein Volumen V gegen seinen Druck p **komprimiert** wird: $V_2 < V_1$, $p_2 > p_1$, $U_2 > U_1$, $T_2 > T_1$
- Gas verrichtet mechanische Arbeit $W_{12} < 0$, indem sein Volumen V mit seinem Druck p **expandiert**: $V_2 > V_1$, $p_2 < p_1$, $U_2 < U_1$, $T_2 < T_1$

Quelle: www.idn.uni-bremen.de



G2 Energieformen

Gas: Wärmezufuhr bei konstantem Druck



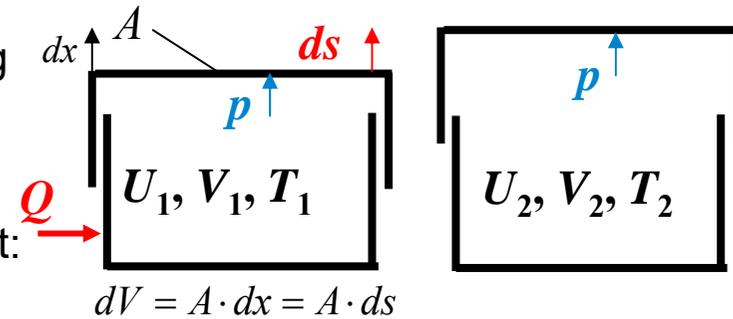
- Idealem Gas wird Wärme Q zugeführt bei **konstantem Gasdruck $p = \text{konst.}$** (z. B. im **Zylinder mit verschiebbarem Kolben** (Kolbenfläche A), so dass das Gas sich bei Erwärmung mit $p = \text{konst.}$ ausdehnen kann)

- Kolbenkraft $F = p \cdot A$ in Richtung der Kolbenbewegung

- Gas dehnt sich aus: $dV = v_m \cdot R \cdot dT / p > 0$

- Kolben legt den Weg $ds = dV / A$ zurück

- Am Kolben wird vom Gas mechanische Arbeit erbracht:



$$dW = F \cdot ds = p \cdot A \cdot ds = p \cdot dV$$

$$dU = dQ - p \cdot dV \Rightarrow v_m \cdot C_{mV} \cdot dT + p \cdot dV = dQ = v_m \cdot C_{mV} \cdot dT + v_m \cdot R \cdot dT$$

$$dQ = v_m \cdot (C_{mV} + R) \cdot dT = v_m \cdot C_{mp} \cdot dT$$

- **Molare Wärmekapazität des idealen Gases** (Einheit J/(kmol·K)) bei $p = \text{konst.}$:

$$C_{mp} = C_{mV} + R = R \cdot (3/2) + R = R \cdot (5/2)$$

$$C_{mp} = C_{mV} + R = R \cdot (f/2) + R = R \cdot (f + 2)/2$$

$$p = \text{konst.} \Rightarrow dp = 0:$$

$$dQ = dU + p \cdot dV = dU + p \cdot dV + V \cdot dp = dU + d(p \cdot V) = d(U + p \cdot V) = dH = v_m \cdot C_{pm} \cdot dT$$

„Enthalpie“ H :

$$H = U + p \cdot V$$

$$dH / dT = v_m \cdot C_{mp}$$

$$H = v_m \cdot \int_0^T C_{mp}(T) \cdot dT = v_m \cdot C_{mp} \cdot T$$



G2 Energieformen

Spezifische Wärmekapazität c_V, c_p



- **Molare Wärmekapazität** einer Stoffmenge von 1 kmol:

$$\begin{cases} C_{mV} = R \cdot (f / 2) \\ C_{mp} = C_{mV} + R = R \cdot (f + 2) / 2 \end{cases}$$
- **Wärmekapazität** einer Stoffmenge von v_m kmol:

$$\begin{cases} C_V = v_m \cdot R \cdot (f / 2) = \Delta U / \Delta T \\ C_p = v_m \cdot R \cdot ((f / 2) + 1) = \Delta H / \Delta T \end{cases}$$

$$C_V = v_m \cdot C_{mV} \quad C_p = v_m \cdot C_{mp}$$

$$U = \int C_V(T) \cdot dT \quad H = \int C_p(T) \cdot dT$$

- **Wärmekapazität** von v_m kmol JE Stoffmasse M : **Spezifische Wärmekapazität** c_V, c_p :
(Einheit: J/(kg·K))

$$c_V = C_V / M \quad c_p = C_p / M$$

$$c_V = k \cdot f / (2 \cdot m) \quad c_p = k \cdot ((f / 2) + 1) / m$$

$$c_V = C_V / M = v_m \cdot R \cdot (f / 2) / M = v_m \cdot L \cdot k \cdot (f / 2) / M = (M / m) \cdot k \cdot (f / 2) / M = k \cdot f / (2 \cdot m)$$

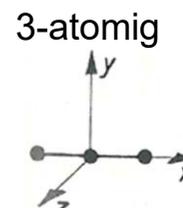
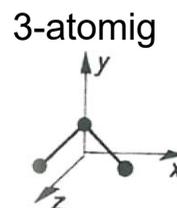
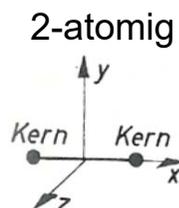
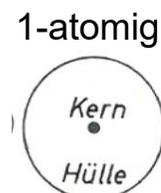
$$\kappa = \frac{C_{mp}}{C_{mV}} = \frac{C_p}{C_V} = \frac{c_p}{c_V} = 1 + \frac{2}{f} > 1 \quad \text{„Adiabaten“-Exponent}$$



G2 Energieformen

Reales Gas

Reale Gase: Bestehen aus **Molekülen** (= endlicher Ausdehnung, unterschiedlicher Form)



Quelle: Schreiner, Physik

Bei den Molekülen fallen positiver und negativer Ladungsschwerpunkt (Atom: pos. Kern, neg. Elektronenhülle) oft nicht zusammen = **elektrische Dipol-Moleküle**

van der Waals'sche Kräfte: Elektrostatische Dipol-Anziehungskraft, auf kurze Distanz in der Größenordnung der Molekülabmessungen wirksam

Reales Gas: a) Endliches Teilchenvolumen, b) Teilchenkräfte

Auswirkung: z. B.:

- a) Kompression des idealen Gases (Volumen V sinkt) bewirkt eine Druckerhöhung
- b) Kompression des realen Gases \Rightarrow Druckerhöhung \Rightarrow ggf. Aneinanderhaften der Moleküle = **Gasverflüssigung** durch Kompression

Reales Gas: Phasenübergänge zwischen unterschiedlichen Aggregatzuständen, z. B. Gas \Rightarrow Festkörper (Sublimation, z. B. Reifbildung) usw.

G2 Energieformen

Rotationsenergie realer Moleküle

Quelle: Schreiner, Physik

Einatomiges Gas = Atome als kleine Kugeln:

„Punktförmiger“ Atomkern hat fast gesamte Masse $m =$
 = Kern-Trägheitsmoment $J = 0 \Rightarrow$ Rotationsenergie = 0
 (Modell des idealen Gases), z. B. Edelgase He, Ne, Ar, ...



$$W_{k,rot} = J \cdot \omega^2 / 2 = 0$$

$$f = 3$$

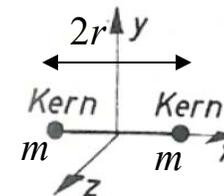
Zweiatomige Moleküle: Hantelform: (z. B. H₂)

nur bei Drehung um x-Achse keine Rotationsenergie $W_{k,rot}$

$$W_{k,rot} = (J_y \cdot \omega_y^2 / 2) + (J_z \cdot \omega_z^2 / 2) = (kT / 2) + (kT / 2)$$

$$\overline{W}_k = 3 \cdot \frac{m \cdot (v^2)_{av}}{2} + 2m \cdot r^2 \cdot \frac{(\omega_y^2)_{av} + \omega_z^2)_{av}}{2} = \frac{5}{2} \cdot k \cdot T = \frac{f}{2} \cdot k \cdot T$$

f : Anzahl der Bewegungsfreiheitsgrade
 $R = L \cdot k$



$$J_x = 0,$$

$$J_y = J_z = 2m \cdot r^2$$

$$f = 5$$

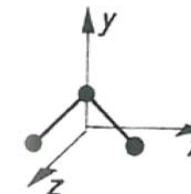
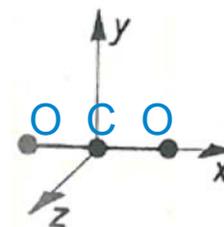
$$N \text{ Teilchen: Wärmeezufuhr: } \Delta Q = N \cdot \frac{5}{2} \cdot k \cdot \Delta T = \nu_m \cdot R \cdot \frac{5}{2} \cdot \Delta T = \nu_m \cdot C_{mV} \cdot \Delta T \Rightarrow C_{mV} = R \cdot \frac{5}{2} = R \cdot \frac{f}{2}$$

Dreiatomiges Molekül (z. B. von H₂O, gewinkelte Form):

Rotation um alle drei Raumachsen erfordert Rotationsenergie

Sonderform:

Gestreckte dreiatomige Molekülform (z. B. CO₂):
 Drehung um die x-Achse keine Rotationsenergie



$$J_x > 0,$$

$$J_y > 0, J_z > 0$$

$$f = 6$$

$$J_x = 0, J_y = J_z = 2m \cdot r^2$$

G2 Energieformen

Wärmekapazität realer Stoffe



- **Molare Wärmekapazität** bei konstantem Volumen ($V = \text{konst.}$): je kmol: C_{mV}

Zweiatomige Gase: $f = 5$

$$C_{mV} = R \cdot \frac{5}{2}$$

Drei- und mehratomige Moleküle (H_2O , NH_3 , ...): Es existieren i. A. alle **drei** Rotationsfreiheitsgrade (um x-, y- und z-Achse) \Rightarrow **molare Wärmekapazität** bei $V = \text{konst.}$: $f = 6$

$$C_{mV} = R \cdot (6/2)$$

Festkörper: Zusätzlich: Schwingungsbewegung der Atome im Kristallverband um ihre Ruhelage \Rightarrow weitere Freiheitsgrade der Bewegung.

Allgemein: f Freiheitsgrade:

$$C_{mV} = R \cdot (f / 2)$$

- **Molare Wärmekapazität** bei konstantem Druck ($p = \text{konst.}$): je kmol: C_{mp}

Gase: Zusätzlich Dehnungsarbeit für die Volumenvergrößerung:

$$C_{mp} = C_{mV} + R$$

Flüssigkeiten & Festkörper: Wärmeausdehnung bei Stoffwärmung deutlich kleiner als bei Gasen, deshalb Dehnungsarbeit ≈ 0 :

$$C_{mp} \approx C_{mV} = C_m$$



G2 Energieformen

Spezifische Wärmekapazität c_V , c_p realer Gase



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

$$c_V = k \cdot f / (2 \cdot m)$$

$$c_p = k \cdot ((f / 2) + 1) / m$$

$$c_p \approx c_V$$

} Gas

Flüssigkeit
Festkörper

- Je kleiner die Molekülmasse m ist, desto höher ist die spezifische Wärmekapazität
⇒ Wasserstoffgas: Deutlich höhere spezifische Wärmekapazität als Luft

- Sonderfall:

Flüssiges Wasser: Wassermoleküle H_2O sind in sich so beweglich

(⇒ Molekülschwingungen), so jedes der drei Atome H, H, O im Molekül „unabhängig“
schwingt: $f = 3 \times 6 = 18$

⇒ Wasser: Hohe spezifische Wärmekapazität $c_V = 4187 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K}) = 1 \text{ kcal}$ (1 Kilo-Kalorie)

⇒ Energiemenge 1 Kilo-Kalorie, um 1 kg Wasser (ca. 1 Liter Wasser) um 1 K zu erwärmen.



G2 Energieformen

Spezifische Wärmekapazität einiger Stoffe

Werte bei Gasen für 0°C <i>Quelle. Gerthsen, Physik</i>	$c_p / \text{J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$	$c_v / \text{J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$	$\kappa = c_p / c_v =$ [$= (f + 2) / f$]
Ar einatomiges Gas $f = 3$	518	314	$5/3 = 1.66$
H ₂ zweiatomiges Gas $f = 5$	14210	10078	$7/5 = 1.40$
N ₂ zweiatomiges Gas $f = 5$	1037	740	$7/5 = 1.40$
O ₂ zweiatomiges Gas $f = 5$	915	656	$7/5 = 1.40$
Luft (ca. 80% N ₂ , 18% O ₂)	1003	715	$7/5 = 1.40$
N ₂ O dreiatomiges Gas $f = 5 \dots 6$ Lachgas	849	660	$1.29 \approx 8/6 = 1.25$
CO ₂ dreiatomiges Gas $f = 5 \dots 6$	819	627	$1.30 \approx 8/6 = 1.25$
H ₂ O Flüssigkeit	4187	4187	≈ 1
Cu (Festkörper)	388	388	≈ 1
Fe (Festkörper)	502	502	≈ 1

G2 Energieformen

Zustandsänderung und Gleichgewichtszustand

Beispiel: „Enthalpie H “



Je nach **Randbedingung** unterschiedliche Zustandsänderungen des idealen Gases !

Beispiel:

Randbedingung: **Adiabatisch (isentrop)** ($Q = \text{konst.}, dQ = 0 \Leftrightarrow dS = 0, S = \text{konst.}$) und
isobar ($p = \text{konst.}, dp = 0$):

z. B. chemische Reaktion, bei der

- a) zuvor in chemischen Bindungen gespeicherte Energie frei wird (**exotherme Reaktion**),
- b) Energie zur Herstellung chemischer Bindungen benötigt wird (**endotherme Reaktion**).

Gleichgewichtszustand bei $p = \text{konst.}$: Zustandsgrößen ändern sich nicht mehr:

$$dQ = dU + p \cdot dV = dU + d(p \cdot V) = d(U + p \cdot V) = 0 \Rightarrow U + p \cdot V = \text{konst.} = H$$

Integrationskonstante „**Enthalpie**“ H

$$U + p \cdot V = H$$

Bedingung für thermische Gleichgewicht bei $Q = \text{konst.}, p = \text{konst.}$:

$$dH = d(U + p \cdot V) = 0 \rightarrow dH = 0 \quad (\Rightarrow dH(X)/dX = 0)$$

Bedingung für thermisches Gleichgewicht bei $Q = \text{konst.}, p = \text{konst.}$ ist,
dass sich die **Enthalpie H** nicht ändert, z. B. dass sie bzgl. Parameter X minimal ist.



G2 Energieformen

Chemische Energie W_{ch}



- Chemische Energie W_{ch} ist als Bindungsenergie zwischen den einzelnen Bindungspartnern einer chemischen Verbindung gespeichert.
- W_{ch} wird bei chemischen Reaktionen als Wärme (= kinetische Energie der Bindungspartner)
 - a) freigesetzt (exotherme Reaktion):

Beispiel: A, B: Reaktionspartner, AB: Reaktionsprodukt, $\Delta H < 0$: Reaktions“wärme“ (genauer: Reaktionsenthalpie) wird frei

$$A + B \rightarrow AB + \Delta H, \Delta H < 0$$
 - b) aufgenommen (endotherme Reaktion):

Beispiel: A + B \rightarrow AB + ΔH , $\Delta H > 0$: Reaktions“wärme“ wird benötigt
- W_{ch} ist zusammengesetzt aus
 - a) kinetischer Energie der Elektronen,
 - b) potentieller Energie aus der Wechselwirkungen von Elektronen und Atomkernen, je nach Art der chemischen Bindung
- **BINDUNGSARTEN: Metallische Bindung, kovalente Bindung, Ionenbindung**



G2 Energieformen

Beispiel: Exotherme und endotherme Reaktion

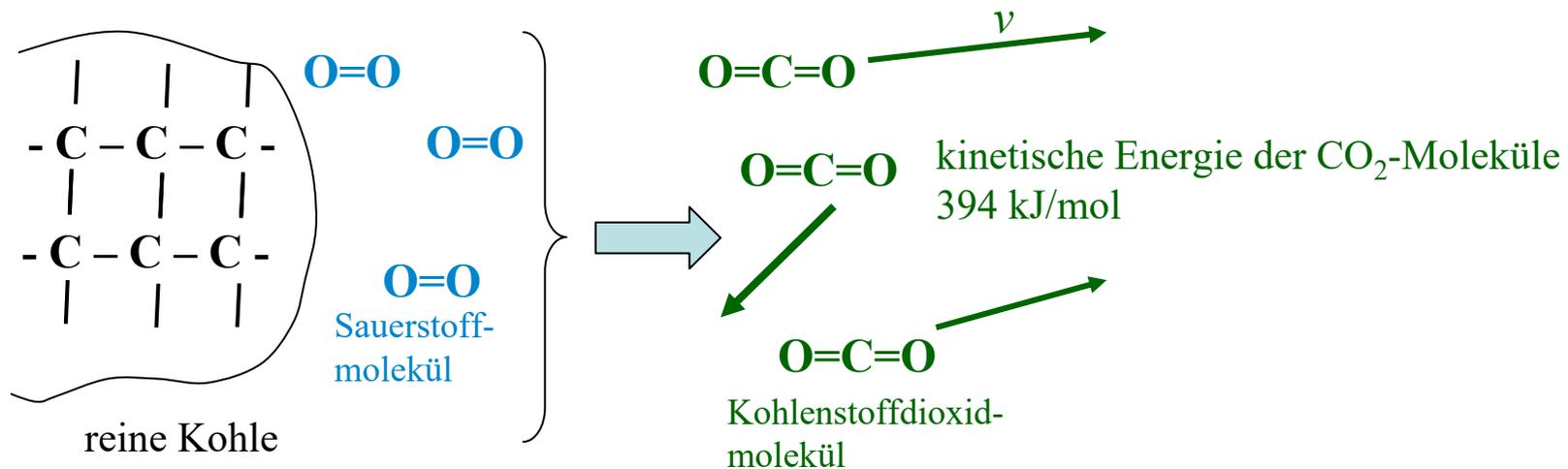


Beispiel: Kohlenstoffverbrennung: **Exothermer Vorgang:**

Kohlenstoffdioxid CO₂ entsteht bei der Reaktion von Kohlenstoff C mit Sauerstoff O:



Stoffmenge 1 mol = $6.023 \cdot 10^{23} = L'$ **Loschmidt'sche Zahl**



Beispiel: Ozonbildung: O₃: **Endothermer Vorgang:**



G2 Energieformen

Energieerhaltung und Masseerhaltung



1) Bei chemischen Vorgängen (Binden und Lösen von Verbindungen)
bleiben die Energie UND die Masse erhalten!

Beispiel: Kohlenstoffverbrennung: **Exothermer Vorgang:**

- Heizwert H_i von Kohlenstoff: $W/M = 32.8 \text{ MJ/kg}$
- Ausgangsstoffe Kohlenstoff C & Luftsauerstoff O_2 verbrennen zu „Kohlenstoffdioxid“ CO_2
- **EINSTEIN-Formel:** $W = \Delta M \cdot c_0^2$ **Massendefekt ΔM ist verschwindend gering:**
 $\Delta M / M = (W / M) / c_0^2 = H_i / c_0^2 = 32.8 \cdot 10^6 / (3 \cdot 10^8)^2 = 3.6 \cdot 10^{-10} \approx 0$

2) Energieerhaltung:

Reaktionsprodukt CO_2 : Stärkere („engere“) Bindung als bei C und O_2 ,
dafür wurde Energie freigesetzt (exotherm) als z. B. kinetische Energie der CO_2 -Moleküle

Erhöhte positiv gezählte Bindungsenergie + frei werdende (negativ gezählte) Reaktions-
Enthalpie = NULL

3) Masseerhaltung:

Die Masse eines C-Atoms und eines O_2 -Moleküls ist (nahezu) IDENTISCH
mit der Masse des Moleküls des Reaktionsprodukts CO_2



G2 Energieformen

Quantenmechanische Teilchen-Beschreibung

- Chemische Bindungsenergie wird durch elektrische Kräfte zwischen den Elektronen der Atomhülle bewirkt!
- Beschreibung der Teilchen nicht mehr durch klassische Mechanik möglich, sondern durch Quantenmechanik:

Jedem Teilchen entspricht eine (komplexe) Materie-Wellenfunktion $\underline{\psi}(r, t)$ (Wellenlänge λ).
Deren Betrags-Quadrat gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit w das Teilchen (Masse m , Impuls $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$) sich am Ort \vec{r} zur Zeit t aufhält.

$$w \sim |\underline{\psi}(\vec{r}, t)|^2$$

De Broglie-Wellenlänge: $\lambda = \frac{h}{m \cdot v}$ (Begründung: $v = v_{Gr} = 2 \cdot v_{ph}$ siehe Folge-Folie)

Beispiel: Elektron e im E -Feld eines Plattenkondensators (Plattenabstand d) beschleunigt

Kondensatorspannung: $U = E \cdot d$ $|F| = E \cdot |-e| = E \cdot e \Rightarrow W = F \cdot d = m_e \cdot v^2 / 2 = U \cdot e$

$$m_e = 9.108 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

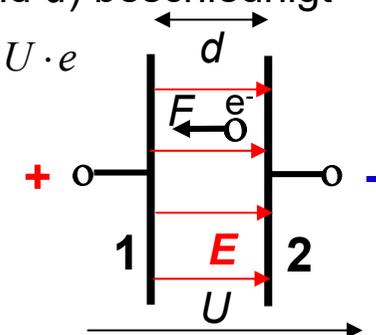
$$e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ As}, \quad U = 2500 \text{ V}$$

$$W = 2500 \text{ eV} = 4 \cdot 10^{-16} \text{ J}$$

$$v = \sqrt{2 \cdot U \cdot e / m_e} \quad \lambda = \frac{h}{\sqrt{2 \cdot U \cdot e \cdot m_e}}$$

$$v = 29.65 \cdot 10^6 \text{ m/s} = 0.1 \cdot c_0$$

$\lambda = 0.25 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ vergleichbar mit kurzwelligem Röntgen-Strahlen



G2 Energieformen

Freies Teilchen: $v = v_{Gr} = 2 \cdot v_{ph}$



- **Bewegungsimpuls** des sich frei bewegenden Teilchens gemäß der **Quantenmechanik**:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} = \frac{h}{\lambda} \cdot \vec{e}_r \Rightarrow v = \frac{h}{\lambda \cdot m} \quad W_k = \frac{m \cdot v^2}{2} = \frac{|\vec{p}|^2}{2m}$$

Impuls und Energie treten nur in Quanten auf: $W_k = h \cdot f = mv^2 / 2$

Materie-Wellenfrequenz: f : $W_k = h \cdot f \Rightarrow f = \frac{W_k}{h} = \frac{p^2}{2m \cdot h} = \frac{h}{2m \cdot \lambda^2}$

Phasengeschwindigkeit v_{ph} (Geschwindigkeit der Wellenberge) der Materiewellen ist nur 50% der Teilchengeschwindigkeit v

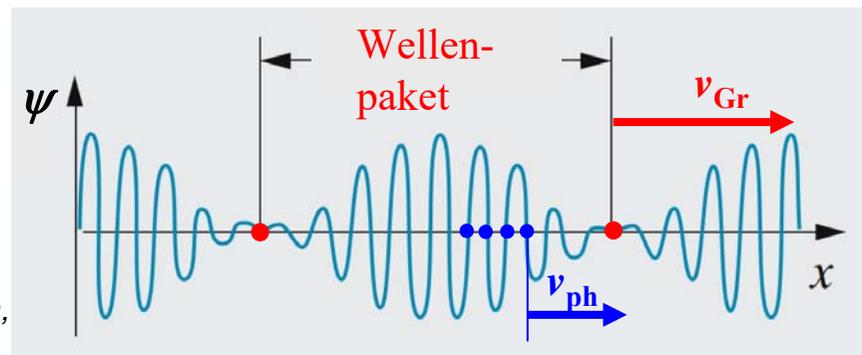
$$\vec{v}_{ph} = v_{ph} \cdot \vec{e}_r = \lambda \cdot f \cdot \vec{e}_r = \frac{h}{2m \cdot \lambda} \cdot \vec{e}_r = \frac{v}{2} \cdot \vec{e}_r$$

- Geschwindigkeit v der Teilchenmasse m (= **Geschwindigkeit v der transportierten Energie**) ist (wie bei jeder Wellenausbreitung) die „Wellengruppen“-Geschwindigkeit v_{Gr} der Materiewelle:

$$v_{Gr} = \frac{df}{d(1/\lambda)} = \frac{df}{-d\lambda/\lambda^2} = -\lambda^2 \cdot \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{h}{2m\lambda^2} \right)$$

$$v_{Gr} = -\lambda^2 \cdot \frac{-2h}{2m\lambda^3} = \frac{h}{m\lambda} = v$$

Quelle: Gerthsen, Physik, Springer



G2 Energieformen

Heisenberg'sche Unschärferelation



Heisenberg'sche Unschärferelation:

Geschwindigkeit v und Ort r des Teilchens lassen sich durch Messung gleichzeitig nicht beliebig genau angeben, sondern nur mit der Unschärfe (Ungenauigkeit) $\Delta p = m \cdot \Delta v$ und Δr :

$$\Delta p \cdot \Delta r \geq \frac{h}{2\pi}$$

Beispiel 1:

Lage r des **makroskopisch großen Körpers** $m = 1 \text{ g}$ ist mit Ungenauigkeit $\Delta r = 10^{-10} \text{ m}$ bekannt (ca. 1 Atomradius).

Daraus resultiert SEHR KLEINE Ungenauigkeit bei der Geschwindigkeitsmessung 10^{-21} m/s !

$$\Delta v \geq \frac{h}{m \cdot 2\pi \cdot \Delta r} = \frac{6.625 \cdot 10^{-34}}{10^{-3} \cdot 2\pi \cdot 10^{-10}} = 10^{-21} \text{ m/s}$$

Beispiel 2:

Lage r eines **Elektrons** $m = m_e$ ist mit Ungenauigkeit $\Delta r = 10^{-10} \text{ m}$ bekannt.

Bezogen auf „Elektronenradius“ r_e ist Δr (\approx ca. 1 Atomradius) sehr großer Wert !

⇒ SEHR GROSSE Ungenauigkeit Δv bei der Geschwindigkeitsmessung 10^6 m/s !

$$\Delta v \geq \frac{h}{m_e \cdot 2\pi \cdot \Delta r} = \frac{6.625 \cdot 10^{-34}}{9.108 \cdot 10^{-31} \cdot 2\pi \cdot 10^{-10}} = 1.16 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$



G2 Energieformen

Einfaches *Rutherford-Bohr-Atommodell*



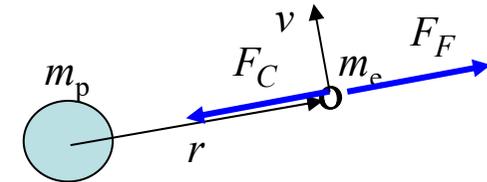
Wasserstoff-Atom:

Einfachstes Atom: 1 Proton m_p , Ladung als **Kern**; 1 Elektron m_e , Ladung $-e$ in der **Hülle**

Rutherford-Modell: (Modell gemäß der klassischen Mechanik)

Den Kern mit v umkreisendes Elektron wird vom Kern mit *Coulomb-Kraft* F_C angezogen, gegen die es Fliehkraft F_F im Gleichgewicht hält:

$$F_C = \frac{e \cdot e}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} = F_F = m_e \cdot \frac{v^2}{r} = m_e \cdot a \quad \text{kinetische Energie: } W_k = m_e \cdot \frac{v^2}{2}$$



Kritik: Zentripetalbeschleunigung a : Beschleunigtes Elektron müsste über el.-magn. Welle Energie abstrahlen, so dass W_k und v und F_F sinken, so dass Elektron in den Kern stürzt.

Bohr-Modell:

Forderung nach „strahlungsfreien“ Elektronenbahnen = stationäre (konstante) Aufenthaltswahrscheinlichkeit am Umfang $2\pi r$ dieser Bahn = Materiewellenlänge ist ganzzahlig proportional zum Umfang: $\lambda \cdot n = 2\pi \cdot r, n = 1, 2, 3, \dots$ **n : Hauptquantenzahl**

$$\lambda \cdot n = \frac{h}{m_e v} \cdot n = 2\pi \cdot r \Rightarrow v = \frac{h \cdot n}{m_e 2\pi \cdot r} \Rightarrow F_F = \frac{m_e}{r} \cdot \left(\frac{h \cdot n}{m_e 2\pi \cdot r} \right)^2 = F_C = \frac{e^2}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} \Rightarrow r(n) = \frac{\epsilon_0 \cdot h^2}{\pi \cdot m_e \cdot e^2} \cdot n^2$$

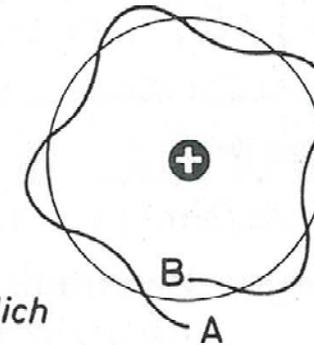
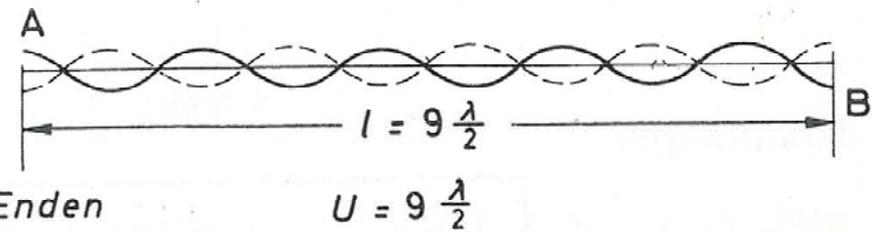
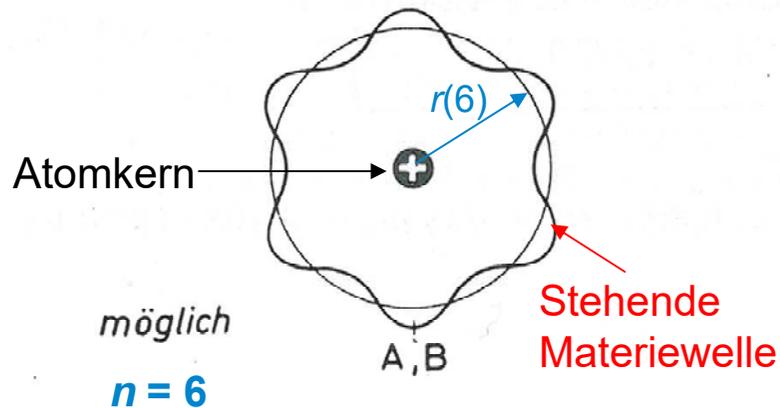
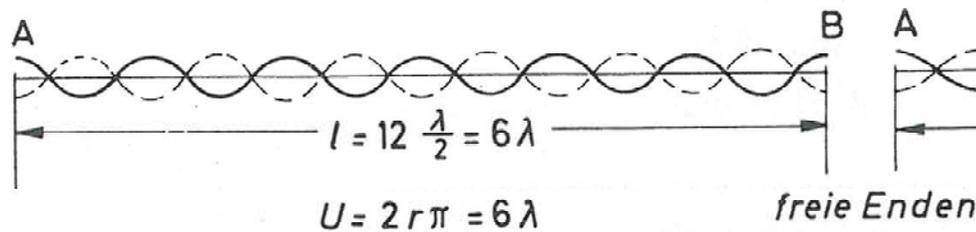


G2 Energieformen

Strahlungsfreie Bahnen: Bohr-Atommodell

Strahlungsfreier Elektronenorbit

Nicht strahlungsfrei = unmöglicher Orbit



Quelle: Schreiner, Physik

G2 Energieformen

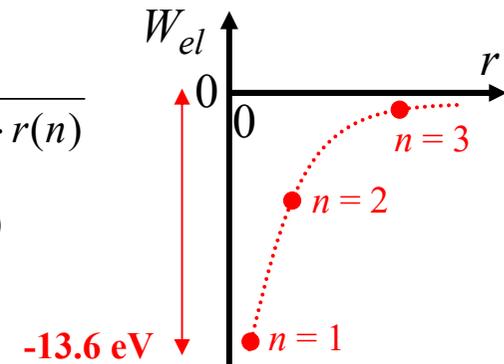
Energie des gebundenen Elektrons im H-Atom



„Strahlungsfreie“ Elektronenbahnradien: $r(n) = \frac{\epsilon_0 \cdot h^2}{\pi \cdot m_e \cdot e^2} \cdot n^2$ $n = 1, 2, 3, \dots$

Kinetische Elektronen-Energie: $W_k(n) = m_e \cdot \frac{v(n)^2}{2} = \frac{F_C \cdot r}{2} = \frac{e^2}{8\pi \cdot \epsilon_0 \cdot r(n)}$

Potentielle Elektronen-Energie: $W_p(n) = -\frac{e^2}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot r(n)} = -2 \cdot W_k(n)$



Elektronen-Energie:

a) bei $r \rightarrow \infty$: Elektron ruht: $W_k = 0$, $W_p \sim 1/r = 0$: $W_{el} = W_k + W_p = 0$

b) bei $r(n)$: $W_{el} = W_k + W_p = W_k - 2W_k = -W_k$ **NEGATIV = GEBUNDENES Elektron**

n	1	2	3	4 ...
$r / (10^{-11} \text{ m})$	5.292	21.16	47.63	84.67 ...
$W_{el} / (10^{-18} \text{ J})$	-2.18	-0.545	-0.242	-0.136 ...
$W_{el} / \text{ eV}$	-13.6	-3.4	-1.5	-0.85

„Atomradius“: ca. $2r = 10^{-10} \text{ m} = 1 \text{ Angström}$



G2 Energieformen

Quantenmechanische Betrachtung: Elektron-Wellenfunktion im H-Atom mit der Schrödinger-Gleichung



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

n und l legen Energieniveaus W_{el} fest!

n : Hauptquantenzahl: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \Leftrightarrow K, L, M, N, O, P, Q, ...

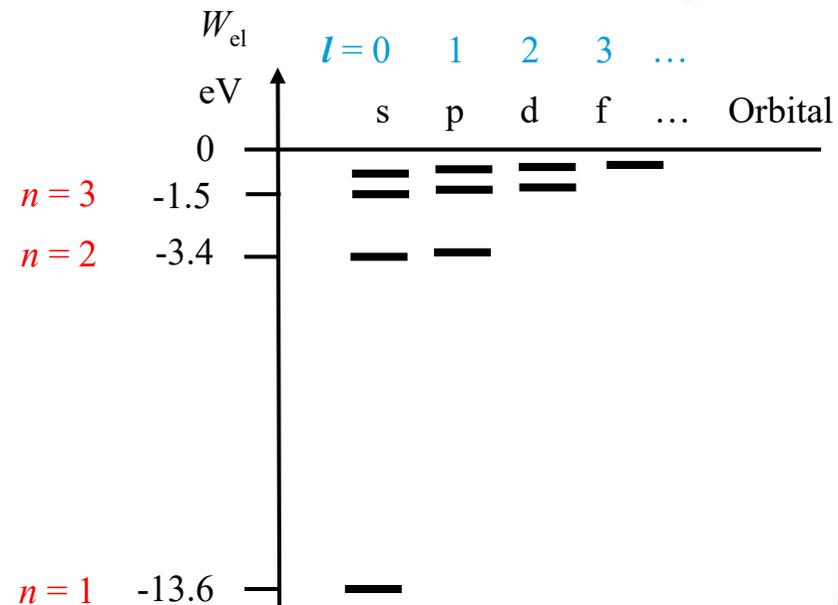
l : Nebenquantenzahl (Drehimpulsquantenzahl): $l = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$

$l = 0$: Kugelsymmetrische Verteilung der Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Elektrons in der Atomhülle (s-Orbitale mit zugehörigem Energieniveau W_{el})

$l > 0$: Von der Kugelsymmetrie abweichende Verteilungen der Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Elektrons in der Atomhülle mit etwas erhöhtem W_{el}

l	0	1	2	3	...
Orbital	s	p	d	f

n	l
1	0
2	0 1
3	0 1 2
4	0 1 2 3



G2 Energieformen

Bahndrehimpuls des Elektrons = Elementarer Magnetismus



a) Mechanische Vorstellung:

Auf Bahn um den Kern kreisendes Elektron ist Kreisstrom = Erregt Magnetfeld

Diese Elementarströme aller Atome im Festkörper summieren sich zum Magnetismus des Festkörpers („Remanenz“), der maximal ist, wenn alle Kreisströme dieselbe Bahnachse haben ([Elementarstromtheorie des A. M. Ampère](#))

b) Quantenmechanisches Modell:

$l = 0$ (Drehimpulsquantenzahl = 0): (s-Orbitale)

Drehimpuls des Bahnelektrons ist Null = kugelsymmetrische Aufenthaltswahrscheinlichkeit \Rightarrow Es tritt KEIN Kreisstrom (kein Magnetfeld) auf!

$l > 0$: (p, d, f, ...-Orbitale)

Es tritt Bahn-Drehimpuls des Bahnelektrons auf:

Drehimpulsbetrag: $|L| = \sqrt{l \cdot (l+1)} \cdot h / (2\pi)$

Kreisstrom (Magnetfeld) tritt auf!

Allerdings ist Drehimpulswert **gequantelt**.

Es treten nur m Werte auf: $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm l$

m : **Magnetquantenzahl**

		m			
l	0	0			
	1	0	± 1		
	2	0	± 1	± 2	
	3	0	± 1	± 2	± 3



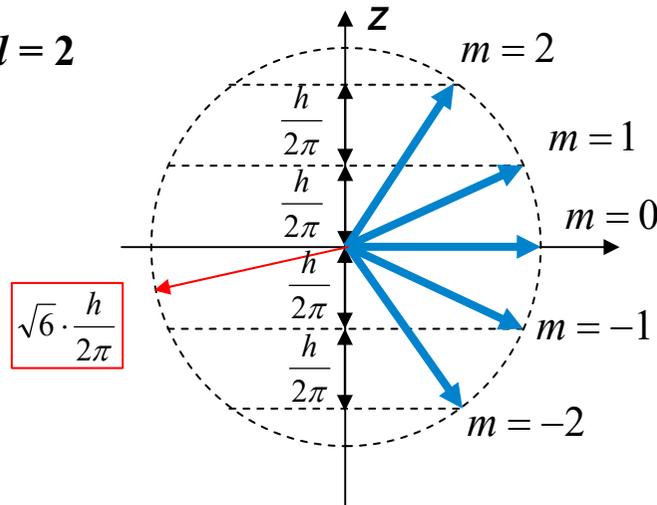
G2 Energieformen

Bahndrehimpuls und Spin („Eigenrotation“)

Elektron-Bahndrehimpuls:

- Komponente in Beobachtungsrichtung z gequantelt als $m \cdot h / (2\pi)$
- Drehimpulsbetrag: $\frac{h}{2\pi} \cdot \sqrt{l \cdot (l+1)}$
- Quantelung gemäß $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$
- Drehimpulsvektor liegt je Wert m auf einem Kegelmantel um die z-Achse. Genaue Lage wegen Unbestimmtheitsrelation nicht feststellbar.

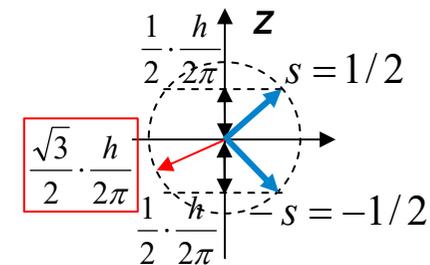
Beispiel: $l = 2$



Elektron-Eigendrehimpuls (Spin):

- Komponente in Beobachtungsrichtung z gequantelt in als $s \cdot h / (2\pi)$
- Spinbetrag: $\frac{h}{2\pi} \cdot \sqrt{|s| \cdot (|s|+1)} = \frac{h}{2\pi} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$
- Quantelung gemäß $s = \pm 1/2$
- Spinvektor liegt je Wert s auf einem Kegelmantel um die z-Achse (Unbestimmtheitsrelation !)

$$\frac{h}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} + 1)} = \frac{h}{2\pi} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$



G2 Energieformen

Elektronenspin und Kernspin

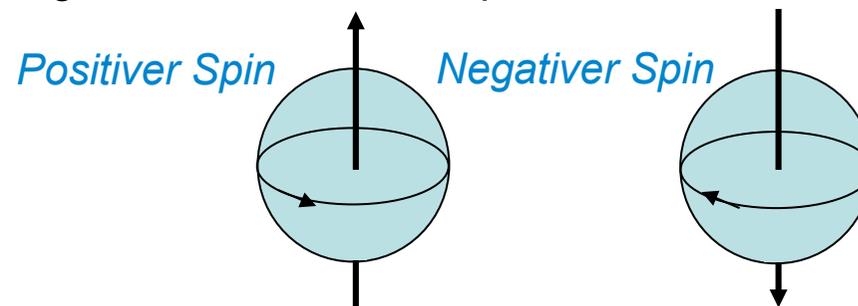
a) Mechanische Vorstellung:

Negativ geladenes Elektron und positiv geladener Kern als rotierende Kugeln mit gleichmäßig verteilter Ladungsdichte

Mechanischer Drehimpuls des Elektrons bzw. Kerns $L_s =$ Elektronenspin bzw. Kernspin

Rotierende geladene Kugel stellt kleinen Kreisstrom dar = Erregt auch Magnetfeld

Als zusätzlicher Elementarstrom: Beitrag zum Magnetismus des Festkörpers



b) Quantenmechanisches Modell:

Spin-Drehimpuls tritt nur gequantelt auf!

Elektron: Spinquantenzahl $s = \pm 1/2$: Drehimpulsbetrag $|L_s| = \sqrt{|s| \cdot (|s| + 1)} \cdot h / (2\pi)$

Spin-Drehimpuls L_s kann sowohl mit positivem als auch mit negativem Vorzeichen auftreten.

Symbolische Darstellung: $\uparrow\downarrow$: Entspricht positivem od. negativem Kreisstrom!
(„negativ“ \Leftrightarrow „antiparallele“ Spinausrichtung)

G2 Energieformen

Aufbau der Elektronenhülle eines Atoms



Atom mit Z Protonen im Kern und Z Elektronen in der Hülle: (Z : Kernladungszahl)

Ähnlich wie bei H-Atom ($Z = 1$) werden für $Z > 1$

- a) die Energieniveaus W_{el} der Elektronen und
- b) ihre Aufenthaltswahrscheinlichkeitsverteilung (Orbitale) berechnet.

Pauli-Prinzip:

Je Orbital dürfen nie zwei oder mehr Elektronen in allen vier Quantenzahlen n, l, m, s übereinstimmen.

Daher: Elektronenspin:

Es dürfen je zwei Elektronen mit antiparallelem Spin in einem Orbital auftreten!

Je s-Orbital: $l = 0: m = 0: (\uparrow\downarrow)$ 2 Elektronen

Je p-Orbital: $l = 1: m = 0, \pm 1 = 3$ Zustände x 2 ($\uparrow\downarrow$) Elektronen = 6 Elektronen

Je d-Orbital: $l = 2: m = 0, \pm 1, \pm 2 = 5$ Zustände x 2 ($\uparrow\downarrow$) Elektronen = 10 Elektronen

Je f-Orbital: $l = 3: m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 = 7$ Zustände x 2 ($\uparrow\downarrow$) Elektronen = 14 Elektronen

$$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} 2 \cdot (2l + 1)$$

Je „Elektronenschale“ n ($n = 1, 2, 3, 4, \dots$: K, L, M, N, ...-Schale): Elektronenzahl: $2 \sum_{l=0}^{n-1} (2l + 1) = 2n^2$

$n = 1, 2, 3, 4, \dots$: $2n^2 = 2, \rightarrow(+6) 8, \rightarrow(+10) 18, \rightarrow(+14) 32, \dots$

s
s+p
s+p+d
s+p+d+f



G2 Energieformen

Aufbau der Elektronenhülle eines Atoms



Beschreibung des **Aufbaus der Atome** über

- die steigende Kernladungszahl Z (**Protonenzahl im Kern**) des Elements (z. B. C: $Z = 6$),
 - die zugehörige Atomzahl $A = Z + N$ (N : **Neutronenzahl im Kern**) des jeweiligen Isotops (z.B. C^{12} : $A = 12$),
 - die Z **Elektronen in der Hülle** in ihren Orbitalen (z. B.: C: $1s^2 2s^2 2p^2$).
- Die Elektronen besetzen die jeweils niedrigsten Energieniveaus W_{el} aufsteigend.
 - Auf Grund der **Wechselwirkung der einzelnen Elektronen** (*Coulomb*-Abstoßungskraft) in der Hülle **erhöhen** sich die Energieniveaus zu jeder Kombination (n, l, m, s) gegenüber dem H-Atom.
 - Wegen dieser Energieerhöhung der einzelnen Orbitale ist eine **Periode der Elemente** jeweils mit einem **Edelgas** abgeschlossen:

1. Periode: 1s :	He ($Z = 2$)	5. Periode: 5s, 4d*), 5p :	Xe (54)
2. Periode: 2s, 2p:	Ne (10)	6. Periode: 6s, 4f*), 5d*), 6p:	Rn (86)
3. Periode: 3s, 3p:	Ar (18)	7. Periode: 7s, 5f*), 6d*), 7p:	Og (118)
4. Periode: 4s, 3d*), 4p:	Kr (36)	*) „Tauchbahnen“	



G2 Energieformen

Periodensystem

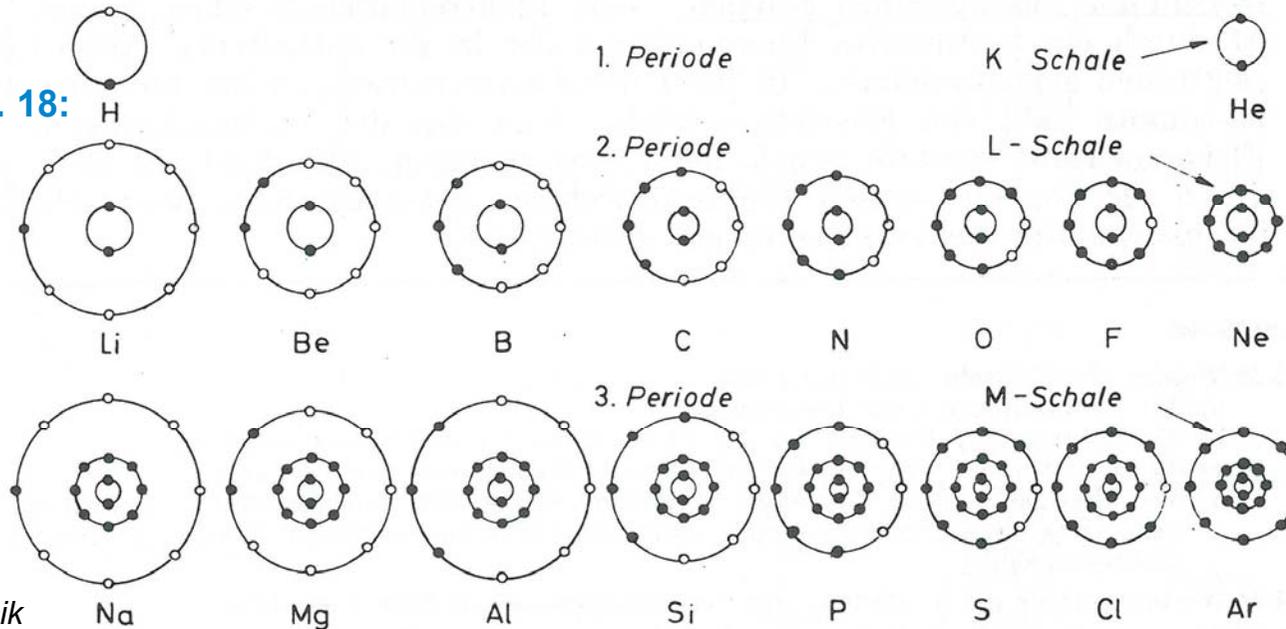
Z	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
Element	H	He	Li	Be	B	C	N	O	F	Ne	...
Orbitale	$1s^1$	$1s^2$	$1s^2 2s^1$	$1s^2 2s^2$	$1s^2 2s^2 2p^1$	$1s^2 2s^2 2p^2$	$1s^2 2s^2 2p^3$	$1s^2 2s^2 2p^4$	$1s^2 2s^2 2p^5$	$1s^2 2s^2 2p^6$...

$n = 1$
1. Periode

$n = 2$
2. Periode

Atomhüllenaufbau
schematisch Z = 1 ... 18:

- Elektronen
- Unbesetzte Plätze



Quelle: Schreiner, Physik

G2 Energieformen

Periodensystem



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

		Legende																Quelle: Wikipedia; Joshua D.wondrousch, Matllaabs																			
		Ordnungszahl	Symbol	Ordnungszahl	Serie																																
		1	H	1	schwarz = nicht radioaktiv	<input type="checkbox"/> Alkalimetalle	<input type="checkbox"/> Metalle																														
		1,0079	1,0079	1	gelb = radioaktiv	<input type="checkbox"/> Erdalkalimetalle	<input type="checkbox"/> Halbmetalle																														
		Name	Was es toff	Serie	Symbol	<input type="checkbox"/> Übergangsmetalle	<input type="checkbox"/> Nichtmetalle																														
		Atomgewicht	1,0079	1	Schwarz = Feststoff	<input type="checkbox"/> Lanthanoide	<input type="checkbox"/> Halogene																														
		Elektronen-konfiguration	1	2,1	rot = Gas	<input type="checkbox"/> Actinoide	<input type="checkbox"/> Edelgase																														
		Elektronegativität	2,1		blau = Flüssigkeit	durchgehend = natürliches Element						schraffiert = künstliches Element																									
	1	1	H	2														18	2	He																	
	2	3	Li	4	Be																																
	3	11	Na	12	Mg																																
Periode	4	19	K	20	Ca	21	Sc	22	Ti	23	V	24	Cr	25	Mn	26	Fe	27	Co	28	Ni	29	Cu	30	Zn	31	Ga	32	Ge	33	As	34	Se	35	Br	36	Kr
	5	37	Rb	38	Sr	39	Y	40	Zr	41	Nb	42	Mo	43	Tc	44	Ru	45	Rh	46	Pd	47	Ag	48	Cd	49	In	50	Sn	51	Sb	52	Te	53	I	54	Xe
	6	55	Cs	56	Ba	57-71		72	Hf	73	Ta	74	W	75	Re	76	Os	77	Ir	78	Pt	79	Au	80	Hg	81	Tl	82	Pb	83	Bi	84	Po	85	At	86	Rn
	7	87	Fr	88	Ra	89-103		104	Rf	105	Db	106	Sg	107	Bh	108	Hs	109	Mt	110	Ds	111	Rg	112	Cn	113	Nh	114	Fl	115	Mc	116	Lv	117	Ts	118	Og

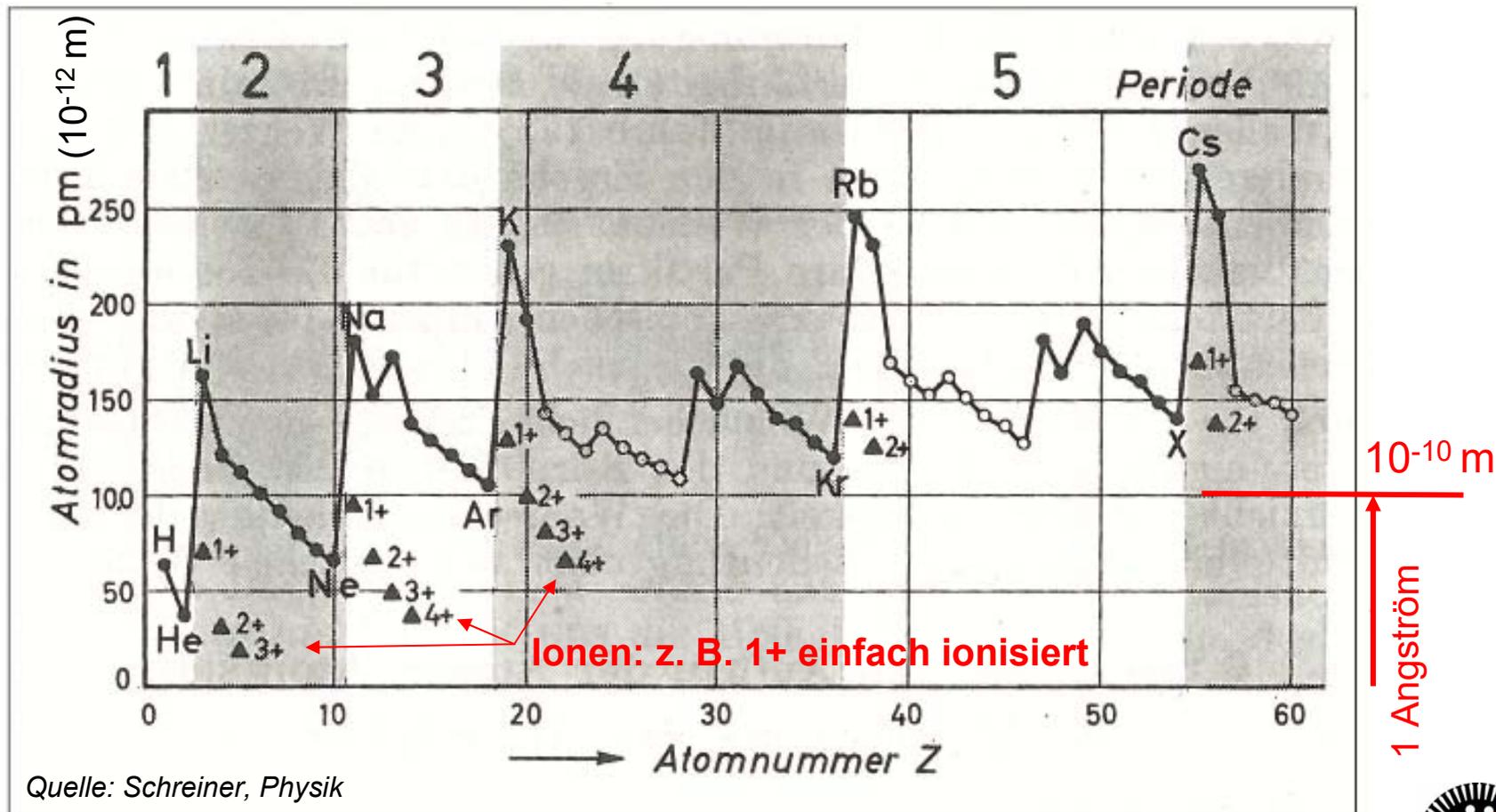
Lanthanoide	57	La	58	Ce	59	Pr	60	Nd	61	Pm	62	Sm	63	Eu	64	Gd	65	Tb	66	Dy	67	Ho	68	Er	69	Tm	70	Yb	71	Lu
	Lanthan	138,91	Cer	140,12	Prasodym	140,91	Neodym	144,24	Promethium	146,90	Samarium	150,36	Europium	151,96	Gadolinium	157,25	Terbium	158,93	Dysprosium	162,50	Holmium	164,93	Erbium	167,26	Thulium	168,93	Ytterbium	173,05	Lutetium	174,97
Actinoide	89	Ac	90	Th	91	Pa	92	U	93	Np	94	Pu	95	Am	96	Cm	97	Bk	98	Cf	99	Es	100	Fm	101	Md	102	No	103	Lr
	Actinium	(227)	Thorium	232,04	Protaktinium	231,04	Uran	238,03	Neptunium	237,05	Plutonium	(244,10)	Ameisium	(243,10)	Curium	(247,10)	Berbelium	(247,10)	Californium	(251,10)	Einsteinium	(254,10)	Fermium	(257,10)	Mendelevium	(258)	Nobelium	(259)	Lawrencium	(260)



G2 Energieformen

Atomradien

Die Atome mit den am schwächsten gebundenen Hüllenelektronen (= 1 Valenzelektron, **Metalle!**) haben die **größten Radien je Periode**



G2 Energieformen

Monoatomare Gase = Edelgase

Edelgase He, Ne, Ar, Kr, Xe, Rn (Og, Oganesson: künstlich erzeugt):

- Stets vollständige Elektronenschale (K, L, M)
oder
p-Orbital mit Elektronenpaaren (antiparalleler Spin) besetzt (inkl. „Tauchbahnen“).

⇒ Wenig Neigung, Verbindungen mit anderen Atomen durch *Coulomb*-Kräfte einzugehen = „edles“ Verhalten = monoatomare Teilchen

⇒ Gasförmig bis zu den **tiefsten Temperaturen**.

- Je kleiner das Atom, desto beweglicher = Umso **tief**er die **Verflüssigungstemperatur T_s** .

Element	He	Ne	Ar	Kr	Xe	Ra
Z	2	10	18	36	54	86
T_s	4.2 K	27 K	87 K	120 K	165 K	212 K

G2 Energieformen

Wasserstoffmolekül H_2 und Wasserstoffion H_2^+



Moleküle:

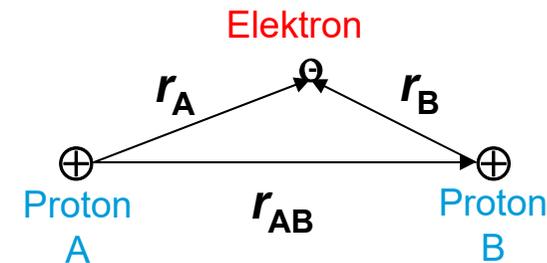
Verbindungen von Atomen durch die *Coulomb*-Kräfte der Hüllen-Elektronen

Einfachstes Molekül: H_2 : Zwei Protonen $+e$ als zwei Kerne, zwei Hüllenelektronen $-e$

Einfachste mathematische Beschreibung: **H_2^+ -Ion:**

Zwei Protonen als zwei Kerne, ein Hüllenelektron

Die abstoßenden *Coulomb*-Kraft der beiden Protonen $+e$ wird durch die anziehende Kraft des Elektrons $-e$ dazwischen kompensiert, weil $r_A, r_B < r_{AB}$!



Näherungslösung der *Schrödinger*-Gleichung für potentielle Energie W_{pB} von Proton B gegenüber Proton A:

Mit H-Atom-Radius $r(n=1) = \frac{\epsilon_0 \cdot h^2}{\pi \cdot m_e \cdot e^2} = a = 5.3 \cdot 10^{-11} \text{ m} = 0.53 \text{ Angström}$ folgt:

$$W_{pB} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot a} \cdot \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{2R}{3} - \frac{1}{R} \right) \cdot e^{-R} \right] \quad R = r_{AB} / a$$

Gleichgewichtsabstand r_{AB} dort, wo Proton B kräftefrei $\Rightarrow dW_{pB}/dR = 0$



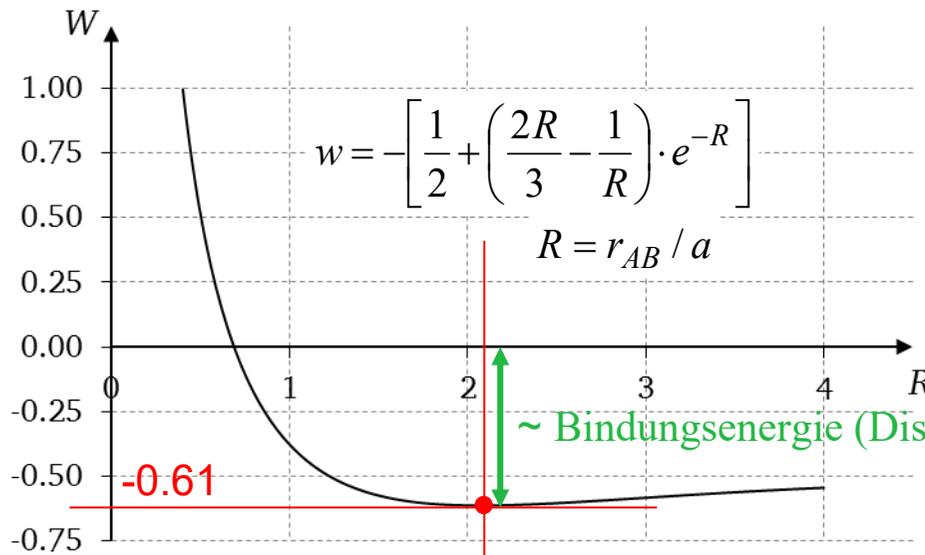
G2 Energieformen

Wasserstoffmolekül H_2 und Wasserstoffion H_2^+



$$dW_{pB}/dR = 0: R^3 - R^2 - \frac{3}{2} \cdot R - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow R = 2.07$$

$$r_{AB,0} = 2.07 \cdot a = 1.1 \text{ Angström}$$



$$w = - \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{2R}{3} - \frac{1}{R} \right) \cdot e^{-R} \right]$$

$$R = r_{AB} / a$$

Ähnliche Berechnung für H_2 -Molekül:

Zwei Elektronen binden die Protonen A und B stärker als ein Elektron = kleinerer Gleichgewichtsabstand

$$r_{AB,0} = 1.4 \cdot a = 0.74 \text{ Angström}$$

W_D müsste zugeführt werden, um die beiden Atome zu trennen!

$$W_D = W_{pB}(2.07) = \frac{0.61 \cdot e^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot a} = 2.7 \cdot 10^{-18} \text{ J}/H_2^+ \text{ - Ion}$$

$$r_{AB,0} / a$$

$$r_{AB,0} = 2.07 \cdot a = 2.07 \cdot 5.3 \cdot 10^{-11} = 1.1 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 1.1 \text{ Angström}$$

$$\Delta r_{AB} / a$$

Schwingen von B im Potential von A um die Ruhelage $r_{AB,0}$ möglich = **Molekülschwingungen!**



G2 Energieformen

Chemische Bindung: Kovalente Bindung (1)



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Kovalente Bindung (homöopolare B., Atombindung, Elektronenpaarbindung):

Beispiel 1: H₂-Molekül: 1s¹ + 1s¹ (H-H): Einfache kovalente Bindung:

Zwei Elektronen mit „antiparallelem“ Spin besetzen 1s-Orbital als 1s² = „Spinabsättigung“.

Wirkt wie vollständige K-Schale. Daher wenig „Neigung“,
sich mit anderen H₂-Molekülen zu verbinden.

H₂ daher bis zu tiefen Temperaturen (21 K!) gasförmig als H₂-Gas!

Beispiel 2: N₂-Molekül: 1s²2s²2p³ + 1s²2s²2p³ (N ≡ N): Dreifache kovalente Bindung:

Je 3 Elektronen von jedem der beiden Atome mit „antiparallelem“ Spin besetzen das 2p-Orbital
als 2p⁶ vollständig = 3 Elektronenpaare!

N₂ bis zu tiefen Temperaturen (77 K!) gasförmig als N₂-Gas

(vgl. Luftverflüssigung LINDE-Verfahren)!

N₂ träges („inertes“) Gas: Geht nur sehr schwer chem. Verbindungen ein.



G2 Energieformen

Chemische Bindung: Kovalente Bindung (2)



- Kovalente Bindungen bilden sich besonders zwischen den Atomen von **Nichtmetallen** aus.
- Die Atome bilden über die Wechselwirkung der Außenelektronen (**Valenzelektronen**) zwischen sich mindestens ein **Elektronenpaar** aus = dadurch **gerichtete** Bindung.
- Dieses **BINDENDE** Elektronenpaar hält zwei (**Zweizentrenbindung**) oder mehr (**Mehrzentrenbindung**) Atome zusammen.
- **Zweizentrenbindung**
Ein bindendes Elektronenpaar = **Einfachbindung** (z. B. H-H);
aber auch zwei Paare (**Doppelbindung**, z. B.: O = O) bzw.
drei Paare (**Dreifachbindung**, z. B.: N ≡ N) häufig.



G2 Energieformen

Chemische Bindung: Ionenbindung (1)



Ionenbindung (*heteropolare oder elektrovalente Bindung*):

- Beruht auf der elektrostatischen Anziehung durch *Coulomb*-Kraft positiv und negativ geladener Ionen. Diese gerichtete Kraft führt zu gerichteter Bindung.
- Ionenkristalle bilden sich relativ leicht (z.B.: NaCl: Schmelzpunkt 801°C, Siedepunkt 1461°C).
- Ionenkristalle lösen sich leicht in polaren Flüssigkeiten (z. B. NaCl in Wasser), da die polaren Wassermoleküle über *Coulomb*-Dipol-Kräfte die Ionen voneinander abschirmen!



G2 Energieformen

Chemische Bindung: Ionenbindung (2)



Beispiel: NaCl-Molekül:

Natriumatom: $1s^2 2s^2 2p^6 3s^1$:

Im 3s-Orbital ein Valenzelektron, kann leicht abgetrennt werden:

$\text{Na} \rightarrow \text{Na}^+ + e^-$ (Na^+ : positiv geladenes Na-Ion)

Chloratom: $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^5$:

Im 3p-Orbital fehlt ein Elektron, um es zu komplettieren!

Das Valenzelektron des Na komplettiert das p-Orbital zu $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6$

$\text{Cl} + e^- \rightarrow \text{Cl}^-$ (Cl^- : negativ geladenes Cl-Ion)

- Coulomb*-Kraft zwischen Na^+ und Cl^- ist ein wesentlicher Teil der chemischen Bindungskraft!
- Antiparalleler Spin des Na-Valenz-Elektrons ergibt auch einen kovalenten Bindungskraftanteil: ca. 25%.



G2 Energieformen

Chemische Bindung: Metallische Bindung (1)

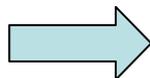


TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Metallische Bindung:

- Außenelektronen (**Valenzelektronen: 1 je Atom**) der Metalle, die sich auf der äußersten Schale befinden, sind nur schwach gebunden und können daher leicht vom Atom abgetrennt werden:
Li: $1s^2 2s^1$, Na: $1s^2 2s^2 2p^6 3s^1$, ...
- **Metall:** Kristallgitter aus periodisch angeordneten positiv geladenen Metallionen (**Atomrümpfe**) mit der Rumpf-Kernladung Z .
- **Valenzelektronen** sind nun nicht mehr einem einzelnen Atom zugeordnet. Sie können sich innerhalb des Kristallgitters nahezu frei bewegen (**„Elektronengas“ der Leitungselektronen**).

$$\frac{\text{Atomradius}}{\text{Kernradius}} \approx 10000 \dots 50000$$



Zwischen den Atomkernen und den eng gebundenen Hüllenelektronen eines Rumpfs zum Nachbaratomrumpf **ist viel freier Raum** für die sehr kleinen frei beweglichen Valenz- Elektronen!

- Die Leitungselektronen bewirken die **hohe elektrische Leitfähigkeit κ** und **hohe Wärmeleitfähigkeit λ** der Metalle, die mit steigender Temperatur abnehmen, da die Elektronen an den dann stärker schwingenden Atomrümpfen durch Stöße gebremst werden.



G2 Energieformen

Chemische Bindung: Metallische Bindung (2)



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Metallische Bindung:

- Elektrostatische Anziehung zwischen Atomrümpfen und Elektronengas = **ungerichtete Bindung** zwischen Atomrümpfen und Leitungselektronen.
- Ungerichtete Bindung ⇒
⇒ Metalle **gut plastisch verformbar** („duktil“), nicht spröde!
Gute Bearbeitung möglich (Kalt: Drehen, Fräsen, Bohren,... Heiß: Schmieden etc.)
- Metallatome gehen „leicht“ metallische Verbindung miteinander ein,
so dass die meisten Metalle bei Raumtemperatur Festkörper sind.
(z. B. Kupfer Cu: Schmelzpunkt 1084°C, Siedepunkt 2595°C)
- Energieverteilung der beweglichen Leitungselektronen im Kristall
wird nicht durch die *Maxwell-Boltzmann*-Statistik,
sondern die quantenmechanisch begründete **Fermi-Dirac-Statistik** beschrieben.



G2 Energieformen

Fossile Träger chemisch gebundener Energie



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

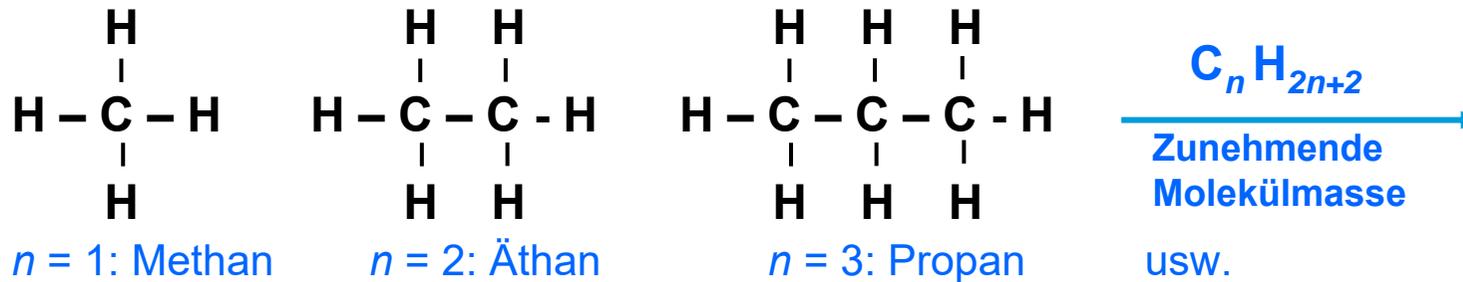
1. Erdöl
2. Erdgas
3. Steinkohle
4. Braunkohle



G2 Energieformen

Erdöl: Alkane

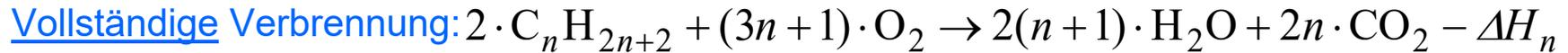
- Kovalente Bindung zwischen C- und H-Atomen zu Kettenmolekülen
- Kohlenwasserstoffketten: Alkane: n : Anzahl der Kohlenstoffatome je Alkan-Molekül



n	Erdgas	Erdöl:	----->								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	usw.
	Methan	Äthan	Propan	Butan	Pentan	Hexan	Heptan	Octan	Nonan	Decan	
			Flüssiggas				Benzin				Heizöl →
			(flüssig unter Druck)								

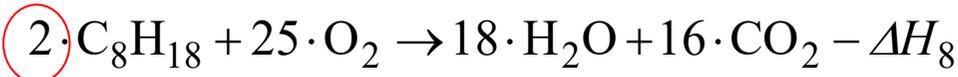
G2 Energieformen

Erdöl: Verbrennungswärme der Alkane



Es entsteht Kohlendioxid CO_2 , Wasser H_2O und je CH_2 -Gruppe $\Delta H_n / (2n) = 650$ kJ/mol

Beispiel: Octan $C_8 H_{18}$



^{12}C (Protonenzahl = Neutronenzahl = 6), 1H („normaler“ Wasserstoff):

Octan-Molekülmasse: $114 \cdot m_u$

$^{12}C : 12m_u, ^1H : m_u \Rightarrow C_8 H_{18} : (8 \cdot 12 + 18 \cdot 1) \cdot m_u = 114 \cdot m_u \quad \text{real} : \approx 114 \cdot m_u$

Je Octan-Molekül: Acht CH_2 -Gruppen: Verbrennungswärme („Brennwert“)

$\Delta H_8 = 2 \cdot 8 \cdot 650 = 10400$ kJ/mol $1 \text{ mol} = L' = 6.023 \cdot 10^{23}$ $1 m_u = 1.66 \cdot 10^{-27}$ kg

Brennwert: $H_s = \frac{\Delta H_8}{2 \cdot 6.023 \cdot 10^{23} \cdot 114 \cdot 1.66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}} = 45.6$ MJ/kg

Typischer Brennwert H_s von Öl: **ca. 44 MJ/kg**

Heizwert H_i von Öl: **ca. 42 MJ/kg**

Dichte: **ca. 0.85 kg/l**; $H_i = \text{ca. 9.9 kWh/l}$

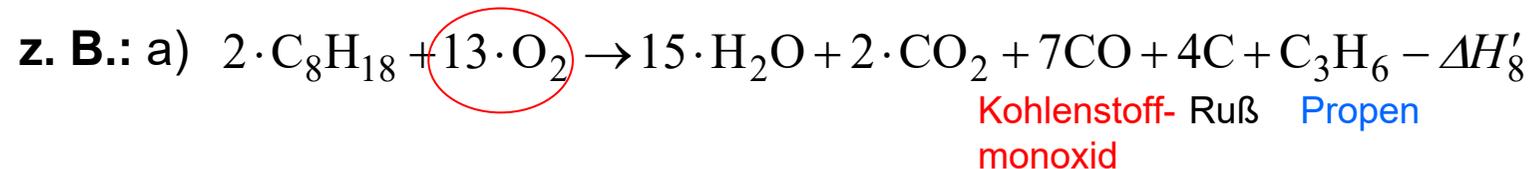


G2 Energieformen

Erdöl: Unvollständige Verbrennung

Unvollständige Verbrennung = Sauerstoffmangel:

- a) Bildung UNERWÜNSCHTER Nebenprodukte
und
- b) geringere Reaktionsenthalpie



Ruß: „Schwarzer“ Rauch = unvollständige Verbrennung

b) $\Delta H'_8 < \Delta H_8 = 10400 \text{ kJ/mol}$

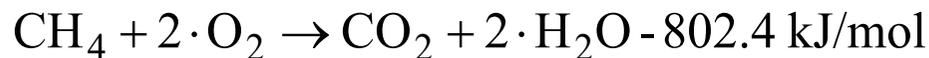
G2 Energieformen

Erdgas Methan: Brennwert H_s , Heizwert H_i



- **Methan CH_4 :**
 - Dichte bei 0°C , 1013 hPa: 0.72 kg/m^3
 - Siedepunkt -162°C

- **Vollständige Methanverbrennung mit reinem Sauerstoff:**



- Erdgas-Heizwert $H_i = \text{ca. } 0.9 \cdot H_s$,
da bei H_i die Kondensationswärme des Wasserdampfs nicht berücksichtigt wird.

Heizwertberechnung: $^{12}\text{C} \Leftrightarrow 12 \cdot m_u$, $^1\text{H} \Leftrightarrow 1 \cdot m_u$: $\text{CH}_4 \Leftrightarrow 16 \cdot m_u = 16 \cdot 1.66 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 26.56 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

$1 \text{ mol} = 6.023 \cdot 10^{23} \Leftrightarrow 6.023 \cdot 10^{23} \cdot 26.56 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 16 \text{ g}$:

$$H_i = 802.4 \cdot 10^3 / 0.016 = 50.16 \text{ MJ/kg} = 0.72 \cdot 50.16 \text{ MJ/m}^3 = 36.1 \text{ MJ/m}^3$$

$$0^\circ\text{C} : H_s \approx H_i / 0.9 = (50.16 / 0.9) \text{ MJ/kg} = 55.7 \text{ MJ/kg} \Rightarrow 0.72 \cdot 55.7 \text{ MJ/m}^3 = 40.1 \text{ MJ/m}^3$$

Brennwert von Methan (Gas !) von der Temperatur und damit vom Gasdruck abhängig!:

Niedrigere Temperatur \Rightarrow höhere Dichte = höherer Brennwert je m^3

$$0^\circ\text{C} : H_s = 55.7 \text{ MJ/kg} \Rightarrow \gamma_{25^\circ} = \gamma_{0^\circ} \cdot 273.15 / (273.15 + 25) = 0.67 \text{ kg/m}^3 \Rightarrow 25^\circ\text{C} : 36.7 \text{ MJ/m}^3$$

- Je nach Erdgastyp schwankt der Brennwert **real (25°C)** zwischen

30 ... 50 MJ/kg bzw. **25 ... 35 MJ/m³**



G2 Energieformen

Erdgas: Früher: Nutzung von Stadtgas (Leuchtgas)



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

- Erdgas nicht verwechseln mit: Stadtgas (Leuchtgas):

Aus Kohlevergasung künstlich hergestellt:

ca. 50% H₂,
 20% Methan,
 15% N₂,
 10% Kohlenmonoxid (giftig)!

- für die städtische Gasversorgung („Gaslicht“, Gasherde)
- seit Beginn der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts

- *Deutschland:*
 - Erste **Gasbeleuchtung**: *Hannover (1825), Berlin (1826)*
Gaslicht: „Auer“-Glühstrumpf (1885, *C. Auer v. Welsbach*),
 - Abgelöst durch elektrische Beleuchtung ab ca. 1900 ... 1930
(Kohlefadenlampe 1879, *Th. A. Edison*,
Metallfadenlampe 1898, *C. Auer v. Welsbach*)
- **Stadtgas-Ablösung durch ungiftiges Erdgas** für Beheizung ab ca. 1960 ... 1990



G2 Energieformen

Atomenergie und Kernenergie



a) Atomhülle:

Elektrische Bindungsenergie der elektrisch negativ geladenen **Elektronen** in der Atomhülle an den positiv geladenen Atomkern

b) Atomkern:

Kernbindungsenergie: Auf sehr kurzer Distanz (Kernradius ca. 10^{-15} m) wirkende „starke Wechselwirkungskraft“ im Kern bindet Nukleonen (Kernbausteine) als elektrisch positiv geladene **Protonen** und ungeladene **Neutronen**.

- **Leichtere Atomkernen bis zum Eisen (Fe):** Kernbindungsenergie wird frei, wenn man Kerne verschmilzt (**Fusion**):
Diese Elemente entstehen im Sterninneren
- **Schwerere Kernen als Fe:** Energie wird frei, wenn man die Kerne spaltet (**Fission**):
Diese Elemente entstehen bei hohem Druck
(Sternexplosionen („Supernovae“), Neutronensterne)



G2 Energieformen

Atomzahl A und Kernladungszahl Z

Kernladungszahl Z = Protonenzahl im Kern des Elements (z. B. H: $Z = 1$)
(Ordnungszahl)

Neutronenanzahl N
Atomzahl $A = Z + N$
(Massenzahl)



Ruhmassen:

Elektron	$m_e = 9.1083 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$	0.055%
Neutron	$m_n = 1.67470 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$	100.14%
Proton	$m_p = 1.67239 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$	100%

Proton: ${}^1_1\text{H} = 1\text{p}$

$m_p = 1818 \cdot m_e$, Proton-Ladung: $1e$

Neutron: ${}^1_0\text{n} = 1\text{n}$

$m_n = 1839 \cdot m_e$, Neutron: UNGeladen

G2 Energieformen

Kernbausteine Protonen und Neutronen

a) Atomkern:

Besteht aus Protonen und Neutronen. Die positiv geladenen Protonen stoßen einander über die *Coulomb*-Kraft ab und werden durch die stärkere „starke Wechselwirkungskraft“ zusammengehalten. Die anziehende Gravitationskraft ist dafür viel zu klein.

b) Isotop:

Atomarten, deren Atomkerne gleich viele Protonen (gleiche Ordnungszahl bzw. Kernladungszahl Z), aber **unterschiedliche viele Neutronen** enthalten. Sie haben daher unterschiedliche Massenzahlen A , stellen aber das gleiche Element dar. Die Isotope eines Elements verhalten sich chemisch fast identisch.

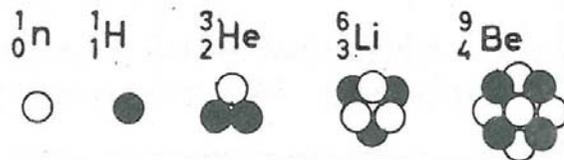
Beispiel: Isotope: Stickstoff: ${}^{13}_7\text{N}$, ${}^{14}_7\text{N}$, ${}^{15}_7\text{N}$

Wasserstoff: ${}^1_1\text{H}$, ${}^2_1\text{H}$: Deuterium

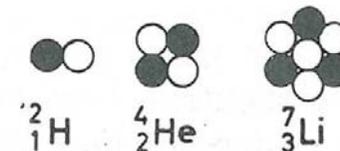
${}^3_1\text{H}$: Tritium

α -Teilchen: He-Kern ${}^4_2\text{He}$

Neutron und
Atomkerne



Atomkern-
Isotope



Quelle: Schreiner, Physik

G2 Energieformen

Kernabmessungen und Kernkräfte

Atomkern-Radien steigen mit Z: Helium ${}^3_2\text{He}$: $r = 2 \cdot 10^{-15} \text{ m}$, Uran ${}^{238}_{92}\text{U}$: $r = 10 \cdot 10^{-15} \text{ m}$

Vergleich:

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) Atom-Radius } R \approx 10^{-10} \text{ m (} = 1 \text{ Angström)} \\ \text{b) Atomkern-Radius: } r \approx 5 \cdot 10^{-15} \text{ m} \end{array} \right\} \frac{\text{Atomradius}}{\text{Kernradius}} \approx 10000 \dots 50000$$

Beispiel: Helium: ${}^3_2\text{He}$

Angenommener Abstand zwischen den zwei Protonen: $\Delta = 10^{-15} \text{ m}$

$$\text{Abstoßende Coulomb-Kraft: } F_C = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\Delta^2} = -\frac{(1.6 \cdot 10^{-19})^2}{4\pi \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-30}} = -230 \text{ N}$$

$$\text{Anziehende Gravitationskraft: } F_G = G \cdot \frac{m_p^2}{\Delta^2} = 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{(1.67 \cdot 10^{-27})^2}{10^{-30}} = 18.6 \cdot 10^{-35} \text{ N}$$

- Die anziehende Gravitationskraft spielt für die Kernkraft KEINE Rolle.
- Die anziehend wirkende „starke Wechselwirkungskraft“ muss die *Coulomb*-Abstoßung überwinden, wirkt aber **nur über die sehr kurze Distanz** von ca. 10^{-15} m .

G2 Energieformen

Potentielle elektrische Energie W_p im Atomkern



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

- **Potentielle Energie** eines Protons im E -Feld eines benachbarten Protons im Kern:

Distanz $\Delta = 10^{-15}$ m zwischen den beiden Protonen:

$$W_p = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\Delta} = \frac{(1.6 \cdot 10^{-19})^2}{4\pi \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-15}} = 2.3 \cdot 10^{-13} \text{ J} = 1.436 \text{ MeV}$$

- Positive potentielle Energie = Abstoßende Kraft: $F_C = \frac{dW_p}{d\Delta} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\Delta^2} = -230 \text{ N}$

Beispiel:

a) Heliumkern: $\Delta = 2 \cdot 10^{-15}$ m, $Z = 2$

$$W_p = \frac{Ze \cdot e}{4\pi\epsilon_0\Delta} = \frac{2}{2} \cdot 1.436 \text{ MeV} = 1.436 \text{ MeV}$$

b) Urankern: $\Delta = 10^{-14}$ m, $Z = 92$
(deutlich größer als He-Kern)

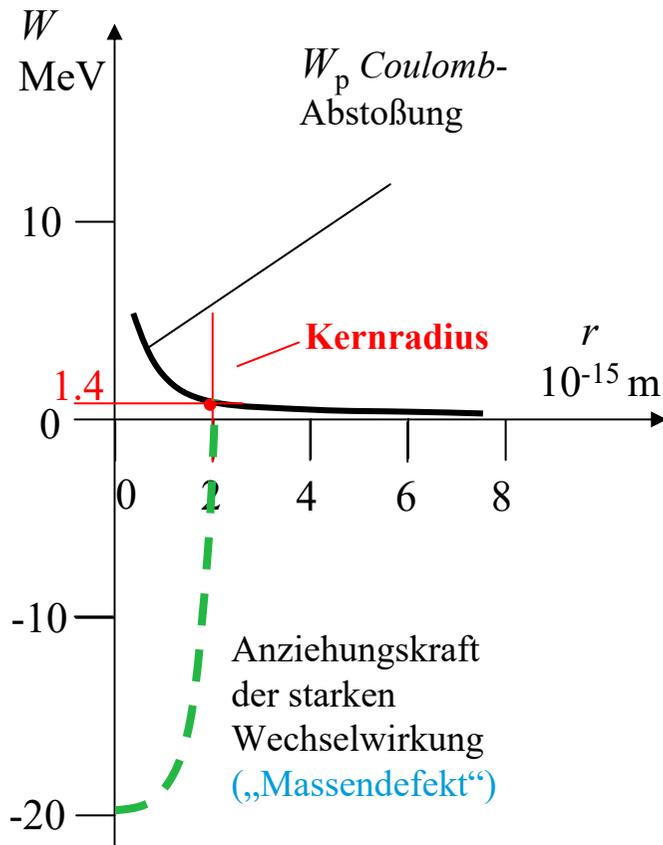
$$W_p = \frac{92}{10} \cdot 1.436 \text{ MeV} = 13.2 \text{ MeV}$$

Vergleiche: Potentielle Energie des Hüllenelektrons im H-Atom: **NUR -13.6 eV !**



G2 Energieformen

Potentielle Energie W im Atomkern



Beispiel:

Heliumkern: $Z = 2$: ${}^3_2\text{He}$

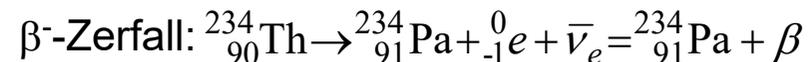
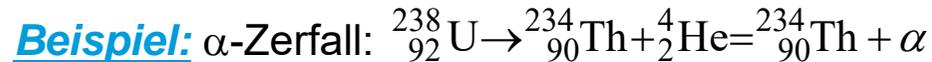
Die „starke Wechselwirkung“ kann durch eine negative (= anziehend wirkende) potentielle Energie W_{sw} dargestellt werden. Die Summenenergie

$$W = W_{sw} + W_p$$

ergibt innerhalb des Kerns einen negativen Energieverlauf („Potentialtopf“) der Kernbindung.

Je größer A und Z , desto größer der Kernradius und damit der mittlere Abstand der Protonen. Dadurch können Protonen auf Grund der *Coulomb*-Kraft leichter entweichen = „natürliche Radioaktivität“ schwerer Kerne (Kernzerfall).

Der natürliche Zerfall endet mit jenen ausreichend kleineren Kernen, die STABIL sind (Pb, Blei-Kerne: $Z = 82$)



Ein Neutron hat sich in ein p und ein ausgesandtes e und Antineutrino $\bar{\nu}_e$ (Ruhemasse 0, ungeladen) umgewandelt!

G2 Energieformen

Natürliche Radioaktivität



- **Radionuklide:** Atomsorten mit instabilen Kernen ($Z > 82$)
Sie zeigen **natürlichen Kernzerfall:**
Alpha- und Beta-Zerfälle,
die mehr oder weniger regelmäßig abwechselnd aufeinander folgen.
Endprodukte sind stabile Pb-Kerne $Z = 82$, $A = 208$: ${}_{82}^{208}\text{Pb}$
Kerne mit $Z > 82$ sind instabil (radioaktiv) und zerfallen!
- **Radioaktivität** ist die Eigenschaft **instabiler Atomkerne**,
spontan **ionisierende Strahlung** (α -, β -, γ -Strahlung) auszusenden.
Der Kern wandelt sich dabei unter Aussendung von Teilchen in einen anderen Kern um
oder
ändert unter Energieabgabe seinen Zustand.
- **„Natürliche radioaktive Familien“:**
Zerfallsreihen der drei Radionuklide Uran-238 (Uran-Radium-Reihe),
Uran-235 (Uran-Actinium-Reihe) und
Thorium-232

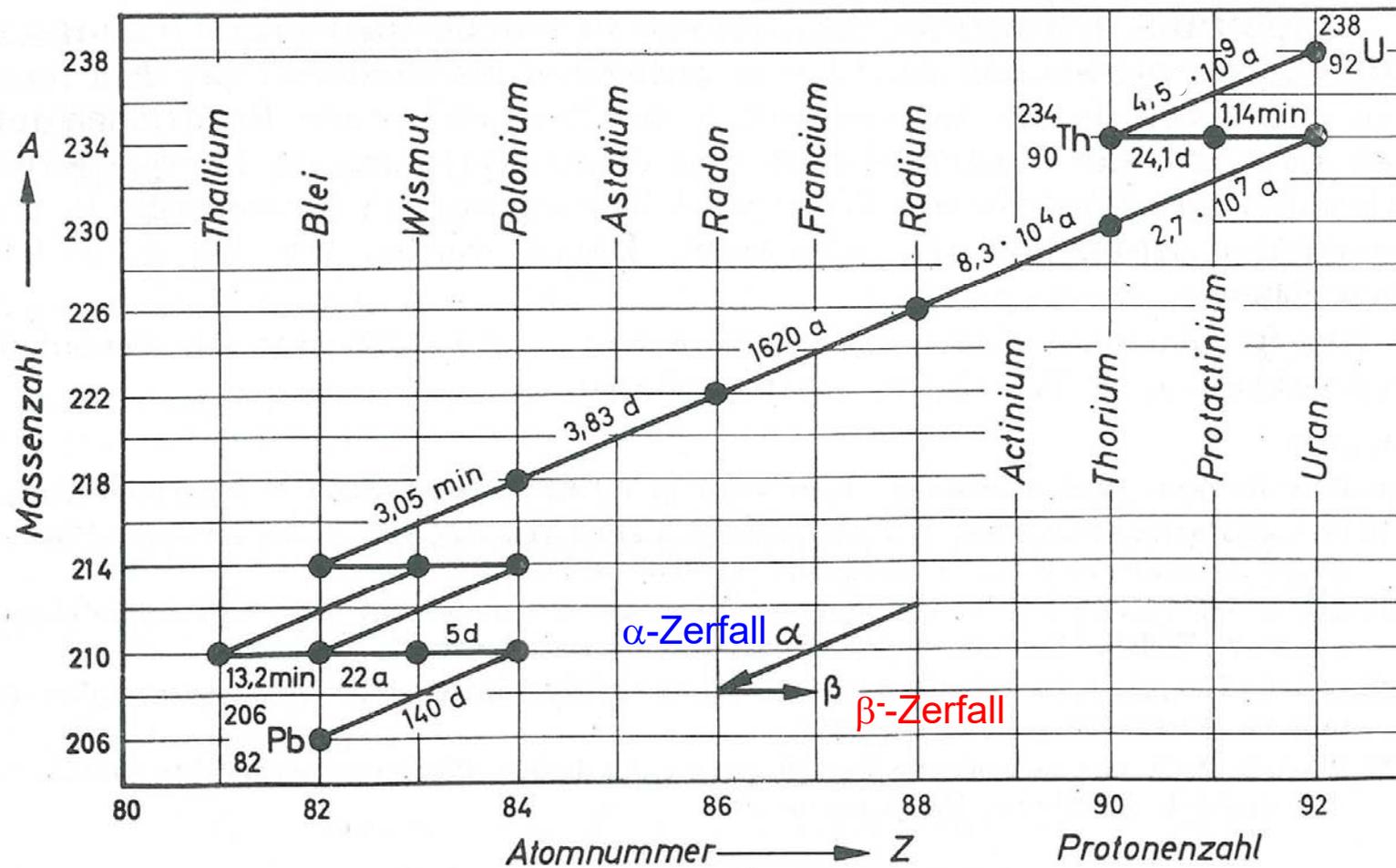


G2 Energieformen

Zerfallsreihe des Radionuklids Uran-238



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT



Quelle:
Schreiner,
Physik



G2 Energieformen

Kernumwandlung („Kernzerfall“)



Alpha-Zerfall:

- Atomkern emittiert ein α -Teilchen (besteht aus 2 p und 2 n) mit kinetischer Energie
- Massenzahl $A \rightarrow A-4$, Kernladungszahl $Z \rightarrow Z-2$

Beta-Minus-Zerfall: (es gibt auch Beta-Plus-Zerfall):

- Atomkern emittiert ein Elektron e^- mit kinetischer Energie und ein Antineutrino $\bar{\nu}_e$
- Beide entstehen im Atomkern bei der Umwandlung eines Neutrons in ein Proton.
- Massenzahl bleibt gleich: $A = \text{konst.}$; Ordnungszahl $Z \rightarrow Z+1$

Gamma-Zerfall:

- Atomkern emittiert hochenergetisches Lichtquant (Photon) mit Strahlungsenergie $W = h \cdot f$
- Massen- und Ordnungszahl bleiben gleich: $A, Z = \text{konst.}$
- Anregungszustand (= Energiezustand) des Kerns verringert sich.

Gammazerfall tritt meist als unmittelbare Folge eines vorangegangenen α - oder β -Zerfalls auf.

Reichweite in Wasser (= organisches Gewebe) und Energie:

α -Strahlung: 40 μm , 5 MeV
 β -Strahlung: 7 mm, 1 MeV
 γ -Strahlung: 65 cm, 1 MeV

Anwendung:

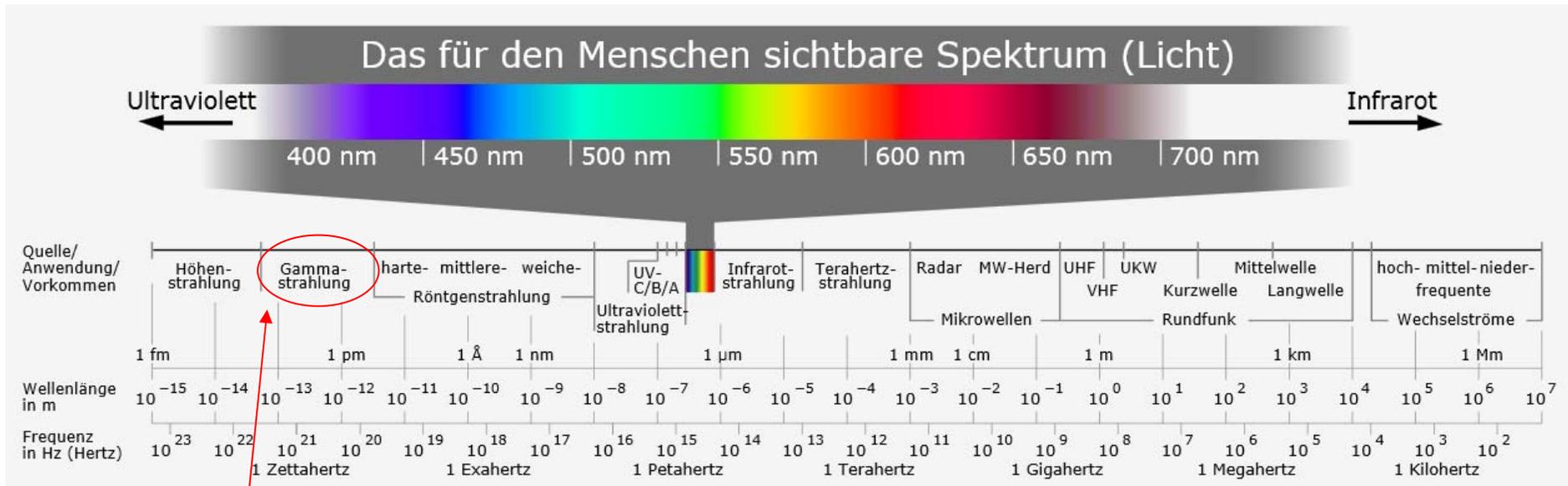
Im offenen Kernreaktor (Wartung!) werden aktive Brennelemente mit Wasser geflutet.

Wasser leuchtet blau („Bremsstrahlung“ der α - und β -Teilchen)



G2 Energieformen

Elektromagnetisches Spektrum



Gamma-Strahlung:

$$f = 10^{20} \dots 10^{21} \text{ Hz}$$

$$W = h \cdot f = (0.4 \dots 4) \cdot 10^6 \text{ MeV}$$

$$h = 6.625 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$$

Quelle: Wikipedia.de

G2 Energieformen

Halbwertszeit der Kernumwandlung

- Anzahl der Radionuklidkerne bei Zerfallsbeginn: N_0 ($t = 0$)
- Zum Zeitpunkt t zerfällt in der kurzen Zeit dt die Anzahl dN Radionuklidkerne
- Diese Anzahl dN ist proportional zur Anzahl der zum Zeitpunkt t noch vorhandenen Kerne N
- Die **Proportionalitätskonstante** λ ist vom Radionuklidtyp abhängig!

$$|dN| = \lambda \cdot N \cdot dt \rightarrow \text{Abnahme: } dN = -\lambda \cdot N \cdot dt < 0$$

$$dN = -\lambda \cdot N \cdot dt \rightarrow \frac{dN}{dt} = -\lambda \cdot N \rightarrow \boxed{\frac{dN(t)}{dt} + \lambda \cdot N(t) = 0}$$

Lösung dieser Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

$$N(t) = C \cdot e^{-\lambda t} \quad \text{Integrationskonstante } C : N(0) = C \cdot e^{-\lambda \cdot 0} = C = N_0$$

$$\boxed{N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}}$$

Zeitkonstante: $T = 1/\lambda$ $N(t) = N_0 \cdot e^{-t/T}$

Halbwertszeit τ : $N(\tau) = N_0 / 2 = N_0 \cdot e^{-\tau/T} \rightarrow 1/2 = e^{-\tau/T} \rightarrow \boxed{\tau = T \cdot \ln 2 = \ln 2 / \lambda}$
 $\tau = 0.7 \cdot T$

G2 Energieformen

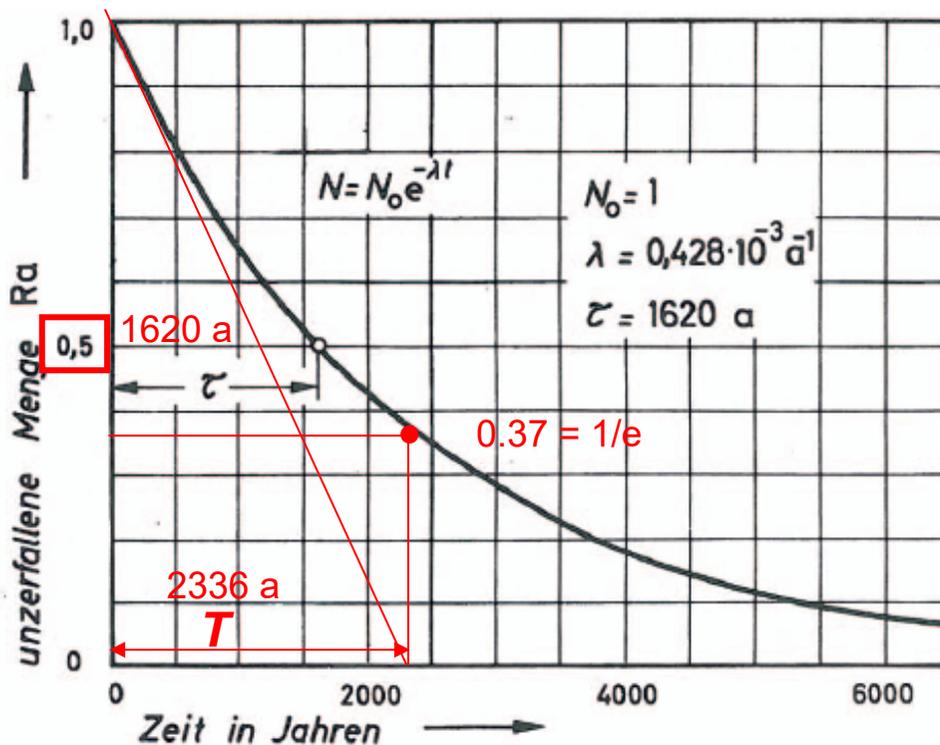
Halbwertszeit der Kernumwandlung

Beispiel: Radium ($Z = 88$)

$$\lambda = 0.428 \cdot 10^{-3} / \text{a} \quad T = 1/\lambda = 2336.4 \text{ a} \quad \tau = 2336.4 \text{ a} \cdot \ln 2 = 1620 \text{ a}$$

$$\lambda = \frac{|\Delta N|}{N} \cdot \frac{1}{\Delta T}$$

- Je größer die Zerfallsrate λ (in Bq), desto kürzer die Halbwertszeit
- Manche Zerfallsprozesse **dauern sehr lang!**



Zeitkonstante $T = 2336$ Jahre:
63% sind zerfallen!

Halbwertszeit $\tau = 1620$ Jahre:
50% sind zerfallen!

1 Bq = 1/s (**Becquerel**) = ein
radioaktiver Kernzerfall pro Sekunde

Beispiele: Halbwertszeit τ

Uran ^{238}U : 4468 Mio. Jahre, 12 Bq/mg

Uran ^{235}U : 703 Mio. Jahre, 80 Bq/mg

Plutonium ^{239}Pu : 24110 Jahre, $2.3 \cdot 10^6$ Bq/mg

$$\text{z.B.: } \frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{24110}{4468 \cdot 10^6} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{12}{2.3 \cdot 10^6}$$



G Grundlagen

G2 Energieformen



Zusammenfassung

Wiederholung physikalischen Grundlagenwissens in knapper Form:

- Mechanische Energie (Bewegungsenergie, Höhenenergie)
- elektromagnetische Energie
- thermische Energie
- chemische Energie
- Kernenergie
- Innere Energie eines Systems abhängig von der Modellierungstiefe



G Grundlagen

G2 Energieformen



G1 Was ist Energie?

G2 Energieformen

G3 Repetitorium: Grundlagen der Elektrotechnik



G3 Elektrotechnische Grundlagen

Übersicht



1. **OHM'sches Gesetz, AMPERE'scher Durchflutungssatz**
2. **Magnetische Werkstoffe**
3. **FARADAY'sches Induktionsgesetz, LORENTZ-Kraft**
4. **Flüsse und Induktivitäten, Ummagnetisierungsverluste**
5. **Energie**
6. **Momentanleistung, Effektivwert, Sinusbetrieb:
Wirk-, Blind- und Scheinleistung einphasig**
7. **Bezugspfeile**
8. **Leistungsanpassung**
9. **Transformatorprinzip**



G3.1 OHM'sches Gesetz, AMPERE'scher D. Das *Ohm'sche* Gesetz



$$R = \frac{U}{I} = \rho \cdot \frac{l}{A} = \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{l}{A}$$

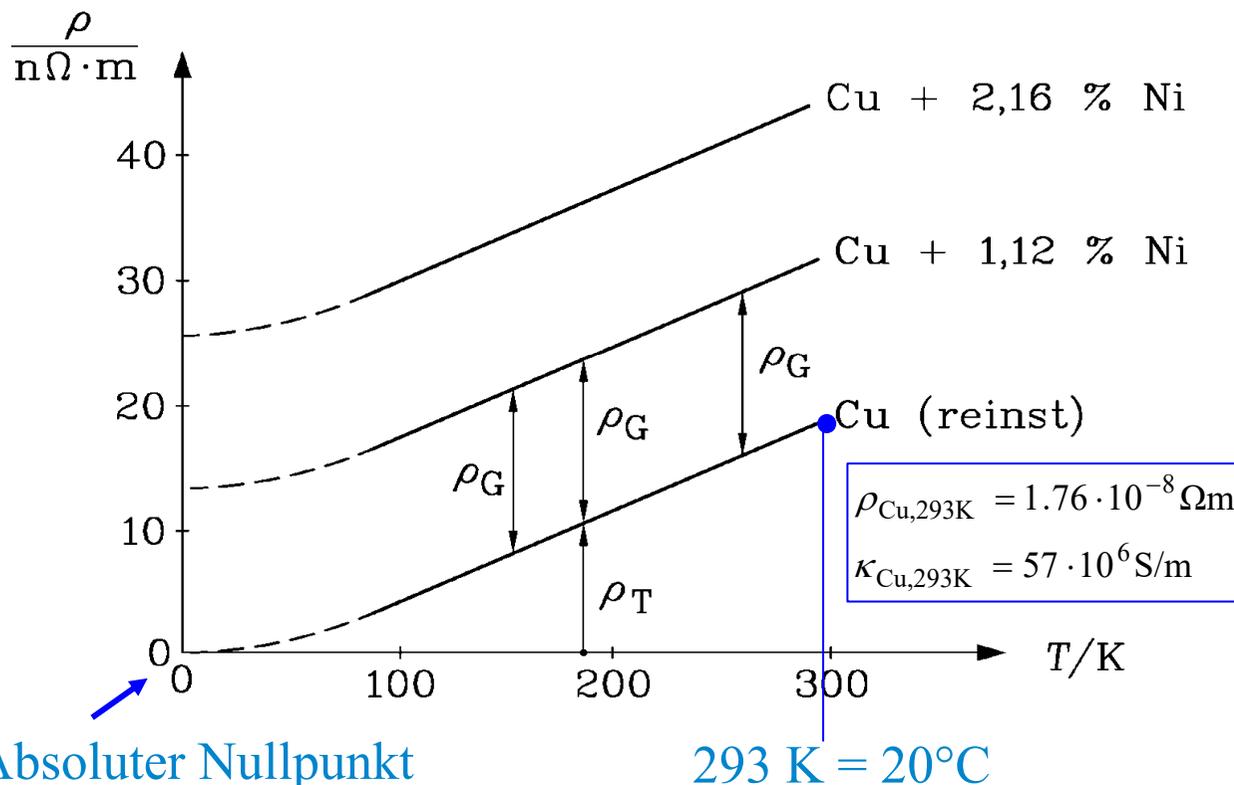
R :	<i>Ohm'scher</i> Widerstand
$G = 1/R$:	elektrischer Leitwert
ρ :	spezifischer Widerstand
$\kappa = 1/\rho$:	elektrische Leitfähigkeit
l :	Länge des Leiters
A :	Querschnitt des Leiters



G3.1 OHM'sches Gesetz, AMPERE'scher D.

Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstands (1)

Mathiessen'sche Regel: Der spezifische el. Widerstand ρ setzt sich für mehrere voneinander unabhängige Streuprozesse aus der Summe der spezifischen Widerstände der einzelnen Streuprozesse zusammen $\Rightarrow \rho$ ist **temperaturabhängig**



$$\rho(T) = \rho_G + \rho_T(T)$$

Kollision der
Leitungselektronen

a) mit Störstellen im
Kristallgitter = ρ_G

b) mit schwingenden
Atomrümpfen = ρ_T

Quelle: Clausert, H.; Elektrotechnik

G3.1 OHM'sches Gesetz, AMPERE'scher D. Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstands (2)



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

$$\rho(\vartheta) = \rho(\vartheta_0) \cdot [1 + \alpha(\vartheta_0) \cdot (\vartheta - \vartheta_0)] = \rho(\vartheta_0) \cdot [1 + \alpha(\vartheta_0) \cdot \Delta\vartheta]$$

T : Absolute Temperatur (Kelvin K)

$\vartheta = T - 273.15$: Temperatur (Grad Celsius °C)

$\Delta\vartheta = \vartheta - \vartheta_0$: Temperaturdifferenz = „Erwärmung“ (Kelvin K)

ϑ_0 : Bezugstemperatur (Grad Celsius °C)

$\alpha(\vartheta_0)$: **Temperaturkoeffizient** bei ϑ_0 (1/K)



G3.1 OHM'sches Gesetz, AMPERE'scher D. Temperaturbestimmung über Widerstandsmessung

Kupfer: Temperaturkoeffizient:

$$\alpha(\vartheta_0 = 20^\circ\text{C}) = \alpha_{20} = \frac{1}{235 + 20} = \frac{1}{255} = 0.0039 / \text{K}$$

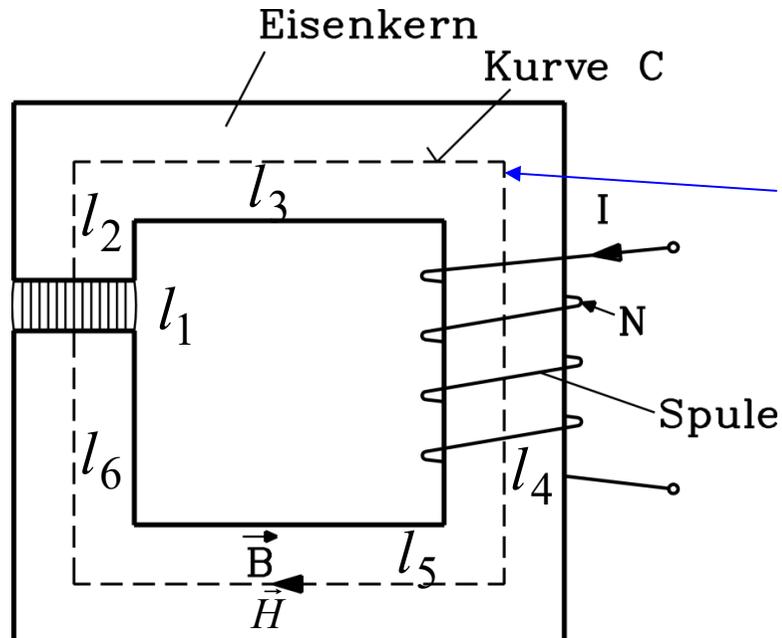
Temperaturbestimmung: Aus $R_\vartheta = R_{20} \cdot (1 + \alpha_{20} \cdot \Delta\vartheta)$ folgt

$$\Delta\vartheta = \frac{R_\vartheta - R_{20}}{\alpha_{20} \cdot R_{20}} = \frac{1}{\alpha_{20}} \cdot \left(\frac{R_\vartheta}{R_{20}} - 1 \right) = \vartheta - 20^\circ\text{C}$$

Beispiel: $R_\vartheta / R_{20} = 1.45$

$$\vartheta = 20^\circ\text{C} + \frac{1}{\alpha_{20}} \cdot \left(\frac{R_\vartheta}{R_{20}} - 1 \right) = 20 + \frac{1}{0.0039} \cdot (1.45 - 1) = \underline{\underline{135^\circ\text{C}}}$$

G3.1 OHM'sches Gesetz, AMPERE'scher D. Stromerregte Magnetfelder – AMPERE'scher Durchflutungssatz



Geschlossene Kurve $C =$ z. B. Feldlinie von H ,
Strom I , Spulenwindungszahl $N (= 4$ im Bild)

Magnetische Flussdichte B (Tesla, T)
Magnetische Feldstärke H (A/m)

Durchflutungssatz:

In einem magnetischen Feld ist das Linienintegral über die magnetische Feldstärke H entlang einer in sich geschlossenen Linie C stets gleich dem gesamten elektrischen Strom NI (als Durchflutung Θ), der durch die von dieser Linie gebildeten Fläche hindurch tritt.

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = \Theta = N \cdot I \cong H_1 \cdot l_1 + H_2 \cdot l_2 + \dots + H_n \cdot l_n \quad \text{Im Bild: } n = 6 \text{ Abschnitte}$$

G3 Elektrotechnische Grundlagen

Übersicht



1. OHM'sches Gesetz, AMPERE'scher Durchflutungssatz
2. **Magnetische Werkstoffe**
3. FARADAY'sches Induktionsgesetz, LORENTZ-Kraft
4. Flüsse und Induktivitäten, Ummagnetisierungsverluste
5. Energie
6. Momentanleistung, Effektivwert, Sinusbetrieb:
Wirk-, Blind- und Scheinleistung einphasig
7. Bezugspfeile
8. Leistungsanpassung
9. Transformatorprinzip



G3.2 Magnetische Werkstoffe

Erzeugung magnetischer Felder

Stromdurchflossene Spulen	Permanentmagnete
- Erregerverluste (Abhilfe: Supraleitung)	+ keine Verluste
- Stromversorgung nötig	+ einfacher Aufbau der E-Maschine
+ (beliebig) hohe Felder möglich	- Magnetfeld begrenzt auf ca. 1 T
+ Magnetfeld veränderbar	- Gefahr der Entmagnetisierung
+ bei großen E-Maschinen kostengünstiger	

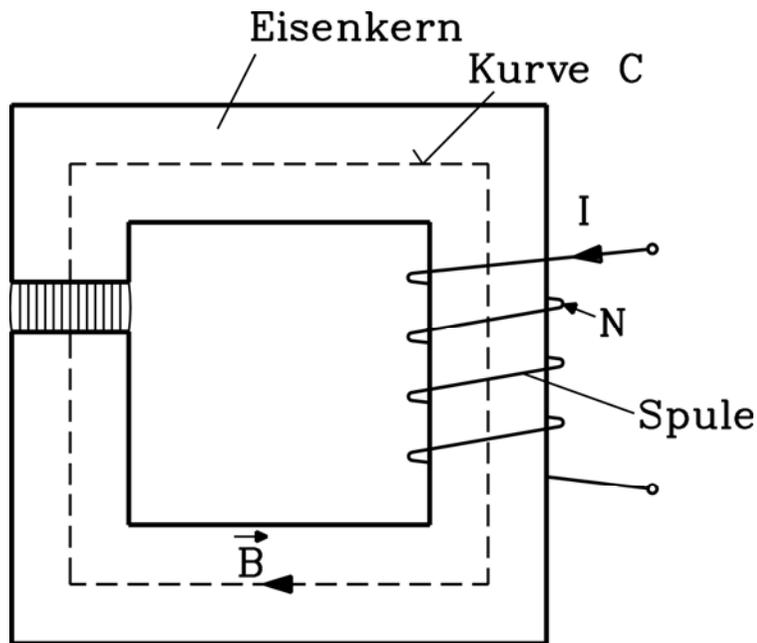
**Material: Kupfer, Aluminium
Isolierstoff**

**Eisen-Nickel-Kobalt-Legierungen u.
Sinterwerkstoffe mit Seltenen Erden**

G3.2 Magnetische Werkstoffe

Verstärkung des Magnetfelds durch

Eisen = Verringerung des Magnetisierungsbedarfs



- In **Luft** ist die magnetische Flussdichte B zur magnetischen Feldstärke H über μ_0 direkt proportional:

$$B = \mu_0 \cdot H \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ V} \cdot \text{s}/(\text{A} \cdot \text{m})$$

- **Eisen** besteht aus vielen kleinen "Elementarmagneten", die sich im Feld H der Spule möglichst parallel zu H ausrichten und damit ein eigenes Magnetfeld J erzeugen, welches das H -Feld **verstärkt**.

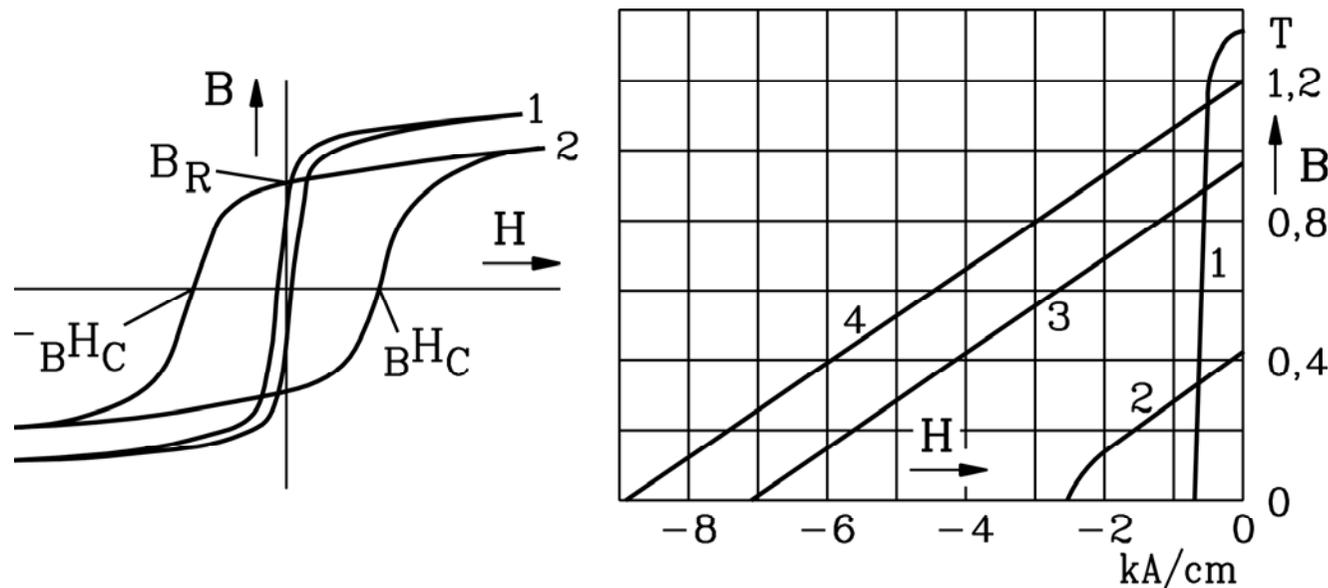
$$B = \mu_0 \cdot H + J = \mu \cdot H \gg \mu_0 \cdot H$$

- Da B stetig an der Grenzfläche „Luft-Eisen“ ist, wird H im Eisen um μ_0/μ **verringert**. Dieser Effekt funktioniert nur bis ca. $B = 1.7 \text{ T}$, dann sind alle "Elementarmagnete" parallel, also J maximal (**SÄTTIGUNGSEFFEKT**).

G3.2 Magnetische Werkstoffe

Magnetische Werkstoffkennlinien

- **Eisen:** weichmagnetischer Werkstoff = schmale Hystereseschleife
Kennwert: Sättigungsflussdichte ca. 1.7 T
- **Permanentmagnete:** Hartmagnetischer Werkstoff = breite Hystereseschleife
 z. B. Neodym-Eisen-Bor, Kennwerte: Remanenzflussdichte B_R , Koerzitivfeldstärke $B H_C$



Quelle: Fischer, R.,
Elektr. Maschinen,
Hanser-Verlag

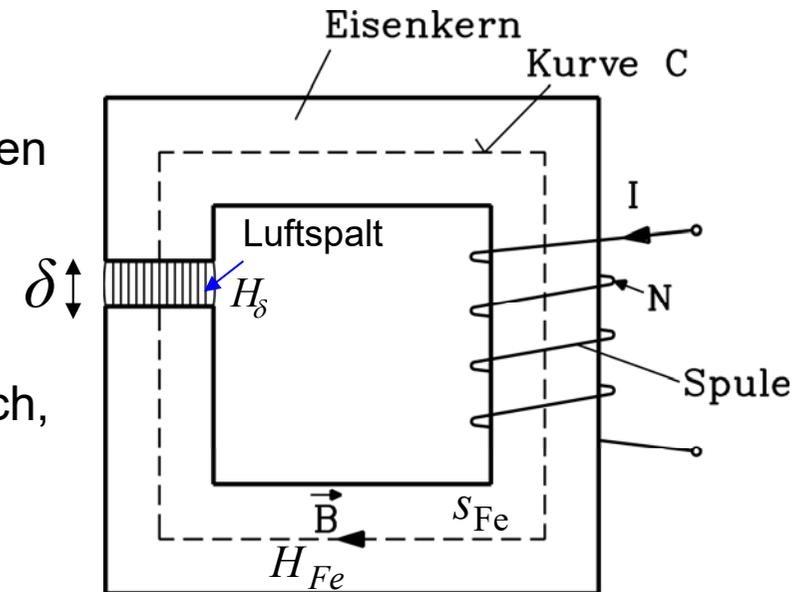
1: Eisen
2: Permanentmagnet

Permanentmagnete: 1: Al-Ni-Co, 2: Ba-Ferrit
3: Sm-Co, 4: Nd-Fe-B

G3.2 Magnetische Werkstoffe

Einfacher magnetischer Eisenkreis

- Im **ungesättigten Eisen**: $\mu \approx 5000\mu_0$,
in **Luft**: $\mu = \mu_0$
- Magnetfluss $\Phi = B \cdot A$ ist zwischen je 2 Feldlinien **konstant**.
A: Querschnittsfläche des Eisens
(Luftquerschnitt = Eisenquerschnittsfläche)
- Daher Flussdichte B in Eisen und Luftspalt gleich,
daher H_{Fe} **viel kleiner als in Luft**



$$B_{Fe} = \frac{\Phi}{A} = B_{\delta}$$

$$H_{Fe} = \frac{B_{Fe}}{\mu_{Fe}} \ll H_{\delta} = \frac{B_{\delta}}{\mu_0}$$

Durchflutungssatz:

$$H_{Fe} \cdot s_{Fe} + H_{\delta} \cdot \delta = N \cdot I$$

$$\frac{B_{Fe}}{\mu_{Fe}} \cdot s_{Fe} + \frac{B_{\delta}}{\mu_0} \cdot \delta = N \cdot I = V_{Fe} + V_{\delta}$$

- z. B. $s_{Fe}/\delta = 100$: daher $V_{Fe}/V_{\delta} = H_{Fe}s_{Fe}/(H_{\delta}\delta) = 100/5000 = 0.02 \sim 0$.

- Fast nur die Luftspaltweite δ muss magnetisiert werden: $B_{\delta} \approx \mu_0 NI/\delta$

G3.2 Magnetische Werkstoffe

Zahlenbeispiel: Magnetkreis

Beispiel:

- ungesättigtes Eisen: $\mu \gg \mu_0$, daher: $\mu \rightarrow \infty$
- Magnetfeld im Luftspalt soll $B_\delta = 1 \text{ T}$ sein
- Luftspaltweite $\delta = 3 \text{ mm}$

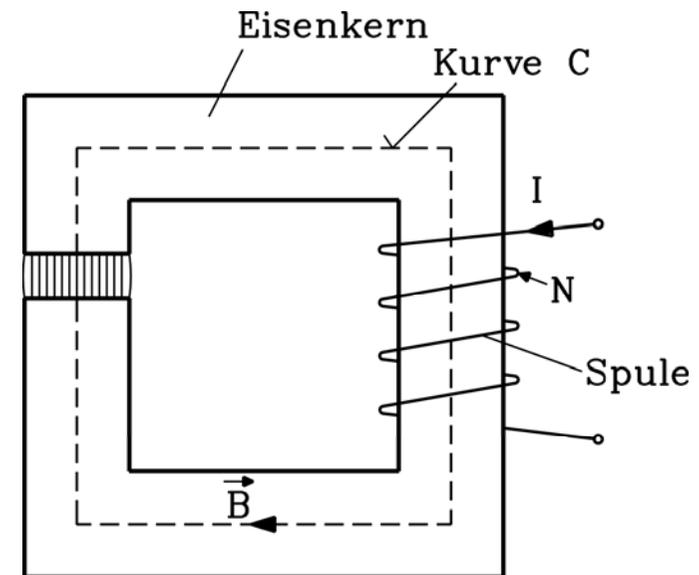
- **Wie groß ist Erregerbedarf $N \cdot I$?**

$$B_\delta = \mu_0 \cdot N \cdot I / \delta = 1 \text{ T} \Rightarrow N \cdot I = \underline{2390 \text{ A}}$$

- **Auslegung der Erregerspule:**

z. B. $N = 100$ Windungen: $I = 2390/100 = \underline{23.9 \text{ A}}$

oder $N = 250$ Windungen: $I = 2390/250 = \underline{9.56 \text{ A}}$



G3 Elektrotechnische Grundlagen

Übersicht

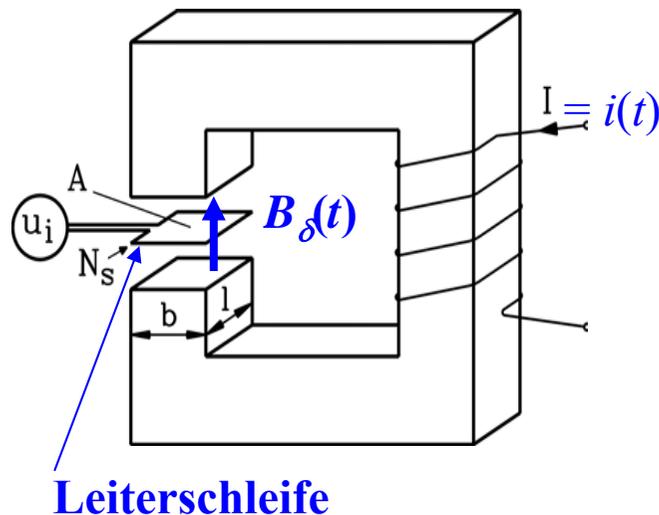


1. OHM'sches Gesetz, AMPERE'scher Durchflutungssatz
2. Magnetische Werkstoffe
3. FARADAY'sches Induktionsgesetz, LORENTZ-Kraft
4. Flüsse und Induktivitäten, Ummagnetisierungsverluste
5. Energie
6. Momentanleistung, Effektivwert, Sinusbetrieb:
Wirk-, Blind- und Scheinleistung einphasig
7. Bezugspfeile
8. Leistungsanpassung
9. Transformatorprinzip



G3.3 FARADAY'sches Induktionsgesetz, LORENTZ-Kraft

Das Induktionsgesetz - Ruhinduktion



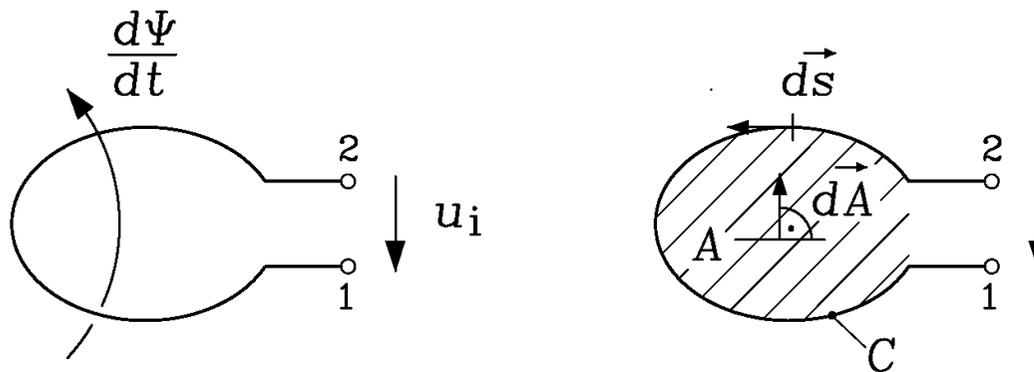
- Strom I ist **zeitlich veränderlich**: $i(t)$
- Daher ändert sich Luftspalt-Magnetfeld B_δ zeitlich: $B_\delta(t) \cong \mu_0 N \cdot i(t) / \delta$
- Es ändert sich der von der Leiterschleife (Fläche $A = b \cdot l$, N_s Windungen) umfasste **magnetische Fluss** $\Phi(t) = B_\delta(t) \cdot A$
- $\Phi(t)$ induziert in Schleife el. Spannung $u_i(t) =$ **“Ruhinduktion”**, denn:
Schleife **ruht** relativ zum Messgerät
- **Definition: Flussverkettung** $\Psi(t) = N_s \cdot \Phi(t)$

$$u_i(t) = -N_s \cdot \frac{d\Phi(t)}{dt} = -\frac{d\Psi(t)}{dt}$$

G3.3 FARADAY'sches Induktionsgesetz, LORENTZ-Kraft Ruhinduktion – Positive Bezugsrichtungen

$$u_i(t) = -N_s \cdot \frac{d\Phi(t)}{dt} = -\frac{d\Psi(t)}{dt}$$

N_s Windungen der Schleife
(Schleifen-Kurve C , Fläche A)

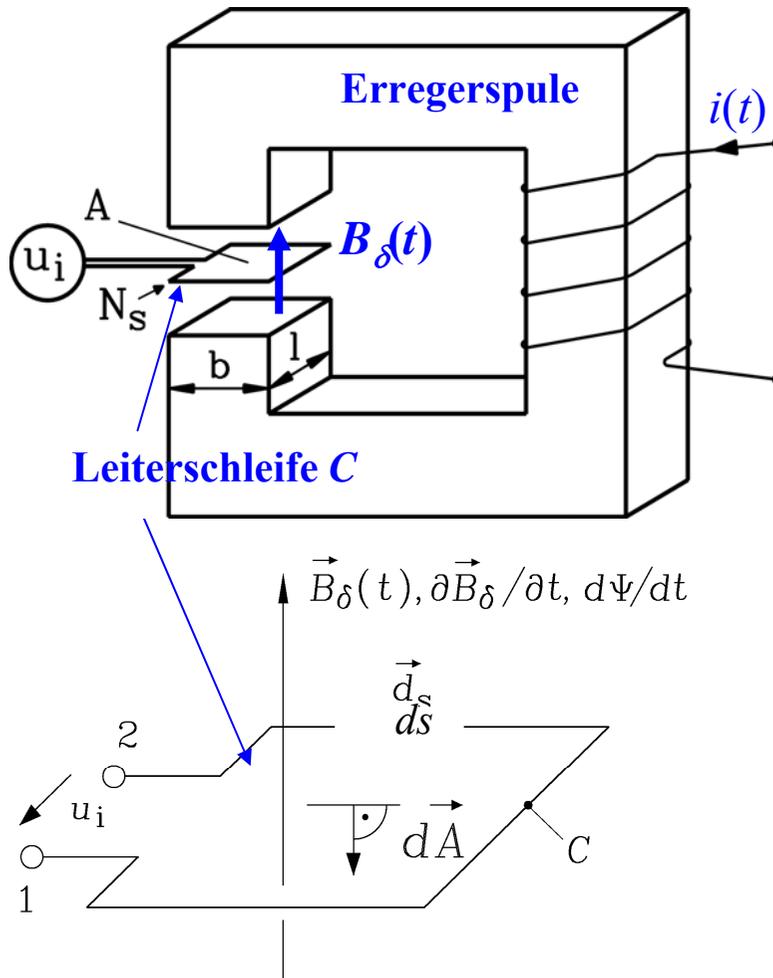


- **Rechtswendige** Verkettungsänderung zum Schleifendurchlauf von 2 nach 1:
- a) dB/dt in Richtung von Flächen-Normalenvektor dA
- b) Schleifenumlauf für Spannung in Richtung von Kurven-Tangentenvektor ds

u_i ist von 2 nach 1 NEGATIV, wenn $d\Psi/dt$ POSITIV ist

G3.3 FARADAY'sches Induktionsgesetz, LORENTZ-Kraft

Beispiel: Ruhinduktion



- Strom I ist **zeitlich veränderlich**: $i(t) > 0$, $di(t)/dt > 0$
- **Rechtswindige Erregerspule**: Magnetfeld $B_\delta > 0$ von unten nach oben an Schleife wegen $i(t) > 0$
- $dB_\delta/dt > 0$ von unten nach oben wegen $dB_\delta(t)/dt \cong (\mu_0 N \cdot di/dt)/\delta > 0$
- Schleifen-Verkettung: $d\Psi/dt = N_s \cdot (b \cdot l) \cdot dB_\delta/dt > 0$, ist **LINKS**-wendig zum Schleifendurchlauf von 2 nach 1 verkettet.
- Bei rechtswendiger Verkettung gilt:
 $u_i(t) = - d\Psi(t)/dt$
- Daher:
Induzierte Spannung $u_i(t)$ **positiv von 2 nach 1**:
Würde einen Strom in Richtung ds von 2 nach 1 treiben, dessen Eigenfeld B_e von oben nach unten gerichtet ist und daher dem $dB_\delta(t)/dt$ entgegen wirkt (**LENZ'sche Regel**)

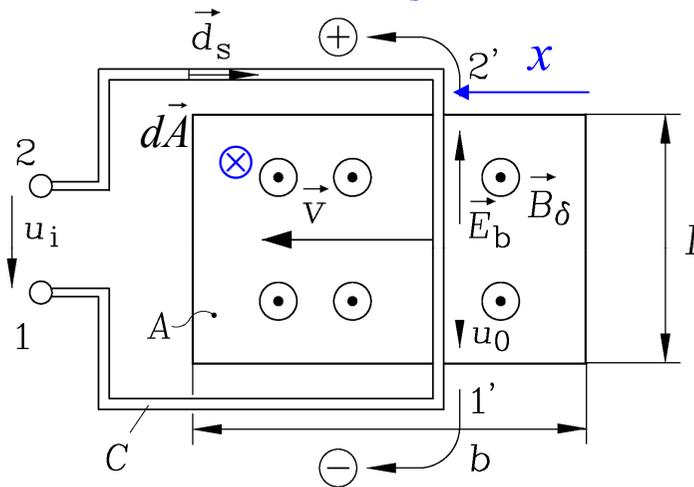
u_i ist von 2 nach 1 POSITIV

G3.3 FARADAY'sches Induktionsgesetz, LORENTZ-Kraft

Bewegte Leiterschleife:

Berechnung von u_i über Ruhinduktion

Leiterschleife (N_s)



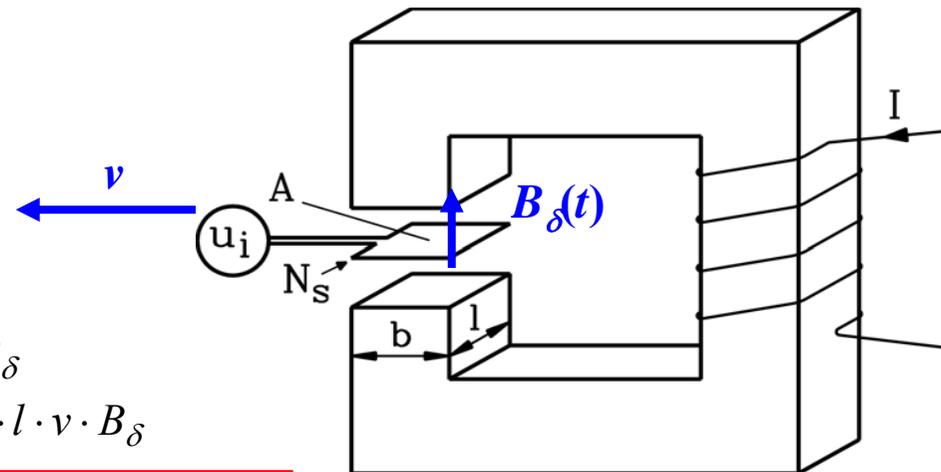
- Strom I und damit Feld B_δ sind **zeitlich konstant**
- Leiterschleife (N_s) wird mit **Geschwindigkeit v** relativ zum Eisenkreis bewegt, so dass sich Verkettung Ψ ändert.
- Es wird Spannung u_i induziert: **Bewegungsinduktion**

$$A(t) = (b - x) \cdot l \quad x = v \cdot t$$

$$\Psi(t) = -N_s \cdot A(t) \cdot B_\delta = -N_s \cdot (b - v \cdot t) \cdot l \cdot B_\delta$$

$$u_i = -d\Psi / dt = -(-N_s \cdot (-v) \cdot l \cdot B_\delta) = -N_s \cdot l \cdot v \cdot B_\delta$$

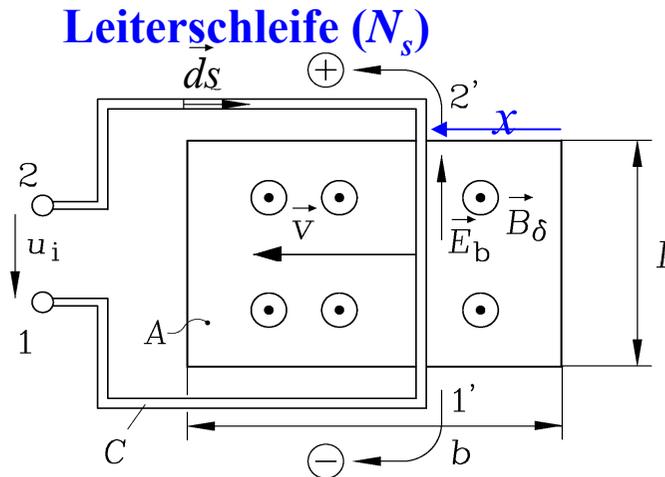
u_i ist von 2 nach 1 **NEGATIV**



- Induzierte Spannung $u_i(t)$ **negativ von 2 nach 1**: Würde einen Strom gegen die Richtung ds von 1 nach 2 treiben, dessen Eigenfeld B_e von unten nach oben gerichtet ist und daher der Flussabnahme durch die Schleife entgegen wirkte (**LENZ'sche Regel**)

G3.3 FARADAY'sches Induktionsgesetz, LORENTZ-Kraft

Das Induktionsgesetz – die Bewegungsinduktion



- Ermittlung von u_i über Bewegungsinduktion:
- Bewegter Leiter 1'-2' (Geschwindigkeit v) im Magnetfeld B_δ :

Bewegungsinduzierte Feldstärke: $\vec{E}_b = \vec{v} \times \vec{B}_\delta$

- E_b ist maximal, wenn B und v zueinander rechte Winkel aufweisen: $E_b = v \cdot B_\delta$
- u_i ist maximal, wenn B , v und Leiterelement l zueinander rechte Winkel aufweisen:

$$u_{i, \text{je Windung}} = \int_2^1 \vec{E}_b \cdot d\vec{s} = \int_{2'}^{1'} E_b \cdot ds = - \int_{1'}^{2'} E_b \cdot ds = -v \cdot B_\delta \cdot l$$

Bewegungsinduzierte Spannung bei N_s Windungen : $u_i = -N_s \cdot v \cdot B_\delta \cdot l$

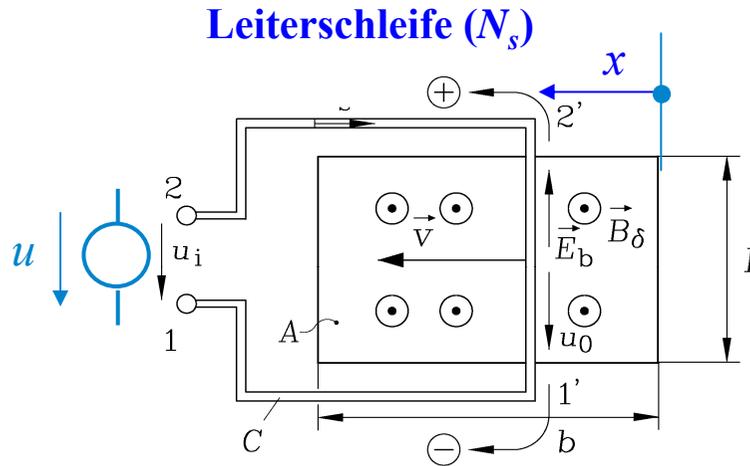
u_i ist von 2 nach 1 NEGATIV

(wie auf voriger Folie)



G3.3 FARADAY'sches Induktionsgesetz, LORENTZ-Kraft

Induzierte Spannung u_i als Quellenspannung u_0 (1)



u_i : „Äußere“ Spannung zw. 2 und 1: treibt bei geschlossener Schleife über Schleifen-Innenwiderstand R den Strom i_s .
 (Positiver Stromfluss-Sinn: von 2 nach 1)
 u_i wirkt wie eine von außen zw. 2 und 1 angelegte Spannung u

$$u + u_i = R \cdot i_s$$

Alternativ: Darstellung von u_i als „Innere“ Spannung (Quellenspannung u_0) zw. 2' nach 1'

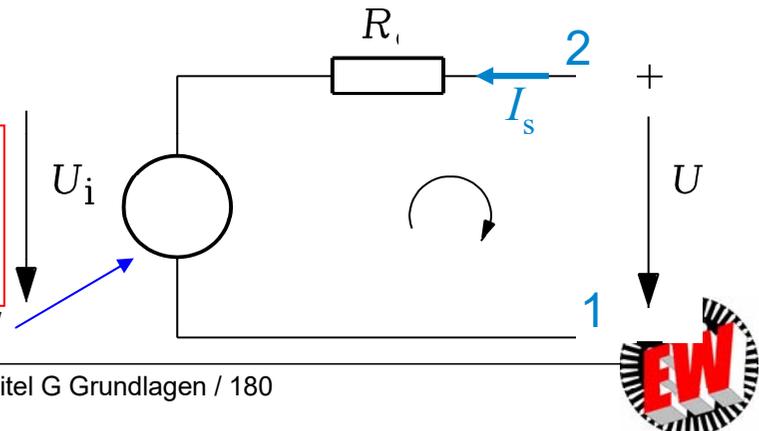
$$u = R \cdot i_s - u_i = R \cdot i_s + u_0 \quad -u_i = u_0 \quad u_0 = N_s \cdot v \cdot B_\delta \cdot l$$

u_0 treibt Strom i_s gegen den Spannungspfeil von u_0

Bei E-Maschinen wird die induzierte Spannung als „innere“ Spannungsquelle dargestellt. Wir schreiben:

$$u = R \cdot i_s + "u_i"$$

$$"u_i" = N_s \cdot v \cdot B_\delta \cdot l$$



G3.3 FARADAY'sches Induktionsgesetz, LORENTZ-Kraft Induzierte Spannung u_i als Quellenspannung u_0 (2)



Induktionsgesetz: u_i als „äußere“ Spannung: $u_i = -d\psi / dt$

Schleife mit zusätzlicher „äußerer“ Spannung u :
 $u + u_i = R \cdot i_s$
 $u - d\psi / dt = R \cdot i_s$

Übliche Schreibweise: $u = R \cdot i_s + d\psi / dt$

Entspricht einer Darstellung von u_i als „innere“ Spannung: $u_0 = d\psi / dt$

$$u = R \cdot i_s + u_0$$

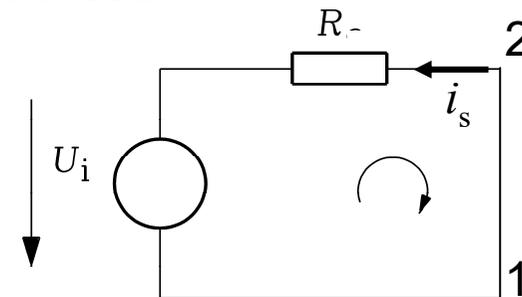
Die „innere“ Spannung u_0 wird hier gleich als u_i bezeichnet, obwohl eigentlich $-u_i = u_0$

Positiver Spannungsbezugspfeil von u_0 wird für „innere“ u_i verwendet.

Beispiel: Kurzgeschlossene Leiterschleife:

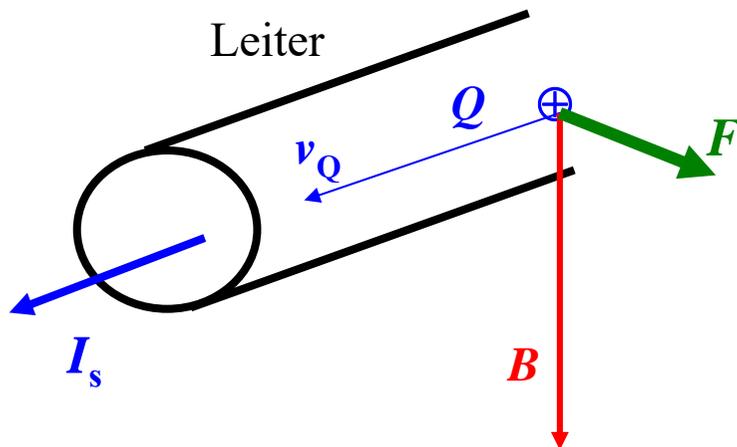
$$0 = R \cdot i_s + u_0 = R \cdot i_s + "u_i" \rightarrow i_s = -"u_i" / R$$

Strom fließt gegen die induzierte Quellenspannung, daher in Richtung von E_b (siehe vorige Folie)



G3.3 FARADAY'sches Induktionsgesetz, LORENTZ-Kraft

Die elektromagnetische Kraft



- Strom I_s im Leiter im Magnetfeld B :

Mit v_Q bewegte Ladung Q im Leiter (Stromfluss I_s)

im B -Feld erfährt bewegungsinduzierte Feldstärke E :

$$\vec{E} = \vec{v}_Q \times \vec{B}$$

- Kraft auf bewegte Ladung: $\vec{F} = Q \cdot \vec{E} = Q \cdot \vec{v}_Q \times \vec{B}$

- Umrechnung der Kraftformel: $I_s = Q / t \quad \vec{v}_Q = \vec{l} / t$

$$\vec{F} = Q \cdot (\vec{l} / t) \times \vec{B} = (Q / t) \cdot \vec{l} \times \vec{B} = I_s \cdot \vec{l} \times \vec{B}$$

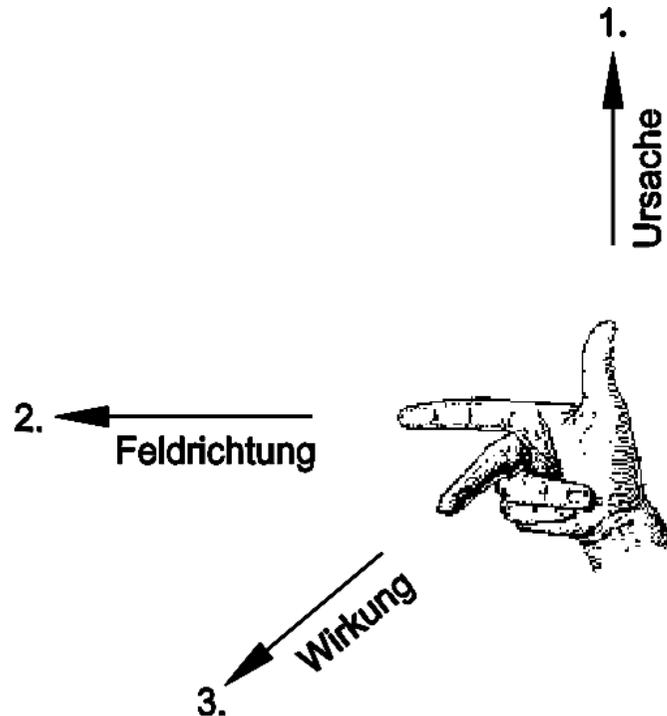
- Wegelement ds in Stromrichtung ist Vektorgröße

$$d\vec{F} = I_s \cdot d\vec{s} \times \vec{B}$$

- Kraftwirkung** F (LORENTZ-Kraft) maximal, wenn zwischen B - und Stromflussrichtung rechter Winkel

$$\vec{F} = \int_0^l I_s (d\vec{s} \times \vec{B}) = \int_0^l I_s \cdot B \cdot ds = I_s \cdot B \cdot l \quad \text{Bei } N_s \text{ Windungen: } \boxed{F = N_s \cdot I_s \cdot B \cdot l}$$

G3.3 FARADAY'sches Induktionsgesetz, LORENTZ-Kraft Dreifingerregel der rechten Hand (U-V-W-Regel)



Quelle:
Westphal, Physik

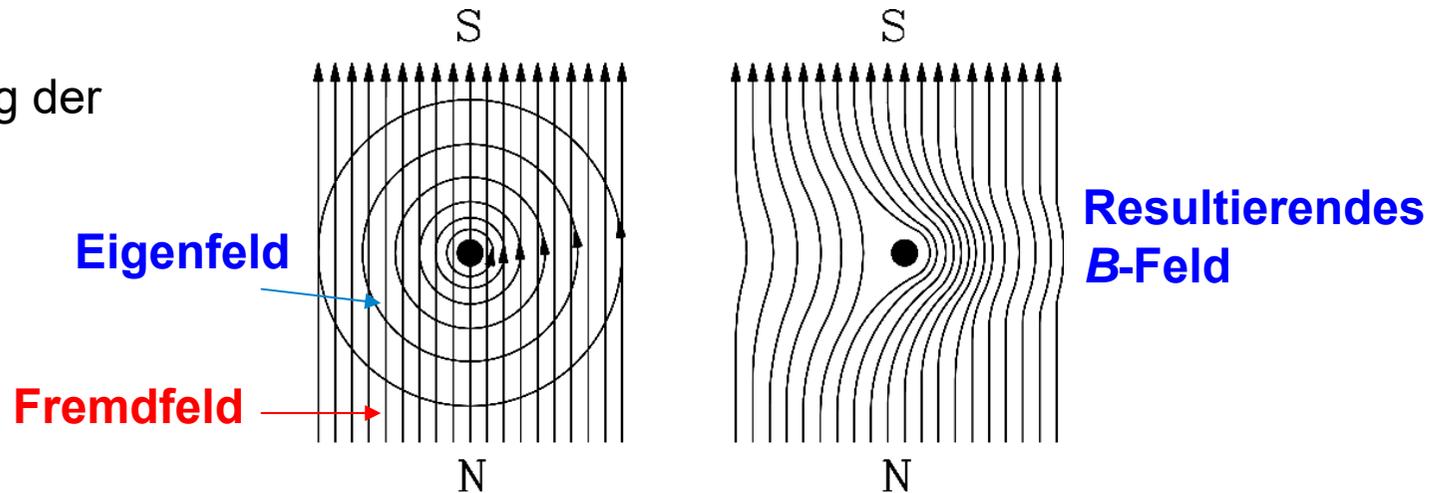
Hält man die drei Finger der rechten Hand:
1. Daumen, 2. Zeigefinger, 3. Mittelfinger so,
dass sie rechte Winkel miteinander bilden,
und zeigt

- der 1. Finger in Richtung der Ursache
(hier: in **Richtung des Stroms**),
 - der 2. Finger in Feldrichtung =
Richtung der Feldlinien,
- so gibt
- der 3. Finger die Richtung der Wirkung
(hier: **die Kraft**) an.

Das magnetische Feld ist das Bindeglied
(die Vermittlung) zwischen der Ursache
und der Wirkung

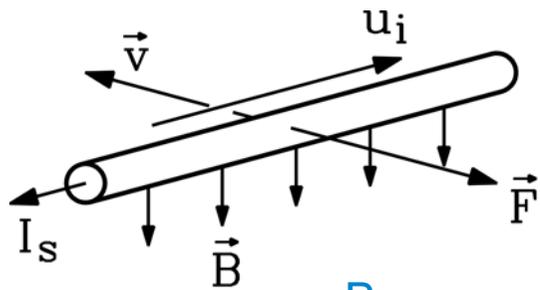
G3.3 FARADAY'sches Induktionsgesetz, LORENTZ-Kraft Kraftwirkung des magnetischen Felds

Alternative
Beschreibung der
LORENTZ-
Kraftwirkung

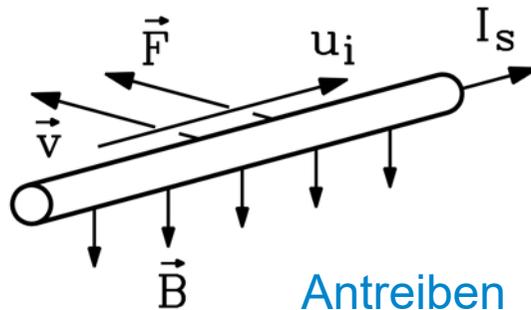


- **Fremdfeld (homogenes Feld)** von unten nach oben gerichtet
- Der Strom im Leiter fließt auf den Betrachter zu, erregt ein kreisförmiges **Eigenfeld** nach der Rechtsschraubenregel
- Überlagerung ergibt **resultierendes B-Feld** links kleiner als rechts vom Leiter
- Feldlinien = „**elastische Gummischnüre**“ (MAXWELL'scher Zug) wollen sich verkürzen \Rightarrow **Kraft nach links auf den Leiter !**
- Zum selben Ergebnis kommt man mit der LORENTZ-Kraftformel!

G3.3 FARADAY'sches Induktionsgesetz, LORENTZ-Kraft Antreiben und Bremsen



Bremsen
Generator



Antreiben
Motor

Bewegungsinduzierte Spannung
(als „innere“ Quellenspannung):

$$u_i = \int_l \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_l (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s}$$

$$\text{LORENTZ-Kraft: } \vec{F} = \int_l I_s (d\vec{s} \times \vec{B})$$

Generator:

Stromfluss GEGEN die Richtung der „inneren“ induzierten Spannung

LORENTZ-Kraft gegen Leitergeschwindigkeit v : BREMST

Motor:

Stromfluss IN Richtung der „inneren“ induzierten Spannung

LORENTZ-Kraft in Richtung der Leitergeschwindigkeit v :
TREIBT AN

G3 Elektrotechnische Grundlagen

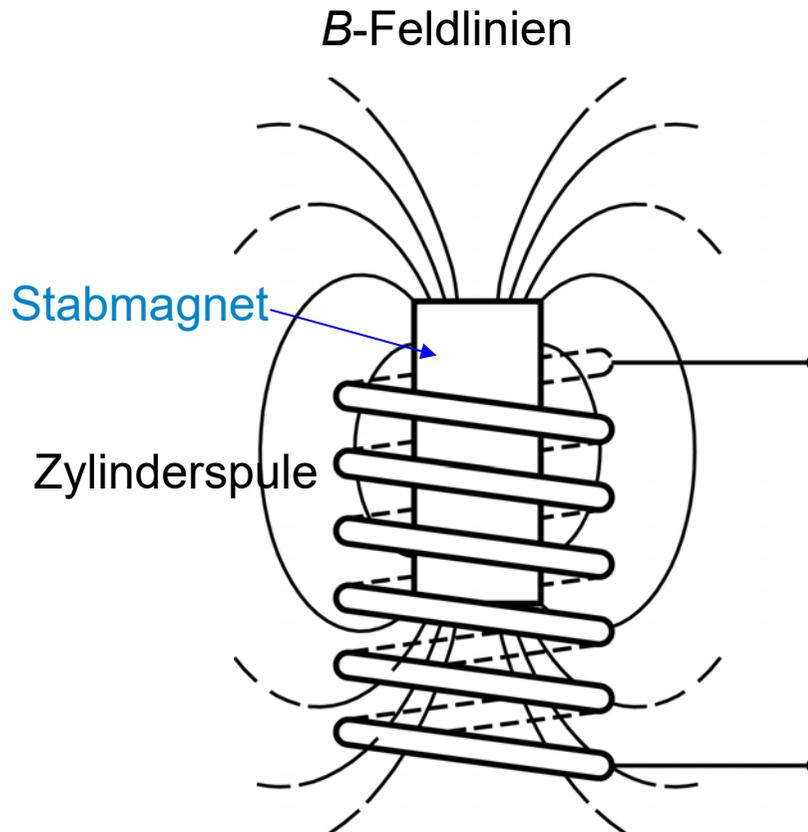
Übersicht



1. OHM'sches Gesetz, AMPERE'scher Durchflutungssatz
2. Magnetische Werkstoffe
3. FARADAY'sches Induktionsgesetz, LORENTZ-Kraft
4. Flüsse und Induktivitäten, Ummagnetisierungsverluste
5. Energie
6. Momentanleistung, Effektivwert, Sinusbetrieb:
Wirk-, Blind- und Scheinleistung einphasig
7. Bezugspfeile
8. Leistungsanpassung
9. Transformatorprinzip



G3.4 Flüsse und Induktivitäten, Ummagnetisierungsver. Haupt- und Streufluss (1)

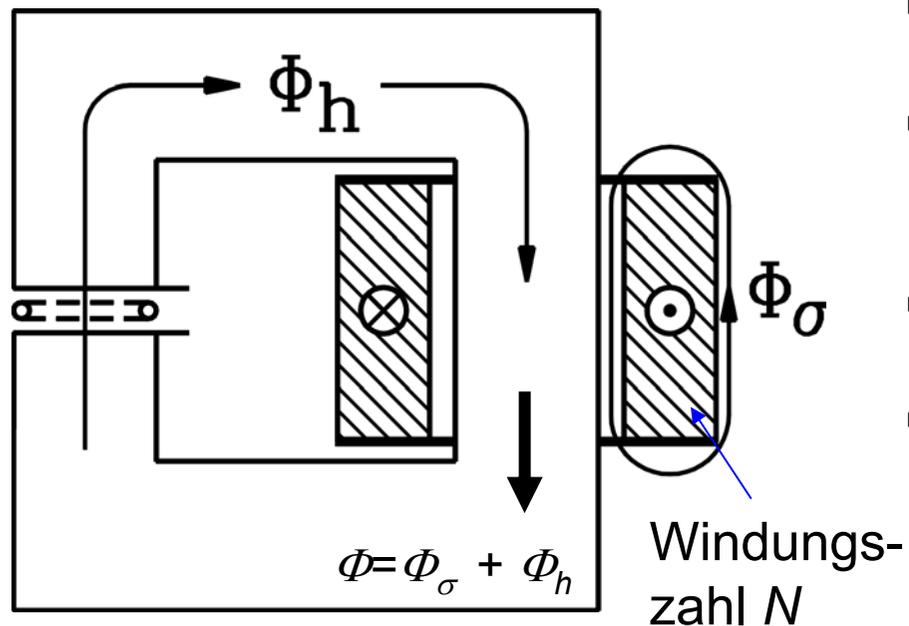


- Stabmagnet in Zylinderspule ohne Eisenrückschluss.
- Die einzelnen Windungen sind mit *unterschiedlich* großem Fluss verkettet:

Flussverkettung Ψ ändert sich von Windung zu Windung.

Quelle: Kleinrath,
H.; Studentext

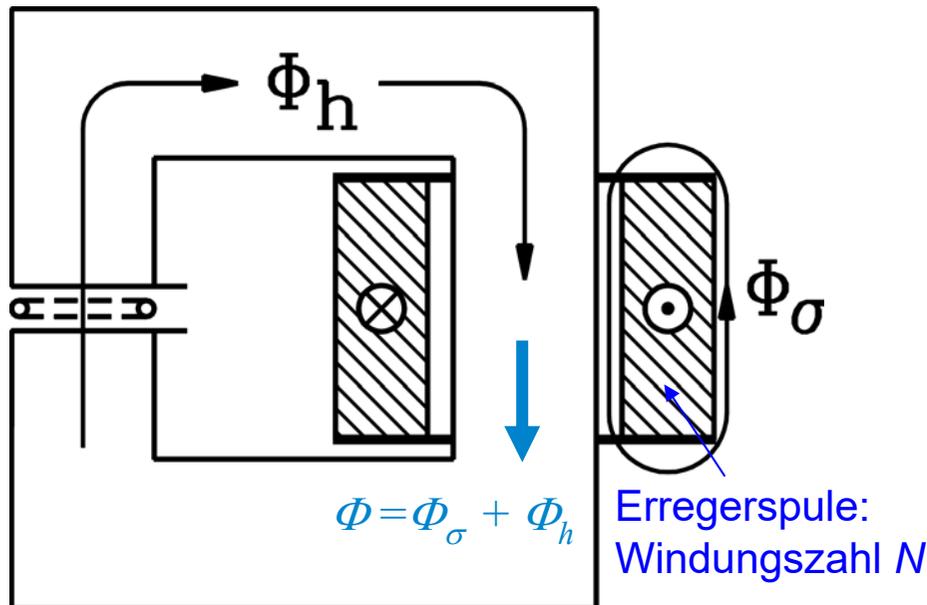
G3.4 Flüsse und Induktivitäten, Ummagnetisierungsver. Haupt- und Streufluss (2)



- Bei Magnetkreisen mit Flussführung im Eisen ist der Fluss “gebündelt”.
- Der Fluss in der umgebenden Luft ist viel kleiner!
- Der Fluss ist in guter Näherung mit der gesamten Spule verkettet.
- Es kann zwischen **Hauptfluss Φ_h** und **Streufluss Φ_σ** unterschieden werden.
- **Streuziffer:** $\sigma = \Phi_\sigma / \Phi_h$ soll klein sein !

⇒ **Hauptflussverkettung:** $\Psi_h = N \cdot \Phi_h$, **Streuflussverkettung:** $\Psi_\sigma = N \cdot \Phi_\sigma$

G3.4 Flüsse und Induktivitäten, Ummagnetisierungsver. Selbstinduktivität L



$$L = \frac{\Psi_N}{i} = \frac{N \cdot (\Phi_h + \Phi_\sigma)}{i} = L_h + L_\sigma$$

$$L_h = \frac{N \cdot \Phi_h}{i} = \frac{N \cdot (\mu_0 \cdot N \cdot i / \delta) \cdot A}{i}$$

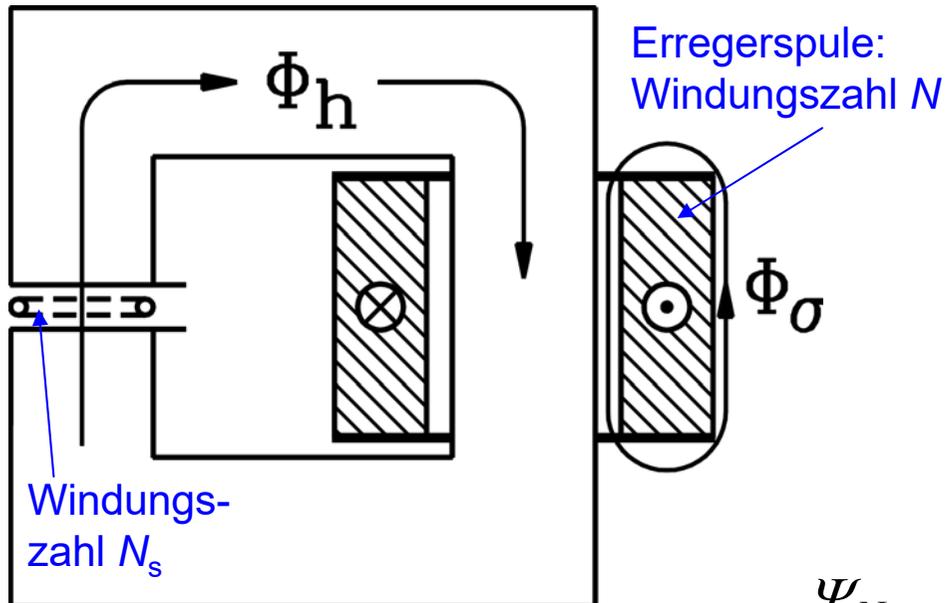
$$L_h = N^2 \cdot \mu_0 \cdot \frac{A}{\delta} = N^2 \cdot \Lambda_h$$

$$L_\sigma = N^2 \cdot \Lambda_\sigma$$

$$L_h = N^2 \cdot \Lambda_h$$

$$L_\sigma = N^2 \cdot \Lambda_\sigma$$

G3.4 Flüsse und Induktivitäten, Ummagnetisierungsver. Gegeninduktivität M



- Wechselstrom i in Erreger-Spule
- Hauptfluss Φ_h mit Luftspalt-Spule verkettet; pulsiert mit Frequenz f .
- Spannungsinduktion in Luftspalt-Spule (**Gegeninduktion**, N_s Windungen):

$$u_{i,N_s} = -d\Psi_{N_s}(t)/dt = -N_s \cdot d\Phi_h(t)/dt \Rightarrow$$

$$u_{i,N_s} = -M \cdot di/dt$$

- Mit $\Phi_h = B_\delta A$ und $B_\delta = \mu_0 \cdot N \cdot i / \delta$ folgt:

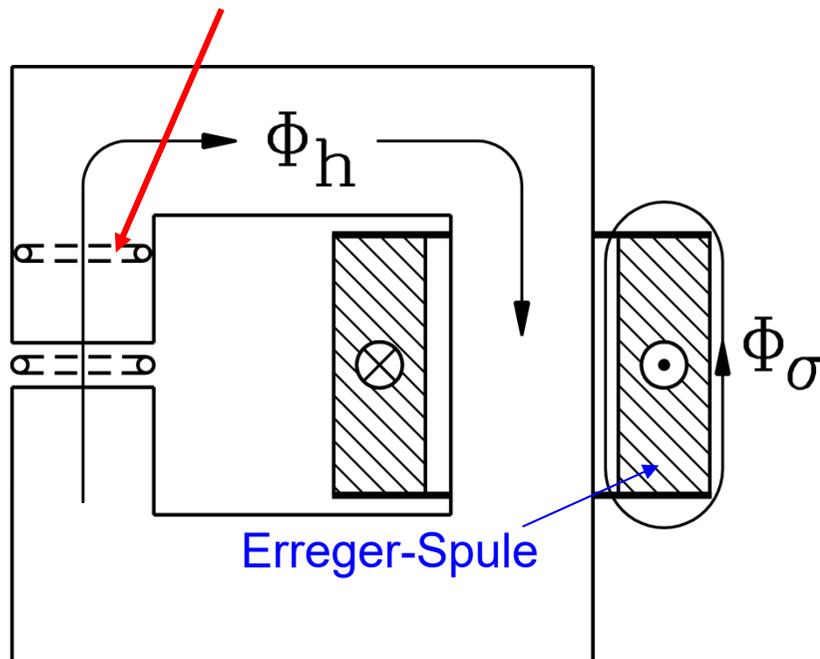
$$M = \frac{\Psi_{N_s}}{i} = \frac{N_s \cdot (\mu_0 \cdot N \cdot i / \delta) \cdot A}{i} = N_s \cdot N \cdot \mu_0 \cdot \frac{A}{\delta}$$

$$M = N_s \cdot N \cdot \Lambda_h$$

G3.4 Flüsse und Induktivitäten, Ummagnetisierungsver.

Ummagnetisierungsverluste $P_{Fe} = P_{Ft} + P_{Hy}$

Kreisströme (Wirbelströme)



- Wechselstrom i in Erreger-Spule:
Hauptfluss Φ_h im Eisen pulsiert mit Frequenz f .
- Im Eisen wird von Φ_h eine Spannung u_i induziert, die im elektrisch leitfähigen Eisen **Kreisströme (Wirbelströme)** treibt.
- Kreisströme verursachen Stromwärmeverluste P_{Ft} (**Wirbelstromverluste**).

Abhilfe:

- **Zusätzlich:**
Hysterese-Verluste P_{Hy}
in den Blechen durch den Wechselfluss!

Ft: „Foucault“

G3.4 Flüsse und Induktivitäten, Ummagnetisierungsver. Hystereseverluste

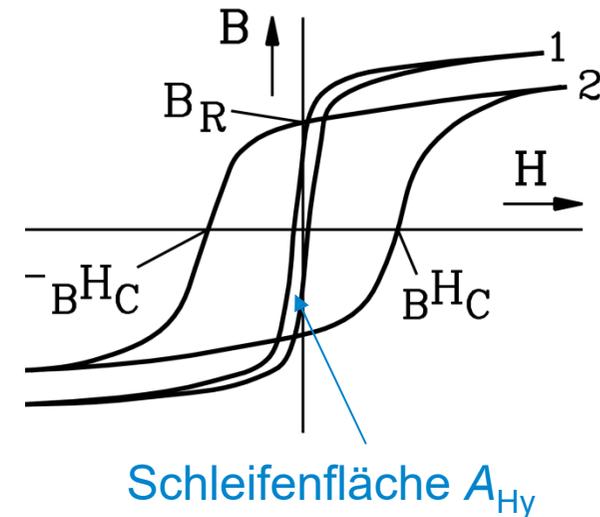
Hystereseverluste pro Volumen des ferromagnetischen Materials durch pulsierendes Magnetfeld werden durch die **Fläche der Hystereseschleife $B(H)$** ausgedrückt: A_{Hy}

$$W_{Hy} / V = A_{Hy}(\hat{B}) \sim B_R \cdot B H_C \sim \text{ca. } \hat{B}^2$$

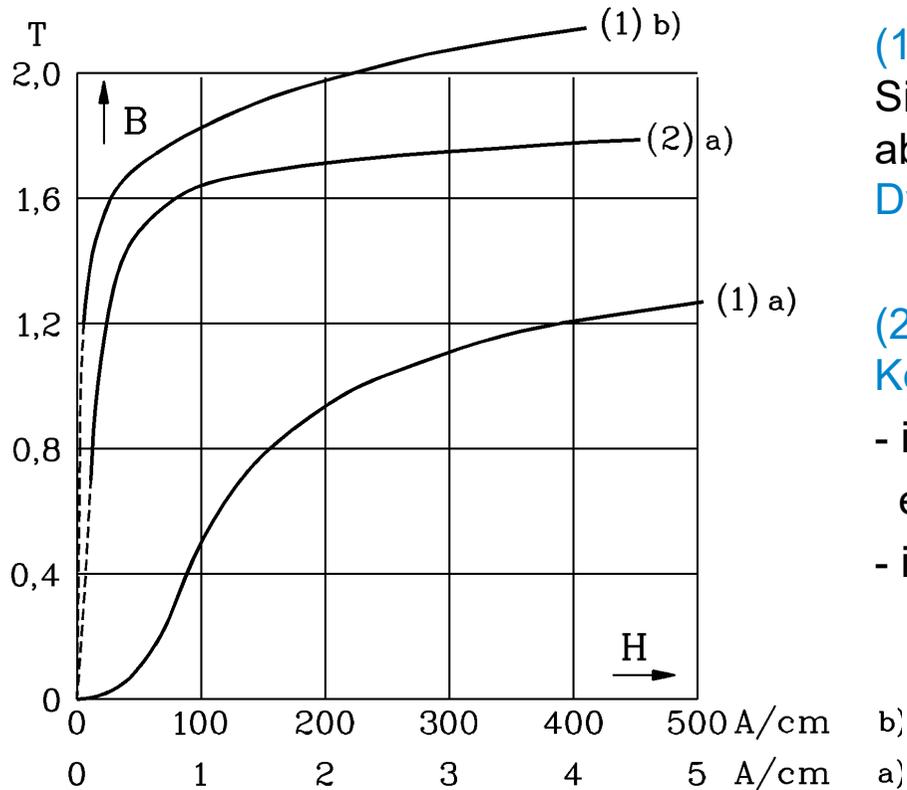
$$B(t) = \hat{B} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Hystereseverluste = Leistung = (Energie) x (Frequenz):

$$P_{Hy} / V = f \cdot A_{Hy} \sim \text{ca. } \hat{B}^2 \cdot f$$



G3.4 Flüsse und Induktivitäten, Ummagnetisierungsver. Weicheisenwerkstoffe – $B(H)$ -Kurve (ohne Hystereseschleife)



(1) Absenken der Wirbelstromverluste:
Siliziumbeimengung erhöht den Blechwiderstand,
aber senkt die Permeabilität μ :
Dynamoblech (Elektroblech)

(2) Erhöhen der Permeabilität μ :
Kornorientiertes Blech durch Kaltwalz-Technik:
- in Walzrichtung (Vorzugsrichtung)
erhöhte Flussdichte möglich (hohes μ),
- in Querrichtung deutlich kleineres μ !

- (1) **Elektroblech**, Dicke 0.5 mm, $P_{Fe} = 3 \text{ W/kg}$
bei 50 Hz, 1 T, keine Vorzugsrichtung
- (2) **Kornorientiertes Blech**, Vorzugsrichtung,
Dicke 0.35 mm, $P_{Fe} = 0.45 \text{ W/kg}$ bei 50 Hz, 1 T

Quelle: Fischer, R.,
Elektr. Maschinen, Hanser-Verlag

G3 Elektrotechnische Grundlagen

Übersicht



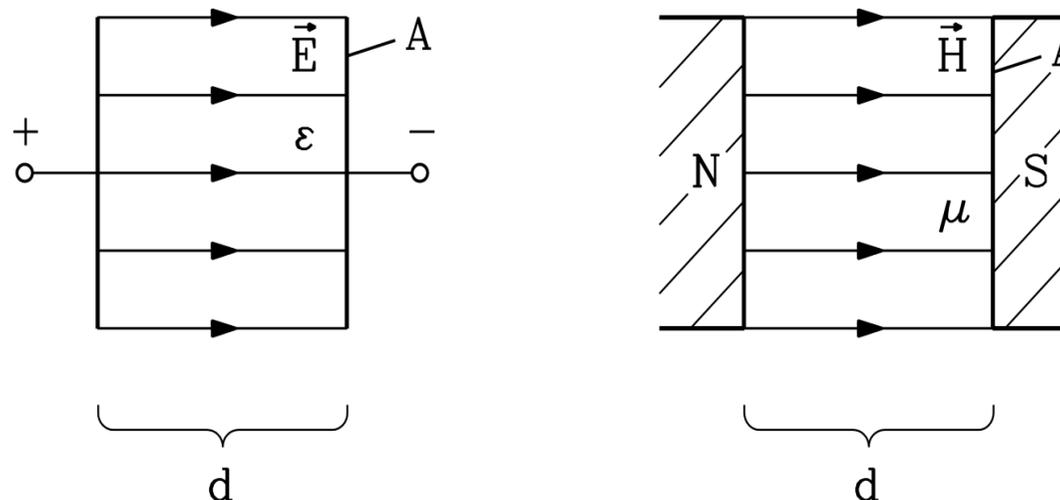
1. OHM'sches Gesetz, AMPERE'scher Durchflutungssatz
2. Magnetische Werkstoffe
3. FARADAY'sches Induktionsgesetz, LORENTZ-Kraft
4. Flüsse und Induktivitäten, Ummagnetisierungsverluste
5. Energie
6. Momentanleistung, Effektivwert, Sinusbetrieb:
Wirk-, Blind- und Scheinleistung einphasig
7. Bezugspfeile
8. Leistungsanpassung
9. Transformatorprinzip



G3.5 Energie

Elektromagnetische Energie

- **Niederfrequenz**bereich: Elektrisches Feld E bzw. D und magnetisches Feld H bzw. B getrennt betrachtbar (= Magnetfelder zufolge $\partial D/\partial t$ vernachlässigt)
- **Gespeicherte elektrische bzw. magnetische Energie** im Volumen $A \cdot d$:
im ele. Feld E bzw. $D = \varepsilon \cdot E$ (z. B. Kondensator): $W = Ad \cdot (\varepsilon \cdot E^2)/2 = Ad \cdot D^2/(2\varepsilon)$
im mag. Feld H bzw. $B = \mu \cdot H$ (z. B. Luftspalt zw. Polen):
 $W = Ad \cdot (\mu \cdot H^2)/2 = Ad \cdot B^2/(2\mu)$



G3.5 Energie

Energieumsetzung mit Magnetfeld statt elektrischem Feld



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Änderung der Energie bei kleinen Wegänderungen = Kraft $F = dW/dx$

- **Beispiel:** Gleiches Luft-Volumen: Fläche $A = 1\text{m}^2$, Abstand $d = 1\text{mm}$

Luft: Durchschlagfeldstärke $E = 40\text{ kV/cm}$, $\varepsilon = \varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}\text{ As/(Vm)}$

Magnetfeld $B = 1\text{T}$, $\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\text{ Vs/(Am)}$

- elektrische Energie:

$$W = Ad \cdot (\varepsilon E^2)/2 = 1 \cdot 10^{-3} \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} \cdot (4 \cdot 10^6)^2 / 2 = 0.07\text{ Ws}$$

- magnetische Energie:

$$W = Ad \cdot B^2 / (2\mu) = 1 \cdot 10^{-3} \cdot 1^2 / (2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}) = 400\text{ Ws} \Rightarrow \underline{400/0.07 = 5700 (!)}$$

- **Das magnetische Feld erlaubt wesentlich größere Energiedichten und wird daher bevorzugt für elektrische Energiewandler eingesetzt!**

Ausnahmen: Mikromotoren: Elektrostatische Kräfte, Piezoeffekt-Kräfte
(gut miniaturisierbar, Kräfte sehr klein)



G3.5 Energie

Nutzung des Elektromagnetismus für die Energiewandlung



- **Nutzung** des Durchflutungssatzes für Magnetfelderregung in Transformatoren, elektrische Maschinen, magnetohydrodynamische Wandlern, elektromagnetische Aktoren etc.
- Erregung von **Magnetfeldern** mit Strom (AMPERE'scher Durchflutungssatz) oder Permanentmagneten
- Berührungslose **Spannungsinduktion** und damit Energieübertragung (FARADAY'sches Induktionsgesetz)
- **Kraftwirkung** auf stromdurchflossene Leiter im Magnetfeld bewirkt Umsatz von elektrischer in mechanische Energie (LORENTZ-Kraft)



G3 Elektrotechnische Grundlagen

Übersicht

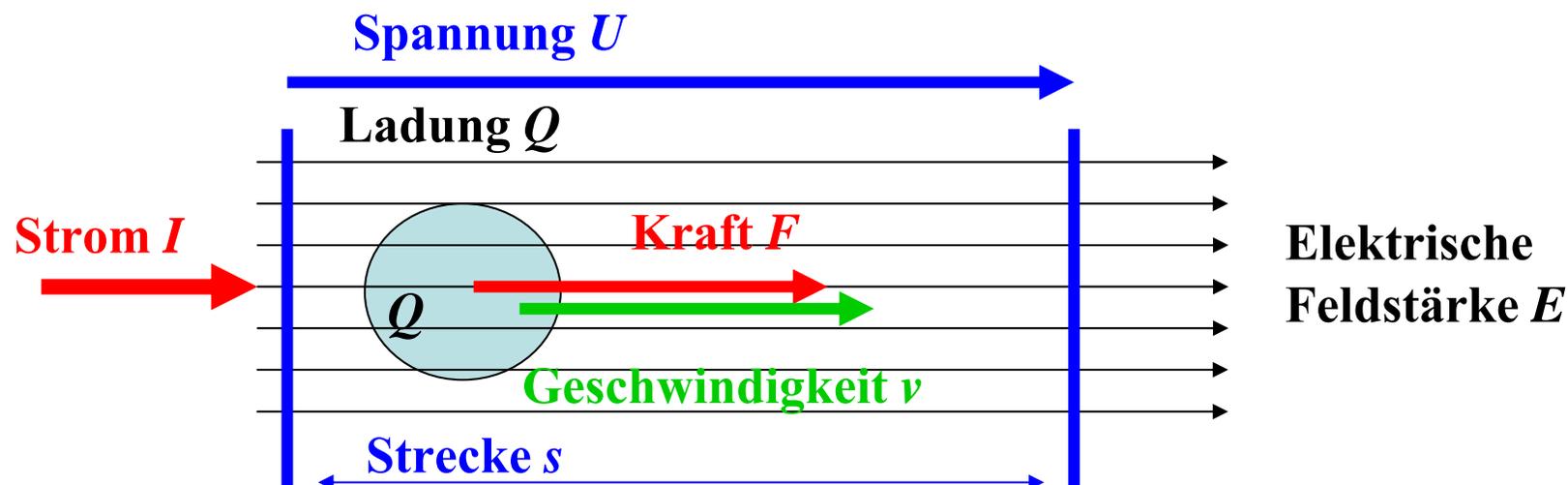


1. OHM'sches Gesetz, AMPERE'scher Durchflutungssatz
2. Magnetische Werkstoffe
3. FARADAY'sches Induktionsgesetz, LORENTZ-Kraft
4. Flüsse und Induktivitäten, Ummagnetisierungsverluste
5. Energie
6. **Momentanleistung, Effektivwert, Sinusbetrieb:
Wirk-, Blind- und Scheinleistung einphasig**
7. Bezugspfeile
8. Leistungsanpassung
9. Transformatorprinzip



G3.6 Momentanleistung, Effektivwert, Sinusbetrieb: ... Elektrische Momentanleistung $P = I \cdot U$

- Strom I = Bewegte elektrische Ladung Q im elektrischen Feld E
- Spannung U = elektrische Potentialdifferenz auf der Strecke s im Feld E
- **Coulomb-Kraftwirkung** $F = Q \cdot E$, Geschwindigkeit: $v = s/t$
- Leistung $P = F \cdot v = (Q \cdot E) \cdot v = (Q \cdot E) \cdot (s/t) = (Q/t) \cdot (E \cdot s) = I \cdot U$



G3.6 Momentanleistung, Effektivwert, Sinusbetrieb: ... Effektivwert eines periodisch veränderlichen Stroms



Effektivwert / eines periodisch veränderlichen Stroms i = äquivalenter Gleichstrom I , der an einem Widerstand R während einer ganzen Zahl von Perioden T dieselbe Leistung P wie dieser periodische Strom verrichtet.

$$P = \bar{p} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) \cdot R \cdot dt = I^2 R \quad \Rightarrow \quad I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) \cdot dt}$$

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) \cdot dt}$$

Fazit:

Aus der mittleren Leistung ermittelte Ersatzgröße einer allgemein periodischen Größe $i(t)$ (Periode T), deren Leistung an einem Widerstand R gleich groß ist wie die einer Gleichgröße I .

Sonderfall: Effektivwert I einer sinusförmig veränderlichen Größe $i(t)$: $I = \hat{I} / \sqrt{2}$

Effektivwert einer Sinuswechselfspannung: $U = \hat{U} / \sqrt{2}$



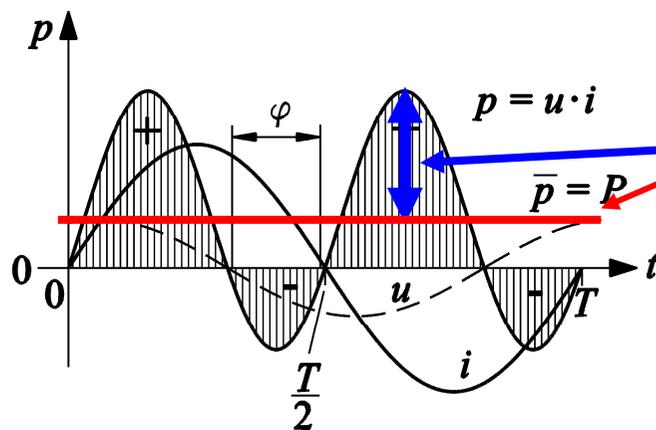
G3.6 Momentanleistung, Effektivwert, Sinusbetrieb: ... Einphasen-Momentan-Leistung

$$p(t) = \hat{U} \sin(\omega t + \varphi) \cdot \hat{I} \cdot \sin \omega t = \hat{U} [\sin \omega t \cdot \cos \varphi + \cos \omega t \cdot \sin \varphi] \cdot \hat{I} \cdot \sin \omega t$$

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{\hat{U}\hat{I}}{2} \cdot \cos \varphi \cdot (1 - \cos 2\omega t) + \frac{\hat{U}\hat{I}}{2} \cdot \sin \varphi \cdot \sin 2\omega t = \\ &= P \cdot (1 - \cos 2\omega t) + Q \cdot \sin 2\omega t \end{aligned}$$

Scheinleistung S

$$p(t) = P + p_{\sim}(t) = UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t + \varphi)$$



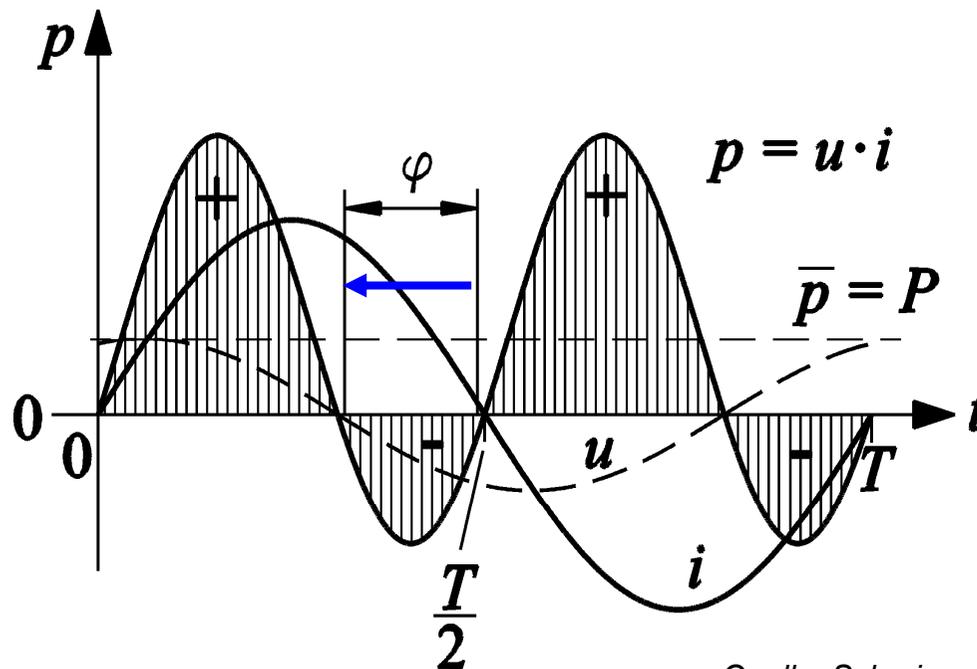
Mittelwert P „Pendel“-Leistung S

$$S = U \cdot I$$

Quelle: Schreiner, Physik

G3.6 Momentanleistung, Effektivwert, Sinusbetrieb: ... P und Q beim Phasenwinkel φ

Sinus-Wechselstrom und -Spannung: Phasenverschiebungswinkel φ



$$u(t) = \hat{U} \sin(\omega t + \varphi)$$

$$i(t) = \hat{I} \sin(\omega t)$$

$$p(t) = P \cdot (1 - \cos 2\omega t) + Q \cdot \sin 2\omega t$$

Wirkleistung: $P = U \cdot I \cdot \cos \varphi$

Blindleistung: $Q = U \cdot I \cdot \sin \varphi$

Quelle: Schreiner, Physik

Beispiel:

Momentanwerte von Spannung, Strom, $\varphi > 0$

Leistung an einem R-L-Glied: $0 < \varphi < 90^\circ$

G3.6 Momentanleistung, Effektivwert, Sinusbetrieb: ... Scheinleistung S , Wirk- und Blindstrom I_w, I_b

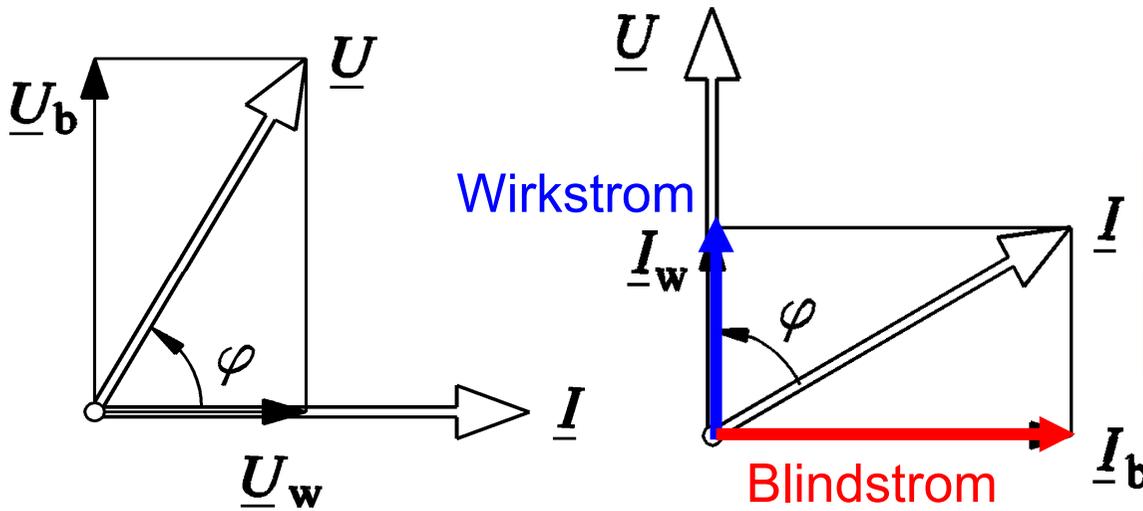


$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = U \cdot I$$

$$I_w = I \cdot \cos \varphi$$

$$I_b = I \cdot \sin \varphi$$

$$I = \sqrt{I_w^2 + I_b^2}$$



$$U \cdot I_w = UI \cdot \cos \varphi = P$$

$$U \cdot I_b = UI \cdot \sin \varphi = Q$$

Quelle: Schreiner, Physik



G3.6 Momentanleistung, Effektivwert, Sinusbetrieb: ...

Zusammenfassung: Einphasenleistung bei Sinus-Wechselstrom



- Bei Einphasensystemen **pulsiert die Momentanleistung $p(t)$ um den Mittelwert P (Wirkleistung), mit **doppelter Frequenz $2f$ ($\omega = 2\pi f$)** mit der **Amplitude S (Scheinleistung)**!**

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = \hat{U} \sin(\omega t) \cdot \hat{I} \sin(\omega t - \varphi) \quad \text{Mittelwert: } P = (1/T) \cdot \int_0^T p(t) \cdot dt$$

$$p(t) = (\hat{U} \cdot \hat{I} / 2) \cdot [\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi)] = (\hat{U} \cdot \hat{I} / 2) \cdot [\cos \varphi - \cos 2\omega t \cdot \cos \varphi - \sin 2\omega t \cdot \sin \varphi]$$

$$p(t) = P - S \cdot \cos(2\omega t - \varphi) \quad P = U \cdot I \cdot \cos \varphi \quad S = U \cdot I$$

- Zerlegung der Momentanleistung $p(t)$ in P und S oder P und Q :

$$p(t) = P \cdot [1 - \cos(2\omega t)] - Q \cdot \sin(2\omega t)$$

Wirkleistung $P = U \cdot I \cdot \cos \varphi$ **Blindleistung** $Q = U \cdot I \cdot \sin \varphi$

$P \cdot [1 - \cos(2\omega t)]$ **pulsiert** mit Amplitude P und Frequenz $2f$ um Mittelwert P

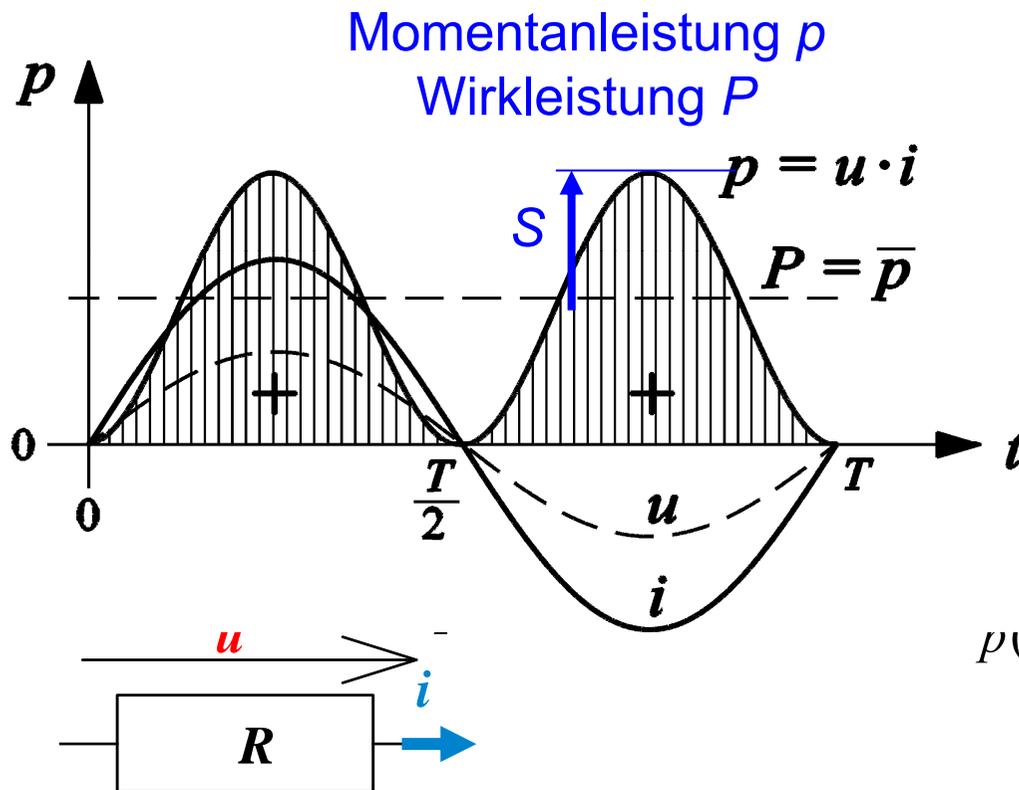
$Q \cdot \sin(2\omega t)$ **pulsiert** mit Amplitude Q und Frequenz $2f$ um Mittelwert Null

- **Scheinleistung:** $S = \sqrt{P^2 + Q^2} = U \cdot I$



G3.6 Momentanleistung, Effektivwert, Sinusbetrieb: ...

Beispiel: Einphasen-Wirkleistung (für $\varphi = 0$)



$$u(t) = \hat{U} \cdot \sin \omega t$$

$$i(t) = \hat{I} \cdot \sin \omega t = (\hat{U} / R) \cdot \sin \omega t$$

Momentanleistung:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = \frac{\hat{U}^2}{R} \cdot \sin^2(\omega t)$$

$$p(t) = \frac{\hat{U}\hat{I}}{2} - \frac{\hat{U}\hat{I}}{2} \cos(2\omega t) = P + p_{\sim}(t)$$

Leistungs-Mittelwert: $P = \bar{p} = U \cdot I = U^2 / R$

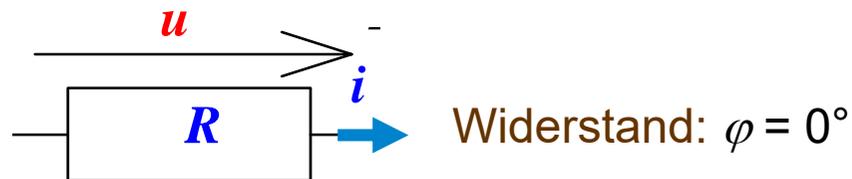
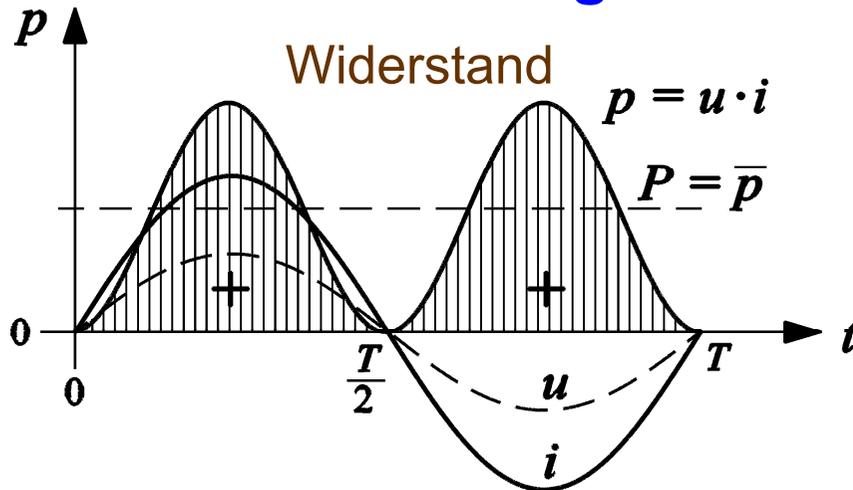
Quelle: Schreiner, Physik



G3.6 Momentanleistung, Effektivwert, Sinusbetrieb: ...

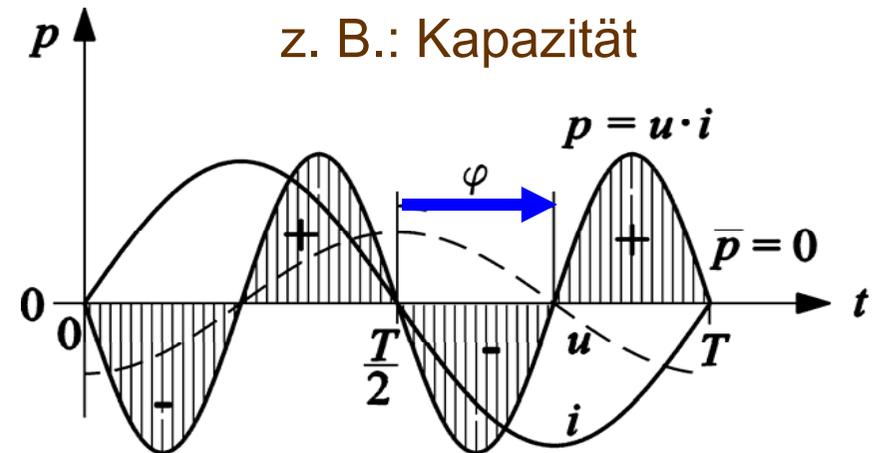
Beispiel: Elektrische Wirk- und Blindleistung

Wirkleistung



Quelle: Schreiner, Physik

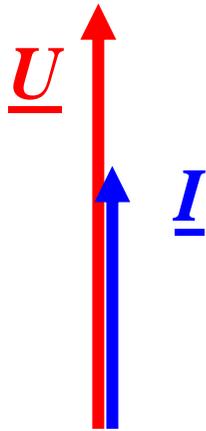
Blindleistung



G3.6 Momentanleistung, Effektivwert, Sinusbetrieb: ... Widerstand, Induktivität & Kapazität

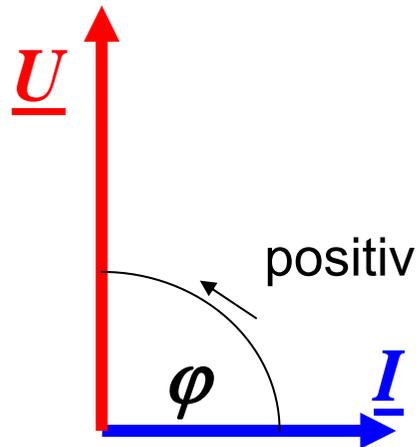


Widerstand



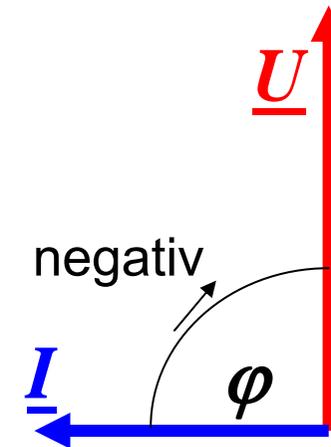
Widerstand: $\varphi = 0^\circ$

Induktivität



Induktivität: $\varphi = 90^\circ$

Kapazität



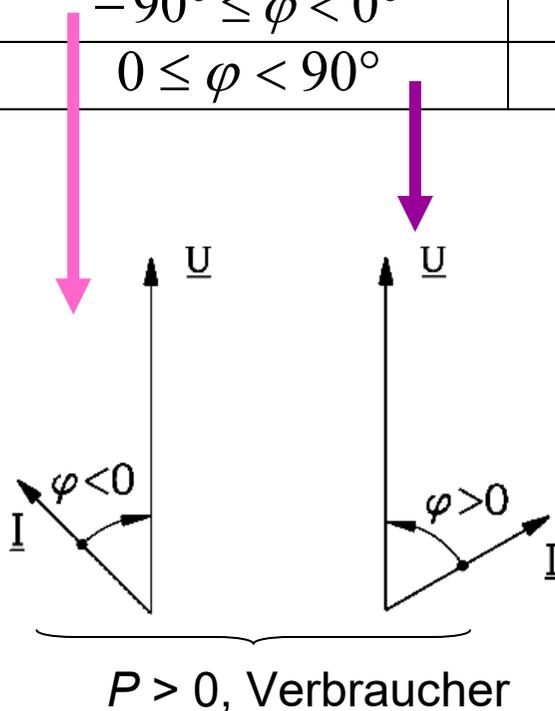
Kapazität: $\varphi = -90^\circ$

Der Phasenwinkel φ wird **VOM Strom ZUR Spannung** IM MATHEMATISCH POSITIVEN ZÄHLSINN (GEGEN-UHRZEIGERSINN) gezählt.



G3.6 Momentanleistung, Effektivwert, Sinusbetrieb: ... Zählweise von Wirk- und Blindleistung

	Wirkleistung $P = UI \cos \varphi$	Blindleistung $Q = UI \sin \varphi$
$-90^\circ \leq \varphi < 0^\circ$	$P > 0$, Verbraucher	$Q < 0$, kapazitiver Verbraucher
$0 \leq \varphi < 90^\circ$	$P > 0$, Verbraucher	$Q > 0$, induktiver Verbraucher



Induktive Blindleistung ist positiv

Kapazitive Blindleistung ist negativ

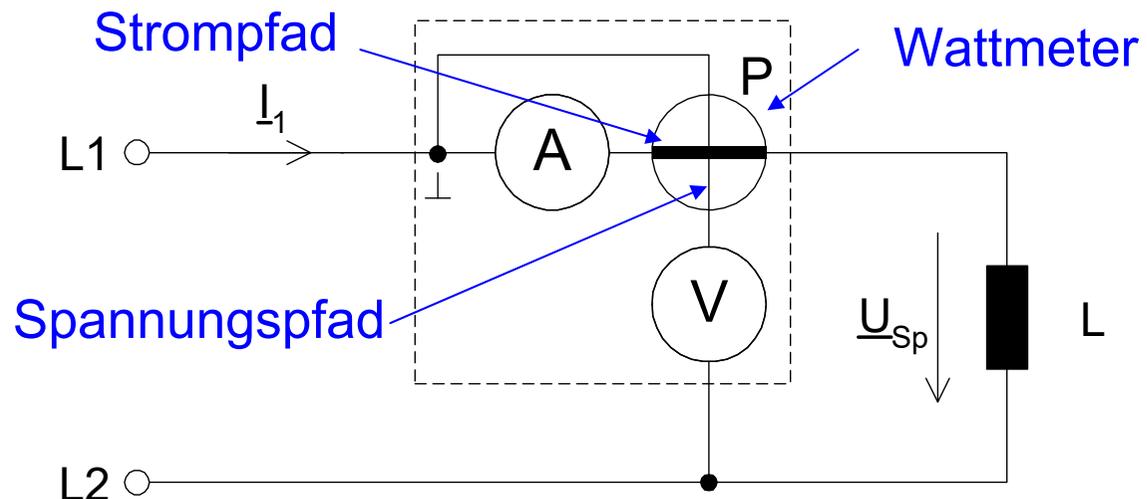
G3.6 Momentanleistung, Effektivwert, Sinusbetrieb: ... Messung der elektrischen Leistung

Wattmeter-Messung:

- **Elektrodynamische** Wattmeter: i. A. für **sinus**förmige Strom & Spannung
- **Elektronische** Wattmeter: **beliebige** Zeitverläufe von Strom & Spannung

Beispiel:

Leistungsmessung an einer **Drossel** (= reale Induktivität)



G3 Elektrotechnische Grundlagen

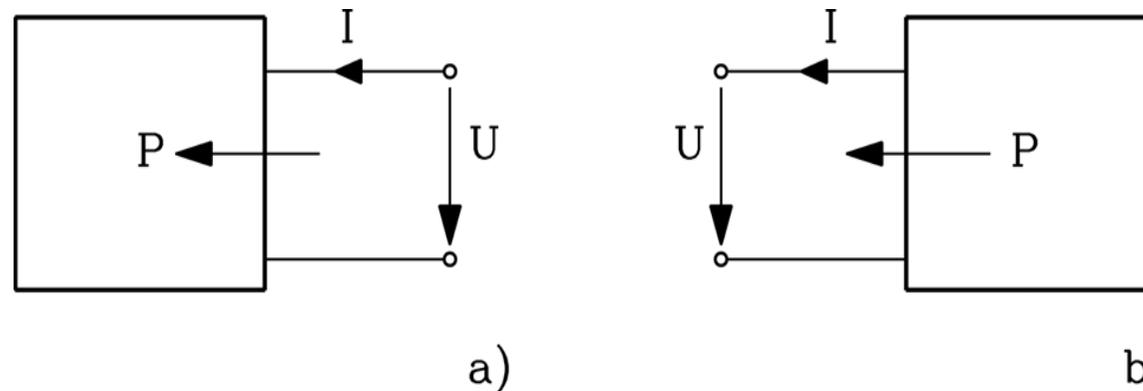
Übersicht



1. OHM'sches Gesetz, AMPERE'scher Durchflutungssatz
2. Magnetische Werkstoffe
3. FARADAY'sches Induktionsgesetz, LORENTZ-Kraft
4. Flüsse und Induktivitäten, Ummagnetisierungsverluste
5. Energie
6. Momentanleistung, Effektivwert, Sinusbetrieb:
Wirk-, Blind- und Scheinleistung einphasig
7. **Bezugspfeile**
8. Leistungsanpassung
9. Transformatorprinzip



G3.7 Bezugspfeile Zählpfeilsystem für Wirkleistungen



$$P = U \cdot I$$

a) Zugeführte elektrische Wirkleistung P ist positiv: **Verbraucherzählpfeilsystem**

b) Abgegebene elektrische Wirkleistung P ist positiv: **Erzeugerzählpfeilsystem**

Hier wird ausschließlich das **VZS** verwendet.

Im **VZS** gilt:

- $P > 0$: **Verbraucher** (z. B. Motor, Heizwiderstand, Laden v. Batterien,...)
- $P < 0$: **Erzeuger** (z. B. Generator, Batterie, Brennstoffzelle,...)

G3 Elektrotechnische Grundlagen

Übersicht

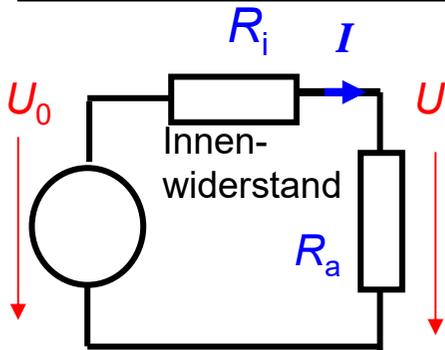


1. OHM'sches Gesetz, AMPERE'scher Durchflutungssatz
2. Magnetische Werkstoffe
3. FARADAY'sches Induktionsgesetz, LORENTZ-Kraft
4. Flüsse und Induktivitäten, Ummagnetisierungsverluste
5. Energie
6. Momentanleistung, Effektivwert, Sinusbetrieb:
Wirk-, Blind- und Scheinleistung einphasig
7. Bezugspfeile
8. Leistungsanpassung
9. Transformatorprinzip



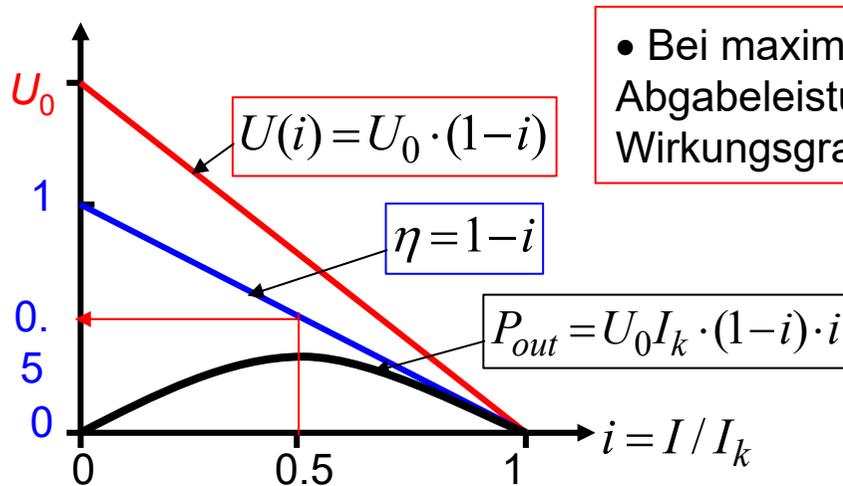
G3.8 Leistungsanpassung

Beispiel: Gleichspannungsquelle U_0 , Verbraucher R_a

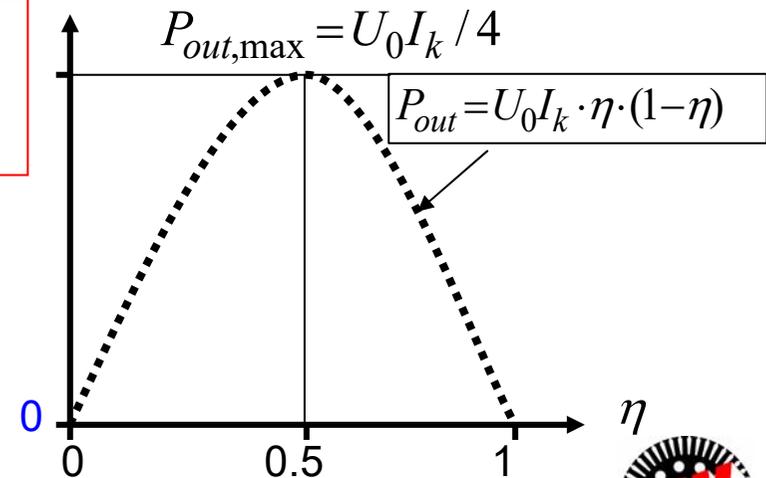


- Kurzschlussstrom: ($R_a = 0$): $I_k = U_0 / R_i$
- Laststrom: $I = \frac{U_0}{R_i + R_a}$
- Bezogener Laststrom: $i = I / I_k$
- Lastspannungscharakteristik:
 $U = U_0 - I \cdot R_i = U_0 \cdot (1 - I / I_k) = U_0 \cdot (1 - i) = U(i)$

- Abgabeleistung: $P_{out} = U \cdot I = U_0 I_k \cdot (1 - i) \cdot i$
- Wirkungsgrad: $\eta = P_{out} / P_{in} = (U \cdot I) / (U_0 \cdot I) = U / U_0 = 1 - i \Rightarrow P_{out} = U_0 I_k \cdot \eta \cdot (1 - \eta)$

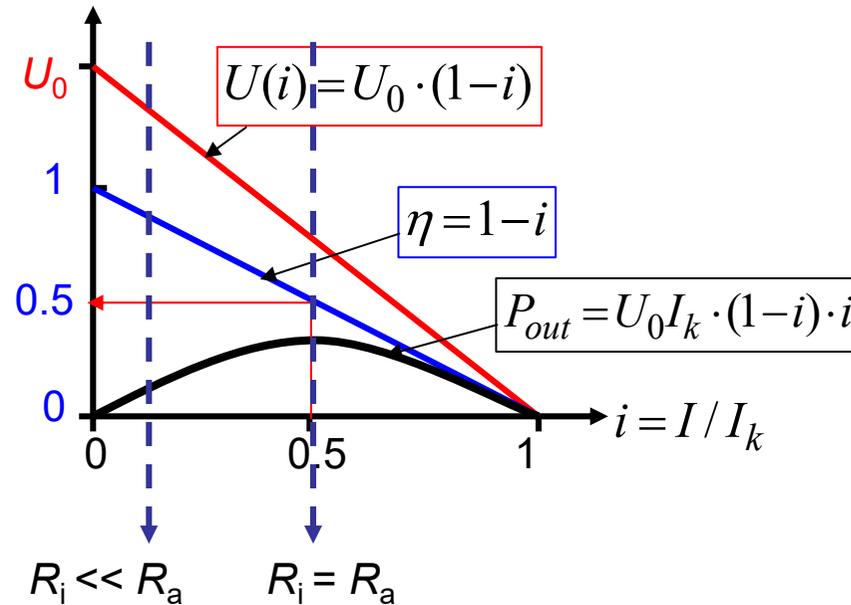


• Bei maximaler Abgabeleistung ist der Wirkungsgrad nur 50%!



G3.8 Leistungsanpassung

Arbeitsbereiche der Energie- und Nachrichtentechnik



$R_i \ll R_a:$

Einsatzbereich der **Energietechnik**: hoher Wirkungsgrad η angestrebt!

Aber: Maximale Systemleistung (z. B. Netzkurzschlussleistung $U_0 I_k = U_0^2 / R_i$) viel höher als die genutzte Leistung!

$R_i = R_a:$

Einsatzbereich der **Nachrichtentechnik**: hohe Empfangs- und Sendeleistung P_{out} angestrebt („Leistungsanpassung“)!

Kleiner Wirkungsgrad wegen der rel. niedrigen Leistungen verschmerzbar!

G3 Elektrotechnische Grundlagen

Übersicht

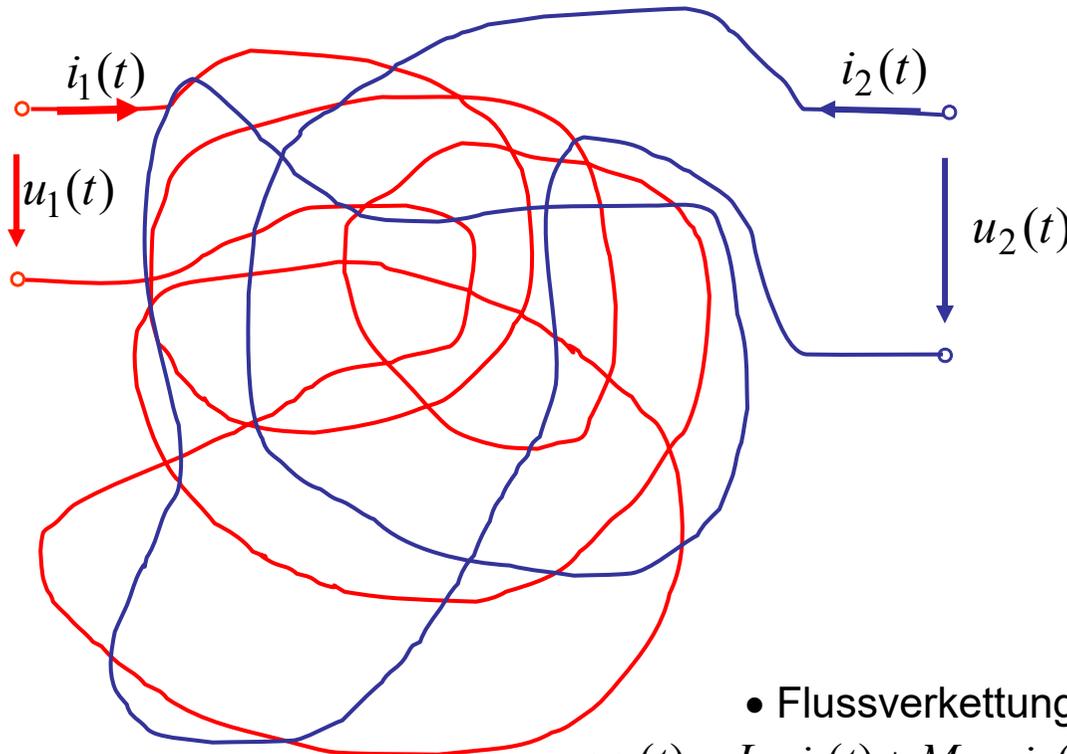


1. OHM'sches Gesetz, AMPERE'scher Durchflutungssatz
2. Magnetische Werkstoffe
3. FARADAY'sches Induktionsgesetz, LORENTZ-Kraft
4. Flüsse und Induktivitäten, Ummagnetisierungsverluste
5. Energie
6. Momentanleistung, Effektivwert, Sinusbetrieb:
Wirk-, Blind- und Scheinleistung einphasig
7. Bezugspfeile
8. Leistungsanpassung
9. Transformatorprinzip



G3.9 Transformatorprinzip

Der „allgemeine“ Transformator



- Zeitverläufe z. B. der eingprägten Spannungen $u_1(t)$, $u_2(t)$ beliebig zeitlich veränderlich
- R_1, R_2 : **Ohm'sche Widerstände** der Wicklungen 1 und 2
- L_1, L_2 : **Selbstinduktivitäten** der Wicklungen 1 und 2
- $M_{12} = M_{21} = M$: **Gegeninduktivität** zwischen Wicklung 1 und 2: Die beiden Wicklungen verhalten sich zueinander „**reziprok**“

- Flussverkettungen ψ_1 , ψ_2 primär und sekundär:

$$\psi_1(t) = L_1 \cdot i_1(t) + M_{12} \cdot i_2(t) \quad \psi_2(t) = L_2 \cdot i_2(t) + M_{21} \cdot i_1(t)$$

- Gleichungen zur Berechnung von $i_1(t)$, $i_2(t)$:

$$u_1(t) = R_1 \cdot i_1(t) + d\psi_1(t) / dt$$

$$u_1(t) = R_1 \cdot i_1(t) + L_1 \cdot di_1(t) / dt + M_{12} \cdot di_2(t) / dt$$

$$u_2(t) = R_2 \cdot i_2(t) + d\psi_2(t) / dt$$

$$u_2(t) = R_2 \cdot i_2(t) + L_2 \cdot di_2(t) / dt + M_{21} \cdot di_1(t) / dt$$

G3.9 Transformatorprinzip

Messtechnische Bestimmung von R_1, R_2, L_1, L_2, M



- Die Parameter $R_1, R_2, L_1, L_2, M_{12} = M_{21} = M$ sind aus Leerlauf- und Kurzschlussmessung **eindeutig bestimmbar**, unabhängig davon, wie „allgemein“ der Transformator aufgebaut ist.

1) Gleichgrößenmessung: $u_1(t) = U_{1,DC} = R_1 \cdot I_{1,DC}$ $u_2(t) = U_{2,DC} = R_2 \cdot I_{2,DC}$

$$R_1 = U_{1,DC} / I_{1,DC}$$

$$R_2 = U_{2,DC} / I_{2,DC}$$

2) Wechselgrößenmessung: Messfrequenz $f = \omega / (2\pi)$

a) Leerlaufmessung: Speisung primär mit \underline{U}_{10} , sekundär offen: $\underline{I}_{20} = 0$, und umgekehrt

$$\underline{U}_{10} = R_1 \cdot \underline{I}_{10} + j\omega \cdot L_1 \cdot \underline{I}_{10} \Rightarrow \underline{Z}_{10} = \underline{U}_{10} / \underline{I}_{10}: \text{Leerlaufimpedanz primär}; \underline{U}_{20} = j\omega \cdot M_{21} \cdot \underline{I}_{10}$$

$$L_1 = |\underline{Z}_{10} - R_1| / \omega$$

$$L_2 = |\underline{Z}_{20} - R_2| / \omega$$

$$M = |\underline{U}_{20} / \underline{I}_{10}| / \omega = |\underline{U}_{10} / \underline{I}_{20}| / \omega$$

b) Kurzschlussmessung: Speisung primär mit \underline{U}_{1k} , sekundär Kurzschluss: $\underline{U}_{2k} = 0$

$$\underline{U}_{1k} = R_1 \cdot \underline{I}_{1k} + j \cdot \omega \cdot L_1 \cdot \underline{I}_{1k} + j \cdot \omega \cdot M \cdot \underline{I}_{2k} \Rightarrow \underline{Z}_{1k} = \underline{U}_{1k} / \underline{I}_{1k} : \text{Kurzschlussimpedanz primär};$$

$$0 = R_2 \cdot \underline{I}_{2k} + j \cdot \omega \cdot L_2 \cdot \underline{I}_{2k} + j \cdot \omega \cdot M \cdot \underline{I}_{1k}$$

$$M = \frac{1}{\omega} \cdot \sqrt{(\underline{Z}_{1k} - R_1 - j \cdot \omega \cdot L_1) \cdot (R_2 + j \cdot \omega \cdot L_2)}$$

Achtung: „Streuinduktivitäten“ $L_{1\sigma}, L_{2\sigma}$ sind über \underline{u} „willkürlich“ festgelegte Parameter und daher **nicht eindeutig messbar**.



G3.9 Transformatorprinzip

Ersatzschaltbild des „allgemeinen“ Transformators

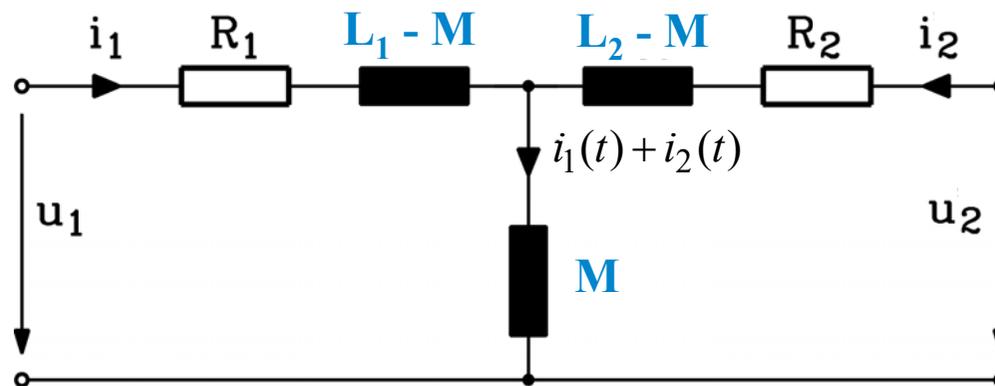


$$u_1(t) = R_1 \cdot i_1(t) + L_1 \cdot di_1(t) / dt + M_{12} \cdot di_2(t) / dt$$

$$u_2(t) = R_2 \cdot i_2(t) + L_2 \cdot di_2(t) / dt + M_{21} \cdot di_1(t) / dt$$

$$u_1(t) = R_1 \cdot i_1(t) + (L_1 - M) \cdot di_1(t) / dt + M \cdot d(i_1(t) + i_2(t)) / dt$$

$$u_2(t) = R_2 \cdot i_2(t) + (L_2 - M) \cdot di_2(t) / dt + M \cdot d(i_1(t) + i_2(t)) / dt$$



- Die Parameter $L_1 - M$, $L_2 - M$ sind i. A. **NICHT** die „Streuinduktivitäten“ $L_{1\sigma}$, $L_{2\sigma}$
- Beim „allgemeinen“ Transformator ist die gegenseitige Kopplung von 1 und 2 so komplex, dass man den z. B. mit Wicklung 1 verketteten Fluss i. A. nicht eindeutig in einen Anteil, der nur mit 1 verkettet ist („**Streufluss**“), und einen, der mit 1 UND 2 verkettet ist („**Hauptfluss**“), auftrennen kann.



G3.9 Transformatorprinzip

BLONDEL'sche Streuziffer σ

BLONDEL'sche
Streuziffer

$$\sigma = 1 - \frac{M^2}{L_1 \cdot L_2} = 1 - k^2$$

Kopplungsfaktor

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}}$$

- a) $M = 0$: **Keine magnetische Kopplung** von Wicklung 1 und 2: $\sigma = 1, k = 0$;
Die primären und sekundären Flussverkettungen ψ_1, ψ_2 sind ausschließlich mit der jeweils erregenden Wicklung verkettet.
Sie sind daher STREUFLÜSSE.
- b) $M^2 = L_1 L_2$: **Maximal mögliche magnetische Kopplung** von 1 und 2: $\sigma = 0, k = 1$;
Die primären und sekundären Flussverkettungen ψ_1, ψ_2 sind auch vollständig mit der jeweils anderen Wicklung verkettet:
Es tritt KEIN STREUFLUSS auf !

G3.9 Transformatorprinzip

Spannungsgleichungen mit willkürlich wählbarem Übersetzungsverhältnis \ddot{u}



$$\left. \begin{aligned} u_1 &= R_1 \cdot i_1 + L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} + M \cdot \ddot{u} \cdot \frac{d(i_2 / \ddot{u})}{dt} \\ u_2 \cdot \ddot{u} &= R_2 \cdot \ddot{u}^2 \cdot (i_2 / \ddot{u}) + L_2 \cdot \ddot{u}^2 \cdot \frac{d(i_2 / \ddot{u})}{dt} + M \cdot \ddot{u} \cdot \frac{di_1}{dt} \end{aligned} \right\} \text{Gleichungen ändern sich trotz } \ddot{u} \text{ mathematisch nicht!}$$

$$\underline{i'_2 = \frac{i_2}{\ddot{u}} \quad u'_2 = u_2 \cdot \ddot{u} \quad M' = \ddot{u} \cdot M \quad R'_2 = \ddot{u}^2 \cdot R_2 \quad L'_2 = \ddot{u}^2 \cdot L_2}$$

$$\begin{aligned} u_1 &= R_1 \cdot i_1 + L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} + M' \cdot \frac{di'_2}{dt} = R_1 \cdot i_1 + (L_1 - M') \cdot \frac{di_1}{dt} + M' \cdot \frac{d(i_1 + i'_2)}{dt} \\ u'_2 &= R'_2 \cdot i'_2 + L'_2 \cdot \frac{di'_2}{dt} + M' \cdot \frac{di_1}{dt} = R'_2 \cdot i'_2 + (L'_2 - M') \cdot \frac{di'_2}{dt} + M' \cdot \frac{d(i_1 + i'_2)}{dt} \end{aligned}$$

„Fiktiver Summenstrom“: $i_1 + i'_2$

Durch die Einführung des willkürlich wählbaren Faktors $\ddot{u} \neq 0$ werden

a) der sekundäre Strom und

b) die sekundären Spannungen

für weitere Rechnungen mit \ddot{u} skalierbar, was nützlich ist.



G3.9 Transformatorprinzip

Freie Wahl des Übersetzungsverhältnisses \ddot{u}

Beispiele:

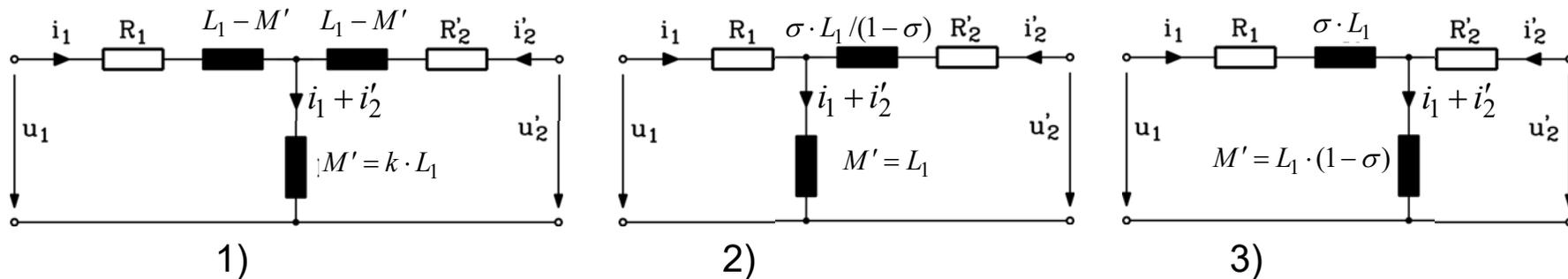
$$1) \ddot{u} = \sqrt{L_1 / L_2} \Rightarrow L_1 - M' = L_1 - \sqrt{L_1 / L_2} \cdot M, \quad L_2' - M' = (\sqrt{L_1 / L_2})^2 \cdot L_2 - \sqrt{L_1 / L_2} \cdot M = L_1 - M'$$

$$L_1 - M' = L_1 \cdot (1 - k) = L_2' - M' \quad R_2' = (L_1 / L_2) \cdot R_2 \quad M' = k \cdot L_1$$

$$2) \ddot{u} = L_1 / M \Rightarrow L_1 - M' = 0, \quad L_2' - M' = \frac{\sigma}{1 - \sigma} \cdot L_1, \quad M' = L_1$$

$$3) \ddot{u} = M / L_2 \Rightarrow L_1 - M' = \sigma \cdot L_1, \quad L_2' - M' = 0, \quad M' = L_1 \cdot (1 - \sigma)$$

Je nach Wahl von \ddot{u} **UNTERSCHIEDLICHE** Aufteilung der Induktivitäten auf 1 und 2 im Ersatzschaltbild!



G Grundlagen

G3 Elektrotechnische Grundlagen



Zusammenfassung (1)

- ET-Grundgesetze:
Durchflutungssatz, Induktionsgesetz, keine magn. Monopole, aber el. Monopole
- ET-Materialien:
Leiter- vs. Isolierwerkstoffe, magnetische vs. amag. Werkstoffe, Dielektrika
- *Coulomb*-Kraft, *Lorentz*-Kraft und **verallg. Lorentz-Kraft als Oberbegriff**
- **Induktivitäten** und **Kapazitäten** als Ersatzgrößen für magnetische und elektrische Felder



G Grundlagen

G3 Elektrotechnische Grundlagen



Zusammenfassung (2)

- Elektrische und elektromechanische **Wandler** größerer Leistung nützen das Magnetfeld
- Allgemein: Elektrische Momentanleistung
Bei **Sinusbetrieb**: Wirk- Blind- und Scheinleistung
- Erzeuger- und Verbraucher-**Zählpeilsystem**
- **Energietechnik**: Hoher Wirkungsgrad, daher KEINE Leistungsanpassung
- Transformatorprinzip beruht auf dem Induktionsgesetz

