



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

Institut für Elektrische  
Energiewandlung



# Energietechnik

## Aufgabensammlung



(Quelle: Siemens AG & Vattenfall)

Ausgabe SS 2022

Prof. Dr.-Ing. habil. Dr. h.c. Andreas Binder

**Vorwort**

Liebe Studentin! Lieber Student!

Die vorliegende Aufgabensammlung umfasst Berechnungsbeispiele zum Stoffumfang der Vorlesung "Energietechnik" (siehe dazu den Foliensatz und das Skript). Da die Prüfung schriftlich ist, existiert neben den in den Übungen vorgerechneten Beispielen zusätzlich diese **Aufgabensammlung** mit ausgearbeiteten Beispielen zu den einzelnen Vorlesungskapiteln. Hier finden Sie auch **Kontrollfragen** zu den einzelnen Vorlesungskapiteln zu Ihrer Selbstkontrolle, ob Sie den Lehrinhalt verstanden haben. Ähnliche Fragen werden auch bei der schriftlichen Prüfung, begleitend zu den Berechnungsaufgaben, gestellt.

Sollten Sie Fragen, Wünsche oder Anregungen haben, wenden Sie sich bitte an meine Assistenten oder direkt an mich. Ich wünsche Ihnen guten Erfolg bei Ihrem weiteren Studium und gutes Gelingen bei der Prüfung zur Vorlesung "Energietechnik".

Prof. Dr.-Ing. habil. Dr. h. c. Andreas Binder

Darmstadt, im März 2022

**Inhaltsverzeichnis zur Aufgabensammlung „Energietechnik“****Kontrollfragen für die Vorbereitung auf die Prüfung**

- G Grundlagen
- R Ressourcen
- B Bedarf
- P Prozesse
- T Transformatoren und Generatoren
- V Elektrische Energieversorgung
- S Speicher

**Aufgaben Kapitel G: Grundlagen (28)**

- G1 Sonnen-Erd-Anziehungskraft, kinetische Energie der Erde
- G2 Elektrostatische Kraft, gespeicherte elektrische Energie
- G3 Elektrischer Stromfluss, Verlustleistung
- G4 Brunnenpumpe
- G5 Energiestrom der Sonne
- G6 Durchlauferhitzer versus Heißwasserspeicher
- G7 Menschliche Leistung am Heimtrainer
- G8 Menschliche Leistungsfähigkeit
- G9 Energieumsatz im menschlichen Körper
- G10 Potentielle und kinetische Energie
- G11 Energieverbrauch beim Autofahren
- G12 Strömende Flüssigkeit
- G13 Wasserstoffgas
- G14 Erwärmung unterschiedlicher Stoffe
- G15 Wasserkocher
- G16 Badeofen
- G17 Schornstein
- G18 Mechanische Arbeit und Leistung
- G19 Radfahrer
- G20 Golfstrom
- G21 Thermisch-energetische Betrachtung des Menschen
- G22 Entladung einer Gewitterfront
- G23 Energienutzung - Bügeleisen
- G24 Wassererwärmung mit Durchlauferhitzung
- G25 Stromleitung im el. Leiter und Isolator
- G26 Stromverdrängung
- G27 Sonnenstrahlung – *Poynting*-Vektor
- G28 Kochplatte

**Aufgaben Kapitel R: Ressourcen und Energieströme (12)**

- R1 Windpark
- R2 Gezeitenturbine
- R3 Dieselkraftstoff
- R4 Elektrofähre
- R5 Braunkohlekraftwerk 1
- R6 Aufwindkraftwerk
- R7 Thermisches Parabolrinnen-Kraftwerk
- R8 Solarthermie
- R9 Abgas-Wärmenutzung

- R10 E-Mobility versus Biosprit
- R11 Preisvergleich Erdöl vs. Erdgas
- R12 Preisvergleich Erdöl/Erdgas/Steinkohle

**Aufgaben Kapitel B: Bedarf und Wachstum (3)**

- B1 Bevölkerungswachstum
- B2 Wachstum des Weltenergiebedarfs
- B3 Bevölkerungszuwachs

**Aufgaben Kapitel P: Prozesse (21)**

- P1 Wasserkraftwerk
- P2 Mischung zweier unterschiedlich warmer Flüssigkeiten
- P3 Wärmetransport
- P4 Erwärmung durch Verlustleistung
- P5 Abwärme in einem thermischen Kraftwerk
- P6 Braunkohlekraftwerk 2
- P7 *Pelton*-Turbine
- P8 *Savonius*-Läufer
- P9 Härteprozess
- P10 Kühlschranks
- P11 Wärmepumpe 1
- P12 Wärmepumpe 2
- P13 Stirling-Maschine
- P14 Wärmepumpe 3
- P15 Kolbenverdichter
- P16 Glühofen
- P17 Boiler
- P18 Raumklimatisierung
- P19 Raumheizung
- P20 Kraftwerksarten
- P21 Synchrongeneratoren im Flusskraftwerk

**Aufgaben Kapitel T: Transformatoren und Generatoren (32)**

- T1 Magnetischer Eisenkreis, *Ampère*'scher Durchflutungssatz
- T2 *Faraday*'sches Induktionsgesetz – Ruhinduktion
- T3 *Faraday*'sches Induktionsgesetz – Bewegungsinduktion
- T4 Einfacher elektromechanischer Energiewandler
- T5 Drehstromsystem
- T6 Einphasentransformator – Induktivitäten
- T7 Einphasentransformator – Spannungen, Ströme
- T8 Drehstromtransformator – Schaltgruppe, Stundenziffer
- T9 Drehstromtransformator – Spannungsfall bei unterschiedlicher Last
- T10 Einphasiger Trenntransformator
- T11 Einphasiger Verteiltransformator
- T12 Einphasen-Transformator einer Drehstrombank
- T13 Verlustarmer Einphasen-Transformator
- T14 Drehstromtransformator für einen Industrieofen
- T15 Parallelschaltung zweier Drehstromtransformatoren
- T16 Ortsnetztransformator
- T17 60Hz-Drehstromtransformator
- T18 60Hz-Drehstromtransformator in einem Umspannwerk

- T19 50Hz- Drehstrom-Verteiltransformator
- T20 50Hz- Drehstrom-Umspann-Transformator
- T21 Auslegungsparameter eines Drehstromtransformators
- T22 Prüffeldmessungen bei einem Drehstromtransformator
- T23 Turbogenerator – Betriebsdaten
- T24 Turbogenerator – Zeigerdiagramm, Kippmoment
- T25 Blindleistungskompensation in einem Industriebetrieb
- T26 Synchrongenerator in einem Speicherkraftwerk
- T27 Synchrongenerator in einem Pumpspeicherkraftwerk
- T28 Parallel arbeitende Synchrongeneratoren
- T29 Synchrongenerator und Blocktransformator
- T30 Einphasen-Transformator-Massen
- T31 Einphasen-Transformator-Dimensionierung
- T32 Einphasen-Mantel-Transformator

### **Aufgaben Kapitel V: Elektrische Energieversorgung (23)**

- V1 Unsymmetrische Last, Sternschaltung
- V2 Unsymmetrischer Verbraucher, Dreieckschaltung
- V3 Unsymmetrischer Verbraucher, Sternschaltung
- V4 Heizlüfter
- V5 Fabrik
- V6 Industriebetrieb
- V7 Freileitungsschaden
- V8 Freileitung 1
- V9 Wasserkraftwerk und Freileitung
- V10 Planung einer Freileitung
- V11 Magnetfeld einer Freileitung
- V12 Freileitung 2
- V13 Drehstrom-Kabel
- V14 Fehlerstrom-Schutzschalter
- V15 Verbrauchernetz
- V16 Berührungsschutz 1
- V17 Berührungsschutz 2
- V18 Berührungsschutz 3
- V19 Berührungsschutz 4
- V20 Symmetrische Last, Sternschaltung
- V21 Symmetrische Last, Dreieckschaltung
- V22 Parallelbetrieb von Freileitungen
- V23 *Ohm'sche* Belastung einer Freileitung

### **Aufgaben Kapitel S: Speicher (8)**

- S1 Magnetspule als Energiespeicher
- S2 Schwungmassenspeicher
- S3 Energiespeicher-Vergleich
- S4 Kinetische Energie einer rotierenden Masse
- S5 Magnetostatischer Energiespeicher
- S6 Bleibatterie
- S7 Energiespeicherung
- S8 Erdgasspeicher

**Das griechische Alphabet**

$A \alpha$	Alpha	$B \beta$	Beta	$\Gamma \gamma$	Gamma	$\Delta \delta$	Delta
$E \varepsilon$	Epsilon	$Z \zeta$	Zeta	$H \eta$	Eta	$\Theta \vartheta$	Theta
$I \iota$	Jota	$K \kappa$	Kappa	$\Lambda \lambda$	Lambda	$M \mu$	My (mue)
$N \nu$	Ny (nue)	$\Xi \xi$	Xi	$O \omicron$	Omikron	$\Pi \pi$	Pi
$P \rho$	Rho	$\Sigma \sigma$	Sigma	$T \tau$	Tau	$Y \upsilon$	Ypsilon
$\Phi \varphi$	Phi	$X \chi$	Chi	$\Psi \psi$	Psi	$\Omega \omega$	Omega

**Verwendete wichtige Formelzeichen**

$A$	$m^2$	Fläche
$B$	T	magnetische Induktion (Flussdichte) (1 T = 1 Tesla = 1Vs/m <sup>2</sup> )
$d$	m	Durchmesser
$E$	V/m	elektrische Feldstärke
$f$	Hz	elektrische Frequenz (1 Hz = 1 Hertz = 1/s)
$F$	N	Kraft
$H$	A/m	magnetische Feldstärke
$I$	A	elektrische Stromstärke
$j$	-	imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$
$J$	kgm <sup>2</sup>	Trägheitsmoment
$J$	T	magnetische Polarisation
$l$	m	Länge
$L$	H	Selbstinduktivität (1 H = 1 Henry = 1 Vs/A)
$m$	kg	Masse
$m$	-	Strangzahl
$M$	H	Gegeninduktivität
$M$	Nm	Drehmoment
$M_{p0}$	Nm	synchrones statisches Kippmoment
$n$	1/s	Drehzahl
$N$	-	Windungszahl je Strang
$N_c$	-	Spulenwindungszahl
$p$	-	Polpaarzahl
$r$	m	Radius
$P$	W	Leistung (1 W = 1 Watt = 1 V·A)
$Q$	VA <sub>r</sub>	Blindleistung (1 VA <sub>r</sub> = 1 VA reaktiv)
$Q$	-	Nutenzahl
$R$	$\Omega$	elektrischer Widerstand (1 $\Omega$ = 1 Ohm = 1V/A)
$s$	m	Weglänge
$S$	VA	Scheinleistung
$t$	s	Zeit
$T$	s	Schwingungsperiodendauer
$T$	K	absolute Temperatur
$U$	V	elektrische Spannung
$U_p$	V	Polradspannung
$\ddot{u}$	-	Übersetzungsverhältnis
$v$	m/s	Geschwindigkeit
$W$	J	Energie

$x$	m	Koordinate
$X, X_d$	$\Omega$	Reaktanz, synchrone Reaktanz
$y$	m	Koordinate
$z$	m	Koordinate
$\alpha$	rad	Zündwinkel
$\gamma$	rad	Drehwinkel
$\gamma$	kg/m <sup>3</sup>	Massendichte
$\delta$	m	Luftspalt
$\varepsilon$	As/(Vm)	Dielektrizitätskonstante
$\varphi$	rad	Phasenwinkel
$\Phi$	Wb	magnetischer Fluss (1 Wb = 1 Weber = 1 Vs)
$\Psi$	Vs	magnetische Flussverkettung
$\Lambda$	Vs/A	magnetischer Leitwert
$\mu$	Vs/(Am)	magnetische Permeabilität
$\mu_0$	Vs/(Am)	magnetische Permeabilität des Vakuums ( $4\pi \cdot 10^{-7}$ Vs/(Am))
$\eta$	-	Wirkungsgrad
$\vartheta$	rad	Polradwinkel (elektrische Gradezählung)
$\Theta$	A	elektrische Durchflutung
$\kappa$	S/m	elektrische Leitfähigkeit (1 S = 1 „Siemens“ = 1 A/V)
$\sigma$	-	Streuziffer
$\tau_p, \tau_Q$	m	Polteilung, Nutteilung
$\omega$	1/s	elektrische Kreisfrequenz
$\Omega_m$	1/s	mechanische Winkelgeschwindigkeit

### Indizes

av	Mittelwert
b	Blindkomponente
c	Spule
Cu	Kupfer
d	direct (längs), dc (Gleichgröße), Verluste (dissipation)
e	elektrisch
Fe	Eisen
G	Gate
h	Haupt-
hys	Hysterese
i	induziert bzw. innere
in	zugeführt
k	Kurzschluss-
LL	verkettet (line-to-line)
m	Magnetisierungs-, magnetisch bzw. mechanisch bzw. maximal
max	maximal
N	Nenn-
out	abgegeben
p	Pol bzw. Polrad
syn	Synchron
U, V, W	Bezeichnung der Wicklungsstränge im Dreiphasen-System
w	Wirkkomponente
$\delta$	Luftspalt

$\sigma$	Streu-
0	Leerlauf
1, 2	primär, sekundär (beim Transformator)

### Notationen

$i$	Kleinbuchstabe: z. B.: elektrische Stromstärke, Augenblickswert
$I$	Großbuchstabe: z. B.: elektrische Stromstärke, Effektivwert oder Gleichstromwert
$\underline{I}$	unterstrichen: komplexe Größen
$\hat{I}$	Spitzenwert, Amplitude
$I'$	auf Ständerwicklungsdaten mit $\hat{u}$ umgerechnet
$\text{Re}(\cdot)$	Realteil von ..., $\text{Im}(\cdot)$ Imaginärteil von ...

### Wichtige Naturkonstante

$c_0 = 299\,792\,458 \text{ m/s}$	Vakuumlichtgeschwindigkeit
$e = 1.6021 \cdot 10^{-19} \text{ As}$	elektrische Elementarladung
$g = 9.80665 \text{ m/s}^2$	Normwert der Fallbeschleunigung
$G = 6.670 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$	Gravitationskonstante
$h = 6.625 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$	<i>Planck'sches Wirkungsquantum</i>
$k = 1.3805 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$	<i>Boltzmann'sche Konstante</i>
$L = 6.023 \cdot 10^{26} \text{ /kmol}$	<i>Loschmidt'sche Konstante</i>
$m_e = 9.1083 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$	Ruhemasse des Elektrons
$m_n = 1.67470 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$	Ruhemasse des Neutrons
$m_p = 1.67239 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$	Ruhemasse des Protons
$R = 8.3143 \cdot 10^3 \text{ J/(kmol} \cdot \text{K)}$	universelle Gaskonstante
$\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ As/(Vm)}$	elektrische Feldkonstante (Dielektrizitätszahl des leeren Raums)
$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/(Am)}$	magnetische Feldkonstante (Permeabilität des leeren Raums)
$\sigma = 5.670 \cdot 10^{-8} \text{ J/(m}^2 \text{K}^4 \text{s)}$	Konstante des <i>Stefan-Boltzmann-Strahlungsgesetz</i>

## Kontrollfragen für die Vorbereitung auf die Prüfung

### G Grundlagen

- Definieren Sie den Begriff Energie! Wie äußert sich ihre Arbeitsfähigkeit? Wie lässt sie sich in Bezug auf ein geschlossenes System charakterisieren?
- Erläutern Sie die Begriffe Primärenergie, Sekundärenergie, Endenergie, Nutzenergie und graue Energie und geben Sie je ein Beispiel an!
- Nennen Sie vier Energieformen und erläutern Sie diese mit einigen Stichpunkten!
- Was ist der Unterschied zwischen der *Lorentz*- und der *Coulomb*-Kraft? Geben Sie die physikalischen Formeln an. Welche der beiden Kräfte ist in technischen Anwendungen in der Regel vernachlässigbar und warum?
- Erläutern Sie den Energieerhaltungssatz! Wenden Sie ihn beispielhaft auf die Beziehung zwischen potentieller und der kinetischer Energie an! Geben Sie auch die Formeln dieser Energieformen an!
- Was besagt der Impulserhaltungssatz? Leiten Sie daraus die Formeln für die Trägheitskraft und das Trägheits-Drehmoment her!
- Erläutern Sie die beiden stationären Strömungsformen in Flüssigkeiten! Arbeiten Sie mit Skizzen! Durch welche Zahl werden sie charakterisiert? Erläutern Sie die Parameter!
- Erklären Sie qualitativ, wie die Gezeiten auf der Erde zustande kommen! Welche Kräfte sind beteiligt? Arbeiten Sie mit einer Skizze! Wie lässt sich die Höhe des „Flutbergs“ abschätzen? Ist diese prinzipiell abhängig von der Mondphase (Neu-/Vollmond, ...)?
- Leiten Sie die Formel für die im elektrischen Feld einer Kondensatoranordnung gespeicherte elektrische Energie her!
- Stellen Sie die elektrostatische der magnetostatische Energie gegenüber, indem Sie die Formeln angeben und auf die jeweilige Energiedichte eingehen! Warum wird elektrische Energiewandlung zumeist auf der Basis magnetischer Felder durchgeführt (Zahlenbeispiel)?
- Geben Sie die Einheiten und Symbole für el. und magn. Flussdichte, Feldstärke, Polarisierung, Feldkonstante, Kapazität und Induktivität an!
- Erläutern Sie das *Planck*'sche Strahlungsgesetz und das *Wien*'sche Verschiebungsgesetz (Skizze für unterschiedliche Temperaturen)! Was versteht man unter einem „schwarzen Strahler“?
- Erläutern Sie das *Stefan-Boltzmann*'sche Strahlungsgesetz! Diskutieren Sie seine Erweiterung zum *Kirchhoff*'schen Strahlungsgesetz (Skizze einer typischen Strahleranordnung)!
- Erläutern Sie die Begriffe „Wärmeenergie“  $Q$  und „innere Energie“  $U$  und stellen Sie sie einander gegenüber!
- Erklären Sie den Unterschied zwischen einem realen und einem idealen Gas! Arbeiten Sie mit Skizzen, um die Stöße zwischen Gasteilchen zu beschreiben!
- Wie lautet die thermische Zustandsgleichung eines idealen Gases? Bezeichnen Sie die einzelnen Formelbestandteile! Wie werden die drei Zustandsänderungen genannt, wenn jeweils eine Zustandsgröße konstant bleibt? Zeichnen Sie die zugehörigen Trajektorien!
- Geben Sie den ersten Hauptsatz der Wärmelehre an!
- Geben Sie auf den Energiegehalt des idealen Gases bei der Temperatur  $T$  an (Formel)! Wie unterscheidet er sich von dem des realen Gases?
- Was besagt der zweite Hauptsatz der Wärmelehre? Welche Einschränkung gilt? Wie groß ist die Entropieänderung, wenn der durch diesen Hauptsatz beschriebene Vorgang abgeschlossen ist?

- Was besagt die *Heisenberg*'sche Unschärferelation? Was ist die *De Broglie*-Wellenlänge, und in welchem Zusammenhang steht sie mit der Geschwindigkeit eines freien Teilchens? Arbeiten Sie mit Formeln!
- Erläutern Sie das Atommodell von *Rutherford*! Was ist daran der Hauptkritikpunkt? Was ist der Unterschied zum *Bohr*'schen Atommodell?
- Was besagt die Elementarstromtheorie nach *A. M. Ampère*? Was ist der Unterschied zwischen dem s-Orbital und den höherwertigen Orbitalen in Bezug auf ihren Drehimpuls? Welche Werte kann der Drehimpulsbetrag annehmen?
- Erläutern Sie die drei chemische Bindungsformen! Bei welchen Stoffen treten welche Bindungsformen bevorzugt auf?
- Was versteht man unter Radioaktivität? Welche Arten von radioaktiver Strahlung gibt es? Erläutern Sie diese jeweils mit Stichpunkten!
- Nennen Sie natürliche Zerfallsreihen nach ihrem Ausgangselement und Endelement!
- Erläutern Sie die Energie-Masse-Erhaltung bei Kernumwandlungsprozessen, und geben Sie die *Einstein*'sche Formel wieder! Was versteht man in diesem Zusammenhang unter einem Massendefekt? Wirkt dieser Defekt prinzipiell auch bei chemischen Bindungsformen (Erläuterung)?
- Beschreiben Sie qualitativ den Ablauf der Kernspaltung von Uran 235! Wie wird daraus Energie nutzbar gemacht? Wie verhält sich die freigesetzte Energiemenge im Vergleich zur Verbrennung von Kohlenstoff?
- Erklären Sie für die Fission den Unterschied zwischen der „friedlichen Kernkraftnutzung“ und einer Atomexplosion mit technischen Details!
- Welcher Regel folgt die Temperaturabhängigkeit eines elektrischen Widerstands? Geben Sie die Formel desselben an und erläutern Sie deren Bestandteile!
- Was besagt der *Ampere*'sche Durchflutungssatz? Arbeiten Sie mit Formeln und Skizzen für ein Beispiel!
- Welche beiden Möglichkeiten gibt es, magnetische Felder zu erzeugen? Nennen Sie jeweils zwei Vor- und Nachteile!
- Welche beiden Formen der Spannungsinduktion gibt es? Erläutern Sie diese, und geben Sie die Formeln mit je einer Beispielskizze an! Welche Form tritt bei Transformatoren auf und warum?
- Erklären Sie die *Lorentz*-Kraft anhand einer Beispielskizze mit Formeln! In welchem Zusammenhang steht sie zum *Maxwell*'schen Zug?
- Erläutern Sie die Begriffe Selbst- und Gegeninduktivität anhand von je einer Beispielskizze mit Formeln!
- Erklären Sie die Bestandteile der Ummagnetisierungsverluste in Eisenkernen! Welche Größen beeinflussen sie?
- Was versteht man unter einem Effektivwert? Geben Sie die allgemeine Formel an. Was ergibt sich für den Sonderfall der sinusförmig veränderlichen Größen (Herleitung)?
- Erläutern Sie das Verbraucher- und das Erzeuger-Zählpeilsystem!
- Erläutern Sie die Leistungsanpassung anhand einer Gleichstromquelle und einem *ohm*'schen Verbraucher mit einer Skizze und Formeln! Welches Verhältnis von abgegebener Leistung zur inneren Verlustleistung wird in der Energietechnik im Vergleich zur Nachrichtentechnik angestrebt?

## R Ressourcen

- Was versteht man unter „Ressourcen“ und „Reserven“? Welcher weltweite Trend zu beiden lässt sich im Laufe der letzten 20 Jahre erkennen?
- Geben Sie das Strahlungsspektrum der Sonne mit einer Skizze wieder! Beschriften Sie die beiden Achsen, und teilen Sie die Bereiche in ultraviolette, sichtbare und infrarote

- Wellenlänge ein! Welchem idealisierten Modell kommt das Strahlungsspektrum nahe und bei welcher Oberflächentemperatur?
- Welche beiden Einflüsse reduzieren die Sonneneinstrahlung auf der Erde? Erläutern Sie diese kurz! Was versteht man in diesem Zusammenhang unter dem „Air Mass“-Faktor (AM)?
  - Wie groß ist die typische eingestrahlte solare Leistung je  $m^2$  in unseren Breiten? Wie groß sind typische Wirkungsgrade für Solarthermie und Photovoltaik? Was resultiert daraus für den Flächenbedarf? Geben Sie Zahlenbeispiele!
  - Erklären Sie die Bestandteile der Wirkungsgradkette bei Wasserkraftwerken! Wie groß ist der typische Bemessungswirkungsgrad?
  - Charakterisieren Sie Niederdruck-, Mitteldruck- und Hochdruck-Wasserkraftwerke in Bezug auf ihre Fallhöhe, ihr Einsatzgebiet und ihre Nutzungsziele!
  - Welche drei Arten von Wasserkraftwerken unterscheidet man prinzipiell? Was sind jeweils typische Drehzahlen der Turbinensätze? Welche Turbinen werden eingesetzt? Welche Art der Synchronmaschine als Generator wird verwendet (Läuferbauart, Polzahl)?
  - Erläutern Sie das Zustandekommen globaler Windsysteme! Wie werden diese Winde lokal beeinflusst? Wie ist die Windgeschwindigkeit über der Höhe über dem Erdboden prinzipiell verteilt? Beschreiben Sie die Windgeschwindigkeitsverteilung in *Deutschland*!
  - Was besagt die *Betz*'sche Formel über das optimale Verhältnis der Windgeschwindigkeiten vor und hinter dem Windturbinen-Rotor und über den optimalen Leistungsbeiwert? Geben Sie die Formel an!
  - Wie berechnet sich die Leistung einer Windkraftturbine (Formel und Bezeichnung der Formelgrößen)? Wie groß ist der maximal mögliche Leistungsbeiwert? Was versteht man unter der Schnelllaufzahl (Skizze)?
  - Nennen Sie typische Volllaststundenzahlen für Kernkraftwerke bzw. thermische Kraftwerke, Wasserkraft- und Biomasse-Kraftwerke, Wind- und Photovoltaikkraftwerke in unseren Breiten! Wodurch sind die Unterschiede bedingt?
  - Erklären Sie das Prinzip eines Gezeitenkraftwerkes mit einer Skizze! Welche Energieformen sind beteiligt und in welcher Wandlungsreihenfolge? Kann der lokale Tidenhub die theoretisch erreichbare natürliche Höhe des Flutberges übersteigen?
  - Welche drei gängigen Nutzungsprinzipien der Wellenenergie gibt es? Erläutern Sie diese mit je einer Skizze!
  - Diskutieren Sie Erdöl hinsichtlich Entstehung, Art des Vorkommens, Art der Förderung! Wie wird Erdöl gegenüber Erdgas chemisch abgegrenzt? Geben Sie die Struktur des chemischen Aufbaus der Moleküle an! Nennen Sie drei Produkte, die bei der fraktionierten Destillation entstehen und ordnen Sie diese nach ihrer Molekülmasse!
  - Wie unterscheiden sich Heiz- und Brennwert?
  - Stellen Sie zusammen, zu welchen Anteilen die Primärenergieträger Erdöl, Erdgas, Steinkohle, Braunkohle und Kernenergie in etwa zum Gesamtenergieverbrauch in *Deutschland* in den letzten Jahren beigetragen haben!
  - Grenzen Sie Steinkohle von der Braunkohle hinsichtlich folgender Gesichtspunkte ab: Kohlenstoffanteil, Heizwert, Entstehungsgeschichte, Art des Abbaus!
  - Geben Sie die typischen Ausgangsstoffe und Spaltprodukte einer kontrollierten Kettenreaktion bei der Kernspaltung von Uran 235 an! Was haben die Spaltprodukte gemeinsam? Wie groß ist die gewonnene Energie ungefähr je Kernspaltung?
  - Wie viel Energie wird bei der Kernfusion im Vergleich zur Kernspaltung frei? Welche sind die relevanten Brennstoffe für die kontrollierte Fusion? Was erschwert ihren großtechnischen Einsatz zurzeit? Wann ist eine wirtschaftliche Nutzung zu erwarten?
  - Nennen und erläutern Sie stichpunktartig drei Arten des Vorkommens geothermischer Energie! Welches ist das für die Stromerzeugung bedeutendste Verfahren der Nutzbarmachung von Erdwärme?

**B Bedarf**

- Geben Sie die Differentialgleichungen für das exponentielle und das logistische kontinuierliche Wachstum einer Population an! Bezeichnen Sie die einzelnen Elemente der Gleichungen (z.B.  $x_0$ : Anfangswert)! Skizzieren Sie die Graphen der beiden Verläufe über der Zeit qualitativ! Gehen Sie darauf ein, wie und warum diese beiden Wachstumskurven sich stärker oder schwächer unterscheiden!
- Ein Blick in die Zukunft: Wie viele Menschen werden 2035 etwa auf der Erde leben? Wie verändert sich das weltweite Bruttoinlandsprodukt BIP etwa bis 2035? Wer sind die Treiber bei der Änderung des weltweiten BIPs? Was bedeutet dies für die Entwicklung des weltweiten Primärenergieverbrauchs und für die Stromerzeugung?
- Welche drei Kriterien muss die Energietechnik auch künftig erfüllen? Welche Probleme ergeben sich bei der Umstellung von fossilen Brennstoffen auf regenerative Quellen im großen Stil? Welche Probleme bringt die wachsende Weltbevölkerung hinsichtlich der Energietechnik mit sich? Wo findet zurzeit die größte Zunahme der Weltbevölkerung per capita statt?
- Wie hat sich in *Deutschland* der Primärenergiebedarf in den letzten Jahren im Vergleich zum BIP entwickelt? Und wie der CO<sub>2</sub>-Ausstoß? Wie hat sich der Anteil der einzelnen Primärenergieträger verändert?
- Schätzen Sie die Bevölkerungszahl von *Deutschland* und *VR China* in % der Weltbevölkerung ab! Schätzen Sie in gleicher Weise den anteiligen CO<sub>2</sub>-Ausstoß ab! Um wie viel ändert sich der weltweite CO<sub>2</sub>-Gesamtausstoß, wenn z. B. in *VR China* der Ausstoß um 10% in den nächsten 10 Jahren auf Grund des Bevölkerungswachstums wächst und in *Deutschland* auf Grund der Energiewende halbiert wird?

**P Prozesse**

- Definieren Sie die Begriffe Gesamterntefaktor, Erntefaktor Engpassleistung, Ausnutzungsdauer!
- Was versteht man unter der spezifischen Wärmekapazität? Wovon hängt sie ab? Geben Sie die Formeln für die beiden Randbedingungen „konstantes Volumen“ und „konstanten Druck“ für Gase an! Wie ist der Unterschied bei Flüssigkeiten und Festkörpern?
- Geben Sie das Zustandsdiagramm des Wassers im  $p(T)$ -Diagramm an, und markieren Sie die Aggregatzustände! Auf welcher Kurve liegt der Zustand gesättigten Dampfs? Erläutern Sie den kritischen Punkt!
- Beschreiben Sie Wärmeleitung und Wärmekonvektion, auch hinsichtlich der beteiligten Medien! Verwenden Sie Formeln! Grenzen Sie diese beiden Wärmetransportarten zur Wärmestrahlung ab!
- Was versteht man unter einem thermischen Kreisprozess? Erläutern Sie ihn anhand des *Stirling*-Motors! In welchem Verhältnis stehen die Zustandsgrößen zueinander vor und nach dem Durchlauf des Kreisprozesses?
- Welche drei Formen von Wärmekraftmaschinen gibt es? Erläutern Sie deren Grundprinzipien!
- Leiten Sie die Formel für den *Carnot*-Wirkungsgrad aus den Hauptsätzen der Thermodynamik her! Welche Grenze gibt der *Carnot*-Wirkungsgrad an, und wovon hängt seine Höhe ab?
- Erläutern Sie das Prinzip der Wärmepumpe! Für welche Art von Heizung eignet sich dieses Prinzip besonders und warum? Wie ist der COP definiert? Geben Sie ein Zahlenbeispiel!
- Skizzieren Sie den *Stirling*-Kreisprozess im  $p(V)$ -Diagramm! Beschriften Sie die Veränderung der Zustandsgrößen mit den Fachbegriffen!

- Geben Sie einen Überblick über die gebräuchlichen Wasserturbinentypen! Welche Wirkprinzipien liegen zugrunde? Gehen Sie auf das Strömungsmedium, die Strömungsrichtung und die Turbinenarten ein!
- Welche beiden Wirkprinzipien bei der Umsetzung von Strömungsenergie in Kraft werden bei Turbinen unterschieden? Erläutern Sie diese, zeigen Sie die beiden nutzbaren Kräfte anhand von Strömungsprofilen an den Schaufelquerschnitten!
- Was besagt die *Euler*'sche Turbinengleichung? Geben Sie die Formel an! Arbeiten Sie mit einer Skizze!
- Was versteht man unter der spezifischen Drehzahl einer Turbine (Formel angeben)! Wie verhält sie sich zu realen Drehzahl? Was ist der Sinn dieses Begriffs?
- Charakterisieren Sie die *Kaplan*-, die *Francis*- und die *Pelton*-Turbine nach folgenden Gesichtspunkten: Wasserdruck, Volumenstrom, spezifische Drehzahl, typische Leistungsgrenzen, typischer Bemessungswirkungsgrad. Eignet sich die *Pelton*-Turbine für ein Pumpspeicherkraftwerk?
- Wie verhalten sich der Volumenstrom und das Drehmoment mit steigender Drehzahl für die *Kaplan*-, die *Francis*- und die *Pelton*-Turbine? Geben Sie die Diagramme qualitativ an!
- Welche Bauformen von Windkraftturbinen unterscheidet man? Nennen Sie diese stichpunktartig mit Skizzen! Welches Wirkprinzip wird genutzt? Geben Sie Bauarten hinsichtlich der Lage der Rotorachse an! Was begrenzt die Umfangsgeschwindigkeit?
- Nennen Sie drei Vorteile von Windturbinen mit vertikaler Achse!
- Was versteht man unter Stall- und Pitch-Betrieb? Vergleichen Sie beide Arten in einem Diagramm, in dem Sie die Leistungsausbeute in Abhängigkeit von der Drehzahl darstellen!
- Skizzieren Sie im Diagramm „El. Ausgangsleistung in %“ über der „Windgeschwindigkeit in m/s“ die prinzipielle Ertragsrechnung für eine Windkraftturbine, d. h. die gewonnene Ausgangsleistung unter Einfluss der sechs wichtigsten Einschränkungen (erreichbarer Leistungsbeiwert, Abschaltung bei Starkwind ... )!
- Beschreiben Sie die einzelnen Schritte des *Clausius-Rankine*-Vergleichsprozesses! Nutzen Sie dazu parallel das  $p(V)$ - und das  $T(S)$ -Diagramm!
- Stellen Sie die Zusammenschau der wesentlichen Komponenten eines mit einer Dampfturbine betriebenen Kraftwerks anhand des Wasserkreislaufs schematisch dar!
- Warum benötigt eine Dampfturbine i. A. mehrere Schaufelstufen? Zeigen Sie anhand einer Skizze eines Turbinenquerschnitts, wo die Schaufeln angebracht sind und wie sich der Dampfdruck beim Durchströmen der Turbine verändert!
- Skizzieren Sie die Geschwindigkeitsvektoren je Schaufelstufe einer Dampfturbine! Geben Sie die Formel für die Energiebilanz je Schaufelstufe an! Erklären Sie die in der Formel vorkommenden Größen!
- Was versteht man unter einem Lastabwurf bei Dampfturbinen? Geben Sie einen typischen Verlauf der Turbinendrehzahl über der Zeit an, wenn der Überdrehzahlschutz anspricht! Welche Fliehkraft resultiert aus einer um 20% erhöhten Drehzahl?
- Erläutern Sie den *Joule*-Prozess als Wirkungsprinzip einer Gasturbine! Wie hoch ist der Wirkungsgrad typischerweise? Wodurch ist er begrenzt? Wie kann die Abwärme weiter genutzt werden, und welcher Kraftwerkstyp resultiert daraus?
- Beschreiben Sie die Zustandsänderungen beim offenen Prozess mit einer Gasturbine! Geben Sie das  $p(V)$ -Diagramm an!

## T Transformatoren und Generatoren

- Wie ist eine Synchronmaschine aufgebaut? Nennen Sie den Unterschied zwischen Schenkelpol- und Vollpolbauweise! Wo und wie werden Synchronmaschinen eingesetzt?
- Wie funktioniert die Synchronmaschine prinzipiell? Skizzieren Sie das el. Ersatzschaltbild!

- Warum kann die Synchronmaschine bei Betrieb am „starrten“ Netz kippen? Beschreiben Sie den Kippvorgang (Ursache, Wirkung) und dabei den Polradwinkel!
- Skizzieren Sie das Zeigerdiagramm der Vollpolmaschine! Erläutern Sie die im Zeigerdiagramm auftretenden Zeiger und Winkel!
- Was versteht man unter „über“- und „untererregtem“ Betrieb (Spannungszeigerskizze!)?
- Skizzieren Sie die  $M(\vartheta)$ -Kennlinie der Synchron-Vollpolmaschine für Generator- und Motorbetrieb! Für welche Winkel  $\vartheta$  ist stationär stabiler Betrieb möglich?
- Wie hängt das ele.-magn. Drehmoment  $M_e$  von der Polraderregung  $I_f$  bzw.  $U_p$  ab?
- Erklären Sie den Begriff der „Polradspannung“  $U_p$ ! Wann ist sie an welchen Klemmen der Maschinenwicklung direkt messbar?
- Geben Sie die Formeln für die Wirkleistung in Einphasen- und Drehstrom-Sinussystemen an! Erläutern Sie die wesentlichen Unterschiede!
- Erklären Sie den Begriff „Schieflast“ anhand eines Zeigerdiagramms der Ströme zu einem symmetrischen Speisespannungssystem!
- Welche Angaben zu Spannungen im Drehstromsystem kennen Sie?
- Erläutern Sie den Begriff der Blind- und Scheinleistung im Einphasen- und Drehstromsystem!
- Wie ist die Phasenlage der verketteten Spannungen zu den Phasenspannungen im Drehstromsystem (Skizze der Zeiger!)?
- Wozu werden Transformatoren benötigt? Nennen Sie Einsatzfelder von Transformatoren!
- Wie funktioniert der Transformator prinzipiell? Wie lauten die Grundgleichungen des Einphasentransformators?
- Erläutern Sie die Begriffe „Selbstinduktivität“, „Gegeninduktivität“, „Hauptinduktivität“, „Streuinduktivität“! Wie ist der Zusammenhang zwischen den einzelnen Begriffen?
- Was ist die Streuziffer? Welche Grenzen hat sie?
- Wie ist das Übersetzungsverhältnis beim Transformator definiert? Warum wird es verwendet? Geben Sie ein Beispiel!
- Nennen Sie die Eigenschaften des „idealen“ Transformators!
- Was versteht man unter „Magnetisierungsstrom“ und „Durchflutungsausgleich“?
- Zeichnen Sie das Ersatzschaltbild/Strang des Transformators! Erläutern Sie die Parameter!
- Zeichnen Sie das Spannungs- und Strom-Zeigerdiagramm des Transformators je Phase im Nennbetrieb bei  $ohm$ 'sch-induktiver Belastung!
- Erläutern Sie anhand des sekundären Transformator-Dauerkurzschlusses das *Kapp*'sche Dreieck!
- Welche wesentlichen Betriebseigenschaften des Transformators werden durch die bezogene Kurzschlussspannung beschrieben (Beispiel!)? Geben Sie das Beispiel des *Ferranti*-Effekts!
- Welche Verlustgruppen treten im Transformator auf? Nennen Sie typische Bemessungswirkungsgrade bei Großtransformatoren im Hunderte-MVA-Bereich!
- Wie entsteht gedanklich aus Einphasen-Transformatoren die Bauform des Dreischenkel-Drehstrom-Transformators?
- Worin unterscheiden sich Drei- und Fünfschenkel-Transformator und warum?
- Erläutern Sie den Begriff der Stundenziffer! Geben Sie zwei Beispiele für Transformatorschaltgruppen mit zugehöriger Stundenziffer!
- Welche Drehstrom-Transformatorschaltgruppe muss bei sekundär einphasiger Belastung vermieden werden und warum?
- Wofür wird der *Buchholz*-Schutz verwendet? Erläutern Sie das Messprinzip!
- Wie unterscheidet man zwischen elektrischen Leitern, Halbleitern und Isolatoren im Hinblick auf die Energieniveaus des Leitungsbands im Vergleich zum Valenzband! Was geschieht in diesem Zusammenhang beim inneren Photoeffekt?

- Erläutern Sie die Funktionsweise einer Solarzelle qualitativ anhand einer schematischen Querschnittsdarstellung! Gehen Sie dabei auf folgende Begriffe ein: Dotierung, p-n-Übergang, Raumladungszone, Diffusionsspannung, Leitungs- und Valenzband!
- Skizzieren Sie die  $U(I)$ -Kennlinien einer Si-Solarzelle in Abhängigkeit der eingestrahlenen Energiemenge! Wie verändert sich die Kennlinie per Serien- und bei Parallelschaltung?
- Skizzieren Sie die  $U(I)$ -Kennlinie einer Si-Solarzelle bei einer bestimmten eingestrahlenen Leistung! Belasten Sie die Zelle mit einem *ohm'schen* Widerstand! Leiten Sie damit graphisch den Betriebspunkt maximaler Leistungsbausbeute her!
- Welche Wirkungsgrade lassen sich mit Solarzellen etwa erreichen? Wodurch wird der Wirkungsgrad begrenzt?
- Welche Leerlaufspannung erreicht man mit einer einzigen Si-Solarzelle? Wie werden höhere Spannungen realisiert? Was ist nötig, um mit solchen Zellen in das öffentliche Drehstromnetz einspeisen zu können?

## V Elektrische Energieversorgung

- Definieren Sie die Begriffe: Bruttostromerzeugung, Nettostromerzeugung, Bruttostromverbrauch, Nettostromverbrauch!
- Welche Spannungsebenen sind im Übertragungsnetz und im Verteilnetz in *Deutschland* gängig? Warum werden diese unterschiedlichen Spannungsebenen verwendet?
- Was versteht man unter einem Verbundnetz? Was sind seine Vorteile und Nachteile? Welche vier Netzbetreiber gibt es zurzeit in *Deutschland*? Wo sind sie geographisch im Wesentlichen tätig?
- Geben Sie das Ersatzschaltbild einer „Elementarzelle“ eines kurzen Leitungsabschnitts an! Leiten Sie daraus die Telegraphengleichungen ab!
- Geben Sie die Formel für die Wanderwellengeschwindigkeit und den Wellenwiderstand an einer el. Welle auf einer Doppelleitung an! Was versteht man unter einer Leitungsinhomogenität? Was ereignet sich dort?
- Definieren Sie den Phasenkoeffizienten  $\beta$  anhand einer Formel! In welchem Verhältnis steht er zur Wellenlänge? Wie beeinflusst er die maximal realisierbare Leitungslänge?
- Erklären Sie den Begriff „natürliche Leistung“! Geben Sie in bezogenen Größen in einem Diagramm die Verläufe der Spannungswerte  $U(z)$  an der Stelle  $z$  einer Leitung mit der Leitungslänge von einer Wellenlänge für
  - a) die Belastung mit natürlicher Leistung,
  - b) Leerlauf und c) Kurzschluss am Leitungsende an!
- Was ist der Unterschied zwischen einem Tragmast und einem Abspannmast? Aus welchen Gründen führt jede Freileitung aber einer bestimmten Spannungsgröße mindestens ein Erdseil?
- Erläutern Sie die drei Hauptverlustgruppen bei der Übertragung von elektrischer Energie mit Freileitungen!
- Begründen Sie den Aufbau von Hochspannungsisolatoren im Hinblick auf ihr Isoliervermögen gegenüber hohen elektrischen Spannungen!
- Beschreiben Sie den el. Durchschlagmechanismus von Luft nach *Townsend*! Geben Sie Werte für typische Durchschlagfeldstärken von trockener Luft im Homogenfeld bei typischen Schlagweiten an! Beschreiben Sie das *Paschen*-Minimum!
- Erläutern Sie den Begriff „Verlustfaktor“ im Zusammenhang mit der Isolation von Erdkabeln (Formel)! Was versteht man unter „Leckstrom“?
- Nennen Sie die Hauptbestandteile eines einphasigen erdverlegten Hochspannungskabels! Skizzieren Sie dieses Kabel im Querschnitt!
- Geben Sie die kapazitiven Ersatzschaltbilder im Querschnitt von Gürtelkabel, Dreimantelkabel und Einleiterkabel an!

- Geben Sie qualitativ den Blindleistungsbedarf in Abhängigkeit von der Kabelbelastung an! Wo verhält sich im Vergleich dazu die Freileitung kapazitiv bzw. induktiv? In welchem Blindleistungsbereich werden Freileitungen und Kabel betrieben und warum?
- Beschreiben Sie die Wirkung von Erdern bei Blitzeinschlag! Erläutern Sie die Begriffe Spannungstrichter, Schrittspannung und deren zulässige Grenze!
- Geben Sie die fünf Sicherheitsregeln beim Arbeiten mit elektrischen Anlagen an!
- Wie funktioniert der Fehlerstromschutzschalter (RCD)? Nennen Sie die Grenze des Auslösestroms für Personen- und Brandschutz!
- Was versteht man unter Berührungsspannung und Berührstrom? Bis zu welchem Stromwert wird i. d. R. keine gefährdende Reaktion im menschlichen Körper ausgelöst?
- Wie reagiert der menschliche Körper auf elektrischen Stromfluss? Welche Stromwege durch den Körper sind besonders gefährlich? Wie beeinflusst der Körperzustand den Körperwiderstand?
- Niederspannungs-Netzformen und ihre Kennzeichnung: Erläutern Sie die Nomenklatur des ersten, zweiten und dritten Buchstabens!
- Erläutern Sie die Begriffe Sicherheitskleinspannung, Basisisolierung, Schutzkleinspannung, Funktionskleinspannung! Geben Sie dafür Spannungsgrenzwerte an!
- Beschreiben Sie den Schutz durch Begrenzung der Entladeenergie am Beispiel eines el. geladenen Weidezauns! Warum führt der Körperkontakt für Weidetiere i. A. zu erwünschten heftigeren Reaktionen als für Menschen?

### S Speicher (kein Prüfungsstoffgebiet)

- Erläutern Sie, warum die Wichtigkeit effizienter Speichermethoden mit hoher Speicherkapazität in *Deutschland* in den letzten Jahren zugenommen hat!
- In welche fünf Gruppen lassen sich die für die elektrische Energieversorgung eingesetzten Speichertechnologien nach physikalischer Methodik einteilen? Geben Sie zu jeder Gruppe ein Beispiel an, und beurteilen Sie, ob es sich durch hohe Speicherleistung oder hohe Speicherenergie auszeichnet!
- Ordnen Sie folgende Speichertechnologien in einem *Ragone*-Diagramm (Leistung: Ordinate, Energie: Abszisse) qualitativ ein: Pumpspeicherkraftwerke, Schwungradspeicher, Li-Ionen-Batterien, Bleibatterien, SuperCaps, SMES.
- Erläutern Sie das Prinzip der thermischen Speicher! Geben Sie Beispiele für aktuelle Bauarten an!
- Erklären Sie das Wirkprinzip eines Pumpspeicherkraftwerks mithilfe einer Skizze! Wie verhält sich der Zyklenwirkungsgrad im Vergleich mit anderen mechanischen Speichermethoden? Geben Sie die Formel für die gespeicherte Energie an!
- Nennen Sie drei Vorteile und einen Nachteil eines Schwungrades! Geben Sie die Formel für die gespeicherte Energie an!
- Auf welchen zwei physikalisch modellhaften Kapazitäten beruht die Kapazität eines Superkondensators? Arbeiten Sie mit Skizzen!
- Erläutern Sie das Prinzip, wie man mit einer supraleitenden Spule hohe Energiespeicherdichten bei moderaten Verlusten erzeugen kann! Nennen Sie typische Ströme und magnetische Flussdichten!
- Erläutern Sie das Funktionsprinzip einer galvanischen Zelle mithilfe einer Skizze! Nennen Sie mindestens drei gängige Batterietypen!
- Ordnen Sie folgende Batterietypen in einem *Ragone*-Diagramm (gravimetrische Leistungsdichte: Ordinate, gravimetrische Energiedichte: Abszisse) qualitativ ein: Bleibatterien, NiCd-Batterien, Li-Ionen-Batterien. Nennen Sie mindestens drei weitere Kriterien zur Bewertung von Batterietechnologien!

- Erläutern Sie die chemischen Abläufe in einer Bleibatterie mithilfe einer Skizze und chemischen Reaktionsgleichungen! Warum fallen die theoretisch erzielbare Energiedichte und die praktisch erzielbare Energiedichte weit auseinander?
- Erläutern Sie die chemischen Abläufe in einer Li-Ionen-Batterie mithilfe einer Skizze und chemischen Reaktionsgleichungen! Welche Aktivmaterialien werden üblicherweise eingesetzt?
- Zeichnen Sie das vereinfachte Ersatzschaltbild einer Batterie im Verbraucher-Zählpeilsystem! Was versteht man unter der Entladerate (Einheit, Formel)?
- Welche drei Stoffe werden zur stofflichen Energiespeicherung überwiegend eingesetzt? Welche Problemstellungen ergeben sich bei der Verwendung von Wasserstoff?

**Aufgabe G1:** Sonnen-Erd-Anziehungskraft, kinetische Energie der Erde

Die Erde ( $m_E = 5.98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ ) ist im Mittel  $L = 1.497 \cdot 10^8 \text{ km}$  von der Sonne entfernt. Die Masse der Sonne ist  $m_S = 1.98 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ .

- 1) Mit welcher Gravitationskraft  $F$  ziehen sich Sonne und Erde gegenseitig an?
- 2) Mit welcher Geschwindigkeit  $v$  (in m/s und km/h) muss sich der Erde auf (näherungsweise) einer Kreisbahn bewegen, damit die Fliehkraft  $F_F$  der Sonnenanziehungskraft das Gleichgewicht hält?
- 3) Überprüfen Sie 2) anhand der Tatsache, dass die Erdbewegung um die Sonne im Mittel 365.25 Tage dauert!
- 4) Wie groß ist die kinetische Energie der Erde auf ihrer Bahn um die Sonne?
- 5) Wie groß ist im Vergleich dazu die kinetische Energie der Erde auf Grund ihrer Rotation um die eigene Achse während eines Tages? Die Erde wird dazu näherungsweise als starre Kugel angenommen (Erdradius 6350 km).

**Aufgabe G1 (Lösung):** Sonnen-Erd-Anziehungskraft, kinetische Energie der Erde

1)

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$$

$$F = 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5.98 \cdot 10^{24} \cdot 1.98 \cdot 10^{30}}{(1.497 \cdot 10^{11})^2} = 35.241 \cdot 10^{21} \text{ N}$$

2)

$$F_F = m_E \cdot v^2 / L = F \Rightarrow v = \sqrt{F \cdot L / m_E} = \sqrt{35.241 \cdot 10^{21} \cdot 1.497 \cdot 10^{11} / (5.98 \cdot 10^{24})} = 2.97 \cdot 10^4 \text{ m/s}$$

$$v = 2.97 \cdot 10^4 \cdot 3.6 = 106920 \text{ km/h}$$

3)

$$1a = 365.25 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 = 31.5576 \cdot 10^6 \text{ s}$$

$$v = 2\pi L / a = 2\pi \cdot 1.497 \cdot 10^{11} / (31.5576 \cdot 10^6) = 29805 \text{ m/s} \approx 2.97 \cdot 10^4 \text{ m/s}$$

4)

$$W_k = m_E \cdot v^2 / 2 = 5.98 \cdot 10^{24} \cdot (2.97 \cdot 10^4)^2 / 2 = 26.37 \cdot 10^{32} \text{ J}$$

5)

Trägheitsmoment einer starren Kugel (Radius  $R$ , Masse  $m$ ) mit homogener Masseverteilung

um ihre durch den Mittelpunkt gehende Achse:  $J = \frac{2}{5} \cdot m \cdot R^2$ .

$$J_E = \frac{2}{5} \cdot m_E \cdot R_E^2 = \frac{2}{5} \cdot 5.98 \cdot 10^{24} \cdot (6.35 \cdot 10^6)^2 = 96.451 \cdot 10^{36} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$\omega_E = 2\pi \cdot n_E = 2\pi \cdot \frac{1}{24 \cdot 3600} = 72.72 \cdot 10^{-6} / \text{s}$$

$$W_{k,rot} = J_E \cdot \omega_E^2 / 2 = 96.451 \cdot 10^{36} \cdot (72.72 \cdot 10^{-6})^2 / 2 = 255040 \cdot 10^{24} \text{ J} = 25.5 \cdot 10^{28} \text{ J}$$

$$W_{k,rot} / W_k = 25.5 \cdot 10^{28} / 26.37 \cdot 10^{32} = 0.967 \cdot 10^{-4}$$

Die kinetische Rotationsenergie der Erde um ihre eigene Achse ist gegenüber ihrer Rotationsenergie um die Sonne vernachlässigbar klein.

**Aufgabe G2:** Elektrostatische Kraft, gespeicherte elektrische Energie

Ein metallischer elektrischer Leiter als Kupferrunddraht hat den Drahtdurchmesser  $d_{Cu} = 1.12$  mm und die Länge  $l_{Cu} = 10$  mm (Dichte  $\gamma_{Cu} = 8900$  kg/m<sup>3</sup>).

1) Welches Volumen  $V_{Cu}$  hat das Drahtstück? Wie schwer ist es? Wie viele Kupferatome  $N$  enthält es (Kupferatommasse  $m_{A,Cu} = 1.05 \cdot 10^{-25}$  kg)? Wie groß ist die zugehörige Stoffmenge?

2) Kupfer kristallisiert kubisch flächenzentriert, d.h. die Elementarzelle eines Kupferkristalls ist ein (gedachter) Würfel mit der Kantenlänge  $a_{Cu}$ , in dessen 8 Ecken je ein Kupferatom angeordnet ist und ebenso in den Mitten der sechs Seitenflächen. Wie viele Kupferatome sind je Elementarzelle vorhanden? Wie groß ist  $a_{Cu}$ ?

3) Im Mittel gibt jedes Kupferatom ein (schwach gebundenes) Elektron aus der Atomhülle ab. Diese „freien“ Leitungselektronen bewegen sich bei 20°C ungeordnet mit der mittleren „thermischen“ Geschwindigkeit  $v_{th} = 1.6 \cdot 10^6$  m/s im „freien“ Raum zwischen den Gitteratomrümpfen („metallische Bindung“). Wie groß ist diese Elektronendichte  $n_e$  (je Volumeneinheit 1 mm<sup>3</sup>)?

4) Zwei lange Drahtleiter ( $d_{Cu}$  wie oben beschrieben) liegen parallel in  $d = 1$  m Abstand ( $d$ : Abstand der beiden Leiterachsen). Wie viele freie Ladungen  $\Delta N_e$  (absolut und in % der Leitungselektronen) müssen je 10 mm (z. B. durch Influenz) vom einen auf den anderen Draht übertragen werden, damit je 10 mm Drahtlänge zwischen dem nun positiv und negativ geladenen Drähten die *Coulomb*-Kraft  $F_C = 10^{-9}$  N auftritt? Wie groß ist dabei die maximale elektrische Feldstärke  $E_{max}$ ? Schlägt dort die Luft durch (Durchschlagsfeldstärke 30 kV/cm)?

5) In welchem Verhältnis steht diese Kraft zu Massenanziehungskraft zwischen den beiden Drähten?

6) Wie groß ist die zwischen beiden Drähten auftretende elektrische Gleichspannung  $U$  und die gespeicherte elektrische Feldenergie  $W_e$  je 1 m Drahtlänge im Raum zwischen den Drähten?

**Aufgabe G2 (Lösung):** Elektrostatische Kraft, gespeicherte elektrische Energie

1)

$$A_{Cu} = (d_{Cu})^2 \cdot \pi / 4 = 1.12^2 \pi / 4 = 0.985 \text{ mm}^2 \approx 1 \text{ mm}^2, V_{Cu} = A_{Cu} \cdot l_{Cu} = 1 \cdot 10 = 10 \text{ mm}^3,$$

$$m_{Cu} = V_{Cu} \cdot \gamma_{Cu} = 10^{-8} \cdot 8900 = 89 \text{ mg}$$

$$N = m_{Cu} / m_{A,Cu} = 8.9 \cdot 10^{-5} / (1.05 \cdot 10^{-25}) = 8.476 \cdot 10^{20}$$

Mit  $L' = 6.023 \cdot 10^{23}$  / mol folgt die Stoffmenge  $8.476 \cdot 10^{20} / 6.023 \cdot 10^{23} = 1.407 \cdot 10^{-3}$  mol .

2)

8 Würfecken mit je 1/8 eines Kupferatoms innerhalb des Elementarwürfels,

6 Seitenflächen mit je 1/2 eines Kupferatoms innerhalb des Elementarwürfels:

$$8 \cdot (1/8) + 6 \cdot (1/2) = 1 + 3 = 4 \text{ Kupferatome je Elementarzelle!}$$

$$N / 4 = 8.476 \cdot 10^{20} / 4 = 2.119 \cdot 10^{20} \text{ Elementarzellen im Drahtstück, also}$$

$$N / 4 = V_{Cu} / a_{Cu}^3 \Rightarrow a_{Cu} = \sqrt[3]{4 \cdot V_{Cu} / N} = \sqrt[3]{4 \cdot 10^{-8} / (8.476 \cdot 10^{20})} = 0.3614 \cdot 10^{-9}$$

$$= 3.6 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 3.6 \text{ Angström}$$

3)

$$\text{Anzahl der Leitungselektronen im Drahtstück } N_e = N = 8.476 \cdot 10^{20},$$

$$n_e = N_e / V_{Cu} = 8.476 \cdot 10^{20} / 10 = 8.476 \cdot 10^{19} / \text{mm}^3$$

4)

Die beiden parallelen Drähte bilden einen Kondensator. Die Ladung befindet sich im elektrostatischen Fall auf der Leiteroberfläche und zwar so verteilt, dass das Leiterinnere feldfrei ist ( $E = 0$  im Inneren). Der zugehörige Ladungsschwerpunkt dieser Oberflächenladungsverteilung liegt genau genommen nicht bei  $\pm d/2$ , sondern bei  $\pm a/2$  mit

$$a/2 = \sqrt{(d/2)^2 - (d_{Cu}/2)^2} = \sqrt{(1000/2)^2 - (1.12/2)^2} = 499.9997 \text{ mm} \approx d/2, \text{ da } d_{Cu}/d \ll 1.$$

$$F_C = -\frac{Q \cdot (-Q)}{2\pi\epsilon_0 a} \cong -\frac{Q \cdot (-Q)}{4\pi\epsilon_0 d} = 10^{-9} \text{ N}$$

$$\Rightarrow Q = \sqrt{F_C \cdot 2\pi\epsilon_0 d} = \sqrt{10^{-9} \cdot 2\pi \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 1^2} = 23.59 \cdot 10^{-11} \text{ As}$$

$$\Delta N_e = Q/e = 23.59 \cdot 10^{-11} / (1.6 \cdot 10^{-19}) = 14.74 \cdot 10^8,$$

$$\Delta N_e / N_e = 14.74 \cdot 10^8 / (8.476 \cdot 10^{20}) = 1.74 \cdot 10^{-12}.$$

Die maximale elektrische Feldstärke tritt an der Leiteroberfläche (wegen der dort höchsten Feldliniendichte) auf. Wegen  $d_{Cu}/d \ll 1$  genügt es, einen der beiden Drähte für sich alleine zu betrachten. Mit dem Satz vom elektrischen Hüllenfluss folgt für die radial gerichtete Feldstärke  $E_{\max}$ :

$$Q = \oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = D_r \cdot l_{Cu} \cdot d_{Cu} \pi = \epsilon_0 \cdot E_r = \epsilon_0 \cdot E_{\max}$$

$$E_{\max} = \frac{Q}{\epsilon_0 \cdot l_{Cu} \cdot d_{Cu} \pi} = \frac{23.59 \cdot 10^{-11}}{8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 0.01 \cdot 0.00112 \pi} = 0.76 \frac{\text{MV}}{\text{m}}$$

$$E_{\max} = 0.76 \frac{\text{MV}}{\text{m}} = 7.6 \frac{\text{kV}}{\text{cm}} < 30 \frac{\text{kV}}{\text{cm}}. \text{ Die Luft schlägt nicht durch, aber die Kraft ist klein.}$$

Aber selbst für große elektrostatische Kräfte (z. B. 10 N/cm Drahtlänge) wäre mit  $Q = 23.59 \cdot 10^{-6} \text{ As}$ ,  $\Delta N_e / N_e = 1.74 \cdot 10^{-7}$  je cm Drahtlänge nur ein äußerst geringer Anteil an Ladungsverschiebung nötig, allerdings lässt sich dies in Luft nicht realisieren.

5)

Je Drahtlänge 10 mm:

$$\frac{F_C}{F} = -\frac{Q \cdot (-Q)}{2\pi\epsilon_0 d} \cdot \frac{d^2}{G \cdot m_{Cu} m_{Cu}} = \frac{(23.59 \cdot 10^{-11})^2}{2\pi \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 8.9 \cdot 10^{-5}} = 112 \cdot 10^3$$

Die Gravitationskraft ist gegenüber der elektrostatischen Kraft vernachlässigbar klein. Im Planetensystem sind die Gravitationskräfte dominant, da die Himmelskörper hochgradig elektrisch neutral sind.

6)

Elektrische Feldstärke in Richtung des Abstands der beiden parallelen Drähte ( $x$ -Richtung,  $x = 0$  mittig zwischen den beiden Drähten):

$$E_x(x) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} \cdot \frac{a}{(a/2)^2 - x^2}, \quad \frac{a}{2} = \sqrt{(d/2)^2 - (d_{Cu}/2)^2}.$$

$$U = \int_{\frac{d}{2} - \frac{d_{Cu}}{2}}^{\frac{d}{2} + \frac{d_{Cu}}{2}} E_x(x) \cdot dx = \frac{Q}{\pi\epsilon_0 l} \cdot \ln\left(\frac{a+d-d_{Cu}}{a-d-d_{Cu}}\right) = \frac{Q}{C},$$

$$U \cong \frac{Q}{\pi\epsilon_0 l} \cdot \ln\left(\frac{2d}{d_{Cu}}\right) = \frac{33.36 \cdot 10^{-11}}{\pi \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 0.01} \cdot \ln\left(\frac{2 \cdot 10^3}{1.12}\right) = 8980 \text{ V}$$

$$C = \frac{\pi \epsilon_0 l}{\ln\left(\frac{a+d-d_{Cu}}{a-d-d_{Cu}}\right)} \approx \frac{\pi \epsilon_0 l}{\ln(2d/d_{Cu})} = \frac{33.36 \cdot 10^{-11}}{8980} = 3.71 \cdot 10^{-14} \text{ F je cm Drahtlänge}$$

Je 1 m Drahtlänge:  $C_m = 100 C = 3.71 \cdot 10^{-12} \text{ F}$ ,

$$W_e = C_m \cdot U^2 / 2 = 3.71 \cdot 10^{-12} \cdot 8980^2 / 2 = 0.15 \text{ mJ}$$

$$\text{Kontrolle: } W_e = Q_m \cdot U / 2 = 100 Q \cdot U / 2 = 100 \cdot 33.36 \cdot 10^{-11} \cdot 8980 / 2 = 0.15 \text{ mJ}$$

**Aufgabe G3:** Elektrischer Stromfluss, Verlustleistung

In einem metallischen elektrischen Runddrahtleiter als Kupfer (Leitungselektronendichte  $n_e = 8.476 \cdot 10^{19} / \text{mm}^3$ , elektrische Leitfähigkeit  $\kappa_{20^\circ\text{C}} = 57 \cdot 10^6 \text{ S/m}$ ) mit dem Drahtdurchmesser  $d_{Cu} = 1.12 \text{ mm}$  fließt Gleichstrom  $I = 10 \text{ A}$ .

1) Wie groß sind die Stromdichte  $J$ , die erforderliche elektrische Feldstärke  $E$  im Leiter in Richtung des Stromflusses und die elektrische Spannung  $U$  bei 10 m Leiterlänge? In welche Richtung bewegen sich die Leitungselektronen?

2) Die Leitungselektronen (Elektronenmasse  $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ ) bewegen sich bei 20°C OHNE Stromfluss ungeordnet mit der mittleren „thermischen“ Geschwindigkeit  $v_{th} = 1.6 \cdot 10^6 \text{ m/s}$  im „freien“ Raum zwischen den Gitteratomrümpfen. Wie schnell bewegen sich die Leitungselektronen gemeinsam als überlagerte Driftgeschwindigkeit  $v_D$  auf Grund des Stromflusses? Wie groß ist  $v_D / v_{th}$ ? Wie groß ist die durch die Elektronenstöße des Stromflusses auftretende Verlustwärme je Sekunde  $P_d$  und die auf den Elektronenstrom wirkende Bremskraft  $F$ , jeweils je  $\text{mm}^3$ ?

3) Wie groß ist die dabei bewegte Masse  $\Delta m$  in einem  $l = 10 \text{ m}$  langen Leiter, deren kinetische Energie  $W_k$  und der Massestrom in  $\text{mg/s}$ ?

4) Wie groß ist der Massestrom bei Wechselstrom? Hängt er von der Frequenz  $f$  des Wechselstroms ab?

5) Ist die bewegte Masse bei Stromfluss in einem Ionenleiter (z. B. vollständig ionisierte Kochsalzlösung  $\text{Na}^+$  (23  $\text{mg/mol}$ ) und  $\text{Cl}^-$ -Ionen, 35  $\text{mg/mol}$ ) bei sonst gleichen Bedingungen größer?

**Aufgabe G3 (Lösung):** Elektrischer Stromfluss, Verlustleistung

1)

$$A_{Cu} = (d_{Cu})^2 \cdot \pi / 4 = 1.12^2 \pi / 4 = 0.985 \text{ mm}^2 \approx 1 \text{ mm}^2, J = I / A_{Cu} = 10 / 1 = 10 \text{ A/mm}^2,$$

$$E = J / \kappa = 10 \cdot 10^6 / (57 \cdot 10^6) = 0.175 \text{ V/m}, U = E \cdot l = 0.175 \cdot 10 = 1.75 \text{ V}$$

Die Leitungselektronen sind negativ geladen ( $-e = -1.6 \cdot 10^{-19} \text{ As}$ ) und bewegen sich entgegen der positiv gezählten (technischen) Stromrichtung.

2)

$$I = \Delta Q / \Delta t \Rightarrow \Delta t = 1 \text{ s} : \Delta Q = 10 \cdot 1 = 10 \text{ As},$$

$$\text{Anzahl der Elektronen (Ladung } -e) \text{ in } \Delta Q : \Delta N_e = \Delta Q / e = 10 / (1.6 \cdot 10^{-19}) = 6.25 \cdot 10^{19},$$

$$\text{Volumen für } \Delta Q : \Delta V = \Delta N_e / n_e = 6.25 \cdot 10^{19} / (8.476 \cdot 10^{19}) = 0.737 \text{ mm}^3.$$

Dieses Volumen spannt sich über den Drahtquerschnitt  $A_{Cu}$  mit der Länge  $\Delta l$  auf:  $\Delta V = \Delta l \cdot A_{Cu} \Rightarrow \Delta l = 0.737 / 1 = 0.737 \text{ mm}$ . Dieses Volumen wandert je Sekunde  $\Delta t = 1 \text{ s}$

durch die Drahtquerschnittsfläche und legt dabei die „Driftgeschwindigkeit“  $v_D = \Delta l / \Delta t = 0.737 / 1 = 0.737 \text{ mm/s}$  zurück.  $v_D / v_{th} = 0.737 \cdot 10^{-3} / (1.6 \cdot 10^6) = 4.6 \cdot 10^{-10}$  !

Fazit:

Die Driftgeschwindigkeit ist gegenüber der thermischen Wimmelbewegung vernachlässigbar klein.

$$P_d / V = U \cdot I / V = U \cdot I / (A_{Cu} l_{Cu}) = (U / l_{Cu}) \cdot (I / A_{Cu}) = E \cdot J = 0.175 \cdot 10^7 \text{ W/m}^3 = 1.75 \text{ mW/mm}^3$$

$$\frac{F \cdot v_D}{V} = \frac{P_d}{V}, \quad \frac{F}{V} = \frac{P_d}{V \cdot v_D} = \frac{1.75 \cdot 10^{-3}}{0.737 \cdot 10^{-3}} = 2.37 \text{ N/mm}^3$$

Kontrolle:

$$\frac{F}{V} = \frac{P_d}{V \cdot v_D} = \frac{E \cdot J}{v_D} = \frac{E \cdot n_e v_D \cdot e}{v_D} = E \cdot \frac{\Delta N_e}{V} \cdot e = \frac{E \cdot \Delta Q}{V}$$

Die Bremskraft  $F$  wird durch die auf die Leitungselektronen wirkende *Coulomb*-Kraft  $E \cdot \Delta Q$  kompensiert, so dass eine konstante Driftgeschwindigkeit (= unbeschleunigte Elektronenströmung) möglich ist.

3)

Masstransport mit  $v_D$ :

$$\Delta m = m_e \cdot \Delta N_e \cdot l / \Delta l = 9.11 \cdot 10^{-31} \cdot 6.25 \cdot 10^{19} \cdot 10 / (0.737 \cdot 10^{-3}) = 772.6 \cdot 10^{-9} \text{ kg},$$

$$W_k = \Delta m \cdot v_D^2 / 2 = 772.6 \cdot 10^{-9} \cdot (0.737^2 \cdot 10^{-6}) / 2 = 209.8 \cdot 10^{-15} \text{ J (verschwindend gering)}$$

Massestrom:

$$\dot{m} = m_e \cdot \Delta N_e / \Delta t = 9.11 \cdot 10^{-31} \cdot 6.25 \cdot 10^{19} / 1 = 56.94 \cdot 10^{-12} \text{ kg/s} = 56.94 \cdot 10^{-6} \text{ mg/s},$$

4)

Bei Wechselstrom pendeln die Leitungselektronen mit der ihr Vorzeichen wechselnden Driftgeschwindigkeit (z. B.  $v_D = \hat{v} \cdot \sin(2\pi f t)$ ) in und entgegen der Stromrichtung mit der Wechselstromfrequenz  $f$ .

Die mittlere Driftgeschwindigkeit ist Null:  $\frac{1}{1/f} \cdot \int_0^{1/f} \hat{v} \cdot \sin(2\pi f t) \cdot dt = 0$ .

Es findet im zeitlichen Mittel kein Masstransport statt.

5)

Ionen sind viel schwerer als Elektronen, z. B.: Na-Ionen: 23 g/mol, Cl-Ionen: 35 g/mol. Mit

$$L' = 6.023 \cdot 10^{23} / \text{mol} \text{ folgt}$$

$$m_{Na^+} = 23 \cdot 10^{-3} / (6.023 \cdot 10^{23}) = 3.82 \cdot 10^{-26} \text{ kg},$$

$$m_{Cl^-} = 35 \cdot 10^{-3} / (6.023 \cdot 10^{23}) = 5.81 \cdot 10^{-26} \text{ kg}.$$

$$m_{Na^+} / m_e = 3.82 \cdot 10^{-26} / (9.11 \cdot 10^{-31}) = 41932, \quad m_{Cl^-} / m_e = 5.81 \cdot 10^{-26} / (9.11 \cdot 10^{-31}) = 63776.$$

Die Massenströme in Richtung der positiven Stromrichtung  $\dot{m}_{Na^+}$  und entgegengesetzt  $\dot{m}_{Cl^-}$  sind erheblich größer.

### Aufgabe G4: Brunnenpumpe

Eine elektromotorisch angetriebene oberirdisch angeordnete Brunnenpumpe („saugende“ Pumpe) soll Wasser aus  $H = 6 \text{ m}$  Tiefe mit einem Volumenstrom von  $\dot{V} = 2000 \text{ l/h}$  fördern

(Pumpenwirkungsgrad der Kreiselpumpe  $\eta_P = 0.4$ , Wirkungsgrad des Einphasen-Asynchronmotors  $\eta_M = 0.7$ ).

- 1) Wie groß ist die erforderliche abgegebene mechanische Leistung  $P_N$  des Motors?
- 2) Wie groß sind die aufgenommene Wirkleistung  $P_{e,in}$  und der Effektivwert des Motorstroms  $I$  bei  $U_N = 230 \text{ V}$ ,  $\cos \varphi_N = 0.7$ ?
- 3) Ist es möglich, mit einer „saugenden“ Pumpe Wasser aus 15 m Tiefe zu fördern? Begründung? Alternativlösung?

**Aufgabe G4 (Lösung):** Brunnenpumpe

1)

$$P_N = \dot{V} \cdot \gamma_{H_2O} \cdot g \cdot H / \eta_P = \frac{2000 \cdot 10^{-3}}{3600} \cdot 1000 \cdot 9.81 \cdot 6 / 0.4 = 82 \text{ W}$$

2)

$$P_{e,in} = P_N / \eta_M = 82 / 0.7 = 117 \text{ W}, \quad I = \frac{P_{e,in}}{U_N \cdot \cos \varphi_N} = \frac{117}{230 \cdot 0.7} = 0.73 \text{ A}$$

3)

Der theoretisch minimale von der Pumpe erzeugte Unterdruck am Eingang der Pumpe ist  $p_P = 0 \text{ Pa}$ . Der von außen wirkende Luftdruck  $p_L = 10^5 \text{ Pa}$  drückt auf das Wasser und fördert so die Wassersäule durch die Pumpe. Der Druck einer Wassersäule der Höhe  $h$  mit der

Querschnittsfläche  $A$  ist 
$$p = \frac{m_{H_2O} \cdot g}{A} = \frac{V_{H_2O} \cdot \gamma_{H_2O} \cdot g}{A} = \frac{A \cdot h \cdot \gamma_{H_2O} \cdot g}{A} = h \cdot \gamma_{H_2O} \cdot g \cdot$$

Die maximale Förderhöhe  $h_{max}$  einer saugenden Pumpe ist folglich mit

$$p_L - p_P = p \Rightarrow p_L = p = h_{max} \cdot \gamma_{H_2O} \cdot g \quad : \quad h_{max} = p_L / (\gamma_{H_2O} \cdot g) = 10^5 / (1000 \cdot 9.81) = 10.2 \text{ m}.$$

Eine saugende Pumpe kann daher nicht Wasser aus eine Tiefe von 15 m fördern. Hier wird eine „drückende“ Pumpe benötigt, die in 15 m Tiefe angeordnet ist. Mit ihrem erzeugten Pumpendruck am Pumpenausgang  $p_{P,a} = h \cdot \gamma_{H_2O} \cdot g = 15 \cdot 1000 \cdot 9.81 = 14.2 \text{ kPa}$  drückt sie das Wasser in die Höhe.

**Aufgabe G5:** Energiestrom der Sonne

Die Sonne (Radius  $r_S = 6.91 \cdot 10^8 \text{ m}$ ) sendet insgesamt einen Energiestrom (= Energie je Zeit) von  $P_S = 3.85 \cdot 10^{26} \text{ W}$  aus.

- 1) Wie groß ist die Energiestromdichte  $S_S$  an der Sonnenoberfläche und beim Eintritt in die Erdatmosphäre (= extraterrestrisch)  $S_E$  auf der Verbindungslinie Erde-Sonne (Abstand  $d_{SE} = 1.5 \cdot 10^{11} \text{ m}$  vom Sonnenmittelpunkt)?
- 2) Etwa 30% der insgesamt die Erdatmosphäre treffenden Sonneneinstrahlung werden sofort reflektiert. Wie groß ist dann der die Erdoberfläche erreichende Energiestrom  $P_E$  (Erdradius  $r_E = 6.37 \cdot 10^6 \text{ m}$ )? Was passiert letztlich mit dieser Energie?

**Aufgabe G5 (Lösung):** Energiestrom der Sonne

1)

$$\text{Sonnenoberfläche: } A_S = 4\pi \cdot r_S^2 = 4\pi \cdot (6.91 \cdot 10^8)^2 = 600.0 \cdot 10^{16} \text{ m}^2,$$

$$S = P_S / A_S = 3.85 \cdot 10^{26} / (600.0 \cdot 10^{16}) = 6.42 \cdot 10^7 \text{ W/m}^2 = 64.2 \text{ MW/m}^2,$$

$$\text{extraterrestrisch: } A_{SE} = 4\pi \cdot (d_{SE})^2 = 4\pi \cdot (1.5 \cdot 10^{11})^2 = 28.27 \cdot 10^{22} \text{ m}^2,$$

$$S_E = P_S / A_{SE} = 3.85 \cdot 10^{26} / (28.27 \cdot 10^{22}) = 1.362 \cdot 10^3 \text{ W/m}^2 = 1.362 \text{ kW/m}^2$$

(„extraterrestrische“ Solarkonstante)

2)

$$\text{Projizierte Erdoberfläche („Scheibenfläche“): } A_E = r_E^2 \cdot \pi = (6.37 \cdot 10^6)^2 \cdot \pi = 1.275 \cdot 10^{14} \text{ m}^2$$

$$P_E = 0.7 \cdot S_E \cdot A_E = 0.7 \cdot 1.362 \cdot 10^3 \cdot 1.275 \cdot 10^{14} = 1.215 \cdot 10^{17} \text{ W}$$

Da die Gesamtenergie der Erde in etwa konstant ist (abgesehen von der auf dieser Energieskala vernachlässigbar kleinen Klimaerwärmung), werden auch diese 70% der eingestrahlten Sonnenenergie nahezu vollständig in den Weltraum abgestrahlt.

### Aufgabe G6: Durchlauferhitzer versus Heißwasserspeicher

Beim Durchlauferhitzer wird Wasser (spezifische Wärmekapazität  $c_{H_2O} = 4.19 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ ) durch von außen (z. B. mit einer Gasflamme oder elektrischen Widerstands-Heizbändern) beheizte Röhren beim Durchlauf erhitzt. Für ein Handwaschbecken wird ein Durchlauferhitzer installiert, der einen Wasserstrom von 0.05 l/s von 10°C auf 60°C erwärmt.

1) Wie groß ist die dafür benötigte Wärmeleistung  $P$ ?

2) Wenn diese Heizung elektrisch bei 230 V einphasig erfolgt, wie groß sind Heizwiderstand  $R$  und Netzstrom  $I$  (Effektivwert)? Reicht eine Absicherung mit einer 16 A-Sicherung?

3) Alternativ soll ein Heißwasserspeichergerät installiert werden, bei dem 5 Liter Wasser über elektrische Heizstäbe 10°C auf 60°C während 6 Minuten erwärmt wird. Wie groß sind nun Heizwiderstand  $R$  und Netzstrom  $I$ ? Reicht eine Absicherung mit einer 16 A-Sicherung?

### Aufgabe G6 (Lösung): Durchlauferhitzer versus Heißwasserspeicher

1)

$$\text{Volumenstrom: } \dot{V}_{H_2O} = 0.05 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 / \text{s} \text{ Erwärmung: } \Delta\vartheta = 60 - 10 = 50 \text{ K},$$

$$\text{Wärmenergie: } W = V_{H_2O} \cdot \gamma_{H_2O} \cdot c_{H_2O} \cdot \Delta\vartheta,$$

$$\text{Wärmeleistung: } P = W / t = \dot{V}_{H_2O} \cdot \gamma_{H_2O} \cdot c_{H_2O} \cdot \Delta\vartheta = 0.05 \cdot 10^{-3} \cdot 1000 \cdot 4190 \cdot 50 = 10475 \text{ W}$$

2)

$$P = U \cdot I = R \cdot I^2 \Rightarrow I = P / U = 10475 / 230 = 45.5 \text{ A}, \quad R = U / I = 230 / 45.5 = 5.05 \Omega$$

Eine Installation mit 16A-Sicherung (< 45.5 A!) reicht nicht aus!

3)

$$P = V_{H_2O} \cdot \gamma_{H_2O} \cdot c_{H_2O} \cdot \Delta\vartheta / \Delta t = 5 \cdot 10^{-3} \cdot 1000 \cdot 4190 \cdot 50 / (6 \cdot 60) = 2910 \text{ W},$$

$$I = P / U = 2910 / 230 = 12.65 \text{ A} < 16 \text{ A}. \text{ Die Absicherung mit 16 A reicht aus!}$$

$$R = U / I = 230 / 12.65 = 18.18 \Omega$$

### Aufgabe G7: Menschliche Leistung am Heimtrainer

Ein Heimtrainer (= Standfahrrad) zum Kreislauftraining besteht neben Sitz und Haltegriff aus einer Pedalkurbel (Hebelarm  $l = 30 \text{ cm}$  vom Pedal zum Kurbeldrehpunkt), die über einen Riemen eine Metallscheibe zwischen zwei feststehenden Permanentmagneten antreibt. In die so bewegte Metallscheibe induziert das Permanentmagnetfeld über Bewegungsinduktion eine elektrische Kreisspannung, die einen elektrischen Kreisstrom (Wirbelstrom) in der Scheibe

treibt, der mit dem Magnetfeld eine bremsende *Lorentz*-Kraft erzeugt (Prinzip der Wirbelstrombremse). Über den manuell verstellbaren Abstand der Magnete zu Scheibe wird diese an den Pedalen wirksame Bremskraft verändert und sei so eingestellt, dass sich beim Pedal-Treten eine Kraft von  $F = 70 \text{ N}$  am Pedal einstellt.

- 1) Wie groß ist das für die trainierende Person wirksame bremsende Drehmoment  $M$  ?
- 2) Wie groß ist bei der Kurbeldrehzahl  $n = 75/\text{min}$  die mechanisch Kurbelleistung  $P$ ?
- 3) Wie viel Energie (in kcal) verbraucht die trainierende Person bei einem Muskelwirkungsgrad  $\eta = 25\%$  während einer Trainingsdauer  $t = 35$  Minuten?
- 4) Welche Strecke  $L$  würde eine radfahrende Person mit einem 28-Zoll-Fahrrad bei einer Übersetzung von der Kurbel- auf die Raddrehzahl 1:3 während dieser Zeit zurücklegen?

### **Aufgabe G7 (Lösung):** Menschliche Leistung am Heimtrainer

1)  
Nur beim herunter Treten des Pedals kann das Bein Kraft auf das Pedal bringen, so dass jedes Bein abwechselnd die Kraft  $70 \text{ N}$  und damit das Drehmoment  $M = F \cdot l = 70 \cdot 0.3 = 21 \text{ Nm}$  aufbringen muss.

2)  
$$P = 2\pi \cdot n \cdot M = 2\pi \cdot (75/60) \cdot 21 = 165 \text{ W}$$

3)  
 $1 \text{ kcal} = 4185 \text{ J}$ ,  $W = P \cdot t / \eta = 165 \cdot (35 \cdot 60) / 0.25 = 1.385 \text{ MJ} = 331 \text{ kcal}$

4)  
 $1 \text{ Zoll} = 2.54 \text{ cm}$ , Raddurchmesser  $d = 28 \cdot 2.54 = 71.12 \text{ cm}$ ,  
Raddrehzahl  $n_R = i \cdot n = 3 \cdot 75 = 225/\text{min}$ ,  
Radumfangsgeschwindigkeit = Vortriebsgeschwindigkeit des Fahrrads:  
 $v = d\pi \cdot n_R = \pi \cdot 0.7112 \cdot (225/60) = 8.38 \text{ m/s} = 30.16 \text{ km/h}$ ,  
 $L = v \cdot t = 30.16 \cdot (35/60) = 17.6 \text{ km}$

### **Aufgabe G8:** Menschliche Leistungsfähigkeit

Ein 85 kg schwerer Mann

1) läuft in 20 Sekunden die Treppe vom Erdgeschoss bis in das vierte Stockwerk hinauf (Höhendifferenz  $h = 14 \text{ m}$ ). Welche mechanische Leistung  $P$  (in W und PS) ist dazu nötig? Wie groß ist der Energieverbrauch (kcal) der (überwiegend belasteten) Beinmuskeln (Muskelwirkungsgrad 25 %)?

2) Er macht 60 Kniebeugen in 60 Sekunden (Höhenhub des Körperschwerpunkts  $0.6 \text{ m}$  je Kniebeuge): Wie groß ist die mechanische Leistung? Auf welche Leistungsfähigkeit der Beinmuskulatur (in PS) schließen Sie aus 1) und 2) in etwa?

3) Er macht 20 Liegestütze in 25 Sekunden (Höhenhub des Körperschwerpunkts  $25 \text{ cm}$ ): Wie groß ist die mechanische Leistung? Auf welche Leistungsfähigkeit der Armmuskulatur (in PS) schließen Sie in etwa?

4) Der Mann hebt mit einer Schaufel eine Erdgrube (Schwemmsand = kein großer Widerstand gegen das Eindringen der Schaufel,  $\gamma = 2000 \text{ kg/m}^3$ ) von  $1 \text{ m}$  Tiefe und  $1 \text{ m}^2$  Grundfläche in 20 Minuten aus. Wie groß sind die mechanische Hebearbeit und Leistung? Wie viele (große) Kalorien verbraucht der Arbeiter (Wirkungsgrad der Arm- und Beinmuskeln 10 %)?

**Aufgabe G8 (Lösung):** Menschliche Leistungsfähigkeit

1)

$$P = F \cdot v = m \cdot g \cdot v = m \cdot g \cdot (h/t) = 85 \cdot 9.81 \cdot (14/20) = 583.7 \text{ W} = 0.79 \text{ PS}$$

$$W = P \cdot t / \eta = 583.7 \cdot 20 / 0.25 = 46696 \text{ Ws} = 11.2 \text{ kcal}$$

2)

Nur beim Heben wird von den Beinmuskeln mechanische Arbeit gegen die Schwerkraft verrichtet (Beim Absenken arbeiten allerdings die Muskeln physiologisch ebenfalls).

$$P = F \cdot v = m \cdot g \cdot v = m \cdot g \cdot (h/t) = 85 \cdot 9.81 \cdot (0.6/1) = 500.3 \text{ W} = 0.68 \text{ PS}$$

Leistungsfähigkeit der Beinmuskulatur: ca. 1 PS!

3)

$$P = F \cdot v = m \cdot g \cdot v = 85 \cdot 9.81 \cdot (0.25 \cdot 20 / 25) = 166.9 \text{ W} = 0.23 \text{ PS}$$

Die Leistungsfähigkeit der Armmuskulatur ist deutlich geringer als die der Beinmuskulatur (ca. 0.1 ... 0.2 PS)

4)

Kein großer Widerstand gegen das Eindringen der Schaufel in den Sand = reine Hebearbeit!

Ausgehobene Sandmasse:  $m = A \cdot h \cdot \gamma = 1 \cdot 1 \cdot 2000 = 2000 \text{ kg}$ ,

mittlere Hubhöhe der Sandmasse:  $h/2 = 0.5 \text{ m}$ ,  $W = m \cdot g \cdot (h/2) = 2000 \cdot 9.81 \cdot 0.5 = 9810 \text{ J}$ ,

$$P = W/t = 9810 / (20 \cdot 60) = 8.2 \text{ W} = 0.01 \text{ PS},$$

Kalorienverbrauch:  $W/\eta = (9810/0.1)/4185 = 23.4 \text{ kcal}$

**Aufgabe G9:** Energieumsatz im menschlichen Körper

Das Blut ( $\gamma_B \approx 1 \text{ kg/l}$ ) transportiert im menschlichen Körper den aus der Atemluft aufgenommenen Sauerstoff aus den Lungen in die Zellen, wo er die aus der Nahrung aufgenommenen Zuckermoleküle oxidiert, wobei die für den lebenden Organismus nötige Energie  $W$  frei wird. Ein „normales“ menschliches Herz pumpt je Herzschlag  $1 \text{ cm}^3$  Blut je kg Körpergewicht. Bei Anstrengung steigt die Herzfrequenz („Puls“) von etwa 60/min auf 150/min. Blut enthält 15.5% Masseprozent Hämoglobin (Hb, bestehend aus Aminosäuren), wobei ein Hb-Molekül die relative Masse 64470 hat (atomare Masseinheit als  $1/12$  von  $C^{12}$ :  $1.66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ ). Jedes dieser Riesenmoleküle kann vier Sauerstoffmoleküle  $O_2$  ( $O_2$ : relative Masse 32) reversibel binden und auf diese Weise im (arteriellen) Blut transportieren. In den Zellen werden die  $CH_2O$ -Ketten der Zuckermoleküle (z. B. sechs Kettenglieder: Traubenzucker  $C_6H_{12}O_6$ ) gemäß der exothermen Reaktion  $CH_2O + O_2 \rightarrow H_2O + CO_2 + W$  oxidiert. Wasser  $H_2O$  und Kohlendioxid  $CO_2$  werden ausgeatmet, und die Energie  $W = 15.7 \text{ kJ}$  je Gramm Zucker für die Körperaktivität eingesetzt.

1) Wie viele g/s Blut werden (je kg Körpergewicht) bei 150/min Puls gefördert? Wie groß sind in g/s das dabei geförderte Hämoglobin und der Sauerstoff?

2) Wie viel Gramm Zucker werden je Sekunde je kg Körpergewicht oxidiert? Wie viel Energie  $W$  wird dabei dem Körper je kg Körpergewicht je Sekunde zugeführt? Wie groß ist dadurch bei einem Muskel-Wirkungsgrad  $\eta = 25\%$  die mechanische Muskelleistung  $P$  je kg Körpergewicht?

3) Wie viele Höhenmeter  $\Delta h$  kann eine trainierte bergsteigende Person mit der Beinmuskelleistung von 2) in einer halben Stunde bergauf gehen?

**Aufgabe G9 (Lösung):** Energieumsatz im menschlichen Körper

1)

$$\dot{m}_B = 1 \text{ cm}^3 \cdot 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot \frac{150}{60\text{s}} = 2.5 \frac{\text{g}}{\text{s}}, \quad \dot{m}_{Hb} = 0.155 \cdot 2.5 \frac{\text{g}}{\text{s}} = 0.39 \frac{\text{g}}{\text{s}},$$

$$\dot{m}_{O_2} = \frac{4 \cdot 32}{64470} \cdot 0.39 \frac{\text{g}}{\text{s}} = 0.77 \frac{\text{mg}}{\text{s}}$$

2)

Relative Atommassen: C: 12, H: 1, O: 16, O<sub>2</sub>: 32, CH<sub>2</sub>O: 12 + 2 · 1 + 16 = 30.

$$\frac{m_{\text{CH}_2\text{O}}}{m_{\text{O}_2}} = \frac{30}{32}, \quad \dot{m}_{\text{CH}_2\text{O}} = \dot{m}_{\text{O}_2} \cdot (30/32) = 0.77 \cdot (30/32) = 0.72 \text{ mg/s},$$

$$W' = W / m = 15.7 \text{ kJ} \cdot \frac{0.72 \text{ mg/s}}{1 \text{ g}} = 11.3 \text{ J/s}, \quad P' = P / m = \eta \cdot W' = 0.25 \cdot 11.3 = 2.8 \text{ W/kg}$$

3)

$$P = m \cdot g \cdot \Delta h / \Delta t \Rightarrow P / m = g \cdot \Delta h / \Delta t = 2.8 \text{ W/kg},$$

Steiggeschwindigkeit:  $\Delta h / \Delta t = 2.8 / 9.81 = 0.288 \text{ m/s}$ ; in der Zeit  $\Delta t = 30 \text{ min}$  werden

$$\Delta h = 0.288 \cdot 30 \cdot 60 = 518.5 \text{ m Höhenmeter zurückgelegt.}$$

**Aufgabe G10:** Potentielle und kinetische Energie

1) Ein Körper mit der Masse  $m_2 = 1 \text{ kg}$  befindet sich im Abstand  $h = 1 \text{ m}$  von der Erdoberfläche. Welche potentielle Energie  $W_p$  hat er? Welche Gravitationskraft  $F$  erfährt er?

2) Wie groß ist die kinetische Energie  $W_k$  dieses aus  $1 \text{ m}$  frei fallenden Körpers bei der Höhe  $h/2 = 0.5 \text{ m}$ ? Wie groß ist dabei seine Geschwindigkeit  $v$ , und wie viel Zeit ist verstrichen?

**Aufgabe G10 (Lösung):** Potentielle und kinetische Energie

1)

Masse  $m_2 = 1 \text{ kg}$ , Abstand  $h = 1 \text{ m}$ ,

$$\text{potentielle Energie } W_p(h = 1\text{m}) = 1 \text{ kg} \cdot 9.81 \text{ m/s}^2 \cdot 1 \text{ m} = 9.81 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2 = 9.81 \text{ J},$$

$$\vec{F} = G \cdot \frac{m_E \cdot m_2}{r_E^2} \cdot \vec{e}_r = g \cdot m_2 \cdot \vec{e}_r, \quad F = g \cdot m_2 = 9.81 \text{ m/s}^2 \cdot 1 \text{ kg} = 9.81 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2 = 9.81 \text{ N}.$$

Anmerkung:

Der Körper zieht seinerseits mit der Kraft  $-9.81 \text{ N}$  die Erde an.

2)

$$z = h/2: \quad W_k = m_2 \cdot v^2 / 2 = m_2 \cdot g \cdot z = 1 \cdot 9.81 \cdot 0.5 = 4.91 \text{ J},$$

$$v = \sqrt{2W_k / m_2} = \sqrt{2 \cdot 4.91 / 1} = 3.13 \text{ m/s} \quad \text{oder} \quad v = \sqrt{2 \cdot g \cdot z} = \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 0.5} = 3.13 \text{ m/s},$$

$$t = v / g = 3.13 / 9.81 = 0.32 \text{ s}.$$

**Aufgabe G11:** Energieverbrauch beim Autofahren

Ein mechanisch gebremster Personenkraftwagen (Masse mit Beladung  $m = 1.5 \text{ t}$ )

1) ist täglich für den  $5 \text{ km}$  langen Weg zur Arbeit im Stadtverkehr mit  $30 \text{ km/h}$  unterwegs, muss aber im Mittel alle  $100 \text{ m}$  an einer roten Ampel halten. Wie hoch ist der

Energiemehrverbrauch (in Liter Kraftstoff je 100 km) gegenüber einer Fahrt auf gleicher Streckenlänge mit konstanter Geschwindigkeit mit 30 km/h je Arbeitsmonat? Der *Otto*-Motor hat dabei einen wirksamen Wirkungsgrad  $\eta = 30\%$  und der *Otto*-Kraftstoff (Benzin) einen Brennwert  $2.6 \cdot 10^7 \text{ J/l}$  ( $\gamma_B = 0.75 \text{ kg/l}$ )!

2) Stellen Sie 1) den Kraftstoffmehrverbrauch bei einer Fahrt auf einen hohen Alpenpass (von 500 m auf 2500 m Seehöhe = über N.N.) gegenüber!

3) Welche Strecke kann das Fahrzeug mit 65 Liter Tankinhalt auf der Autobahn bei einer konstanten Geschwindigkeit von  $v = 140 \text{ km/h}$  und ebener Strecke zurücklegen? Nebenverbraucher (Scheinwerfer, Klimaanlage etc.) werden nicht berücksichtigt. Die Bremskraft  $F_R$  zufolge des Rollreibungswiderstands ist über den Beiwert  $f_R = 0.01$  proportional zur Fahrzeug-Normalkraft  $F_N$ ! Die Bremskraft  $F_L$  zufolge des turbulenten Luftströmungswiderstands ist über den Faktor  $f_L = 0.6 \text{ m}^2$  gemäß  $F_L = f_L \cdot \gamma_L \cdot v^2 / 2$  zu bestimmen (Luftsdichte  $\gamma_L = 1.2 \text{ kg/m}^3$ )!

4) Ein Elektroauto mit gleichen Fahrzeugdaten hat eine 100-Ah-Li-Ionen-Batterie mit der Energiedichte  $100 \text{ Wh/kg}$  und  $400 \text{ V}$  Batteriespannung. Der Wirkungsgrad des elektrischen E-Motor-Umrichter-Antriebssystems beträgt  $80\%$ ! Wie groß ist die zurückgelegte Wegstrecke im Vergleich zu 3) bei vollständiger Entladung der Batterie?

5) Vergleichen Sie die auf die Masse des Energieträgers bezogene Reichweite von 3) und 4)

### G11 (Lösung): Energieverbrauch beim Autofahren

1)

Arbeitsmonat = 4 Arbeitswochen =  $4 \cdot 5 = 20$  Arbeitstage:

Gesamtstrecke für Hin- und Rückfahrt  $L = 2 \cdot 5 \cdot 20 = 200 \text{ km}$ ; Anzahl jeweils der Brems- und Beschleunigungsvorgänge:  $z = 200 / 0.1 = 2000$ .

Beim mechanischen Bremsen an der Ampel wird die im Fahrzeug gespeicherte kinetische Energie  $W_k = m \cdot v^2 / 2 = 1500 \cdot (30/3.6)^2 / 2 = 52083 \text{ J}$  in Bremswärme der Scheibenbremsen verwandelt. Beim anschließenden Beschleunigen auf  $30 \text{ km/h}$  muss diese Energie dem Fahrzeug über den Antrieb zugeführt werden.

Dafür aufzuwendende Energie im Kraftstoff:

$$W = z \cdot W_k / \eta = m \cdot v^2 / 2 = 2000 \cdot 52083 / 0.3 = 347.2 \text{ MJ}$$

Kraftstoffverbrauch für das Beschleunigen:  $347.2 \cdot 10^6 / (26 \cdot 10^6) = 13.351$ ;

Spezifischer Kraftstoffmehrverbrauch:  $100 \cdot 13.351 / (200 \text{ km}) = 6.67 \text{ l/(100km)}$

2)

Kraftstoffenergiebedarf für die Fahrt zur Passhöhe (Höhendifferenz  $h = 2000 \text{ m}$ ):

$$W = m \cdot g \cdot h / \eta = 1500 \cdot 9.81 \cdot 2000 / 0.3 = 98.1 \text{ MJ};$$

Kraftstoffmehrverbrauch:  $98.1 \cdot 10^6 / (26 \cdot 10^6) = 3.81$ .

3)

Treibstoffmasse  $m_B = 65 \text{ l} \cdot 0.75 \text{ kg/l} = 48.75 \text{ kg}$  (in der Fahrzeugmasse  $m$  enthalten)

$$F_N = m \cdot g = 1500 \cdot 9.81 = 14715 \text{ N}, \quad F_R = f_R \cdot F_N = 0.01 \cdot 14715 = 147.2 \text{ N},$$

$$F_L = f_L \cdot \gamma_L \cdot v^2 / 2 = 0.6 \cdot 1.2 \cdot (140/3.6)^2 / 2 = 544.4 \text{ N},$$

$$\text{resultierende erforderliche Antriebskraft: } F_A = F_R + F_L = 147.2 + 544.4 = 691.6 \text{ N},$$

$$\text{mechanische Antriebsleistung: } P_A = v \cdot F_A = (140/3.6) \cdot 691.6 = 26897 \text{ W},$$

$$P = P_A / \eta = 26897 / 0.3 = 89658 \text{ J/s},$$

$$\text{mögliche Fahrzeit: } t = W / P = 65 \cdot 26 \cdot 10^6 / 89658 = 18849 \text{ s},$$

Fahrstrecke:  $s = v \cdot t = (140/3.6) \cdot 18849 = 733035 \text{ m} = 733 \text{ km}$

4)

Gespeicherte Energie in der Batterie:  $W_{Batt} = U \cdot I \cdot t = 400 \cdot 100 = 40000 \text{ Wh} = 144 \text{ MJ}$

Batteriemasse:  $m_{Batt} = 40000 \text{ Wh} / (100 \text{ Wh/kg}) = 400 \text{ kg}$ . Bei sonst gleichen Masseverhältnissen ist das E-Fahrzeug um  $m_{Batt} - m_B = 400 - 48.75 = 351.25 \text{ kg}$  schwerer.

$$F'_N = m \cdot g = (1500 + 351.25) \cdot 9.81 = 18161 \text{ N}, F'_R = f_R \cdot F'_N = 0.01 \cdot 18161 = 181.6 \text{ N},$$

$$F'_A = F'_R + F_L = 181.6 + 544.4 = 726.0 \text{ N}, P'_A = v \cdot F'_A = (140/3.6) \cdot 726.0 = 28234 \text{ W},$$

$$P' = P'_A / \eta' = 28234 / 0.8 = 35292 \text{ J/s}, t' = W_{Batt} / P' = 144 \cdot 10^6 / 35292 = 4080 \text{ s},$$

$$s' = v \cdot t' = (140/3.6) \cdot 4080 = 158676 \text{ m} = 158.7 \text{ km}$$

5)

Benzin:  $s/m_B = 733/48.75 = 15 \text{ km/kg}$ , Li-Ionen-Batterie:  $s'/m_{Batt} = 158.7/400 = 0.4 \text{ km/kg}$ ,  $0.4/15 = 2.67\%$  !

### Aufgabe G12: Strömende Flüssigkeit

1) Eine Flüssigkeit strömt mit der Geschwindigkeit  $v_1 = 6 \text{ m/s}$  durch den Querschnitt  $A_1 = 1 \text{ dm}^2$ . Wie hoch ist die Strömungsgeschwindigkeit  $v_2$  im erweiterten Strömungsquerschnitt  $A_2 = 3 \text{ dm}^2$ ?

2) In einer offenen Wasserrinne, herrscht überall derselbe Luftdruck  $p = p_0$  ausgesetzt ist. Aus einem Becken (Ortshöhe Höhe  $h = 100 \text{ m}$  gegenüber dem Ende der Wasserrinne) fließt das Wasser mit sehr kleiner Geschwindigkeit  $v_1 \approx 0$  Wasser in die Wasserrinne. Wie groß ist die Wasserfließgeschwindigkeit  $v_2$  am Ende der Wasserrinne?

3) Nun sei gegenüber 2) die Geschwindigkeit  $v_1 > 0$ , nämlich  $v_1 = 20 \text{ m/s}$ . Wie groß ist nun  $v_2$ ?

### G12 (Lösung): Strömende Flüssigkeit

1)

$$v_2 = v_1 A_1 / A_2 = v_1 \cdot (1/3) = v_1 / 3 = 6/3 = 2 \text{ m/s}.$$

2)

$$h_1 = h + h_2, p_1 = p_2 = p_0, v_1 \approx 0:$$

$$v_1^2 / 2 + p_0 / \gamma + g \cdot (h_2 + h) \approx p_0 / \gamma + g \cdot (h_2 + h) = v_2^2 / 2 + p_0 / \gamma + g \cdot h_2, 2 \cdot g \cdot h \approx v_2^2,$$

$$v_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \text{ („Ausfluss-Formel“)}$$

Höhendifferenz  $h = 100 \text{ m}$ :  $v_2 = \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 100} = 44.3 \text{ m/s} = 159 \text{ km/h}$ .

3)

$$v_1^2 / 2 + p_0 / \gamma + g \cdot (h_2 + h) = v_2^2 / 2 + p_0 / \gamma + g \cdot h_2: v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2 \cdot g \cdot h},$$

$$v_2 = \sqrt{20^2 + 2 \cdot 9.81 \cdot 100} = 48.6 \text{ m/s}$$

### Aufgabe G13: Wasserstoffgas

Wir betrachten  $\text{H}_2$ -Gas bei 1 bar,  $0^\circ\text{C}$ . Die Molekül-(Ruhe)-Masse ist  $m \approx 3.4 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ , der Abstand zwischen zwei Molekülen eine halbe freie Weglänge  $r = l / 2 = 1.35 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ .

- 1) Wie groß ist die zwischen zwei Gasmolekülen auftretende Gravitationskraft? Kann man diese Kraft für die Betrachtung des H<sub>2</sub>-Gases als ideales Gas vernachlässigen?
- 2) Wie groß ist bei dieser Temperatur die quadratisch mittlere Molekülgeschwindigkeit?
- 3) Berechnen Sie die Gasdichte!

**G13 (Lösung):** Wasserstoffgas

1)

$$F = G \cdot \frac{m \cdot m}{r^2} = 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot (3.4 \cdot 10^{-27})^2 / (1.35 \cdot 10^{-7})^2 = 4.2 \cdot 10^{-50} \text{ N}$$

Diese Kraft ist vernachlässigbar klein!

2)

$$\sqrt{(v^2)_{av}} = \sqrt{\frac{3 \cdot k \cdot T}{m}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 1.3805 \cdot 10^{-23} \cdot 273.15}{3.4 \cdot 10^{-27}}} = 1824 \text{ m/s}$$

3)

$$\text{H}_2\text{-Gasdichte bei } 0^\circ\text{C, 1 bar: } \gamma = N_A \cdot m / V = 2.652 \cdot 10^{25} \cdot 3.4 \cdot 10^{-27} / 1 = 0.09 \text{ kg/m}^3$$

**Aufgabe G14:** Erwärmung unterschiedlicher Stoffe

- 1) Ein Liter ( $V = 1 \text{ dm}^3$ ) von a) Luft, b) Kupfer, c) Eisen soll von  $20^\circ\text{C}$  auf  $100^\circ\text{C}$  erhitzt werden. Wie groß ist die dafür benötigte zugeführte Wärmeenergie  $\Delta Q$ ? Die Dichten von Luft / Kupfer / Eisen sind ca.  $\gamma = 1.226 / 8900 / 7850 \text{ kg/m}^3$ .
- 2) Wie hoch ist die Wärmeenergie  $\Delta Q_{Fe}$ , um 1 kg Eisen von  $20^\circ\text{C}$  zur Weißglut (ca.  $1000^\circ\text{C}$ ) zu erhitzen? Wie hoch ( $^\circ\text{C}$ ) erwärmt sich 1 Liter 20-gradiges Wasser mit derselben Energie?
- 3) Zwei Liter Wasser sollen bei normalem Luftdruck und Raumtemperatur  $20^\circ\text{C}$  mit einem Tauchsieder der Leistung  $P = 500 \text{ W}$  zum Sieden gebracht werden? Wie lange dauert der Vorgang?

**G14 (Lösung):** Erwärmung unterschiedlicher Stoffe

1)

$$\Delta T = 100 - 20 = 80 \text{ K, } \Delta Q = c \cdot M \cdot \Delta T = c \cdot \gamma \cdot V \cdot \Delta T$$

$$\text{a) Luft: } \Delta Q = 1.226 \cdot 10^{-3} \cdot 1009 \cdot 80 = \underline{\underline{99 \text{ J}}}$$

$$\text{b) Kupfer: } \Delta Q = 8900 \cdot 10^{-3} \cdot 388.5 \cdot 80 = \underline{\underline{276.6 \text{ kJ}}}$$

$$\text{c) Eisen: } \Delta Q = 7850 \cdot 10^{-3} \cdot 502 \cdot 80 = \underline{\underline{315.3 \text{ kJ}}}$$

2)

$$\Delta Q_{Fe} = 1 \cdot 502 \cdot (1000 - 20) = 491.96 \text{ kJ,}$$

$$\Delta \vartheta_{\text{H}_2\text{O}} = \Delta Q_{Fe} / (M \cdot c_{\text{H}_2\text{O}}) = 491.96 \cdot 10^3 / (1 \cdot 4185) = 117.6 \text{ K,}$$

$$\vartheta_{\text{H}_2\text{O}} = 20^\circ\text{C} + \Delta \vartheta_{\text{H}_2\text{O}} = 137.6^\circ\text{C.}$$

3)

$$\Delta Q = P \cdot \Delta t = c \cdot M \cdot \Delta T, \Delta t = c \cdot M \cdot \Delta T / P = 4185 \cdot 2 \cdot (100 - 20) / 500 = 1339.2 \text{ s.}$$

Der Vorgang dauert 22.3 Minuten!

**Aufgabe G15:** Wasserkocher

Eine Firma wirbt damit, dass der von ihr hergestellte elektrische Wasserkocher 0.2 l Wasser von 10 °C in 45 Sekunden zum Kochen bringt.

- 1) Wie groß ist die erforderliche elektrische Aufnahmeleistung? Reicht eine Sicherung mit 16 A für den entsprechenden Strom am Netz (230 V; 50 Hz)? Wärmeverluste werden vernachlässigt.
- 2) Wie lange benötigt derselbe Wasserkocher für das Sieden von 1 l Wasser?
- 3) Beim Erhitzen des Wassers gemäß 2) ist die Oberfläche des Wasserkochers bei 100 °C heißem Wasser etwa  $\vartheta_0 = 40$  °C heiß. Schätzen Sie ab, um wie viel sich die Zeit bis zum Sieden des Wassers aufgrund von Wärmeverlusten durch natürliche Konvektion ( $\alpha = 7 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ ) und Wärmestrahlung ( $c_s = 3 \cdot 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$ ) verzögert („Worst-Case“-Abschätzung)! Die Abmessungen des Wasserkochers sind: Höhe  $h = 25$  cm, Durchmesser  $d = 14$  cm. Die Umgebungstemperatur beträgt  $\vartheta_{\text{amb}} = 20$ °C.

**Aufgabe G15 (Lösung):** Wasserkocher

1) Leistung:

$$\frac{m \cdot c \cdot \Delta \vartheta}{\Delta t} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = P_{\text{therm}} = P_{\text{el}}$$

$$m = \gamma \cdot V = 1000 \cdot 0.2 \cdot 10^{-3} = 0.2 \text{ kg}$$

$$c = 4185 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}; \Delta \vartheta = 100^\circ\text{C} - 10^\circ\text{C} = 90 \text{ K}$$

$$P_{\text{el}} = 0.2 \cdot 4185 \cdot \frac{90}{45} = 1674 \text{ W} = U \cdot I \text{ (rein ohm'sch : Heizwiderstand)}$$

$$I = \frac{P_{\text{el}}}{U} = \frac{1674}{230} = 7.28 \text{ A} < 16 \text{ A}$$

2)

Betrachtung von 1000 ml:

$$\Delta t' = \frac{m'}{m} \cdot \Delta t = \frac{1}{0.2} \cdot 45 = 225 \text{ s} = 3 \text{ min } 45 \text{ s}$$

3)

„Worst-case“-Abschätzung: maximale Wärmeverluste bei  $\vartheta = 40^\circ\text{C}$ :  $\Delta \vartheta = \vartheta_0 - \vartheta_{\text{amb}} = 20 \text{ K}$

$$A = \frac{d^2 \cdot \pi}{4} + d \cdot \pi \cdot h = \frac{0.14^2 \cdot \pi}{4} + 0.14 \cdot \pi \cdot 0.25 = 0.125 \text{ m}^2$$

Wärmeverlustleistung durch Konvektion:

$$P_k = \alpha \cdot A \cdot \Delta \vartheta = 7 \cdot 0.125 \cdot 20 = 17.55 \text{ W}$$

Wärmeverlustleistung durch Strahlung:

Mit  $T_0 = 273.15 + 40 = 313.15 \text{ K}$ ;  $T_{\text{amb}} = 273.15 + 20 = 293.15 \text{ K}$ ;

$$P_s = c_s \cdot A \cdot (T_0^4 - T_{\text{amb}}^4) = 3 \cdot 10^{-8} \cdot 0.125 \cdot (313.15^4 - 293.15^4) = 8.37 \text{ W}$$

Gesamtwärmeverlustleistung:

$$\Delta P = P_s + P_k = 8.37 + 17.55 = 25.9 \text{ W}$$

Zusätzliche Zeit:

$$\frac{m \cdot c \cdot \Delta \vartheta}{\Delta t^*} = P_{\text{therm}} - \Delta P \Rightarrow \Delta t^* = \frac{m \cdot c \cdot \Delta \vartheta}{P_{\text{therm}} - \Delta P} = \frac{m \cdot c \cdot \Delta \vartheta}{P_{\text{therm}}} \cdot \frac{P_{\text{therm}}}{P_{\text{therm}} - \Delta P} = \Delta t' \cdot \frac{P_{\text{therm}}}{P_{\text{therm}} - \Delta P}$$

$$\frac{\Delta t^*}{\Delta t'} = \frac{P_{\text{therm}}}{P_{\text{therm}} - \Delta P} = \frac{1674}{1674 - 25.9} = 1.016$$

Die Zeit bis zum Sieden des Wassers verzögert sich näherungsweise geringfügig um 1.6%; in der Realität aber weniger, da mit der Wärmeverlustleistung bei maximaler Temperaturdifferenz  $\Delta t = 20 \text{ K}$  gerechnet wurde.

**Aufgabe G16:** Badeofen

Ein Badeofen hat einen Wasserspeicher mit  $h = 1.2 \text{ m}$  Höhe und einem Durchmesser  $d = 0.4 \text{ m}$ .

- 1) Wie groß ist die erforderliche Wärmeenergie  $\Delta Q_{\text{H}_2\text{O}}$ , die dem Wasser zugeführt werden muss, um es ausgehend von  $20 \text{ }^\circ\text{C}$  zum Sieden zu bringen? ( $c_{\text{H}_2\text{O}} = 4185 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ )
- 2) Der altmodische Ofen wird mit Braunkohlebriketts (Heizwert  $H_1 \approx 20 \text{ MJ}/\text{kg}$ ) beheizt. Die Verbrennungswärme kann nur zu 50 % zum Erhitzen des Wassers genutzt werden, da der Rest als Wärme an das Badezimmer und die heißen Rauchabgase verloren geht! Wie viel kg Briketts sind zum Aufheizen des Wassers nötig?
- 3) Die Luft im Badezimmer (Luftvolumen: Länge: 4 m, Breite 3 m, Höhe: 2.5 m) bei  $30 \text{ }^\circ\text{C}$  Lufttemperatur enthält welche Wärmemenge  $Q_L$ ? ( $c_V = 715 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ ) Wie groß ist das Verhältnis  $Q_L / \Delta Q_{\text{H}_2\text{O}}$ ? ( $\gamma_{L,30^\circ\text{C}} = 1.17 \text{ kg}/\text{m}^3$ )
- 4) Das Wasservolumen  $V$  dehnt sich beim Erwärmen gemäß  $\alpha = 2.07 \cdot 10^{-4} / \text{K}$  aus! Um wie viele Liter  $\Delta V$  hat sich das gemäß 1) erhitzte Wasservolumen gedehnt? Wie viele Tropfen zu je 0.15 ml tropfen deshalb aus dem Wasserhahn? Wie oft pro Sekunde tropft der Wasserhahn, wenn der Aufheizvorgang  $T = 2 \text{ h}$  dauert?
- 5) Ein vergleichbarer elektrisch beheizter Badeofen hat einen Wirkungsgrad  $\eta_{\text{el}} = 0.8$ . Wie groß sind die erforderliche elektrische Anschlussleistung  $P_N$  und bei  $U_N = 230 \text{ V}$  der Nennstrom  $I_N$ ?

**Aufgabe G16 (Lösung):** Badeofen

1)  
 Wasser siedet bei 1.013 bar bei  $100 \text{ }^\circ\text{C}$ :  $\Delta Q_{\text{H}_2\text{O}} = c_{\text{H}_2\text{O}} \cdot m_{\text{H}_2\text{O}} \cdot \Delta \vartheta$ ,  $m_{\text{H}_2\text{O}} = \gamma_{\text{H}_2\text{O}} \cdot V$ ,  
 $V = h \cdot \frac{d^2 \pi}{4} = 12 \cdot \frac{4^2 \pi}{4} = 150.81$ ,  $\Delta \vartheta = 100^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C} = 80 \text{ K}$ ,  
 $\Delta Q_{\text{H}_2\text{O}} = 4185 \cdot 150.8 \cdot 80 = 50\,487\,840 = 50.488 \text{ MJ}$

2)  
 $\eta = 0.5$ :  $m = \frac{\Delta Q_{\text{H}_2\text{O}}}{\eta \cdot H_1} = \frac{50\,487\,840}{0.5 \cdot 20 \cdot 10^6} = 5.05 \text{ kg}$

3)  
 $V_L = 4 \cdot 3 \cdot 2.5 = 30 \text{ m}^3$ ,  $m_L = \gamma_L V_L = 1.17 \cdot 30 = 35.1 \text{ kg}$ ,  $\Delta \vartheta_L = 273.15 + 30 = 303.15 \text{ K}$ ,  
 $Q_L = c_V \cdot m_L \cdot \Delta \vartheta_L = 715 \cdot 35.1 \cdot 303.15 = 7\,608\,004 \text{ J} = 7.6 \text{ MJ} = \text{Wärmemenge, um Luft von } 0 \text{ K auf } (273.15+30)\text{K zu erhitzen; } Q_L / \Delta Q_{\text{H}_2\text{O}} = 7.6 / 50.488 = 0.15$

4)

$$V_{\text{H}_2\text{O}}(100^\circ\text{C}) = V_{\text{H}_2\text{O}}(20^\circ\text{C}) \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta\theta) = 150.8 \cdot (1 + 2.07 \cdot 10^{-4} \cdot 80) = 150.8 \cdot 1.01656 = 153.31$$

$$\Delta V = 153.3 - 150.8 = 2.51$$

$$\text{Tropfenzahl: } \frac{2.51}{0.15 \cdot 10^{-3} \text{ l}} = 16648, \text{ Tropfenfrequenz: } \frac{16648}{2 \cdot 3600} = 2.3 \text{ Tropfen/ Sekunde}$$

5)

$$P_N = \frac{\Delta Q_{\text{H}_2\text{O}}}{\eta_{\text{el}} \cdot T} = \frac{50.488 \cdot 10^6}{0.8 \cdot 2 \cdot 3600} = 8765 \text{ W}, I_N = \frac{P_N}{U_N} = \frac{8765 \text{ W}}{230 \text{ V}} = 38 \text{ A}.$$

**Aufgabe G17:** Schornstein

In einem Steinkohlekraftwerk ist der Schornstein für die Rauchgase aus dem Kessel  $H = 150 \text{ m}$  hoch.

1) Geben Sie mit Hilfe der idealen Gasgleichung an, um wie viel die Dichte der im Mittel  $\vartheta_i = 80^\circ\text{C}$  heißen Luft im Schornstein  $\gamma_i$  geringer ist als jene außerhalb ( $\gamma_0$ ) bei Umgebungstemperatur  $\vartheta_0 = 20^\circ\text{C}$ ! ( $\gamma_0(20^\circ\text{C}) = 1.20 \text{ kg/m}^3$ )

2) Wie groß ist der Luftdruck  $p_i$  im Schornstein im Vergleich zum äußeren Luftdruck  $p_0 = 1 \text{ bar}$ ?

3) Wie groß wäre auf Grund der Druckdifferenz  $p_0 - p_i$  von 2) die Geschwindigkeit  $v$  der unten in den Schornstein einströmenden Luft („Kaminwirkung“), wenn die Zuströmgeschwindigkeit  $v_a$  außen sehr klein ist (Bernoulli-Gleichung!)?

**Aufgabe G17 (Lösung):** Schornstein

1)

$$p \cdot V = v_m \cdot R \cdot T, m = \gamma \cdot V, p \cdot \frac{m}{\gamma} = v_m \cdot R \cdot T \rightarrow$$

$$\text{Für eine bestimmte Gasmasse } m \text{ ist: } \frac{p}{\gamma \cdot T} = \frac{v_m \cdot R}{m} = \text{konst. .}$$

Mit den Indizes 0: Außerhalb des Schornsteins, i: innerhalb des Schornsteins (Bild G17.1)

$$\text{folgt: } \frac{p_i}{\gamma_i \cdot T_i} = \frac{p_0}{\gamma_0 \cdot T_0} = \text{konst.} \tag{G17-1}$$

$$\text{Dabei ist: } T_0 = 273.15 + 20 = 293.15 \text{ K}.$$

$$\text{Im Inneren ist die mittlere Temperatur: } T_i = 273.15 + 80 = 353.15 \text{ K}.$$

Am Schornsteinaustritt (oben) herrscht der Druck  $p = p_0 - \gamma_0 \cdot g \cdot H = p_i - \gamma_i \cdot g \cdot H$ , wobei  $p_0$  der Luftdruck außen unten am Schornstein ist und  $p_i$  innen unten (Bild G17.1).

$$p_0 = p_i + (\gamma_0 - \gamma_i) \cdot g \cdot H \tag{G17-2}$$

Aus (G17-1) und (G17-2) folgen die beiden Unbekannten  $p_i, \gamma_i$ :

$$\gamma_i = \gamma_0 T_0 \cdot \frac{p_0 + \gamma_0 \cdot g \cdot H}{p_0 T_i + \gamma_0 T_0 \cdot g \cdot H} = 1.2 \cdot 293.15 \cdot \frac{10^5 + 1.2 \cdot 9.81 \cdot 150}{10^5 \cdot 353.15 + 1.2 \cdot 293.15 \cdot 9.81 \cdot 150} = 0.9991 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

2)

$$p_i = p_0 - (\gamma_0 - \gamma_i) \cdot g \cdot H = 10^5 - (1.2 - 0.9991) \cdot 9.81 \cdot 150 = 99704 \text{ Pa}$$

3)

Bernoulli-Gleichung:

$$p_i + \frac{\gamma_i \cdot v^2}{2} = p_0 + \frac{\gamma_0 \cdot v_a^2}{2} \approx p_0, \quad v^2 = \frac{2}{\gamma_i} \cdot (p_0 - p_i), \quad \Delta p = p_0 - p_i = 100000 - 99704 = 296 \text{ Pa}$$

$$v = \sqrt{\frac{2}{\gamma_i} \cdot \Delta p} = \sqrt{\frac{2}{0.9991} \cdot 296} = 24.34 \text{ m/s} = 87.6 \text{ km/h}$$

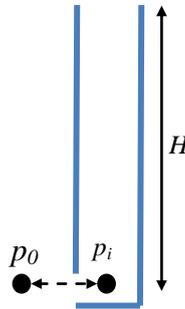


Bild G17.1: Schornstein mit Außen- und Innendruck am Fußpunkt

**Aufgabe G18:** Menschliche Arbeit und Leistung

Der Wirkungsgrad menschlicher Muskeln  $\eta$ , ausgedrückt durch das Verhältnis aus verrichteter Arbeit  $W_{ab}$  und Energiezufuhr  $W_{zu}$  in Form von Nahrung, beträgt ca.  $\eta = W_{ab}/W_{zu} = 0.2$ .

- 1) Wie groß ist die verrichtete Arbeit  $W_{ab}$  eines 90 kg schweren Mannes mit 7 kg Kleidung und Gepäck beim Besteigen eines Bergs von 500 m über Normalniveau (N. N.) auf 2500 m Gipfelhöhe? Wie groß ist der durchschnittliche Leistungsumsatz  $P$  (bezogen auf  $W_{zu}$ ), wenn er für 300 m Höhendifferenz 30 Minuten benötigt?
- 2) Eine Portion Spaghetti (100 g) (ohne Zutaten) hat einen Brennwert von 350 kcal. Wie viel Portionen muss der Bergsteifer von 1) essen, um seinen Energiebedarf von 1) zu decken?
- 3) Die Person von 1) soll eine bis zum Rand mit Wasser gefüllte Grube mit rechteckigem Grundriss  $A = 3 \times 4 \text{ m}^2$  mit einem Eimer in eine Abflussrinne ausschöpfen. Wie tief muss die Grube sein, dass die Person für ihre Hebearbeit des Wassers dieselbe Energie benötigt wie bei 1)?
- 4) Die Person von 1) hat etwa  $A_K = 2 \text{ m}^2$  Körperoberfläche und im Mittel etwa eine  $d = 1 \text{ cm}$  dicke Schicht des Unterhautfettgewebes. Die Wärmeleitfähigkeit  $\lambda_{th}$  dieses Fettgewebes beträgt bei einer Körpertemperatur von  $36.5 \text{ }^\circ\text{C}$  etwa  $\lambda_{th} = 0.003 \text{ W}/(\text{cm}\cdot\text{K})$ ! Wie lange (Zeit  $T_w$ ) muss sich die Person im Wasser von  $20 \text{ }^\circ\text{C}$  aufhalten (nur Badehose!), um durch Wärmeleistung dieselbe Energie  $W_{ab}$  von 1) als Körperwärme an das Wasser abzugeben!

**Aufgabe G18 (Lösung):** Menschliche Arbeit und Leistung

1)  
 $m = 90 + 7 = 97 \text{ kg}, h = 2500 - 500 = 2000 \text{ m},$   
 $W_{ab} = m \cdot g \cdot h = 97 \cdot 9.81 \cdot 2000 = 1903140 \text{ J} = 1903 \text{ kJ},$   
 $T = \frac{2000}{300} \cdot 30 = 200 \text{ Minuten} = 3\text{h } 20 \text{ min}, P = \frac{W_{ab}}{\eta} \cdot \frac{1}{T} = \frac{1903140 \text{ J}}{0.2} \cdot \frac{1}{200 \cdot 60} = 793 \text{ W}$

2)  
 $W_{zu} = \frac{W_{ab}}{\eta} = \frac{1903140}{0.2} = 9515700 \text{ J}$

$$W_{\text{portion}} = 350 \cdot 4186 = 1465100 \text{ J}, \quad \frac{W_{\text{zu}}}{W_{\text{portion}}} = \frac{9515700}{1465100} = 6.5 = 6.5 \text{ Portionen Spaghetti}$$

3)

$$A = h \cdot \gamma_{\text{H}_2\text{O}} \cdot g \cdot \frac{h}{2} = m_{\text{H}_2\text{O}} \cdot g \cdot \frac{h}{2} = W_{\text{ab}}, \quad h^2 \cdot A \cdot \gamma_{\text{H}_2\text{O}} \cdot g \cdot \frac{1}{2} = W_{\text{ab}}$$

$$h = \sqrt{\frac{2 \cdot W_{\text{ab}}}{A \cdot \gamma_{\text{H}_2\text{O}} \cdot g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1903140}{12 \cdot 1000 \cdot 9.81}} = 5.69 \text{ m}$$

4)

$$W_{\text{ab}} = \lambda_{\text{th}} \cdot \frac{\Delta \vartheta}{d} \cdot A_{\text{K}} \cdot T_{\text{W}}, \quad \Delta \vartheta = 36.5 \text{ }^\circ\text{C} - 20 \text{ }^\circ\text{C} = 16.5 \text{ K}, \quad \lambda_{\text{th}} = 0.003 \frac{\text{W}}{\text{cm} \cdot \text{K}} = 0.3 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}}$$

$$T_{\text{W}} = \frac{W_{\text{ab}} \cdot d}{\lambda_{\text{th}} \cdot \Delta \vartheta \cdot A_{\text{K}}} = \frac{1903140 \cdot 10^{-2}}{0.003 \cdot 10^2 \cdot 16.5 \cdot 2} = 1922.4 \text{ s} = 32 \text{ Minuten}$$

### Aufgabe G19: Radfahrer

Ein Radfahrer fährt mit einem Rad bei vernachlässigter Rollreibung mit ideal reibungsfreien Tretlager und Radlagern bei Windstille auf einem Radweg mit 10 % Steigung mit  $v = 6 \text{ km/h}$ . Die Masse des Radfahrers beträgt  $m = 85 \text{ kg}$ , die des Fahrrads  $m_{\text{R}} = 8 \text{ kg}$ .

- 1) Wie groß ist die Fahrleistung  $P$ , wenn der Luftwiderstand mit dem Widerstandsbeiwert  $c_{\text{W}} = 1.0$  und  $A_{\text{p}} = 0.5 \text{ m}^2$  als projizierte Querschnittsfläche und der Luftdichte  $\gamma_{\text{L}} = 1.2 \text{ kg/m}^3$  (bei  $20^\circ\text{C}$ ) zu berechnen ist?
- 2) Wie lange kann der Radfahrer diese Fahrt fortsetzen, wenn er bei einem Muskelwirkungsgrad  $\eta = 0.2$  den Tageskalorienbedarf  $W = 2500 \text{ kcal}$  energetisch umsetzt?
- 3) Bei welcher Fahrgeschwindigkeit  $v$  kann dieselbe Zeit in der Ebene gefahren werden?
- 4) Beim realen Fahrrad treten Reibungsverluste in den Lagern und die Rollreibung der Reifen auf! Diese von der Fahrgeschwindigkeit  $v$  unabhängig angenommene Reibungskraft  $F_{\text{R}}$  beträgt  $8 \text{ N}$ ! Bei welcher Fahrgeschwindigkeit  $v$  sind in der Ebene bei Windstille die Reibungsleistung  $P_{\text{R}}$  und die Leistung  $P_{\text{W}}$  zufolge des Fahrtwindwiderstandes gleich groß? Wie groß ist die Fahrleistung  $P$ ? Um wie viel Prozent erhöht sich diese Fahrleistung bei einem Gegenwind von  $10 \text{ km/h}$ ?
- 5) Im menschlichen Körper werden beim „Verbrennen“ der in den Zellen gespeicherten Kohlenstoffe („Zucker“) diese in  $\text{CO}_2$  und  $\text{H}_2\text{O}$  abgebaut und ausgeatmet!  $1 \text{ g}$  Zucker liefert  $17 \text{ kJ}$ . Wie viel Masse verbrennt der menschliche Körper, wenn er gemäß 4) bei Gegenwind  $10 \text{ km/h}$  2 Stunden lang Rad fährt? Da der menschliche Körper zu  $80 \%$  aus Wasser besteht, nehmen Sie an, dass er anteilig zur Masse an Kohlenwasserstoffen auch Wasser verbraucht (z. B. durch Schweiß)!

### Aufgabe G19 (Lösung): Radfahrer

1)

$$m_{\text{ges}} = m + m_{\text{R}} = 85 + 8 = 93 \text{ kg}, \quad \text{Bild G19.1: } \tan \alpha = 0.1 \rightarrow \alpha = \arctan 0.1 \approx 0.1 \text{ rad},$$

$$F_{\text{A}} = m_{\text{ges}} \cdot g \cdot \sin \alpha; \quad \text{Windstille: } v = \text{Fahrtwind als Gegenwind: } v = 6 \text{ km/h} = 1.67 \text{ m/s}.$$

$$F_{\text{W}} = \frac{c_{\text{W}} \cdot A_{\text{p}} \cdot \gamma_{\text{L}} \cdot v^2}{2} = \frac{1 \cdot 0.5 \cdot 1.2 \cdot 1.67^2}{2} = 0.83 \text{ N},$$

$$F_{\text{A}} = 93 \cdot 9.81 \cdot \sin 0.1 \approx 93 \cdot 9.81 \cdot 0.1 = 91.2 \text{ N}, \quad \sin \alpha = \sin 0.1 \approx 0.1$$

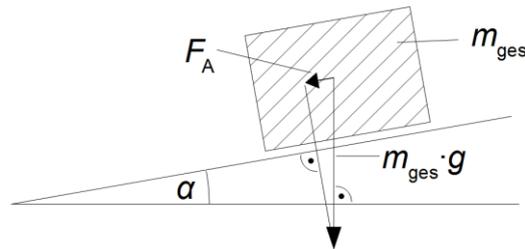


Bild G19.1: Schematische Darstellung der wirkenden Kräfte

$$F = F_A + F_W = 92.0 \text{ N}, P = F \cdot v = 92 \cdot 1.67 = 154 \text{ W}$$

2)

$$W_{ab} = W \cdot \eta = 2500 \cdot 4186 \cdot 0.2 = 2093000 \text{ J}$$

$$T = \frac{W_{ab}}{P} = \frac{2093000}{154} = 13591 \text{ s} = 226.5 \text{ Minuten} = 3\text{h } 46.5 \text{ Minuten}$$

3)

$$\alpha = 0: P = \frac{c_W \cdot A_p \cdot \gamma_L \cdot v^3}{2} = \frac{W_{ab}}{T}, v = \sqrt[3]{\frac{2P}{c_W \cdot A_p \cdot \gamma_L}} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 154}{1 \cdot 0.5 \cdot 1.2}} = 8 \text{ m/s} = 28.8 \text{ km/h}$$

4)

$$P_R = F_R \cdot v, P_W = F_W \cdot v, P_R = P_W \Rightarrow F_R = F_W = \frac{1}{2} \cdot c_W \cdot A_p \cdot \gamma_L \cdot v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot F_R}{c_W \cdot A_p \cdot \gamma_L}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8}{1 \cdot 1.2 \cdot 0.5}} = 5.16 \text{ m/s} = 18.6 \text{ km/h}$$

$$P = 2 \cdot P_R = 2 \cdot F_R \cdot v = 2 \cdot 8 \cdot 5.16 = 82.6 \text{ W}$$

$$v' = v + \frac{10 \text{ km/h}}{3.6 \frac{\text{km/h}}{\text{m/s}}} = v + 2.78 \text{ m/s} = 5.16 + 2.78 = 7.94 \text{ m/s}$$

$$F_W = \frac{1}{2} \cdot c_W \cdot A_p \cdot \gamma_L \cdot v'^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1.2 \cdot 7.94^2 \cdot 0.5 = 18.9 \text{ N}$$

$$P' = F_R \cdot v + F_W \cdot v' = 8 \cdot 5.16 + 18.9 \cdot 7.94 = 191.5 \text{ W}$$

$$\frac{P'}{P} = \frac{191.5}{82.6} = 2.32 \text{ Erhöhung um } 132 \%$$

5)

$$W_{ab} = P' \cdot T = 191.5 \cdot 2 \cdot 3600 = 1378800 \text{ J}$$

$$T = 2\text{h} \quad W_{zu} = \frac{W_{ab}}{\eta} = \frac{1378800}{0.2} = 6894000 \text{ J}$$

$$\Delta m_{\text{Zucker}} = \frac{6894000 \text{ J}}{17000 \text{ J/kg}} = 405.5 \text{ g}$$

$$\Delta m_{\text{H}_2\text{O}} + \Delta m_{\text{Zucker}} = \Delta m_K, 80\% + 20\% = 100\%$$

$$\Delta m_K = \Delta m_{\text{Zucker}} \cdot 5 = 405.5 \cdot 5 = 2027.5 \text{ g} = 2.03 \text{ kg}$$

**Aufgabe G20:** Golfstrom

Der Hauptteil des Golfstroms kommt als „Karibenstrom“ aus der 160 km breiten und durchschnittlich 1 km tiefen Meeresenge zwischen *Key West (Florida)* und *Havanna (Kuba)* mit einer mittleren Oberflächengeschwindigkeit  $v = 5 \text{ km/h}$ . Diese Geschwindigkeit nimmt etwa linear zum Meeresboden ab.

- 1) Wie groß ist der mittlere Volumenstrom  $\dot{V}$  in  $\text{m}^3/\text{s}$  bzw. Liter/Tag?
- 2) Der Golfstrom bringt bis zur *Rockall*-Meeresschwelle zwischen *Island* und *Schottland* selbst im Januar  $15 \text{ }^\circ\text{C}$  warmes Wasser, während man auf derselben geographischen Breite (z. B. an der Küste Nordamerikas) nur ca.  $5 \text{ }^\circ\text{C}$  misst. Wie groß ist die vom Golfstrom transportierte Wärmemenge pro Tag in J und als Wärmeleistung in W?

( $\gamma_{\text{H}_2\text{O}} = 1 \text{ kg/dm}^3$ ,  $c_{\text{H}_2\text{O}} = 4186 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ )

- 3) Die Meeresoberfläche des *Golfs von Mexiko* ( $A_M = 1\,550\,000 \text{ km}^2$ ) und des karibischen Meeres ( $A_K = 2\,754\,000 \text{ km}^2$ ) speisen den Golfstrom! Stellen Sie mit der extraterrestrischen Solarkonstante  $I_0 = 1.328 \text{ kW/m}^2$  die eingestrahelte solare Leistung  $P_S$  der Wärmeleistung des Golfstroms gegenüber (Leistungsbilanz des Golfstroms ohne Wärmeenergie der Zuflüsse aus dem Festland ins karibische Meer und den Golf).

**Aufgabe G20 (Lösung):** Golfstrom

1)

$$\bar{v} = \frac{5}{2} = 2.5 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 0.69 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad \dot{V} = \frac{V}{t} = \frac{A \cdot l}{t} = A \cdot \frac{l}{t} = A \cdot \bar{v}$$

$$A = 160 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot 1 \cdot 10^3 \text{ m} = 160 \cdot 10^6 \text{ m}^2, \quad \dot{V} = 160 \cdot 10^6 \cdot 0.69 = 111.1 \cdot 10^6 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} = 9.6 \cdot 10^{15} \frac{\text{Liter}}{\text{Tag}}$$

2)

$$\Delta\vartheta = 15 \text{ }^\circ\text{C} - 5 \text{ }^\circ\text{C} = 10 \text{ K}, \quad \dot{m} \cdot c_{\text{H}_2\text{O}} \cdot \Delta\vartheta = P$$

$$P = \dot{V} \cdot \gamma_{\text{H}_2\text{O}} \cdot \Delta\vartheta = 111.1 \cdot 10^6 \cdot 1000 \cdot 4186 \cdot 10 = 4\,650\,646 \cdot 10^9 \text{ W} = 4.65 \cdot 10^{15} \text{ W} = 4.65 \text{ PW}$$

$$= 401.8 \cdot 10^{18} \text{ J/Tag}$$

3)

$$A = A_M + A_K = (1.55 + 2.754) \cdot 10^6 = 4.254 \cdot 10^6 \text{ km}^2$$

$$P_S = I_0 \cdot A = 1.328 \cdot 10^3 \cdot 4.254 \cdot 10^{12} = 5.65 \cdot 10^{15} \text{ W}$$

$$P_S / P = 5.65 / 4.65 = 1.21$$

**Aufgabe G21:** Thermisch-energetische Betrachtung des Menschen

Ein erwachsener Mensch benötigt ca. 2000 kcal Energiezufuhr in Form von Nahrung pro Tag für die gesunde Aufrechterhaltung der Körperfunktionen. Diese Energie wird letztlich in Wärme umgesetzt (1 kcal = 4186 J).

- 1) Wie groß ist die mittlere thermische Leistung  $P$  des menschlichen Körpers? Berechnen Sie die mittlere Heizleistung  $P_{\text{th}}$  von 20 Personen z. B. in einem Besprechungsraum!

- 2) Wie groß ist die abgestrahlte thermische Leistung  $P_{\text{th,ab}}$  eines stillstehenden Mannes in Badehose (z. B. am Strand) bei bedecktem Himmel und Windstille (= keine konvektive Kühlung) bei einer Lufttemperatur  $\vartheta = 25 \text{ }^\circ\text{C}$ ? Betrachten Sie dazu die Körperoberfläche  $A_K = 2 \text{ m}^2$  als „schwarzen“ Strahler mit der Haut-Oberflächentemperatur  $\vartheta_K = 36.5 \text{ }^\circ\text{C}$  ( $\sigma = 5.670 \cdot 10^{-7} \text{ J}/(\text{m}^2\text{K}^4\text{s})$ , *Stefan-Boltzmann*-Strahlungskonstante)! Friert („Fröstelt“) die

Person, d.h. verliert sie mehr Wärme als sie erzeugt? Durch Bewegung erhöht sich der Stoffwechsel der Person von  $P$  auf  $2P$ ! Friert die Person?

3) Die (stillstehende) Person von 2) ist nun mit einer  $d = 0.5$  cm dicken Wollkleidung bekleidet, die durch die in der Wollstruktur eingeschlossenen Luftpolster den Körper thermisch isoliert. Die Wärmeabgabe an die Umgebungsluft erfolgt über Wärmeleitung durch die Kleidung (therm. Wärmeleitfähigkeit der Luft  $\lambda_{\text{Luft}} = 0.024$  W/(m·K))! Friert die Person? Welche Dicke  $d'$  muss die Kleidung haben, damit die Person bei  $\vartheta = -20^\circ\text{C}$  nicht friert?

4) Die (stillstehende) Person in Badehose von 2) steht nun an einem heißen Tag  $\vartheta = 36.5^\circ\text{C}$  am Strand. Ist Wärmeabgabe durch Wärmestrahlung, Wärmeleitung, Konvektion, Schwitzen (= Verdunstungskühlung) möglich? Wie viele Liter Schweiß muss während zwei Stunden die Person absondern, um die Körpertemperatur konstant zu halten? Die Verdunstungswärme je kg Wasser (Schweiß) beträgt bei  $36.5^\circ\text{C}$   $Q'_V = 2.4 \cdot 10^6$  J/kg ( $\gamma_{\text{H}_2\text{O}} = 1000$  kg/m<sup>3</sup>).

5) Die Person von 4) arbeitet bei  $\vartheta = 36.5^\circ\text{C}$  acht Stunden lang, wodurch sich während der Arbeitstätigkeit der Stoffwechsel verdoppelt ( $2P$  statt  $P$ ). Wie viele Liter Wasser muss die Person trinken, um den Flüssigkeitsverlust durch Schwitzen auszugleichen?

6) Der Schweiß verdunstet von der Hautoberfläche nur, wenn der Wasserdampfgehalt in der Umgebungsluft (Lufttemperatur  $\vartheta$ ) geringer ist als der bei  $\vartheta$  maximal mögliche Wasserdampfgehalt (= Sättigungsmenge = „100% relative Luftfeuchte“). Diese Wasserdampf-Sättigungsmenge beträgt bei  $\vartheta = 36.5^\circ\text{C}$  etwa 40g Wasser/m<sup>3</sup> Luft (= „absolute Luftfeuchte“). Was stellt bei diesen Bedingungen z. B. in feuchten Tropengebieten ein Mensch an sich bezüglich der Transpiration fest?

**Aufgabe G21 (Lösung):** Thermisch-energetische Betrachtung des Menschen

1)

$$t = 24 \text{ h} = 24 \cdot 3600 = 86400 \text{ s}, P = W/t = 2000 \cdot 4186/86400 = 97 \text{ W},$$

$$P_{th} = 20 \cdot P = 20 \cdot 97 = 1940 \text{ W}$$

2)

$$T_H = 273.15 \text{ K} + \vartheta_K = 273.15 + 36.5 = 309.65 \text{ K},$$

$$T_K = 273.15 \text{ K} + \vartheta = 273.15 + 25 = 298.15 \text{ K},$$

$$P_{th,ab} = A_K \cdot \sigma \cdot (T_H^4 - T_K^4) = 2 \cdot 0.567 \cdot 10^{-7} \cdot (309.65^4 - 298.15^4) = 146.5 \text{ W} > P = 97 \text{ W} :$$

Die Person friert!

$$P_{th,ab} = 146.5 \text{ W} < 2P = 184 \text{ W} : \text{Die Person friert nicht, sondern sie schwitzt!}$$

Durch Schweißabsonderung (= Verdunstungskühlung) wird die Wärmeleistung

$$2P - P_{th,ab} = 194 - 146.5 = 47.5 \text{ W} \text{ abgeführt und damit die Körpertemperatur } \vartheta_K = 36.5^\circ\text{C}$$

konstant gehalten.

3)

$$P_{th,ab} = A_K \cdot \lambda_{\text{Luft}} \cdot (T_H - T_K)/d = 2 \cdot 0.024 \cdot (309.65 - 298.15)/0.005 = 110.4 \text{ W} > P = 97 \text{ W} .$$

Da näherungsweise  $P_{th,ab} = 110.4 \text{ W} \cong P = 97 \text{ W}$ , bleibt die Körpertemperatur konstant; die Person friert nicht!

$$T'_K = 273.15 \text{ K} + \vartheta = 273.15 - 20 = 253.15 \text{ K}, P'_{th,ab} = A_K \cdot \lambda_{\text{Luft}} \cdot (T_H - T'_K)/d' = P,$$

$$d' = A_K \cdot \lambda_{\text{Luft}} \cdot (T_H - T'_K)/P' = 2 \cdot 0.024 \cdot (309.65 - 253.15)/97 = 0.0285 \text{ m} = 2.85 \text{ cm}$$

4)

$T_K = 273.15 \text{ K} + \vartheta = 273.15 + 36.5 = 309.65 \text{ K}$ ,  $T_H - T_K = 0$ : Keine Wärmeabgabe durch Wärmestrahlung, Wärmeleitung, Konvektion möglich, nur durch Schwitzen!

$$Q_V = Q'_V \cdot m_{\text{H}_2\text{O}} = (2.4 \cdot 10^6 \text{ J/kg}) \cdot m_{\text{H}_2\text{O}} = P \cdot t = 97 \cdot 2 \cdot 3600 = 698\,400 \text{ J},$$

$$m_{H_2O} = 698\,400 / (2.4 \cdot 10^6) = 0.291 \text{ kg},$$

$$V_{H_2O} = \frac{m_{H_2O}}{\gamma_{H_2O}} = \frac{0.291}{1} = 0.2911$$

5)

$$2P = 194 \text{ W} = P^*, \quad t^* = 8 \text{ h} = 8 \cdot 3600 = 28\,800 \text{ s},$$

$$Q'_V \cdot m_{H_2O} = P^* \cdot t^* = 194 \cdot 28\,800 = 5\,587\,200 \text{ J},$$

$$V_{H_2O} = \frac{m_{H_2O}}{\gamma_{H_2O}} = \frac{P^* \cdot t^*}{Q'_V \cdot \gamma_{H_2O}} = \frac{5\,587\,200}{2.4 \cdot 10^6 \cdot 1} = 2.31$$

6)

Bei 100% rel. Luftfeuchte verdunstet der Schweiß nicht von der Hautoberfläche, sondern rinnt infolge der Schwerkraft „in Bächlein“ an der Körperoberfläche abwärts!

### Aufgabe G22: Entladung einer Gewitterfront

Ein lokales Wärmegewitter wird durch eine Gewitterwolke verursacht, die in  $h = 1 \text{ km}$  mittlerer Höhe über dem Erdboden eine Flächenausdehnung  $A = 10 \text{ km} \times 10 \text{ km}$  hat.

1) Wie groß ist in etwa die elektrische Kapazität  $C$  der elektrisch geladenen Wolke gegenüber dem (schwach) elektrisch leitfähigen Erdboden (Modell: Plattenkondensator!)?

2) Die mittlere elektrische Durchschlagfeldstärke  $E_D$  in Luft (Normalbedingung  $20 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $1.013 \text{ bar}$ ) für lange Schlagweiten  $h$  im inhomogen verteilten  $E$ -Feld zwischen Wolke und Erdboden in feuchter Luft wird mit nur  $E_D = 1 \text{ kV/cm}$  abgeschätzt (Durchschlagfeldstärke bei trockener Luft und langer Schlagweite  $E_D = 25 \text{ kV/cm}$ ). Wie groß muss die elektrische Potentialdifferenz  $U$  zwischen Wolke und Erdboden sein, damit ein el. Überschlag („Blitz“) zustande kommt? Wie groß ist bei dieser Spannung  $U$  die Aufladung der Wolke (Ladungsmenge  $Q$ ) gegenüber Erde gewesen?

3) Die Entladung der Gewitterwolke erfolgt während des Gewitters schrittweise in  $z = 100$  aufeinander folgenden Blitzen mit der mittleren Blitzdauer  $T = 1 \text{ ms}$ . Welche Ladungsmenge  $\Delta Q$  und damit welche Blitzstromstärke  $I$  fließen im Mittel je Blitz zur Erde ab? Wie groß ist die Entladeleistung  $P$  je Blitz und die Gesamtleistung  $P_{\text{ges}}$  näherungsweise (wenn  $U = \text{konst.}$  angenommen wird)?

4) Wie groß ist zu 3) die je Blitz umgesetzte Wärmemenge  $\Delta W$  in der Lichtbogensäule des Blitzes in J und kWh?

5) Nehmen Sie an, dass sich die Gewitterwolke in einem einzigen Blitz vollständig entlädt. Berücksichtigen Sie daher (gegenüber 3) etwas genauer), dass während der Zeit  $T = 1 \text{ ms}$  die Spannung  $u(t)$  linear auf Null sinkt und der Strom  $I_{\text{ges}}$  konstant ist. Wie groß sind die mittlere Leistung  $P_{\text{ges}}$  und die thermische Gesamtenergie  $W$ ? Wie lange muss eine  $3 \text{ MW}$ -Windenergieanlage im Nennpunkt betrieben werden, um dieselbe el. Energie zu erzeugen? Erachten Sie aus auf Basis dieses Vergleichs für lohnend, aus Gewitterwolken elektrische Energie zu gewinnen?

### Aufgabe G22 (Lösung) : Entladung einer Gewitterfront

1)

$$\text{Luft: } \varepsilon_r = 1, \quad C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \cdot A/h = 8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 1 \cdot 10000^2 / 1000 = 8.854 \cdot 10^{-7} = 0.885 \mu\text{F}$$

2)

$$U = E_D \cdot h = 10^5 \cdot 10^3 = 10^8 \text{ V} = 100 \text{ MV}, \quad Q = C \cdot U = 0.885 \cdot 10^{-6} \cdot 10^8 = 88.5 \text{ A} \cdot \text{s}$$

3)

$$\Delta Q = Q/z = 88.5/100 = 0.885 \text{ A} \cdot \text{s}, \quad I = \Delta Q/T = 0.885/0.001 = 885 \text{ A},$$

$$P \approx U \cdot I = 10^8 \cdot 885 = 88.5 \text{ GW}, \quad P_{\text{ges}} = z \cdot P = 100 \cdot 88.5 \cdot 10^9 = 8.85 \text{ TW}$$

4)

$$\Delta W = P \cdot T = 88.5 \cdot 10^9 / 1000 = 88.5 \cdot 10^6 = 88.5 \text{ MJ} \Rightarrow \frac{88.5 \cdot 10^6 \text{ J}}{3600 \cdot 10^3 \text{ s}} = 24.56 \text{ kWh} !$$

5)

$$I_{\text{ges}} = Q/T = 88.5/0.001 = 88.5 \text{ kA}, \quad u(t) = U \cdot (1 - t/T) \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$p(t) = u(t) \cdot I = U \cdot I \cdot (1 - t/T),$$

$$P_{\text{ges}} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T p(t) \cdot dt = U \cdot I / 2 = 10^8 \cdot 88.5 \cdot 10^3 / 2 = 44.25 \cdot 10^{11} \text{ W} = 4.43 \text{ TW},$$

$$W = P_{\text{ges}} \cdot T = 44.25 \cdot 10^{11} \cdot 0.001 = 4.425 \cdot 10^9 \text{ J} = 1229.2 \text{ kWh},$$

$$t^* = W / P_N = 4.4 \cdot 10^9 / (3 \cdot 10^6) = 1475 \text{ s} = 24.6 \text{ min}$$

Auf Grund der relativ geringen Energie ist es technisch nicht lohnend, aus Gewitterwolken el. Energie zu gewinnen!

### Aufgabe G23: Energienutzung - Bügeleisen

Ein elektrisches Bügeleisen hat bei einer Einphasen-Anschluss-Wechselspannung 230 V (effektiv), 50 Hz, eine Wirkleistungsaufnahme  $P_N = 1300 \text{ W}$  für die elektrische Widerstandsheizung zum Aufheizen auf  $\vartheta = 330 \text{ }^\circ\text{C}$ . Der el. Widerstand ist ein *Manganin*-Bandleiter mit der Breite  $b = 8 \text{ mm}$  und Dicke  $d = 0.02 \text{ mm}$ . *Manganin* (CuMn12Ni) ist der Markenname einer Kupfer-Nickel-Mangan-Legierung mit einer Massen-Zusammensetzung ca. 83 % Kupfer, ca. 14 % Mangan und ca. 3 % Nickel und hat einen mittleren spezifischen elektrischen Widerstand von ca.  $\rho = 4 \cdot 10^{-7} \Omega \cdot \text{m}$  mit einer geringen (hier vernachlässigten) Temperaturabhängigkeit. Die Bügeleisenoberfläche beträgt  $A_B = 23 \times 17 \text{ cm}^2$ .

1) Wie sind der Nennstrom  $I_N$ , die Nennstromdichte  $J_N$ , die Verlustdichte  $P_N/V$  im Manganin-Band, dessen *ohm'scher* Widerstand  $R$  bei  $20^\circ\text{C}$  und die Bandlänge  $l$  ( $V = b \cdot d \cdot l$ )?

2)

Während *Manganin* einen sehr geringe Temperaturabhängigkeit  $\rho(T) \approx \text{konst.}$  aufweist, hat Kupfer mit  $1/\rho_{20^\circ\text{C}} = 57 \text{ MS/m}$  und  $\alpha_{\text{Cu}} = 1/255 \text{ K}^{-1} = 3.92 \cdot 10^{-3}/\text{K}$  eine relativ große  $T$ -Abhängigkeit. Welche beiden Gründe sprechen gegen einen Einsatz von Kupfer als Heizbandmaterial? Bestimmen Sie dazu die Länge des nötigen Kupferbands  $l_{\text{Cu}}$  bei gleichem  $b$  und  $d$ !

3) Ist das Bügeleisen auch bei 230 V, 60 Hz mit gleicher Leistung einsetzbar? In den USA wird aus Sicherheitsgründen die Einphasen-Haushaltsspannung 110 V bei 60 Hz verwendet. Würde das Bügeleisen auch bei dieser Spannung funktionieren? Bestimmen Sie dazu die Heizleistung  $P$ !

4) Als Reise-Bügeleisen ist das Bügeleisen bei  $P_N$  umschaltbar für 230V/50Hz- und 110V/60Hz-Betrieb. Dies erfolgt über eine Anzapfung des Heizbands, so dass bei 110 V nur ein Teil der Länge bestromt wird. Bei welcher Länge  $l'$  muss die Anzapfung angebracht werden? Wie groß sind bei 110 V die Werte  $I'_N$ ,  $J'_N$  und die Verlustdichte  $P_N/V'$ ?

5) Das Heizband wird (über einen Thermostat) ein- und ausgeschaltet, so dass sich im Mittel  $330 \text{ }^\circ\text{C}$  an der Metalloberfläche des Bügeleisens einstellen. Wie groß ist die abgestrahlte Wärmeleistung  $P_{\text{rad}}$  bei  $25 \text{ }^\circ\text{C}$  Umgebungstemperatur (*Stefan-Boltzmann*-Konstante  $\sigma =$

$5.670 \cdot 10^{-8} \text{ J}/(\text{m}^2 \text{K}^4 \text{s}))$ , wenn die wirksame Strahlungsoberfläche  $A$  auch teilweise die Seitenflächen des Bügeleisens umfasst ( $A = 1.8 \cdot A_B$ )?

**Aufgabe G23 (Lösung):** Energienutzung – Bügeleisen

1)

$$I_N = P_N / U_N = 1300 / 230 = 5.65 \text{ A}, \quad J_N = I_N / (b \cdot d) = 5.65 / (8 \cdot 0.02) = 35.3 \text{ A}/\text{mm}^2,$$

$$P_N / V = R \cdot I_N^2 / (b \cdot d \cdot l) = \rho \cdot \frac{l}{b \cdot d} \cdot I_N^2 \cdot \frac{1}{b \cdot d \cdot l} = \rho \cdot \left( \frac{I_N}{b \cdot d} \right)^2 = \rho \cdot J_N^2,$$

$$P_N / V = 0.4 \cdot 10^{-6} \cdot (35.3 \cdot 10^6)^2 = 498.4 \cdot 10^6 \text{ W}/\text{m}^3 = 0.5 \text{ W}/\text{mm}^3,$$

$$R = U_N / I_N = 230 / 5.65 = 40.71 \text{ } \Omega = \rho \cdot l / (b \cdot d) \Rightarrow l = \frac{R \cdot b \cdot d}{\rho} = \frac{40.71 \cdot 8 \cdot 0.02}{0.4} = 16.3 \text{ m}$$

Kontrollrechnung:

$$V = b \cdot d \cdot l = \frac{8}{10^3} \cdot \frac{0.02}{10^3} \cdot 16.3 = 2608 \text{ mm}^3 \Rightarrow P_N / V = 1300 / 2608 = 0.498 \text{ W}/\text{mm}^3$$

Hinweis: Das lange Widerstandsheizband wird im Bügeleisen in Spiralen und Mäandern verlegt, um innerhalb der Bügeleisenoberfläche  $23 \times 17 \text{ cm}^2$  Platz zu finden.

2)

$$\rho_{20^\circ\text{C}} = (1/57) \cdot 10^{-6} = 17.54 \cdot 10^{-9} \text{ } \Omega \cdot \text{m}, \quad \Delta\vartheta = 330^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C} = 310 \text{ K},$$

$$\rho_{330^\circ\text{C}} = \rho_{20^\circ\text{C}} \cdot (1 + \alpha_{Cu} \cdot \Delta\vartheta) = 17.54 \cdot 10^{-9} \cdot (1 + 3.92 \cdot 10^{-3} \cdot 310) = 38.85 \cdot 10^{-9} \text{ } \Omega \cdot \text{m},$$

$$l_{Cu} = \frac{R \cdot b \cdot d}{\rho} = \frac{40.71 \cdot 8 \cdot 0.02 \cdot 10^{-6}}{38.85 \cdot 10^{-9}} = 167.7 \text{ m}$$

a) Das Kupferband wäre auf Grund der höheren Leitfähigkeit viel zu lang (10-fach!) für das Unterbringen im Bügeleisen.

b) Wegen  $P_N = \frac{U_N^2}{R_{20} \cdot (1 + \alpha_{Cu} \cdot \Delta\vartheta)}$  sinkt mit steigender Temperatur die Heizleistung!

3)

Ja, da  $R$  unabhängig von  $f$  ist, tritt dieselbe Heizleistung auch bei 60 Hz auf.

$$P = \frac{U^2}{R} \Rightarrow P' / P = (U' / U)^2 = (110 / 230)^2 = 0.23 \Rightarrow P' = 0.23 \cdot 1300 = 297 \text{ W}$$

Die Heizleistung  $P' = 297 \text{ W}$  ist zu klein. Das Bügeleisen wird nicht oder nicht rasch genug heiß; das ist unbrauchbar.

4)

$$P_N = \frac{U^2}{R'} \Rightarrow R' = 110^2 / 1300 = 9.31 \text{ } \Omega, \quad l' = \frac{R' \cdot b \cdot d}{\rho} \Rightarrow l' = l \cdot \frac{R'}{R} = 16.3 \cdot \frac{9.31}{40.71} = 3.72 \text{ m}$$

$$I'_N = P_N / U'_N = 1300 / 110 = 11.8 \text{ A}, \quad J'_N = I'_N / (b \cdot d) = 11.8 / (8 \cdot 0.2) = 73.86 \text{ A}/\text{mm}^2,$$

$$P_N / V' = \rho \cdot J_N'^2 = 0.4 \cdot 10^{-6} \cdot (73.86 \cdot 10^6)^2 = 2.18 \text{ W}/\text{mm}^3$$

Der Heizbandabschnitt zwischen Beginn und Anzapfung wird bei 110 V-Betrieb deutlich höher thermisch belastet (ca. vierfach!).

5)

$$T_{\text{heiss}} = 273.15 + 330 = 603.15 \text{ K}, \quad T_{\text{kalt}} = 273.15 + 25 = 298.15 \text{ K},$$

Stefan-Boltzmann-Strahlungsgesetz:

$$P_{\text{rad}} = A \cdot \sigma \cdot (T_{\text{heiss}}^4 - T_{\text{kalt}}^4) = 1.8 \cdot A_B \cdot \sigma \cdot (T_{\text{heiss}}^4 - T_{\text{kalt}}^4) =$$

$$= 1.8 \cdot 23 \cdot 17 \cdot 10^{-4} \cdot 5.67 \cdot 10^{-8} \cdot (603.15^4 - 298.15^4) = 497 \text{ W}$$

**Aufgabe G24:** Wassererwärmung mit Durchlauferhitzung

Für die Warmwasser-Nutzung im Haushalt soll strömendes Wasser im Durchlauf von 15 °C Eintrittstemperatur auf 60 °C erhitzt werden.

- 1) Wie groß ist die erforderliche Heizleistung  $P$ , um einen Volumenstrom von 8 l/min zu erhitzen ( $c_{\text{H}_2\text{O}} = 4.186 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ ,  $\gamma_{\text{H}_2\text{O}} = 1 \text{ kg/l}$ ) ?
- 2) Der Durchlauferhitzer wird mit einem Erdgasbrenner betrieben. Berechnen Sie den Erdgasverbrauch  $V_{\text{Gas}}$  für die Entnahme von 80 l heißem Wasser ( $H_S = 35 \text{ MJ}/\text{m}^3$ )! Wie lange dauert die Wasserentnahme? Wie groß ist die Heizenergie  $W$ ?
- 3) Ist der Durchlauferhitzer mit einer elektrischen Widerstandsheizung im Haushalt mit Einphasen-Stromkreisen, die mit 16 A-Sicherungen abgesichert sind, sinnvoll realisierbar? Berechnen Sie dazu den effektiven Nennstrom  $I_N$  der Widerstandsheizung bei 230 V, 50 Hz!
- 4) Wie groß wäre der Strombedarf  $I'_N$  bei einer Drehstrom-Widerstandsheizung ?

**Aufgabe G24 (Lösung):** Wassererwärmung mit Durchlauferhitzung

1)

$$m = V \cdot \gamma, \Delta Q = m \cdot c \cdot \Delta \vartheta,$$

$$P = \Delta Q / t = m \cdot c \cdot \Delta \vartheta / t = V \cdot \gamma \cdot c \cdot \Delta \vartheta / t = \Delta \vartheta \cdot \gamma \cdot c \cdot V / t = \Delta \vartheta \cdot \gamma \cdot c \cdot \dot{V},$$

$$\Delta \vartheta = 60 - 15 = 45 \text{ K}, P = \Delta \vartheta \cdot \gamma_{\text{H}_2\text{O}} \cdot c_{\text{H}_2\text{O}} \cdot \dot{V} = 45 \cdot 1 \cdot 4186 \cdot 8 / 60 = 25116 \text{ W} = 25.1 \text{ kW}$$

2)

$$t = 80 \text{ l} / (8 \text{ l} / \text{min}) = 10 \text{ min}, \Delta Q = P \cdot t = 25116 \cdot 10 \cdot 60 = 15069600 \text{ J} = 15.07 \text{ MJ},$$

Erdgas: Heizwert:  $H_S = 35 \text{ MJ}/\text{m}^3 \Rightarrow V_{\text{Gas}} = \Delta Q / H_S = 15.07 / 35 = 0.43 \text{ m}^3,$   
 $W = \Delta Q = 15.1 \text{ MJ}$

3)

$$\cos \varphi = 1: S = U_{ph} \cdot I_N = P \Rightarrow I_N = \frac{P}{U_{ph}} = \frac{25116}{230} = 109.2 \text{ A} \gg 16 \text{ A}$$

Eine el. Widerstandsheizung ist für Durchlauferhitzer nicht sinnvoll, weil die Heizleistung viel zu groß ist, so dass sich ein zu großer elektrischer Strombedarf ergäbe.

4)

$$\cos \varphi = 1: P_N = S_N = 3 \cdot U_{ph} \cdot I'_N \Rightarrow I'_N = \frac{P_N}{3 \cdot U_{ph}} = \frac{25116}{3 \cdot 230} = 36.4 \text{ A} > 16 \text{ A}$$

Auch bei einer Drehstromheizung wäre der elektrische Strombedarf für 16 A-Sicherungen noch zu groß.

**Aufgabe G25:** Stromleitung im el. Leiter und Isolator

In den Aluminium-Leitern einer 20 kV-Drehstrom-Freileitung (spez. el. Widerstand  $\rho_{\text{Al},20^\circ\text{C}} = 2.94 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ ) fließt Wechselstrom  $i(t)$  mit der Stromdichte  $J(t)$ , dem

Effektivwert  $I$  und der Kreisfrequenz  $\omega = 2\pi \cdot f$ . Nicht nur dieser Strom erregt ein Magnetfeld  $H$  um die Leiter, sondern gemäß dem *Ampere-Maxwell-Gesetz* auch die Verschiebungsstromdichte  $\vec{J}_D(t) = \partial \vec{D} / \partial t$  ( $D$ : dielektrische Verschiebung).

$$\oint_C \vec{H}(t) \cdot d\vec{s} = i(t) + \int_A \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{A}$$

Dabei ist  $C$  eine geschlossene Kurve um die betrachtete Leiterachse und  $A$  deren aufgespannte Fläche.

1) Betrachten Sie im Folgenden einen geraden Leiter (Leiterachse =  $z$ -Achse,  $d\vec{A} = dA \cdot \vec{e}_z$ ,  $|\vec{e}_z| = 1$ ) mit der el. Stromdichte  $\vec{J} = J \cdot \vec{e}_z$ , mit der diese Stromdichte treibenden elektrischen Feldstärke  $\vec{E} = E \cdot \vec{e}_z$ , dem lokalen *ohm'schen* Gesetz  $\vec{E} = \rho \cdot \vec{J}$  und dem dielektrischen Gesetz  $\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E}$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0$  ( $\varepsilon_{r,AI} = 1$ ). Zeigen Sie, dass bei  $f = 50$  Hz der Beitrag von  $J_D$  zur  $H$ -Felderregung gegenüber  $J$  völlig unerheblich ist! Verwenden Sie dazu die komplexe Wechselstromrechnung!

2) Die Freileitung überträgt die Scheinleistung  $S_N = 10$  MVA. Berechnen Sie den Leiterstrom  $I$  je Phase und die von ihm erregte  $H$ -Feld-Amplitude am Erdboden: Die Bodenoberfläche befindet sich parallel zur Leiterachse in einer Distanz  $h = 5$  m unter dem Leiter. Wie groß ist die zugehörige magnetische Flussdichteamplitude  $\hat{B}$  im Vergleich zum Erdmagnetfeld  $B_E \approx 50 \mu T$ ?

3) Bei welcher Betriebsfrequenz  $f^*$  ist der Beitrag von  $J_D$  zur  $H$ -Felderregung gleich groß wie der von  $J$ ?

4) Die Leiter sind über Porzellanisolatoren ( $\rho_I = 10^{12} \Omega \cdot m$ ,  $\varepsilon_{r,I} = 6$ ) an den Masten befestigt. Auf Grund von  $\rho_I$  fließt wegen  $\vec{E}_I = \rho_I \cdot \vec{J}_I$  ein sehr kleiner *ohm'scher* Ableitstrom (Stromdichte  $J_I$ ) über die Isolatoren zu den geerdeten Masten. Bei welcher Betriebsfrequenz  $f_I^*$  ist der Beitrag der Ableit-Verschiebungsstromdichte  $J_{DI}$  (verursacht von  $E_I$ ) zur  $H$ -Felderregung um den Isolator gleich groß wie jener der Isolator-Leiterstromdichte  $J_I$ ?

5) Wie groß ist bei 50 Hz der resultierende Ableitstrom  $I_a$  durch den Isolator, dessen Durchmesser  $D_I = 10$  cm und dessen Höhe  $h_I = 20$  cm betragen? Berechnen Sie die von ihm erregte Magnetfeldamplitude  $\hat{H}_I$  um den Isolator im Abstand  $d_I = 10$  cm von der Isolatorachse! Hat dieses Feld eine nennenswerte Größenordnung?

**Aufgabe G25 (Lösung):** Stromleitung im el. Leiter und Isolator

1)

Nur auf der Leiterquerschnittsfläche  $A_q$  innerhalb der Fläche  $A$  sind  $J$ ,  $J_D$  nicht Null:

$$i(t) = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = \int_{A_q} \vec{J} \cdot d\vec{A}, \quad \int_A \vec{J}_D \cdot d\vec{A} = \int_{A_q} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{A} = \int_{A_q} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{A}$$

Komplexe Wechselstromrechnung:

$$J(t) = \sqrt{2} \cdot J \cdot \cos(\omega t - \varphi) = \text{Re} \left\{ \sqrt{2} \cdot J \cdot e^{-j \cdot \varphi} e^{j \cdot \omega t} \right\} = \text{Re} \left\{ \sqrt{2} \cdot \underline{J} \cdot e^{j \cdot \omega t} \right\}$$

$$\Rightarrow J(t) \leftrightarrow \underline{J}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow j \cdot \omega$$

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = \underline{I} + \int_{A_q} j \omega \cdot \underline{D} \cdot d\vec{A} = \int_{A_q} \underline{J} \cdot d\vec{A} + \int_{A_q} j \omega \cdot \underline{D} \cdot d\vec{A} = \int_{A_q} (\underline{J} + \underline{J}_D) \cdot d\vec{A} = \int_{A_q} (\underline{J} + \underline{J}_D) \cdot d\vec{A},$$

$$\underline{J} = \underline{E} / \rho, \quad \underline{J}_D = j \omega \cdot \underline{D} = j \omega \cdot \varepsilon \underline{E} = j \omega \cdot \varepsilon \cdot \rho \underline{J} \Rightarrow |\underline{J}_D / \underline{J}| = J_D / J = 2\pi \cdot f \cdot \varepsilon \cdot \rho.$$

Bei  $f = 50$  Hz im Alu-Leiter bei  $20$  °C:

$$J_D / J = 2\pi \cdot f \cdot \varepsilon \cdot \rho = 2\pi \cdot 50 \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 1 \cdot 2.94 \cdot 10^{-8} = 8.18 \cdot 10^{-17} \approx 10^{-16} \ll 1$$

Die Verschiebungsstromdichte  $J_D$  ist um 16 Größenordnungen kleiner als die Leitungsstromdichte und erregt daher nur den Bruchteil  $1/10^{16}$  des  $H$ -Felds. Ihre Wirkung ist daher vernachlässigbar klein.

2)

$$S = \sqrt{3} \cdot U_N \cdot I \Rightarrow I = S / (\sqrt{3} \cdot U_N) = 10 \cdot 10^6 / (\sqrt{3} \cdot 20 \cdot 10^3) = 288.7 \text{ A},$$

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = \underline{H}(r) \cdot 2\pi \cdot r = \underline{I} + \int_{A_q} j\omega \cdot \vec{D} \cdot d\vec{A} \approx \underline{I} \Rightarrow \underline{H}(r=h) = \frac{\underline{I}}{2\pi \cdot h},$$

$$\hat{H}(r=h) = \frac{\hat{I}}{2\pi \cdot h} = \frac{288.7 \cdot \sqrt{2}}{2\pi \cdot 5} = 13 \frac{\text{A}}{\text{m}}, \quad \hat{B} = \mu_0 \cdot \hat{H} = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 13 = 16.3 \mu\text{T},$$

$$\hat{B} / B_E = 16.3 / 50 = 0.33$$

3)

$$J_D = 2\pi \cdot f^* \cdot \varepsilon \cdot \rho \cdot J = J \Rightarrow f^* = \frac{1}{2\pi \cdot \varepsilon \cdot \rho} = \frac{1}{2\pi \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 1 \cdot 2.94 \cdot 10^{-8}} = 611.4 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$$

4)

$$J_{DI} = 2\pi \cdot f_I^* \cdot \varepsilon_I \cdot \rho_I \cdot J_I = J_I \Rightarrow f_I^* = \frac{1}{2\pi \cdot \varepsilon_I \cdot \rho_I} = \frac{1}{2\pi \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 6 \cdot 10^{12}} = 0.003 \text{ Hz}$$

Das Magnetfeld um den Isolator wird bei der Betriebsfrequenz 50 Hz nahezu ausschließlich von der Verschiebungsstromdichte  $J_{DI}$  im Isolator erregt. Der Ableitstrom spielt dabei (nahezu) keine Rolle.

5)

$$E_I = \frac{U_{Nph}}{h_I} = \frac{20000 / \sqrt{3}}{200 \cdot 10^{-3}} = 57735 \text{ V/m} = 0.58 \text{ kV/cm},$$

$$J_I = E_I / \rho_I = 57735 / 10^{12} = 0.058 \cdot 10^{-6} \text{ A/m}^2 = 0.058 \cdot 10^{-12} \text{ A/mm}^2,$$

$$\underline{J}_{DI} = j \cdot 2\pi \cdot f \cdot \varepsilon_I \cdot \rho_I \cdot J_I = j \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 6 \cdot 10^{12} \cdot 0.058 \cdot 10^{-6} = j \cdot 0.97 \cdot 10^{-3} \text{ A/m}^2$$

$$\underline{J}_a = J_I + j \cdot J_{DI} \Rightarrow J_a = \sqrt{J_I^2 + J_{DI}^2} \approx J_{DI}$$

$$I_a = J_a \cdot D_I^2 \cdot \pi / 4 \approx J_{DI} \cdot D_I^2 \cdot \pi / 4 = 0.97 \cdot 10^{-3} \cdot 0.1^2 \cdot \pi / 4 = 7.6 \mu\text{A},$$

$$\hat{H}_I(r=d_I) = \frac{\hat{I}_a}{2\pi \cdot d_I} = \frac{7.6 \cdot 10^{-6} \cdot \sqrt{2}}{2\pi \cdot 0.1} = 17.1 \frac{\mu\text{A}}{\text{m}}$$

Das Magnetfeld um den Isolator, hervorgerufen durch den (kleinen) Ableitstrom, ist vernachlässigbar klein!

### Aufgabe G26: Stromverdrängung

In den Leiterseilen der Freileitungen und Kabel fließt Wechselstrom (Effektivwert  $I$ , Frequenz  $f$ ) als Nutzstrom, dessen zeitlich veränderliches Eigenfeld in den Leitern selbst eine el. Spannung induziert, die Wirbelströme auf geschlossenen Strombahnen in den Leitern treibt. Diese schädlichen Wirbelströme verursachen zusätzliche Stromwärmeverluste. Die Überlagerung der Stromdichteverteilungen von Nutz- und Wirbelstrom führt bei Leitern mit kreisförmigem Querschnitt (Leiterradius  $R$ ) zu einer erhöhten Stromdichte am Leiterrand ( $J_a$ ) und zu einer verringerten Stromdichte in der Leitermitte. Diese „Stromverdrängung“ in el. Leitern (Permeabilität  $\mu$ , Leitfähigkeit  $\kappa$ ) zum Leiterrand hin tritt ab  $R > 2d_E$  deutlich auf und

kann in Abhängigkeit der Radialkoordinate  $r$  näherungsweise (für  $R \gg d_E$ ) durch die radiale effektive Stromdichteverteilung

$$J(r) = J_a \cdot e^{-(R-r)/d_E}, \quad d_E = 1/\sqrt{\pi \cdot \mu \cdot f \cdot \kappa}, \quad 0 \leq r \leq R,$$

mit der „Eindringtiefe“  $d_E$  beschrieben werden.

1) Berechnen Sie mit  $J(r)$  den Effektivwert des Leiterstroms  $I$

a) zunächst allgemein und

b) mit Beachtung der Bedingung  $R \gg d_E$ !

2) Ist bei gegebenem Radius  $R$  die Bedingung  $R \gg d_E$  bei hohen oder niedrigen Frequenzen  $f$  gut erfüllt? Wie groß muss der Leiterradius  $R$  eines Kupferleiters ( $\kappa_{Cu,20^\circ C} = 57 \text{ MS/m}$ ,  $\mu_{Cu} = \mu_0$ ) bei 50 Hz sein, damit  $R/d_E$  zumindest größer als 1.5 ist?

3) Zeigen Sie, dass für ausreichend hohe Stromverdrängung (also  $R \gg d_E$ ) die Stromdichte nahezu gänzlich mit dem Wert  $J_a$  in einer Leiterschichtdicke  $d_E$  („Hauteffekt, Skineffekt“) fließt! Wie groß ist der sich einstellende el. Widerstand  $R_{AC}$  eines Leiters mit der Länge  $l$  gegenüber dem „Gleichstromwiderstand“  $R_{DC}$  ohne Stromverdrängung? Geben Sie  $R_{AC}/R_{DC}$  für  $R/d_E = 2$  an! Wie groß sind in diesem Fall die Wirbelstromverluste  $P_{Ft}$  im Leiter im Vergleich zu den *ohm*'schen Verlusten bei Gleichstrom  $\underline{P_{DC} = R_{DC} \cdot I^2}$  ?

4) Einleiter-Freileitungsseile werden bei 50 Hz typisch mit Aluminium-Querschnittsflächen bis ca.  $300 \text{ mm}^2$  ausgeführt ( $\kappa_{Al,20^\circ C} = 34 \text{ MS/m}$ ,  $\mu_{Cu} = \mu_0$ ). Da die einzelnen Drähte elektrisch parallel geschaltet (und nicht isoliert) sind, wirken sie in etwa wie ein vergleichbarer massiver Rundleiter mit gleicher Querschnittsfläche. Ist der Stromverdrängungseffekt dabei signifikant groß oder vernachlässigbar klein? (Abschätzung!)

**Aufgabe G26 (Lösung):** Stromverdrängung

1)

$$a) I = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = \int_{r=0}^R \int_{\varphi=0}^{2\pi} J(r) \cdot r \cdot dr \cdot d\varphi = 2\pi \int_0^R J(r) \cdot r \cdot dr = 2\pi \int_0^R J_a \cdot e^{-(R-r)/d_E} \cdot r \cdot dr,$$

$$I = 2\pi \cdot J_a \cdot e^{-R/d_E} \cdot \int_0^R e^{r/d_E} \cdot r \cdot dr,$$

Partielle Integration:  $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du,$

$$u = r, dv = e^{r/d_E} \cdot dr \Rightarrow du = dr, v = e^{r/d_E} \cdot d_E,$$

$$\int e^{r/d_E} \cdot r \cdot dr = d_E \cdot e^{r/d_E} \cdot r - d_E \cdot \int e^{r/d_E} \cdot dr = d_E \cdot e^{r/d_E} \cdot r - d_E^2 \cdot e^{r/d_E},$$

$$\int_0^R e^{r/d_E} \cdot r \cdot dr = d_E \cdot \left[ (R - d_E) \cdot e^{R/d_E} + d_E \right], \quad I = 2\pi \cdot J_a \cdot d_E \cdot \left[ R - d_E + d_E \cdot e^{-R/d_E} \right]$$

b)  $R/d_E \gg 1 \Rightarrow e^{-R/d_E} \rightarrow 0: I \approx 2\pi \cdot J_a \cdot d_E \cdot (R - d_E)$

2)

$$R/d_E \gg 1 \Rightarrow d_E \ll R \Rightarrow d_E \sim 1/\sqrt{f} \ll R$$

Die Frequenz  $f$  muss ausreichend hoch sein, damit die Bedingung  $R/d_E \gg 1$  gut erfüllt ist.

$$R/d_E = 1.5 \Rightarrow R = 1.5 \cdot d_E = \frac{1.5}{\sqrt{\pi \cdot f \cdot \mu_0 \cdot \kappa_{Cu}}} = \frac{1.5}{\sqrt{\pi \cdot 50 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 57 \cdot 10^6}} = 0.0141 \text{ m} = 14.1 \text{ mm}$$

3)

$$R/d_E \gg 1: I \approx 2\pi \cdot J_a \cdot d_E \cdot (R - d_E),$$

„Hautstrom“-Fläche:

$$A = R^2 \cdot \pi - (R - d_E)^2 \cdot \pi = R^2 \cdot \pi - (R^2 - 2 \cdot R \cdot d_E + d_E^2) \cdot \pi = d_E \cdot (2 \cdot R - d_E) \cdot \pi,$$

$$A = 2\pi \cdot d_E \cdot (R - d_E/2) \xrightarrow{R/d_E \gg 1} \approx 2\pi \cdot d_E \cdot (R - d_E) = A', \quad J = I / A' = J_a,$$

$$R_{DC} = \frac{l}{\kappa \cdot A_{DC}} = \frac{l}{\kappa \cdot R^2 \pi}, \quad R_{AC} = \frac{l}{\kappa \cdot A_{AC}} \approx \frac{l}{\kappa \cdot A'} = \frac{l}{\kappa \cdot 2\pi \cdot d_E \cdot (R - d_E)},$$

$$R_{AC} / R_{DC} = \frac{A_{DC}}{A_{AC}} \xrightarrow{R/d_E \gg 1} \approx \frac{A_{DC}}{A'} = \frac{R^2 \pi}{2\pi \cdot d_E \cdot (R - d_E)} = \frac{1}{\frac{2d_E}{R} \cdot (1 - \frac{d_E}{R})},$$

$$R_{AC} / R_{DC} \xrightarrow{R/d_E \gg 1} \approx \frac{1}{\frac{2}{2} \cdot (1 - \frac{1}{2})} = 2,$$

$P_{AC} = P_{Ft} + P_{DC} = 2 \cdot P_{DC} \Rightarrow P_{Ft} = P_{DC}$ : Die Wirbelstromverluste  $P_{Ft}$  sind bei  $R/d_E = 2$  näherungsweise genauso groß wie die Verluste bei Gleichstrom  $I_{DC} = I$ . Bei größeren Werten  $R/d_E > 2$  sind sie höher als die Gleichstrom-Verluste!

4)

$$A = R^2 \cdot \pi \Rightarrow R = \sqrt{A/\pi} = \sqrt{300/\pi} = 9.77 \text{ mm},$$

$$d_E = \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot f \cdot \mu_0 \cdot \kappa_{Al}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot 50 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 34 \cdot 10^6}} = 0.0122 \text{ m} = 12.2 \text{ mm},$$

$R/d_E = 9.77/12.2 = 0.8 < 2$ : Der Stromverdrängungseinfluss ist bei 300 mm<sup>2</sup> und 50 Hz für Aluminium in erster Näherung vernachlässigbar klein.

**Aufgabe G27:** Sonnenstrahlung – Poynting-Vektor

Die Sonne bestrahlt die Erde mit ca. 1400 W/m<sup>2</sup> („extraterrestrische Solarkonstante“). Diese Strahlung kann auf Grund der großen Distanz der Erde von der Sonne in Erdnähe näherungsweise als ebene elektromagnetische Welle mit unterschiedlichen Frequenzen, entsprechend dem solaren Strahlungsspektrum, beschrieben werden.

1) Nehmen Sie vereinfachend an, dass die solare Strahlung mit einer einzigen Frequenz erfolgt! Ermitteln Sie dazu über den Poynting-Vektor  $\vec{S}_{pg}$  die zu ihm und zueinander normal gerichteten Feldvektoren  $\vec{E}, \vec{H}$  dieser Sonnenstrahlung! Nutzen Sie dazu die Beziehung des Wellenwiderstands  $Z_{0,0}$  im Vakuum gemäß  $\hat{E} = Z_{0,0} \cdot \hat{H}$  und  $Z_{0,0} = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0}$ . Bedenken Sie, dass in der ebenen Welle im Vakuum  $\vec{E}$  und  $\vec{H}$  bei jeder Kreisfrequenz  $\omega$  in Phase schwingen!

2) Wie groß ist die dabei auftretende Magnetfeldamplitude im Verhältnis zum Erdmagnetfeld  $B_E \cong 50 \mu\text{T}$ ?

3) Vergleichen Sie das Ergebnis von 1) mit dem Poynting-Vektor  $S_{pg,F}$  einer 110 kV-Einphasen-Freileitung für Bahnstrombetrieb 16.7 Hz, die  $S = P = 60 \text{ MW}$  el. Wirkleistung überträgt! Die beiden Leiter haben einen Leiterradius  $R = 10 \text{ mm}$ . Vernachlässigen Sie den Einfluss des (schwach) el. leitfähigen Erdbodens auf Nullpotential für die E-Feldberechnung. Bestimmen Sie  $S_{pg,F}$  in der Mitte der Verbindungslinie zwischen den beiden Leitern („Punkt 0“) und berechnen Sie  $S_{pg}/S_{pg,F}$ !

4) Wie groß ist der Wellenwiderstand  $Z_0$  der leitungsgeführten Welle der Freileitung von 3) im Vergleich zu  $Z_{0,0}$  der strahlungsgeführten Welle von 1)?

**Aufgabe G27 (Lösung):** Sonnenstrahlung – Poynting-Vektor

1)

Bei jeder Kreisfrequenz  $\omega$  gilt:  $E(t) = \hat{E} \cdot \cos \omega t$ ,  $H(t) = \hat{H} \cdot \cos \omega t$ ,  $\vec{S}_{\text{pg}} = \vec{E} \times \vec{H}$ ,

$\vec{S}_{\text{pg}} \perp \vec{E} \perp \vec{H} \Rightarrow$  z. B.  $\vec{E} = E(t) \cdot \vec{e}_x$ ,  $\vec{H} = H(t) \cdot \vec{e}_y$

$\Rightarrow \vec{S}_{\text{pg}} = E(t) \cdot H(t) \cdot \vec{e}_x \times \vec{e}_y = E(t) \cdot H(t) \cdot \vec{e}_z = S_{\text{pg}}(t) \cdot \vec{e}_z$ ,

$$S_{\text{pg}}(t) = \hat{E} \cdot \cos \omega t \cdot \hat{H} \cdot \cos \omega t = \frac{\hat{E} \cdot \hat{H}}{2} \cdot (1 + \cos(2\omega t))$$

$$I_0 = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T S_{\text{pg}}(t) \cdot dt = \frac{1}{T} \cdot \frac{\hat{E} \cdot \hat{H}}{2} \cdot \int_0^T (1 + \cos(2\omega t)) \cdot dt = \frac{\hat{E} \cdot \hat{H}}{2} = \frac{Z_{0,0} \cdot \hat{H}^2}{2} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \cdot \frac{\hat{H}^2}{2},$$

$$\hat{H} = \sqrt{2 \cdot I_0 \cdot \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}} = \sqrt{2 \cdot 1400 \cdot \sqrt{\frac{8.854 \cdot 10^{-12}}{4\pi \cdot 10^{-7}}}} = 2.73 \text{ A/m}, \quad Z_{0,0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 376.7 \Omega,$$

$$\hat{E} = Z_{0,0} \cdot \hat{H} = 376.7 \cdot 2.73 = 1028 \text{ V/m} = 0.013 \text{ kV/cm}$$

2)

$$\hat{B} = \mu_0 \cdot \hat{H} = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2.73 = 3.43 \mu\text{T}, \quad \hat{B}/B_E = 3.43/50 = 0.07$$

3)

$I = S/U_N = P/U_N = 60 \cdot 10^6 / (110 \cdot 10^3) = 545 \text{ A}$ . Da reine Wirkleistung übertragen wird,

sind  $u$  und  $i$  in Phase und folglich auch  $\vec{E} \sim u(t) = \hat{U} \cdot \cos \omega t$  und  $\vec{H} \sim i = \hat{I} \cdot \cos \omega t$  in Phase:

$E(t) = \hat{E} \cdot \cos \omega t$ ,  $H(t) = \hat{H} \cdot \cos \omega t$ . Mit  $\hat{U} = U \cdot \sqrt{2}$ ,  $\hat{I} = I \cdot \sqrt{2}$  und  $\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = I$  folgt in

Punkt 0 (bei  $r = \Delta/2$ ) (Bild 27.1 a):

$$H\text{-Feld des Hinleiters: } \vec{H}_1(t) = -\frac{I \cdot \sqrt{2}}{2\pi \cdot (\Delta/2)} \cdot \cos \omega t \cdot \vec{e}_y,$$

$$H\text{-Feld des Rückleiters: } \vec{H}_2(t) = -\frac{I \cdot \sqrt{2}}{2\pi \cdot (\Delta/2)} \cdot \cos \omega t \cdot \vec{e}_y = \vec{H}_1(t),$$

$$\vec{H}(t) = \vec{H}_1(t) + \vec{H}_2(t) = 2 \cdot \vec{H}_1(t) = -\frac{I \cdot \sqrt{2}}{\pi \cdot (\Delta/2)} \cdot \cos \omega t \cdot \vec{e}_y,$$

$$\hat{H} = \frac{I \cdot \sqrt{2}}{\pi \cdot (\Delta/2)} = \frac{545 \cdot \sqrt{2}}{\pi \cdot (4.2/2)} = 116.8 \text{ A/m}$$

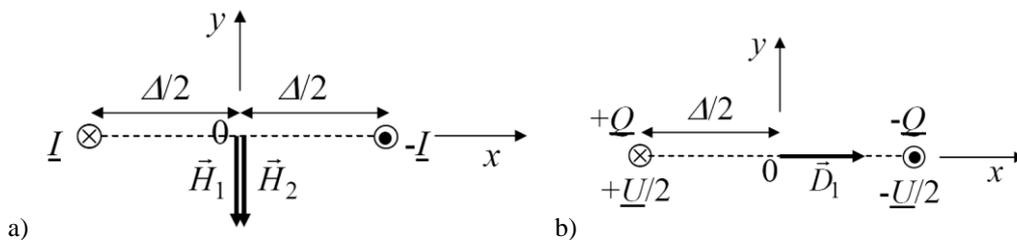


Bild G27.1: a) Magnetfeld  $H$  zwischen den beiden Leiterströmen, b) Dielektrische Verschiebung  $D_1$  zufolge der Leiterladung  $+Q$

Mit  $\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q$  folgt in Punkt 0 (Bild G27.1 b):

Für den Hinleiter:  $D_1(t) \cdot l \cdot 2\pi \cdot \frac{\Delta}{2} = Q(t)$

Für den Rückleiter:  $-D_2(t) \cdot l \cdot 2\pi \cdot \frac{\Delta}{2} = -Q(t)$ , somit

$$\vec{D}_1(t) = \frac{Q \cdot \sqrt{2}}{l \cdot 2\pi \cdot (\Delta/2)} \cdot \cos \omega t \cdot \vec{e}_x, \quad \vec{D}_2(t) = \frac{Q \cdot \sqrt{2}}{l \cdot 2\pi \cdot (\Delta/2)} \cdot \cos \omega t \cdot \vec{e}_x = \vec{D}_1(t),$$

$$\vec{D}(t) = \vec{D}_1(t) + \vec{D}_2(t) = \frac{Q \cdot \sqrt{2}}{l \cdot \pi \cdot (\Delta/2)} \cdot \cos \omega t \cdot \vec{e}_x, \quad Q = C \cdot U,$$

Gemäß Kap. V für  $R/\Delta = 10/4200 = 0.0024 \ll 1$ :  $C \cong \frac{\pi \cdot l \cdot \epsilon_0}{\ln(\Delta/R)}$ ,

$$\hat{D} = \frac{Q \cdot \sqrt{2}}{l \cdot \pi \cdot (\Delta/2)} = \frac{C \cdot U \cdot \sqrt{2}}{l \cdot \pi \cdot (\Delta/2)} = \frac{\pi \cdot l \cdot \epsilon_0}{\ln(\Delta/R)} \cdot \frac{U \cdot \sqrt{2}}{l \cdot \pi \cdot (\Delta/2)} = \frac{2\epsilon_0 \cdot U \cdot \sqrt{2}}{\Delta \cdot \ln(\Delta/R)},$$

$$\hat{E} = \frac{\hat{D}}{\epsilon_0} = \frac{2 \cdot U \cdot \sqrt{2}}{\Delta \cdot \ln(\Delta/R)} = \frac{2 \cdot 110 \cdot 10^3 \cdot \sqrt{2}}{4.2 \cdot \ln(4.2/0.01)} = 12264 \text{ V/m},$$

$$S_{\text{pg,F}} = \hat{E} \cdot \hat{H} / 2 = 12264 \cdot 116.8 / 2 = 716218 \text{ W/m}^2, \quad S_{\text{pg,F}} / S_{\text{pg}} = 716218 / 1400 = 511.6$$

Die lokale Leistungsdichte zwischen den beiden Leitern ist ca. 510-mal größer als die solare Leistungsdichte. Allerdings ist diese Leistungsdichte etwa auf das Gebiet zwischen den Leitern begrenzt, während die solare Leistungsdichte auf der gesamten projizierten Erdoberfläche herrscht.

4)

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L/l}{C/l}} \Big|_{R \ll \Delta} = \sqrt{\frac{\frac{\mu_0 \cdot \ln\left(\frac{\Delta}{R}\right)}{\pi}}{\frac{\pi \cdot \epsilon_0}{\ln\left(\frac{\Delta}{R}\right)}}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \cdot \frac{\ln\left(\frac{\Delta}{R}\right)}{\pi} = Z_{0,0} \cdot \frac{\ln\left(\frac{\Delta}{R}\right)}{\pi}$$

$$\frac{Z_0}{Z_{0,0}} = \frac{\ln\left(\frac{\Delta}{R}\right)}{\pi} = \frac{\ln\left(\frac{4.2}{0.01}\right)}{\pi} = 1.92 \Rightarrow Z_0 = 1.92 \cdot 376.7 = 723 \Omega$$

**Aufgabe G28:** Kochplatte

Eine elektrische Kochplatte für  $U_N = 230 \text{ V}$ ,  $50 \text{ Hz}$ , besteht aus zwei identischen Heizwiderständen je  $R = 60 \Omega$ , womit zwei Heizstufen realisiert werden. Bei „Stufe 1“ sind beide Widerstände in Serie geschaltet, bei „Stufe 2“ beide parallel geschaltet.

- 1) Wie groß sind Stromaufnahme  $I$  und elektrische Leistung  $P_e$  bei Stufe 1 und 2?
- 2) In einem Metalltopf sollen 2 Liter Wasser auf der Kochplatte, ausgehend von  $\vartheta_1 = 15^\circ\text{C}$ , zum Sieden bei Normaldruck 1013 mbar gebracht werden. Wie lange dauert dieser Vorgang bei Stufe 1 und 2, wenn auf Grund der Wärmeverluste an die Umgebung nur 75% der elektrischen Leistung für die Erwärmung nutzbar sind ( $c_{\text{H}_2\text{O}} = 4187 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ ,  $\gamma_{\text{H}_2\text{O}} = 1000 \text{ kg/m}^3$ )?

**Aufgabe G28 (Lösung):** Kochplatte

1)

Stufe 1: Serienschaltung:  $R_{\text{res}} = R + R = 2 \cdot R = 2 \cdot 60 = 120 \, \Omega$ , $I_1 = U_N / R_{\text{res}} = 230 / 120 = 1.92 \, \text{A}$ ,  $P_{e1} = I_1 \cdot U_N = 1.92 \cdot 230 = 440.8 \, \text{W}$ ,Stufe 1: Parallelschaltung:  $R_{\text{res}} = \frac{R \cdot R}{R + R} = R / 2 = 60 / 2 = 30 \, \Omega$ , $I_2 = U_N / R_{\text{res}} = 230 / 30 = 7.67 \, \text{A} = 4 \cdot I_1$ ,  $P_{e2} = I_2 \cdot U_N = 7.67 \cdot 230 = 1763.3 \, \text{W} = 4 \cdot P_{e1}$ 

2)

Wasser siedet bei Normaldruck bei  $\vartheta_S = 100 \, ^\circ\text{C} \Rightarrow \Delta\vartheta = \vartheta_S - \vartheta_1 = 100 - 15 = 85 \, \text{K}$ , $V = 2 \, \text{l} \Rightarrow m = V \cdot \gamma_{\text{H}_2\text{O}} = 2 \cdot 10^{-3} \cdot 1000 = 2 \, \text{kg}$ ,  $P_{\text{th}} = \eta_{\text{th}} \cdot P_e = 0.75 \cdot P_e$ ,

$$P_{\text{th}} \cdot T = m \cdot c_{\text{H}_2\text{O}} \cdot \Delta\vartheta \Rightarrow T = \frac{m \cdot c_{\text{H}_2\text{O}} \cdot \Delta\vartheta}{\eta_{\text{th}} \cdot P_e},$$

$$\text{Stufe 1: } T_1 = \frac{m \cdot c_{\text{H}_2\text{O}} \cdot \Delta\vartheta}{\eta_{\text{th}} \cdot P_{e1}} = \frac{2 \cdot 4187 \cdot 85}{0.75 \cdot 440.8} = 2153 \, \text{s} = 35.88 \, \text{min},$$

$$\text{Stufe 2: } T_2 = \frac{m \cdot c_{\text{H}_2\text{O}} \cdot \Delta\vartheta}{\eta_{\text{th}} \cdot P_{e2}} = \frac{m \cdot c_{\text{H}_2\text{O}} \cdot \Delta\vartheta}{\eta_{\text{th}} \cdot 4P_{e1}} = 2153 / 4 \, \text{s} = 35.88 / 4 \, \text{min} = 8.97 \, \text{min}$$

**Aufgabe R1:** Windpark

Ein Windpark soll offshore für eine Nennleistung  $P_{\text{ges}} = 100 \text{ MW}$  installiert werden. Die Windturbinen sind für jeweils  $P_N = 5 \text{ MW}$  zu bemessen bei einer Wind-Nenngeschwindigkeit von  $v_N = 12 \text{ m/s}$  bei einer Nabenhöhe des Turmes von  $h = 125 \text{ m}$ !

- 1) Wie viele Turbinen werden benötigt? Wie groß ist der Rotorblattdurchmesser  $D$ , wenn der Leistungsbeiwert  $c_p$  nur 90 % des theoretisch maximal möglichen Werts beträgt und der Anlagenwirkungsgrad  $\eta_N = 0.9$  ist ( $\gamma_{L,10^\circ\text{C}} = 1.29 \text{ kg/m}^3$ )?
- 2) Wie groß ist der Grundflächenbedarf  $A_{\text{ges}}$ , wenn je Windturbine eine quadratische Grundfläche mit der Seitenlänge  $6 \cdot D$  vorgegeben wird? Wie groß ist die Seitenlänge  $L$  des auf quadratischer Gesamtfläche  $A_{\text{ges}}$  angedachten Windparks?
- 3) Wie groß ist die Scheinleistung des Windparks, wenn die Frequenzrichter der einzelnen Windkraftanlagen eine kapazitive Blindleistung  $Q_C$  von 60 % der Nennleistung zur Verfügung stellen? Wie groß ist der  $\cos\varphi_N$  im Verbraucherzählpeilsystem (Vorzeichen!) im generatorischen Betrieb des Windparks?
- 4) Je Windkraftanlage wird über einen Transformator die 50 Hz-Ausgangsspannung des Frequenzrichters auf 33 kV (verkettet) hoch gesetzt! Wie groß ist der effektive Nennstrom  $I_N$  je Anlage?
- 5) Die Scheinleistung des Windparks wird über einen zentralen 33 kV/150 kV-Transformator ( $\eta_T \approx 1$ ) und ein dreiphasiges 150 kV-AC-Seekabel an Land transportiert. Wie groß ist der Nennstrom  $I_{N,k}$  des Seekabels?
- 6) Wie groß ist der Jahresenergieertrag  $W_{\text{ges}}$  bei einer mittleren Volllaststundenzahl je Anlage von 4000 h? Wie viele 3-Personenhaushalte (el. Jahresenergiebedarf  $W_a = 3500 \text{ kWh}$ ) können versorgt werden?

**Aufgabe R1 (Lösung):** Windpark

1)

$$z = P_{\text{ges}} / P_N = 100/5 = 20 \text{ Turbinen}$$

$$c_{p,\text{max}} = 16/27, \quad c_p = 0.9 \cdot 16/27 = 0.53, \quad P_N / \eta_N = P_T = 5000/0.9 = 5555.5 \text{ kW}$$

$$\text{Turbinenleistung: } P_T = c_p \cdot \gamma_L \cdot \frac{A \cdot v_N^3}{2}, \quad A = \frac{5555.5 \cdot 10^3 \text{ W} \cdot 2}{0.53 \cdot 1.29 \cdot (12 \text{ m/s})^3} = 9405 \text{ m}^2 = \frac{D^2 \cdot \pi}{4}, \quad D = 109.4 \text{ m}$$

2)

$$A_{\text{ges}} = z \cdot (6 \cdot D)^2 = 20 \cdot (6 \cdot 109.4 \text{ m})^2 = 8617219 \text{ m}^2 = 8.6 \text{ km}^2$$

$$L = \sqrt{A_{\text{ges}}} = \sqrt{8617219 \text{ m}^2} = 2936 \text{ m} \approx 3.0 \text{ km}$$

3)

$$Q_C = 0.6 \cdot P_{\text{ges}} = 0.6 \cdot 100 \text{ MW} = 60 \text{ MVar}$$

$$S_{\text{ges}} = \sqrt{P_{\text{ges}}^2 + Q_{\text{ges}}^2} = 116.62 \text{ MVA}$$

Generator: Verbraucherzählpeilsystem  $P < 0$ :  $P_{\text{ges}} = -100 \text{ MW}$

$$\cos\varphi_N = \frac{P_{\text{ges}}}{S_{\text{ges}}} = \frac{-100 \text{ MW}}{116.62 \text{ MVA}} = -0.86$$

4)

$$S_N = \frac{S_{\text{ges}}}{z} = \frac{116.62 \text{ MVA}}{20} = 5.83 \text{ MVA} = \sqrt{3} \cdot U_N \cdot I_N$$

$$U_N = 33 \text{ kV} \rightarrow I_N = \frac{5.83 \cdot 10^6 \text{ VA}}{\sqrt{3} \cdot 33 \cdot 10^3 \text{ V}} = 102 \text{ A}$$

5)

$$I_{N,k} = \frac{116.62 \cdot 10^6 \text{ VA}}{\sqrt{3} \cdot 150000 \text{ V}} = 449 \text{ A}$$

6)

$$W_{\text{ges}} = t \cdot P_{\text{ges}} = 4000 \text{ h} \cdot 100 \text{ MW} = 400 \text{ GWh}$$

$$z_H = \frac{W_{\text{ges}}}{W_a} = \frac{400 \cdot 10^9 \text{ Wh}}{3500 \cdot 10^3 \text{ Wh}} = 114286$$

**Aufgabe R2:** Gezeitenturbine

Eine Propeller-Gezeitenturbine soll in 15 m Wassertiefe aus der Gezeitenströmung elektrische Energie gewinnen!

- 1) Wie groß ist die Turbinenleistung theoretisch maximal bei einer Strömungsgeschwindigkeit  $v = 10 \text{ km/h}$  und einem Rotordurchmesser  $D = 15 \text{ m}$ ?
- 2) Wie groß wäre im Vergleich dazu der Rotor  $D_w$  einer Windturbine bei gleicher Leistung und  $v_w = 11 \text{ m/s}$ ? ( $\rho_{L,10^\circ\text{C}} = 1.29 \text{ kg/m}^3$ )
- 3) Wie groß ist der Jahresenergieertrag  $W$ , wenn je Tidenhub die Strömungsgeschwindigkeit  $v$  für 4 h auftritt? Der Gesamtwirkungsgrad des Gezeitenkraftwerks beträgt  $\eta_{KW} = 0.8$ . Wie viele Haushalte zu je  $W_a = 3500 \text{ kWh/a}$  (Jahresenergienutzung) können versorgt werden?
- 4) Mit wie vielen Schwimmern als hohle Zylinder der Länge  $b = 30 \text{ m}$  muss ein Meereswellenkraftwerk ausgerüstet sein, um bei Meereswellen mit der Wellenhöhe  $H = 2 \text{ m}$  und der Wellenlänge  $\lambda = 10 \text{ m}$  dieselbe theoretische Energieausbeute aufzuweisen wie bei 1)?

**Aufgabe R2 (Lösung):** Gezeitenturbine

1)

$$P_T = 0.5 \cdot \frac{16}{27} \cdot \gamma_{\text{H}_2\text{O}} \cdot A \cdot v^3 = 0.5 \cdot \frac{16}{27} \cdot 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \frac{(15\text{m})^2 \cdot \pi}{4} \cdot \left(10 \cdot \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}}\right)^3 = 1.12 \text{ MW}$$

2)

$$P_T = 0.5 \cdot \frac{16}{27} \cdot \rho_{L,10^\circ\text{C}} \cdot A \cdot v_w^3 = 0.5 \cdot \frac{16}{27} \cdot \rho_{L,10^\circ\text{C}} \cdot \frac{D_w^2 \cdot \pi}{4} \cdot v_w^3 = 1.12 \text{ MW}$$

$$D_w^2 = \frac{2 \cdot P_T \cdot 4}{\frac{16}{27} \cdot \rho_{L,10^\circ\text{C}} \cdot \pi \cdot v_w^3} = \frac{8 \cdot 1.12 \cdot 10^6 \text{ W}}{0.592 \cdot 1.29 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \pi \cdot \left(11 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} = 2803 \text{ m}^2 \rightarrow D_w = 53 \text{ m}$$

3)

Flut: 2 Mal pro Tag. Betriebsstunden pro Jahr:  $t_B = 2 \cdot 365 \text{ d} \cdot 4 \text{ h/d} = 2920 \text{ h}$

$$W = P_T \cdot \eta_{KW} \cdot t_B = 1.12 \text{ MW} \cdot 0.8 \cdot 2920 \text{ h} = 2.62 \text{ GWh}$$

$$Z_H = \frac{W}{W_a} = \frac{2.62 \text{ GWh}}{3500 \text{ kWh}} = 749 \text{ Haushalte}$$

4)

$$\frac{P'}{b} = \gamma_{\text{H}_2\text{O}} \cdot \frac{H^2 \cdot g^2 \cdot T}{32 \cdot \pi}, \quad v_{\text{ph}} = \sqrt{\frac{g \cdot \lambda}{2\pi}} = \sqrt{\frac{9.81 \text{ m/s}^2 \cdot 10 \text{ m}}{2\pi}} = 3.95 \text{ m/s}, \quad T = \frac{\lambda}{v_{\text{ph}}} = \frac{10 \text{ m}}{3.95 \text{ m/s}} = 2.53 \text{ s}$$

$$P' = b \cdot \gamma_{\text{H}_2\text{O}} \cdot \frac{H^2 \cdot g^2 \cdot T}{32 \cdot \pi} = 30 \text{ m} \cdot 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \frac{(2 \text{ m})^2 \cdot (9.81 \text{ m/s}^2)^2 \cdot 2.53 \text{ s}}{32\pi} = 290.7 \text{ kW}$$

$$P_T / P' = 1.12 \text{ MW} / 290.7 \text{ kW} \approx 4$$

**Aufgabe R3:** Dieselkraftstoff

Dieseldkraftstoff besteht aus C-H<sub>2</sub>-Molekülketten mit ca. 9 ... 22 C-Atomen je Molekül. Bei der Verbrennungsreaktion entstehen je CH<sub>2</sub>-Gruppe Wasser (H<sub>2</sub>O), Kohlendioxid (CO<sub>2</sub>) und Wärmeenergie 650 kJ/mol. Die Dichte von Diesel beträgt etwa 0.8 kg/l.

- 1) Wie viel Wärmeenergie wird bei der Verbrennung von 1 kg Diesel frei? (<sup>12</sup>C-Isotop, <sup>1</sup>H-Atom). Und wie viel kWh je Liter?
- 2) Wie groß ist dabei die erzeugte Masse an CO<sub>2</sub>-Gas und an Wasserdampf H<sub>2</sub>O (Sauerstoff: <sup>16</sup>O-Isotop) je kg verbranntem Dieseldkraftstoff?
- 3) Wie groß sind diese Werte je kWh freigesetzter Verbrennungswärme?
- 4) Wie groß ist im Vergleich dazu die freigesetzte Menge an CO<sub>2</sub> bei der Verbrennung von 1 kg Anthrazit (Annahme: „reiner“ Kohlenstoff!) (Heizwert: 36 MJ/kg) und je kWh Verbrennungswärme? Kommentieren Sie den Vergleich der Ergebnisse von 4) mit 3)!
- 5) Wie groß ist die erzeugte CO<sub>2</sub>-Masse je elektrisch erzeugter kWh in einem thermischen Steinkohle-Kraftwerk im günstigsten Fall, wenn die Wirkungsgrade aller eingesetzten Komponenten (Generator, Turbine, Transformator, Pumpe, Beleuchtung, ...) 100 % und die Wasserdampfeintritts- und Austrittstemperatur im *Clausius-Rankine*-Zyklus 650 °C und 25 °C betragen?
- 6) Bei einem realen Nennwirkungsgrad eines modernen Steinkohlekraftwerks  $\eta = 46\%$  wird je erzeugter kWh elektrischer Energie welche Masse an CO<sub>2</sub> freigesetzt? Und wie viel bei einem dieselektrischen Kraftwerk mit  $\eta = 40\%$ ?

**Aufgabe R3 (Lösung):** Dieseldkraftstoff

1)

$$\text{Masse von CH}_2 : \text{CH}_2 : {}^{12}\text{C} + 2 \cdot {}^1\text{H} \rightarrow (12 + 2 \cdot 1) \cdot m_u = 14 \cdot m_u = 14 \cdot 1.66 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = m_{\text{CH}_2}$$

$$1 \text{ mol} = 6.022 \cdot 10^{23} \text{ Teilchen} \quad , \text{ Energie je „CH}_2\text{-Teilchen“: } W_{\text{CH}_2} = \frac{650 \cdot 10^3 \text{ J}}{6.022 \cdot 10^{23}}$$

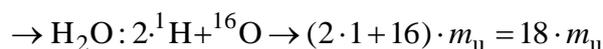
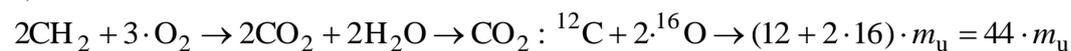
$$W_{\text{kg}} = \frac{1 \text{ kg}}{m_{\text{CH}_2}} \cdot W_{\text{CH}_2} = \frac{1 \text{ kg}}{14 \cdot 1.66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}} \cdot \frac{650 \cdot 10^3 \text{ J}}{6.022 \cdot 10^{23}} = 4.64 \cdot 10^7 \text{ J} = 46.4 \text{ MJ}$$

Es wird je kg verbranntem Diesel 46.4 MJ an Wärmeenergie freigesetzt.

$$1 \text{ kWh} = 3.6 \cdot 10^6 \text{ J} \Rightarrow W' = 46.4 \frac{\text{MJ}}{\text{kg}} = \frac{46.4 \cdot \frac{10^6}{3.6 \cdot 10^6} \text{ kWh}}{\text{kg}}$$

$$\text{Dieseldkraftstoff: } 1 \text{ kg} \hat{=} \frac{1}{0.81} = 1.251 \Rightarrow W' = \frac{46.4 \text{ kWh}}{3.6} \cdot \frac{1}{1.25} = 10.3 \frac{\text{kWh}}{\text{l}}$$

2)



$$\text{Anzahl der CH}_2\text{-Teilchen je kg: } N_{\text{CH}_2} = \frac{1 \text{ kg}}{14 \cdot m_u} = N_{\text{CO}_2} = N_{\text{H}_2\text{O}}$$

$$\text{Masse von CO}_2 : \frac{1 \text{ kg}}{14 \cdot m_u} \cdot 44 \cdot m_u = 3.14 \text{ kg} \quad , \text{ Masse von H}_2\text{O} : \frac{1 \text{ kg}}{14 \cdot m_u} \cdot 18 \cdot m_u = 1.29 \text{ kg}$$

Je kg verbranntem Dieseldkraftstoff werden 3.14 kg CO<sub>2</sub> und 1.29 kg H<sub>2</sub>O freigesetzt!

3)

$$10.3 \text{ kWh/l: Je l verbrannter Diesel: CO}_2 : \frac{3.14 \text{ kg}}{\text{kg}} \Rightarrow \frac{3.14 \text{ kg}}{1.251} = 2.51 \text{ kg/l,}$$

$$\text{H}_2\text{O} : \frac{1.29 \text{ kg}}{\text{kg}} \Rightarrow \frac{1.29 \text{ kg}}{1.251} = 1.03 \text{ kg/l}$$

$$\text{CO}_2 : \frac{2.51 \text{ kg/l}}{10.3 \text{ kWh/l}} = 0.244 \frac{\text{kg}}{\text{kWh}} = 244 \frac{\text{g}}{\text{kWh}}, \text{ H}_2\text{O} : \frac{1.03 \text{ kg/l}}{10.3 \text{ kWh/l}} = 0.1 \frac{\text{kg}}{\text{kWh}} = 100 \frac{\text{g}}{\text{kWh}}$$

Je kWh erzeugter Wärmeenergie wurden bei der Dieselverbrennung 244 g CO<sub>2</sub> und 100 g H<sub>2</sub>O erzeugt.

4)

$$\text{Anzahl } ^{12}\text{C-Isotope je 1 kg „reinem“ Kohlenstoff: } N_{\text{C}} = \frac{1 \text{ kg}}{12 \cdot m_{\text{u}}} \quad (N_{\text{C}} = N_{\text{CO}_2}),$$

$$\text{Masse von CO}_2 \text{ je 1 kg verbranntem C: } \frac{1 \text{ kg}}{12 \cdot m_{\text{u}}} \cdot 44 \cdot m_{\text{u}} = 3.67 \text{ kg}$$

$$\frac{36 \cdot 10^6 \text{ J}}{3.6 \cdot 10^6 \text{ J/kWh}} = 10 \text{ kWh} \rightarrow \frac{3.67 \text{ kg CO}_2}{10 \text{ kWh}} = 0.367 \frac{\text{kg CO}_2}{\text{kWh}} = 367 \text{ g CO}_2 \text{ je kWh}$$

Je kg verbranntem Kohlenstoff werden 3.67 kg CO<sub>2</sub> erzeugt; je erzeugter kWh 367 g!

Kommentar:

Bei der Verbrennung von 1 kg Dieselkraftstoff wurden nur  $3.14/3.67 = 85.6\%$  der CO<sub>2</sub>-Masse wie bei der Verbrennung von 1 kg C erzeugt. Bezogen auf gleiche Verbrennungswärme 1 kWh sind es nur  $244 \text{ g}/367 \text{ g} = 66.5\%$ , da auch die H<sub>2</sub>-Verbrennung zur Wärmeerzeugung bei der Dieselverbrennung beiträgt.

5)

Da alle Komponenten-Wirkungsgrade 100 % sind, verbleibt nur der Wirkungsgrad des *Clausius-Rankine*-Prozesses. Dieser ist im besten Fall der *Carnot*-Wirkungsgrad (als theoretische Obergrenze):

$$\eta_{\text{C}} = 1 - \frac{T_{\text{ab}}}{T_{\text{zu}}} = 1 - \frac{273.15 + 25}{273.15 + 650} = 0.68$$

Für 1 kWh erzeugter elektrischer Energie sind im günstigsten Fall  $(1/0.68) = 1.47$ -mal so viel thermische Energie nötig:

$$1.47 \cdot 367 \text{ g} = 539 \text{ g CO}_2 \text{ je kWh}_{\text{el}}!$$

6)

$$\text{Steinkohlekraftwerk: } \frac{0.367}{0.46} = 0.798 \frac{\text{kg CO}_2}{\text{kWh}_{\text{el}}} \approx 800 \text{ g CO}_2/\text{kWh}_{\text{el}}$$

$$\text{Diselelektrisches Kraftwerk: } \frac{0.244}{0.4} = 0.610 \frac{\text{kg CO}_2}{\text{kWh}_{\text{el}}} = 610 \text{ g CO}_2/\text{kWh}_{\text{el}}$$

**Aufgabe R4:** Elektrofähre

Eine Fähre für den Personen- und Fahrzeugverkehr zur Querung eines Fjords in *Norwegen* (6 km Distanz) für 360 Personen und 120 Fahrzeuge soll rein elektrische angetrieben werden.

- 1) Welche Arbeit in MJ und kWh müssen die beiden elektrischen Antriebsmotoren verrichten, wenn der Strömungswiderstand der 80 m langen Leichtbau-Fähre (Aluminium-Rumpf) 90 kN beträgt?
- 2) Wie schnell muss die Fähre im Durchschnitt fahren, um eine Fahrzeit von 10 min. einzuhalten? Wie groß sind die mittlere Antriebsleistung der Fähre und der beiden Elektromotor-Propeller-Einheiten?
- 3) Mit den Wirkungsgraden für Propeller ( $\eta_p = 85\%$ ), Elektromotor ( $\eta_E = 92\%$ ), Umrichter für die Elektromotoren ( $\eta_U = 97\%$ ), Kabel + Batterie ( $\eta_B = 90\%$ ) bestimmen Sie den Energiebedarf für das Antreiben der Fähre je Fahrt!
- 4) Welchen Energieinhalt  $W_B$  muss die Bordbatterie aufweisen, wenn ohne Nachladen 10 Fahrten möglich sein sollen? Berücksichtigen Sie für die Nebenverbraucher (Beleuchtung, Hilfsantriebe, Belüftung, ...) eine mittlere Leistung von  $P_{Nv} = 200\text{ kW}$ ! Welche Masse hat die Li-Ionen Batterie? (Energiedichte  $w_B = 200\text{ Wh/kg}$ )
- 5) Kann die Batterie die Antriebsleistung zur Verfügung stellen, wenn bei Notmanövern kurzfristig die doppelte Motorleistung benötigt wird? (Leistungsdichte  $dP_B/dm_B = 300\text{ W/kg}$ )
- 6) *Norwegen* deckt seinen elektrischen Energiebedarf zu 100 % aus Wasserkraftwerken! Wie groß ist (näherungsweise) die für den Fährbetrieb erzeugte  $\text{CO}_2$ -Menge pro Jahr? Wie groß wäre sie bei einer Fähre, deren beide Propeller durch Schiffsdieselmotoren angetrieben würden, die auch über gekuppelte Schiffsgeneratoren ( $\eta_G = 0.9$ ) die elektrische Energie für die Nebenverbraucher bereitstellen? ( $\eta_{\text{Dieselmotor}} \approx 0.4$ , Heizwert: Dieselkraftstoff:  $H = 44\text{ MJ/kg}$  mit  $3.14\text{ kg CO}_2$ -Erzeugung je kg). Berücksichtigen Sie 34 Fahrten der Fähre täglich! Wie groß ist der Dieselkraftstoffbedarf in Liter je Jahr ( $\gamma_{\text{Diesel}} \approx 0.8\text{ kg/l}$ )
- 7) In *Deutschland* werden beim aktuellen „Energimix“ bei der Erzeugung der Energie aus unterschiedlichen Kraftwerkstypen etwa  $350\text{ g CO}_2$  je erzeugter kWh elektrischer Energie erzeugt! Wie groß wäre die für den elektrischen Fährbetrieb der Fähre erzeugte  $\text{CO}_2$ -Masse pro Jahr im Vergleich zum Schiffsdieselantrieb? Berücksichtigen Sie 6% Umwandlungsverluste auf elektrischen Leitungen vom Kraftwerk zur Batterieladestation und für das Laden der Batterie einen Wirkungsgrad  $\eta_B = 0.9$ !

**Aufgabe R4 (Lösung):** Elektrofähre

1)

$$W_A = F \cdot s = 90000 \cdot 6000 = 540 \cdot 10^6 \text{ J} = 150 \text{ kWh}$$

2)

$$t = 10 \text{ min} : v = \frac{s}{t} = \frac{6000}{10 \cdot 60} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 36 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$P = F \cdot v = 90000 \cdot 10 = 900000 \text{ W} = 900 \text{ kW}, \text{ je Motor } 450 \text{ kW}$$

3)

$$\frac{W_A}{\eta_p \cdot \eta_E \cdot \eta_U \cdot \eta_B} = \frac{150}{0.85 \cdot 0.92 \cdot 0.97 \cdot 0.9} = 219.7 \text{ kWh je Fahrt}$$

4)

$$\text{Je Fahrt: Nebenverbraucher: Energiebedarf: } P_{Nv} \cdot t = 200 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 60 = 120 \text{ MJ} = 33.3 \text{ kWh}$$

$$10 \text{ Fahrten: Energieinhalt der Batterie: } W_B = 10 \cdot (219.7 + 33.3) = 2530 \text{ kWh}$$

$$m_B = 2530 \cdot 10^3 \text{ Wh} / 200 \frac{\text{Wh}}{\text{kg}} = 12651 \text{ kg} = 12.6 \text{ t}$$

5)

$$\text{Kurzzeitig: } P_{\max} = 2 \cdot P = 2 \cdot 900 = 1800 \text{ kW}$$

$$P_B = 300 \frac{\text{W}}{\text{kg}} \cdot 12651 \text{ kg} = 3795.3 \text{ kW} = 2.1 \cdot P_{\max} : \text{ Es existiert also eine ausreichende}$$

Batterieleistungsreserve!

6)

Strom aus Wasserkraft: Nahezu CO<sub>2</sub>-frei: Die Fähre ist ohne CO<sub>2</sub>-Erzeugung in Betrieb!

Alternative:

Schiffsdiesel:

$$W'_A = \frac{W_A}{\eta_p} = \frac{150}{0.85} = 176.5 \text{ kWh}, \text{ Nebenbetriebe } W'_B = P_{Nv} \cdot t / \eta_G = 33.3 \text{ kWh} / 0.9 = 37.0 \text{ kWh}$$

$$365 \text{ Tage} \cdot 34 \text{ Fahrten} \cdot (176.5 + 37.0) \text{ kWh} = 2649170 \text{ kWh/a} = 9537012 \text{ MJ/a} = W$$

$$\frac{W}{\eta_{\text{Dieselmotor}} \cdot H} = \frac{9537012 \text{ MJ/a}}{0.4 \cdot 44 \text{ MJ/kg}} = \frac{216750}{0.4} \text{ kg Dieselkraftstoff/a} = 541875.7 \text{ kg/a}$$

$$\text{Kraftstoffbedarf / Jahr: } \frac{541875.7}{0.8} = 677344.6 \text{ Liter}$$

$$\text{CO}_2\text{-Menge/Jahr: } 541875.7 \frac{\text{kg}}{\text{a}} \cdot 3.14 \frac{\text{kg}}{\text{kg}} = 1701490 \text{ kg CO}_2 / \text{a} = 1701.5 \text{ t/a}$$

7)

El. Fährbetrieb: Energiebedarf der Fähre ohne Ladeverluste der Batterie: 3 139 730 kWh/a

$$\text{Mit Ladeverluste: } \frac{3139730}{0.9} = 3488589 \text{ kWh/a}$$

$$\text{Mit Übertragungsverlusten: } 3488589 \text{ kWh/a} \cdot 1.06 = 3697904 \text{ kWh/a}$$

Erzeugte CO<sub>2</sub>-Masse / kWh in den Kraftwerken:

$$3697904 \text{ kWh/a} \cdot 0.35 \text{ kg} = 1294266 \text{ kg CO}_2 / \text{a} = 1294.27 \text{ t CO}_2 / \text{a}$$

Im Vergleich zum Schiffsdieselantrieb:

$$\frac{1294.27}{2016.5} = 0.64 : 36 \% \text{ Reduktion der CO}_2\text{-Erzeugung durch den elektrischen Antrieb!}$$

**Aufgabe R5:** Braunkohlekraftwerk

Ein Braunkohlekraftwerk besteht aus zwei Blöcken, die jeweils den Kessel zur Erzeugung des Wasserdampfs, die Dampfturbinen-Generator-Einheit, den Kühlturm und den Blocktransformator zur Einspeisung in das elektrische Netz umfassen. Der elektrische Wirkungsgrad  $\eta_{el}$  je Block im Nennpunkt als Verhältnis zwischen abgegebener elektrischer Leistung  $P_{ab} = P_{el} = P_N = 935 \text{ MW}$  und zugeführter Leistung  $P_{zu}$  (errechnet aus dem Heizwert der Braunkohle) beträgt 43 %.

1) Wie groß ist der tägliche Bedarf an Rohbraunkohle, umgerechnet in t, bei einem Heizwert von  $H_i = 11 \text{ MJ/kg}$ ?

2) Die Braunkohle ( $\gamma_B = 1.4 \text{ kg/dm}^3$ ) wird auf einem 12 km langen und  $b = 1.5 \text{ m}$  breiten Förderband direkt vom Tagebau-Abbauort zum Kraftwerk befördert. Wie groß ist der Massestrom  $\dot{m}$  in kg/s auf dem Förderband? Wie schnell müsste sich das Förderband bewegen, wenn die Braunkohle  $h = 30 \text{ cm}$  hoch auf dem Förderband liegt? Wie viel Kohlemasse liegt auf dem Förderband? Wie groß ist die Abgabeleistung  $P_{Förder}$  der E-

Maschinen für die Kohlebewegung mit dem Förderband, wenn die Reibungskraft des Bandes 1 % der Gewichtskraft beträgt?

3) Mit der Abwärme der Kessel wird Wasser von 25 °C auf 130 °C bei 25 bar erhitzt, das über eine 15 km lange Heißwasserleitung (Rohrdurchmesser  $d = 1$  m) eine naheliegende Stadt mit Fernwärme mit einer thermischen Leistung von  $P_{th} = 500$  MW versorgt. Wie groß ist der thermische Wirkungsgrad des Kraftwerks  $\eta_{th} = \frac{P_{el} + P_{th}}{P_{zu}}$ ? Wie groß ist der Heißwasserstrom

in Liter / Sekunde? Wie groß ist die Fließgeschwindigkeit  $v$  in m/s und km/h? Warum ist das Wasser auch bei 130° nicht dampfförmig, sondern flüssig (spezifische Wärmekapazität von Wasser  $c = 4187$  J/(kg·K)?

4) Das Kraftwerk ist für eine Betriebszeit im Nennbetrieb von 7500 h/a ausgelegt. Wie groß ist die jährliche Stillstandszeit? Wie viele 3-Personen-Haushalte ( $W_H = 3500$  kWh el. Energie im Jahr) können gleichzeitig versorgt werden? Wie hoch ist dabei der jährliche Bedarf an Braunkohle  $m_B$  des Kraftwerks? Wie lange kann das Kraftwerk betrieben werden, wenn der Kohlevorrat in der Lagerstätte des benachbarten Tagebaus 434 Mt Braunkohle umfasst?

5) Wie viel Gramm CO<sub>2</sub> werden je erzeugter kWh elektrischer Energie in die Atmosphäre abgegeben (Verbrennungsreaktion:  $C + O_2 \rightarrow CO_2 - 394$  kJ/mol,  $1 \text{ mol} = 6.022 \cdot 10^{23}$ ,  $1 m_u = 1.66 \cdot 10^{-27}$  kg, Isotope: <sup>12</sup>C, <sup>16</sup>O). Wie viele t CO<sub>2</sub> sind dies je elektrisch versorgter Person gemäß 4)?

### Aufgabe R5 (Lösung): Braunkohlekraftwerk

1)

$$\text{Erforderliche Leistung: } P_{zu} = \frac{P_{ab}}{\eta_{el}} = \frac{2 \cdot 935 \cdot 10^6}{0.43} = 4348.8 \text{ MW}$$

Energie pro Tag:

$$W'_{zu} = P_{zu} \cdot d = 4348.8 \text{ MW} \cdot 24 \text{ h/d} = 104.37 \text{ GWh/d} = 104.37 \cdot 10^9 \cdot 3600 = 375.74 \cdot 10^{12} \text{ J/d}$$

$$\text{Masse pro Tag: } m' = \frac{W_{zu}}{H_i} = \frac{375.74 \cdot 10^{12}}{11 \cdot 10^6} = 34.16 \cdot 10^6 \text{ kg/d} = 34158 \text{ t/d}$$

2)

$$\text{Massestrom: } \dot{m} = \frac{W_{zu}}{H_i} = \frac{34.16 \cdot 10^6 \text{ kg}}{24 \cdot 3600 \text{ s}} = 395.3 \text{ kg/s}$$

Fördergeschwindigkeit:

$$\dot{m} = \gamma_B \cdot A \cdot v = \gamma_B \cdot b \cdot h \cdot v \Rightarrow v = \frac{\dot{m}}{\gamma_B \cdot b \cdot h} = \frac{395.3}{1.4 \cdot 10^3 \cdot 1.5 \cdot 0.3} = 0.63 \text{ m/s} = 2.3 \text{ km/h}$$

Bewegte Masse:

$$m = \gamma_B \cdot A \cdot L = 1.4 \cdot 10^3 \cdot 0.3 \cdot 1.5 \cdot 12000 = 7560 \text{ t}$$

Antriebsleistung:

$$F_g = m \cdot g = 7560000 \cdot 9.81 = 74.16 \text{ MN}$$

$$F_r = F_g \cdot 0.01 = 741.64 \text{ kN}$$

$$P = F_r \cdot v = 741636 \cdot 0.63 = 467231 \text{ W} = 467.2 \text{ kW}$$

3)

Thermischer Wirkungsgrad:

$$\eta_{th} = \frac{P_{el} + P_{th}}{P_{zu}} = \frac{2 \cdot 935 \cdot 10^6 + 500 \cdot 10^6}{4348.8 \cdot 10^6} = 0.545$$

Fließgeschwindigkeit des heißen Wassers:

$$P_{\text{th}} = \frac{W_{\text{th}}}{t} = \frac{m \cdot c \cdot \Delta \vartheta}{t} = \dot{m} \cdot c \cdot \Delta \vartheta = \gamma_{\text{H}_2\text{O}} \cdot \dot{V} \cdot c \cdot \Delta \vartheta \text{ mit } \Delta \vartheta = 130^\circ\text{C} - 25^\circ\text{C} = 105\text{ K}$$

$$\Rightarrow \dot{V} = \frac{P_{\text{th}}}{\gamma_{\text{H}_2\text{O}} \cdot c \cdot \Delta \vartheta} = \frac{500 \cdot 10^6}{1000 \cdot 4187 \cdot 105} = 1.138 \text{ m}^3/\text{s} = 1138 \text{ l/s}$$

$$\dot{V} = A \cdot v = \frac{d^2 \cdot \pi}{4} \cdot v \Rightarrow v = \frac{\dot{V}}{\frac{d^2 \cdot \pi}{4}} = \frac{1.138}{\frac{1^2 \cdot \pi}{4}} = 1.45 \text{ m/s} = 5.2 \text{ km/h}$$

Aufgrund des hohen Drucks von 25 bar bleibt das Wasser auch bei 130°C flüssig.

4)

Stillstandszeit:

$$1 \text{ a} = 365 \text{ d} = 365 \cdot 24 \text{ h} = 8760 \text{ h} \Rightarrow \Delta t = 8760 - 7500 = 1260 \text{ h} = 52.5 \text{ d}$$

Jährliche elektrische Energiebereitstellung:

$$W_{\text{el}} = 935 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 7500 = 1.4025 \cdot 10^{13} \text{ Wh} = 14.025 \text{ TWh}$$

Energiebedarf eines Haushalts während der Zeit  $t = 7500 \text{ h}$ :

$$W_{\text{H}}' = \frac{7500}{8760} \cdot 3500 \text{ kWh} = 2996.6 \text{ kWh}$$

Versorgte Haushalte während der Zeit  $t = 7500 \text{ h}$  pro Jahr:

$$n = \frac{W_{\text{el}}}{W_{\text{H}}'} = \frac{1.4025 \cdot 10^{13}}{2996.6 \cdot 10^3} = 4.68 \text{ Mio.} \Rightarrow 4.68 \text{ Mio. Haushalte, d.h. 14.04 Mio. Menschen}$$

Braunkohlebedarf:

$$m_{\text{B}} = m' \cdot \frac{7500}{24} = 34158 \cdot 312.5 = 10.67 \cdot 10^6 \text{ t} = 10.67 \text{ Mt}$$

Laufzeit des Kraftwerks:

$$T = \frac{434 \cdot 10^6 \text{ t}}{m_{\text{B}}} = \frac{434 \cdot 10^6}{10.67 \cdot 10^6} = 40.66 \text{ a}$$

Dies entspricht etwa der Lebensdauer der Betriebsmittel.

5)

Thermisch freiwerdende Energie je chemischer Reaktion:

$$\frac{1 \text{ kWh}}{\eta_{\text{el}}} = \frac{1}{0.43} = 2.325 \text{ kWh}_{\text{th}} = 2.325 \cdot 10^3 \cdot 3600 \text{ Ws} = 8.372 \text{ MJ}$$

$n$ : Anzahl erforderlicher chemischer Reaktionen  $\text{C} + \text{O}_2$ :

$$n = \frac{8.372 \cdot 10^6 \text{ J}}{394 \cdot 10^3 \text{ J/mol}} = 21.248 \text{ mol} = 21.248 \cdot 6.023 \cdot 10^{23} = 127.98 \cdot 10^{23}$$

Molekularmasse je chemischer Reaktion:

$$m_{\text{CO}_2} = 12 \cdot m_{\text{u}} + 2 \cdot 16 \cdot m_{\text{u}} = 44 \cdot m_{\text{u}} = 44 \cdot 1.66 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 73.04 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

$\text{CO}_2$ -Masse je  $\text{kWh}_{\text{el}}$ :

$$n \cdot m_{\text{CO}_2} = 127.98 \cdot 10^{23} \cdot 73.04 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 0.935 \text{ kg} = 935 \text{ g}$$

$\text{CO}_2$ -Masse pro Jahr:

$$W_{\text{el}} \cdot n \cdot m_{\text{CO}_2} = 14.025 \cdot 10^9 \text{ kWh} \cdot 0.935 \text{ kg/kWh} = 13.11 \cdot 10^9 \text{ kg}$$

Jährlich werden ca. 13 Mio. t  $\text{CO}_2$  ausgestoßen.

Emissionen pro Kopf (bezogen auf die vom Kraftwerk elektrisch versorgten Personen):

$$m_{\text{CO}_2}' = \frac{13.11 \cdot 10^9 \text{ kg}}{14.04 \cdot 10^6} = 934 \text{ kg / Person}$$

Jährlich werden ca. 934 kg  $\text{CO}_2$  pro elektrisch versorgter Person vom Kraftwerk ausgestoßen.

**Aufgabe R6:** Aufwindkraftwerk

In Äquatornähe wird ein Aufwindkraftwerk installiert (siehe Bild R6.1). Unter einem kreisrunden (Radius  $R = 150 \text{ m}$ ), die Sonnenstrahlen absorbierenden Dach wird die darunter befindliche Luft erwärmt. In der Mitte dieser Dach-Kollektorfläche  $A_k = R^2 \pi$  steht ein hoher Kamin (Radius  $r = 5 \text{ m} < R$ , Höhe  $h = 200 \text{ m}$ ), in dem die um  $\Delta T_L$  erwärmte Luft auf Grund ihrer gegenüber der Außenluft (Luftdichte  $\gamma_L$ , Temperatur  $T_L$ ) geringeren Luftdichte  $\gamma_{Li} < \gamma_L$  nach oben strömt („Aufwind“). Der Aufwindstrom treibt eine Luftturbine und den mit ihr gekuppelten E-Generator an. Die kühlere Außenluft strömt seitlich unter die Kollektorfläche nach, wird unter der Kollektorfläche von der Sonne erwärmt und hält so den Aufwindstrom aufrecht.

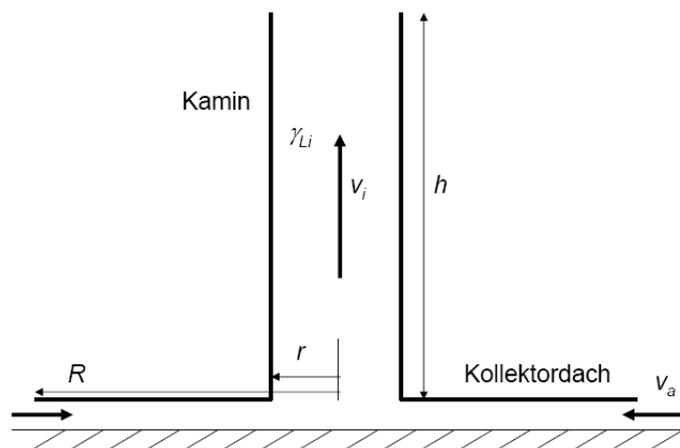


Bild R6.1: Prinzip-Darstellung eines Aufwindkraftwerks

- 1) Bestimmen Sie mit Hilfe der Gleichung für ideale Gase die Luftdichte  $\gamma_{Li}$  in Abhängigkeit von  $\gamma_L$ ,  $T_L$ ,  $\Delta T_L$ !
- 2) Wie hoch ist der statische Druck  $p_i$  im Inneren am Boden des Kamins in Abhängigkeit von  $h$ ,  $\gamma_L$ ,  $T_L$ ,  $\Delta T_L$ ? Bestimmen Sie die statische Druckabsenkung  $\Delta p = p - p_i$  gegenüber dem äußeren Luftdruck  $p$ , die die warme Luft im Kamin nach oben treibt („Kaminwirkung“ jedes Schornsteins!).
- 3) Bestimmen Sie bei 40 % atmosphärischer Reflexion und Absorption der Sonnenstrahlung die eingestrahlte solare Energie  $W$  und mittlere solare Leistung  $P$  pro Tag bei einer äquivalenten Sonnenscheindauer  $T = 6 \text{ h/Tag}$  mit der extraterrestrischen Solarkonstanten  $I_0 = 1329 \text{ W/m}^2$  !
- 4) Geben Sie mit Hilfe der *Bernoulli*-Gleichung und der statischen Druckdifferenz von 2) eine Formel für die Luftgeschwindigkeit  $v_i$  im Kamin an! Die von außen nachströmende Luft hat am Kollektorflächeneingang dabei zunächst noch die Dichte  $\gamma_L$  und eine gegenüber  $v_i$  vernachlässigbare kleine Geschwindigkeit  $v_a \ll v_i$ !
- 5) Wie groß sind bei maximaler Sonneneinstrahlung bei  $\vartheta_L = 35^\circ\text{C}$  (Außenlufttemperatur) und  $v_i = 20 \text{ m/s}$  die Druckdifferenz  $\Delta p = p - p_i$ , die Lufterwärmung  $\Delta T_L$  und die Lufttemperatur  $\vartheta_{Li}$  im Kamin ( $\gamma_L(35^\circ\text{C}) = 1.146 \text{ kg/m}^3$ )?
- 6) Berechnen Sie mit der *Betz*-Formel die dem Aufwind-Luftstrom maximal entziehbare Leistung  $P_{T,max}$  durch die Luftturbine, deren Rotorblatt-Radius  $r' = 0.9 \cdot r$  ist ( $\gamma_L(35^\circ\text{C}) = 1.146 \text{ kg/m}^3$ )! Wie groß ist dabei die Geschwindigkeit  $v_{i2}$  der abströmenden, von der Turbine gebremsten Luft?

7) Bestimmen Sie den Wirkungsgrad  $\eta_{\text{res}}$  des Kraftwerks mit dem Turbinenwirkungsgrad  $\eta_T = 0.85$  und dem Wirkungsgrad der el. Anlagenteile (Generator, Transformator, ...)  $\eta_{\text{el}} = 0.85$  bei maximaler Sonneneinstrahlung!

**Aufgabe R6 (Lösung) : Aufwindkraftwerk**

1)

$$p \cdot V = v_m \cdot R \cdot T, \gamma = m/V \Rightarrow T/V = p/(v_m \cdot R), T \cdot \gamma = T \cdot (m/V) = m \cdot p/(v_m \cdot R)$$

Bei konstantem Luftdruck  $p$  gilt:  $T_L \cdot \gamma_L = \text{konst.}$

Lufterwärmung ändert  $T_L, \gamma_L : d(T_L \cdot \gamma_L) = \gamma_L \cdot dT_L + T_L \cdot d\gamma_L = d(\text{konst.}) = 0$

$$-\frac{dT_L}{T_L} = \frac{d\gamma_L}{\gamma_L} \text{ bzw. bei endlicher Änderung: } -\frac{\Delta T_L}{T_L} = \frac{\Delta \gamma_L}{\gamma_L}$$

$$\text{Mit } \gamma_{Li} = \gamma_L + \Delta \gamma_L \text{ folgt: } \gamma_{Li} = \gamma_L \cdot \left(1 + \frac{\Delta \gamma_L}{\gamma_L}\right) = \gamma_L \cdot \left(1 - \frac{\Delta T_L}{T_L}\right)$$

2)

$$\text{Luftdruck einer Luftsäule (Hohe } h, \text{ Fläche } A): p = \frac{F}{A} = \frac{m \cdot g}{A} = \frac{\gamma \cdot h \cdot A \cdot g}{A} = \gamma \cdot h \cdot g$$

$$p_i = \gamma_{Li} \cdot h \cdot g = \gamma_L \cdot \left(1 - \frac{\Delta T_L}{T_L}\right) \cdot h \cdot g, p - p_i = (\gamma_L - \gamma_{Li}) \cdot h \cdot g = \gamma_L \cdot \frac{\Delta T_L}{T_L} \cdot h \cdot g$$

3)

$$A_{k, \text{eff}} = A_k - r^2 \cdot \pi = (R^2 - r^2) \cdot \pi = (150^2 - 5^2) \cdot \pi = 70607 \text{ m}^2$$

$$W = I_0 \cdot (1 - 0.4) \cdot A_{k, \text{eff}} \cdot T = 1329 \cdot 0.6 \cdot 70607 \cdot 6 \cdot 3600 = 1.216 \cdot 10^{12} \text{ J}$$

$$P = W / d = 1.216 \cdot 10^{12} \text{ J} / (24 \cdot 3600 \text{ s}) = 14.07 \text{ MW}$$

4)

Der Luftdruck  $p_L$  oberhalb des Kamins ist für die Innen- und Außenluft gleich groß!

$$\frac{v_a^2}{2} \cdot \gamma_L + \gamma_L \cdot g \cdot h + p_L = \frac{v_i^2}{2} \cdot \gamma_L + \gamma_{Li} \cdot g \cdot h + p_L, \gamma_L \cdot g \cdot h = \frac{v_i^2}{2} \cdot \gamma_L + \gamma_{Li} \cdot g \cdot h,$$

$$\text{Aus 1): } \frac{\gamma_{Li}}{\gamma_L} - 1 = -\frac{\Delta T_L}{T_L}; \text{ aus 2) } \frac{\Delta T_L}{T_L} = \frac{p - p_i}{\gamma_L}$$

$$\frac{v_i^2}{2} \cdot \gamma_L = (\gamma_L - \gamma_{Li}) \cdot g \cdot h \Rightarrow v_i = \sqrt{\frac{2 \cdot (\gamma_L - \gamma_{Li}) \cdot g \cdot h}{\gamma_L}} = \sqrt{2 \cdot (1 - \gamma_{Li} / \gamma_L) \cdot g \cdot h},$$

$$v_i = \sqrt{2 \cdot g \cdot h \cdot \frac{\Delta T_L}{T_L}} = \sqrt{2 \cdot (p - p_i) / \gamma_L}$$

5)

$$v_i = 20 \text{ m/s} = \sqrt{2 \cdot (p - p_i) / \gamma_L} \Rightarrow p - p_i = 232 \text{ Pa},$$

$$T_L = 273.15 \text{ K} + \vartheta_L = 273.15 + 35 = 308.15 \text{ K}, \Delta T_L = \frac{v_i^2 \cdot T_L}{2 \cdot g \cdot h} = \frac{20^2 \cdot 308.15}{2 \cdot 9.81 \cdot 200} = 31.4 \text{ K},$$

$$\vartheta_{Li} = 21.4 \text{ K} + \vartheta_L = 31.4 + 35 = 66.4 \text{ }^\circ\text{C}$$

6)

$$r' = 0.9 \cdot 5 = 4.5 \text{ m}, A_T = r'^2 \cdot \pi = 4.5^2 \cdot \pi = 63.6 \text{ m}^2,$$

$$P_{T,\max} = \frac{16}{27} \cdot \gamma_L \cdot \frac{A_T \cdot v_i^3}{2} = \frac{16}{27} \cdot 1.146 \cdot \frac{63.6 \cdot 20^3}{2} = 172766 = 172.8 \text{ kW},$$

$$\frac{v_{i2}}{v_i} = \frac{1}{3} \Rightarrow v_{i2} = \frac{20}{3} = 6.67 \text{ m/s}$$

7)

Solare Leistung bei maximaler Sonneneinstrahlung:

$$P_S = \frac{W}{T} = I_0 \cdot (1 - 0.4) \cdot A_{k,\text{eff}} = 1329 \cdot 0.6 \cdot 70607 = 56.3 \text{ MW}$$

$$\eta_{\text{res}} = \frac{P_{T,\max}}{P_S} \cdot \eta_T \cdot \eta_{el} = \frac{172.8 \cdot 10^3}{56.3 \cdot 10^6} \cdot 0.85 \cdot 0.85 = 0.0022 = 0.22\%$$

**Aufgabe R7:** Thermisches Parabolrinnen-Kraftwerk

In Äquatornähe wird auf einer Fläche  $A = 1.3 \text{ km} \times 1.5 \text{ km}$  ein thermisches Solarkraftwerk mit  $z = 20 \text{ 900}$  innen verspiegelten Parabolrinnen (Länge und Kollektorfläche je Rinne  $l = 10 \text{ m}$ ,  $A_p = 15 \text{ m}^2$ ) errichtet. Jede Parabolrinne konzentriert die Sonnenstrahlen auf ein in der Brennpunkt-Linie der Rinne angeordnetes Absorberrohr, in dem ein Synthetiköl fließt, das bei Sonnenhöchststand auf maximal  $\vartheta = 430 \text{ °C}$  erhitzt wird. In einem zentralen Wärmetauscher wird durch das heiße Öl Wasser verdampft. Der  $\vartheta_D = 380 \text{ °C}$  heiße Dampf treibt eine Dampfturbine mit E-Generator bei  $n = 3000 / \text{min}$  zur Stromerzeugung an.

1) Wie groß ist die maximal eingestrahelte solare Leistung  $P_{S,\max}$  auf der Fläche  $A$ ? Berücksichtigen Sie 37 % atmosphärische Reflexion und Absorption der Sonnenstrahlung (Extraterrestrische Solarkonstanten  $I_0 = 1329 \text{ W/m}^2$ )!

2) Bestimmen Sie die Leistung  $P_S$  wie bei 1), jedoch nun genauer mit den Kollektorflächen und einem Kollektorwirkungsgrad 100%! Wie groß ist  $P_S/P_{S,\max}$ ? Wie groß ist die Grundfläche  $A_k$  je Rinne? Der Kollektorwirkungsgrad beträgt tatsächlich 70%! Wie groß ist die dem Wärmetauscher („Verdampfer“) maximal zugeführte Wärmeleistung  $P_{\text{zu,th}}$ ?

3) Der in der Turbine expandierte Dampf wird anschließend bei einer Kühltemperatur  $\vartheta_K = 30 \text{ °C}$  im mit Grundwasser gekühlten Kondensator kondensiert. Wie groß ist die durch die Turbine zur Verfügung stehende mechanische Leistung  $P_m$  maximal?

4) Berechnen Sie die elektrische Maximalleistung  $P_N$  an der Übergabestelle in das 400 kV-Netz mit folgenden maximalen Wirkungsgraden: Wärmetauscher:  $\eta_{WT} = 0.85$ , Turbine:  $\eta_T = 0.85$ , Generator:  $\eta_G = 0.95$ , Transformator:  $\eta_{Tr} = 0.95$ . Der Leistungsbedarf für das Pumpen des Öls im Kreislauf, für das Speisewasser und das Kühlwasser und weiterer Eigenbedarf mindert den Leistungsertrag des Kraftwerks um 15%. Wie groß ist  $\eta_{\text{res}}$  des Kraftwerks, bezogen auf  $P_S$ ?

5) Gegenüber dem Maximalwert von 1) ist die mittlere solare eingestrahelte Leistung am betrachteten Standort um 40% ( $k = 0.4$ ) geringer, bezogen auf die tatsächliche jährliche Sonnenscheindauer  $T_S = 4380 \text{ h}$ . Wie groß sind die mittlere solare eingestrahelte Energie  $w_{\text{av}}$  in kWh je  $\text{m}^2$  p.a. und mit den Wirkungsgraden von 4) der el. Energieertrag  $W_{el}$  p.a.? Berechnen Sie auch die Zahl der Voll-Laststunden  $T$ !

6) Angenommen, der Kondensator ist so aufgebaut, dass das kühlende Grundwasser bei einer Erwärmung auf  $25 \text{ °C}$  vollständig verdunstet (Verdunstungskühlung), wobei die

Verdunstungswärme des Wassers bei 25°C  $Q'_v = 2444 \text{ kJ/kg}$  ist. Wie groß ist die eingesetzte Grundwassermenge  $V$  in  $\text{m}^3$  p.a.?

**Aufgabe R7 (Lösung) :** Thermisches Parabolrinnen-Kraftwerk

1)

$$P_{S,\max} = I_0 \cdot (1 - 0.37) \cdot A = 1329 \cdot 0.63 \cdot 1300 \cdot 1500 = 1.633 \cdot 10^9 \text{ W}$$

2)

$$P_S = I_0 \cdot (1 - 0.37) \cdot z \cdot A_p = 1329 \cdot 0.63 \cdot 20900 \cdot 15 = 0.263 \cdot 10^9 \text{ W},$$

$$P_S / P_{S,\max} = 0.263 / 1.633 = 0.161, \quad A_k = A / z = 1300 \cdot 1500 / 20900 = 93 \text{ m}^2,$$

$$P_{zu,th} = \eta_k \cdot P_S = 0.7 \cdot 0.263 \cdot 10^9 = 184.1 \text{ MW}$$

3)

Maximal mögliche Leistung theoretisch bei 100% Wirkungsgrad der Turbine;

$$T_H = 273.15 \text{ K} + \vartheta_D = 273.15 + 380 = 653.15 \text{ K},$$

$$T_K = 273.15 \text{ K} + \vartheta_K = 273.15 + 30 = 303.15 \text{ K},$$

Max. möglicher thermischer Wirkungsgrad = Carnot-Wirkungsgrad:

$$\eta_C = 1 - T_K / T_H = 1 - 303.15 / 653.15 = 0.536 !$$

$$P_m = \eta_C \cdot P_{zu,th} = 0.536 \cdot 184.1 = 98.67 \text{ MW}$$

4)

$$\eta_{EB} = 1 - 0.15 = 0.85,$$

$$P_N = P_m \cdot \eta_{WT} \cdot \eta_T \cdot \eta_G \cdot \eta_{Tr} \cdot \eta_{EB} = 98.67 \cdot 0.85^2 \cdot 0.95^2 \cdot 0.85 = 54.7 \text{ MW},$$

$$\eta_{res} = P_N / P_S = 54.7 / 263 = 0.208 = 20.8\%$$

5)

$$w_{av} = I_0 \cdot (1 - 0.37) \cdot (1 - k) \cdot T_S = 1329 \cdot 0.63 \cdot 0.6 \cdot 4380 = 2200 \text{ kWh}/(\text{m}^2 \cdot \text{a}),$$

$$W_{av} = w_{av} \cdot z \cdot A_p = 2200 \cdot 20900 \cdot 15 = 689.7 \text{ GWh/a},$$

$$P_{S,av} = W_{av} / T_S = 689.7 / 4380 = 157.47 \text{ MW},$$

$$P_{el,av} = P_{S,av} \cdot \eta_k \cdot \eta_C \cdot \eta_{WT} \cdot \eta_T \cdot \eta_G \cdot \eta_{Tr} \cdot \eta_{EB} = P_{S,av} \cdot \eta_{res} = 157.97 \cdot 0.208 = 32.86 \text{ MW},$$

$$W_{el} = P_{el,av} \cdot T_S = 32.86 \cdot 4380 = 143.44 \text{ GWh},$$

$$T = W_{el} / P_N = 143.44 \cdot 10^9 / (54.7 \cdot 10^6) = 2622 \text{ h}$$

6)

Abwärme im Dampf:  $Q = W_{av} \cdot \eta_k \cdot (1 - \eta_C) = 691.9 \cdot 10^9 \cdot 0.7 \cdot (1 - 0.536) = 224.01 \cdot 10^9 \text{ Wh},$

$$Q = Q'_v \cdot m_{H_2O} \Rightarrow m_{H_2O} = \frac{224.01 \cdot 10^9 \cdot 3600}{2444 \cdot 10^3} = 329.97 \cdot 10^6 \text{ kg},$$

$$V_{H_2O} = m_{H_2O} / \gamma_{H_2O} = \frac{331.02 \cdot 10^6}{10^3} = 329970 \text{ m}^3 \text{ p.a.}$$

**Aufgabe R8:** Solarthermie

In einem solarthermischen Kraftwerk wird Wasser durch Sonneneinstrahlung in Röhren in Parabolspiegelrinnen verdampft. Dieser Satttdampf mit  $\vartheta_1 = 150^\circ\text{C}$  fließt durch die Edelstahlrohre eines Wärmetauschers, um außen vorbei strömendes Brauchwasser zu

Heizzwecken auf  $\vartheta_2 = 70\text{ °C}$  zu erwärmen. Diese Stahlrohre haben einen Innendurchmesser  $d_i = 30\text{ mm}$  und sind  $\delta_{St} = 3\text{ mm}$  dick (Wärmeleitfähigkeit von Edelstahl:  $\lambda_{St} = 46.5\text{ W/(m}\cdot\text{K)}$ ). Der in den Rohren mit der Geschwindigkeit  $v_1$  strömende Dampf überträgt konvektiv seine Wärme auf die innere Oberfläche der Stahlrohre mit einer Wärmeübergangszahl, die bei dieser Geschwindigkeit  $\alpha_{1,Dampf} = 11630\text{ W/(m}^2\cdot\text{K)}$  beträgt. In gleicher Weise erhält das außen mit der Geschwindigkeit  $v_2$  strömende Brauchwasser die Wärme von den Stahlrohräußenoberflächen mit der bei dieser Geschwindigkeit gültigen Wärmeübergangszahl  $\alpha_{2,Wasser} = 4652\text{ W/(m}^2\cdot\text{K)}$ . Das Rohrsystem im Wärmetauscher ist  $l = 500\text{ m}$  lang.

- 1) Wie groß muss die solar eingestrahelte Leistung  $P_{th}$  zumindest sein?
- 2) Wie groß ist die an der Rohrwand des Wärmetauschers resultierende „Wärmedurchgangszahl“  $k = P_{th}/(A \cdot \Delta\vartheta)$  ( $A$ : Rohroberfläche als Mittelwert von Innen- und Außenoberfläche,  $\Delta\vartheta$ : Temperaturdifferenz an der Rohrwand)?
- 3) Bestimmen Sie die zumindest erforderliche Kollektoroberfläche  $A_k$  der Parabolrinnen bei maximal möglicher Sonneneinstrahlung und 30 % direkter Reflexion in der Atmosphäre und keinen Wärmeverlusten im Kraftwerk!
- 4) Berechnen Sie die erforderliche Grundstücksfläche  $A_G$  für das Kraftwerk bei  $A_G/A_k = 3$  in Hektar!
- 5) Der Wärmetauscher wird anstelle der Stahlrohre mit (teureren) Messingrohren bei gleichem Rohr-Innendurchmesser, aber  $\delta = 2\text{ mm}$ ,  $\lambda = 93.04\text{ W/(m}\cdot\text{K)}$  ausgeführt! Um wie viel kann die Grundfläche des Kraftwerks bei gleicher Heizleistung im Brauchwasser verringert werden?

**Aufgabe R8 (Lösung):** Solarthermie

1)

Rohr-Innenoberfläche:  $A_i = d_i \cdot \pi \cdot l = 0.03 \cdot \pi \cdot 500 = 47.1\text{ m}^2$ ,

Rohr-Außenoberfläche:  $A_a = (d_i + 2 \cdot \delta_{St}) \cdot \pi \cdot l = (0.03 + 2 \cdot 0.003) \cdot \pi \cdot 500 = 56.5\text{ m}^2$ ,

$\Delta\vartheta = 150\text{ °C} - 70\text{ °C} = 80\text{ K}$ : Diese Temperaturdifferenz an der Rohrwand wird durch drei Wärmeübergangsabschnitte festgelegt:

(i) Konvektion vom Dampf zur Innen-Rohrwand:  $P_{th} = A_i \cdot \alpha_{1,Dampf} \cdot \Delta\vartheta_{(i)}$ ,

(ii) Wärmeleitung in der Rohrwand:  $P_{th} = A \cdot \lambda_{St} \cdot \Delta\vartheta_{(ii)} / \delta_{St}$ ,  $A = (A_i + A_a) / 2 = 51.8\text{ m}^2$ ,

(iii) Konvektion von der Außen-Rohrwand zum Brauchwasser:  $P_{th} = A_a \cdot \alpha_{2,Wasser} \cdot \Delta\vartheta_{(iii)}$ .

$\Delta\vartheta = \Delta\vartheta_{(i)} + \Delta\vartheta_{(ii)} + \Delta\vartheta_{(iii)}$ ,

$$\Delta\vartheta = \frac{P_{th}}{A_i \cdot \alpha_{1,Dampf}} + \frac{P_{th} \cdot \delta_{St}}{A \cdot \lambda_{St}} + \frac{P_{th}}{A_a \cdot \alpha_{2,Wasser}} \Rightarrow P_{th} = \frac{\Delta\vartheta}{\frac{1}{A_i \cdot \alpha_{1,Dampf}} + \frac{\delta_{St}}{A \cdot \lambda_{St}} + \frac{1}{A_a \cdot \alpha_{2,Wasser}}}$$

$$P_{th} = \frac{80}{\frac{1}{47.1 \cdot 11630} + \frac{0.003}{51.8 \cdot 46.5} + \frac{1}{56.5 \cdot 4652}} = 11635206\text{ W}$$

Die solar eingestrahelte Wärmeleistung muss zumindest 11.6 St MW betragen.

2)

$k = P_{th}/(A \cdot \Delta\vartheta)$ : Serienschaltung von drei Wärmeübergängen:

$$k = \frac{1}{\frac{A}{A_i \cdot \alpha_{1,Dampf}} + \frac{\delta_{St}}{\lambda_{St}} + \frac{A}{A_a \cdot \alpha_{2,Wasser}}} = \frac{P_{th}}{A \cdot \Delta \vartheta} = \frac{11635206}{51.8 \cdot 80} = 2808 \frac{W}{m^2 \cdot K}$$

3)

Maximal mögliche solare Einstrahlung: Extraterrestrische Solarkonstante  $I_0 = 1328 \frac{W}{m^2}$ ,

Reflexion 30 %:  $I = (1 - 0.3) \cdot I_0 = 929.6 \frac{W}{m^2}$ ,

Zumindest erforderliche Kollektorfläche (ideale Parabolrinnen, keine Wärmeverluste zwischen Parabolrinnen und Wärmetauscher):  $A_k = P_{th} / I = 11635206 / 929.6 = 12\,516 \text{ m}^2$

4)

$A_G = 3 \cdot A_k = 3 \cdot 12516 = 37\,548 \text{ m}^2$ , 1 Hektar (ha) = 100 Ar, Ar = 100 m<sup>2</sup>, 1 ha = 10 000 m<sup>2</sup>,

$A_G = 3.76 \text{ ha}$

5)

Rohr-Innenoberfläche bleibt unverändert  $A_i = 47.1 \text{ m}^2$ ,

Rohr-Außenoberfläche:  $A_a = (d_i + 2 \cdot \delta_M) \cdot \pi \cdot l = (0.03 + 2 \cdot 0.002) \cdot \pi \cdot 500 = 53.4 \text{ m}^2$ ,

Mittlere Rohroberfläche:  $A = (A_i + A_a) / 2 = 50.25 \text{ m}^2$

$$P_{th} = \frac{\Delta \vartheta}{\frac{1}{A_i \cdot \alpha_{1,Dampf}} + \frac{\delta_M}{A \cdot \lambda_M} + \frac{1}{A_a \cdot \alpha_{2,Wasser}}} = \frac{80}{\frac{1}{47.1 \cdot 11630} + \frac{0.002}{50.25 \cdot 93.04} + \frac{1}{53.4 \cdot 4652}}$$

$P_{th} = 12\,741\,186 \text{ W}$ .

Für gleiche Brauchwassertemperatur 70 °C und gleiche Heizleistung 11.64 MW (gemäß 1)) kann die Dampftemperatur von 150 °C auf  $70 \text{ °C} + 80 \text{ K} \cdot (11.64 / 12.74) = 143 \text{ K}$  verringert werden. Damit sinkt der Energiebedarf für die Dampferzeugung auf  $143 / 150 = 0.9533$ . In gleichem Maß sinken der Flächenbedarf  $A_k$  bzw.  $A_G$ , nämlich um  $1 - 0.9533 = 0.0467$  bzw. 4.67 %.

### Aufgabe R9: Abgas-Wärmenutzung

In einem Industriebetrieb entstehen pro Stunde produktionsbedingt 20 000 kg Rauchgas, hauptsächlich bestehend aus Kohlenstoffdioxid und Stickoxiden, mit einer Rauchgastemperatur  $\vartheta_2 = 320 \text{ °C}$  und einer spezifischen Wärmekapazität  $c_G = 1040 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$ . Die Rauchgase werden durch einen Wärmetauscher geleitet, der aus Edelstahlrohren besteht, in denen Wasser mit 6000 kg/h fließt. Das Wasser wird durch die thermische Leistung  $P_{th}$ , die den heißen Rauchgasen entzogen wird, von 20°C auf 140°C erwärmt und so die Rauchgas-Abwärme tw. sinnvoll genutzt ( $c_{H_2O} = 4187 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$ ). Der Wärmeübergang vom heißen Rauchgas auf das kältere Wasser ist durch Konvektion im Rauchgas und im Wasser einerseits und andererseits durch Wärmeleitung in den Rohrwänden bestimmt. Dieser Wärmeübergang wird durch die niedrige Wärmeübergangszahl des Rauchgases begrenzt, so dass mit  $A$  (Rohroberfläche des Wärmetauschers) und  $\Delta \vartheta$  (Temperaturdifferenz an der Rohrwand) gilt:  $P_{th} = k \cdot A \cdot \Delta \vartheta$ , mit der resultierenden Wärmedurchgangszahl  $k = 35 \text{ W/(m}^2 \cdot \text{K)}$ .

- 1) Auf welche Temperatur werden die Rauchgase bei ideal verlustfreiem Wärmetauscher abgekühlt?
- 2) Die Temperaturdifferenz  $\Delta\vartheta$  im Wärmetauscher ist am Ort des Rauchgaseintritts  $x = 0$  (Rauchgas ist heiß, Wasser ist kalt) mit  $\Delta\vartheta(x=0)$  groß, am Ort des Rauchgasaustritts  $x = l$  (Rauchgas abgekühlt, Wasser erwärmt) mit  $\Delta\vartheta(x=l)$  kleiner. Wenn Rauchgas (außen) und Wasser (im Rohr) parallel in dieselbe Richtung strömen („Gleichstrom“-Wärmetauscher), ist die mittlere Temperaturdifferenz längs des Rohrs

$$\Delta\vartheta_{av} = \frac{\Delta\vartheta(x=0) - \Delta\vartheta(x=l)}{\ln\left(\frac{\Delta\vartheta(x=0)}{\Delta\vartheta(x=l)}\right)}$$

Berechnen Sie  $\Delta\vartheta_{av}$  und die erforderliche Rohroberfläche  $A$ !

- 3) Das Wasser wird im Wärmetauscher in  $z = 20$  Rohren (mit dem mittleren Rohrdurchmesser  $d = 7$  mm) parallel geführt. Welche Länge  $l$  muss jedes dieser Rohre haben?
- 4) Bestimmen Sie die mittlere Wassergeschwindigkeit  $v$  in einem Rohr ( $\gamma_{\text{H}_2\text{O},20^\circ\text{C}} = 1$  kg/l) bei einer Wassertemperatur von  $20$  °C!
- 5) Für einen guten Wärmeübergang in das Wasser (= hoher Wert  $k$ ) soll die Wasserströmung nicht laminar, sondern turbulent sein ( $\text{Re}_{\text{krit}} = 2320$ ,  $\gamma_{\text{H}_2\text{O},100^\circ\text{C}} = 0.96$  kg/l, kinematische Wasserzähigkeit  $\nu_{\text{H}_2\text{O},100^\circ\text{C}} = 0.3 \cdot 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s). Ist dies hier für Wasser mit einer Temperatur von  $100$  °C der Fall?

**Aufgabe R9 (Lösung):** Abgas-Wärmenutzung

1)

Rauchgaserwärmung:  $\Delta\vartheta_G = 320$  °C –  $\vartheta_{\text{amb}}$ , Umgebungstemperatur:  $\vartheta_{\text{amb}} = 20$  °C

Wassererwärmung:  $\Delta\vartheta_{\text{H}_2\text{O}} = 140$  °C –  $20$  °C =  $120$  K,

Abgekühltes Rauchgas: Erwärmung:  $\Delta\vartheta'_G = \vartheta'_G - \vartheta_{\text{amb}}$ ,

Rauchgas-Wärmeenergie:  $Q_{\text{Gas}} = m_G \cdot c_G \cdot \Delta\vartheta_G$ ,

Wasser-Wärmeenergie:  $Q_{\text{H}_2\text{O}} = m_{\text{H}_2\text{O}} \cdot c_{\text{H}_2\text{O}} \cdot \Delta\vartheta_{\text{H}_2\text{O}}$ ,

Rest-Wärmeenergie im Rauchgas:  $Q_{\text{Gas,r}} = Q_{\text{Gas}} - Q_{\text{H}_2\text{O}} = m_G \cdot c_G \cdot \Delta\vartheta'_G$ ,  $\Delta\vartheta'_G < \Delta\vartheta_G$

$$m_G \cdot c_G \cdot \Delta\vartheta'_G = m_G \cdot c_G \cdot \Delta\vartheta_G - m_{\text{H}_2\text{O}} \cdot c_{\text{H}_2\text{O}} \cdot \Delta\vartheta_{\text{H}_2\text{O}},$$

Je Zeiteinheit:  $\dot{m}_G \cdot c_G \cdot \Delta\vartheta'_G = \dot{m}_G \cdot c_G \cdot \Delta\vartheta_G - \dot{m}_{\text{H}_2\text{O}} \cdot c_{\text{H}_2\text{O}} \cdot \Delta\vartheta_{\text{H}_2\text{O}}$ ,

$$\Delta\vartheta'_G = \Delta\vartheta_G - \frac{\dot{m}_{\text{H}_2\text{O}} \cdot c_{\text{H}_2\text{O}}}{\dot{m}_G \cdot c_G} \cdot \Delta\vartheta_{\text{H}_2\text{O}} \Rightarrow \vartheta'_G = \vartheta_G - \frac{\dot{m}_{\text{H}_2\text{O}} \cdot c_{\text{H}_2\text{O}}}{\dot{m}_G \cdot c_G} \cdot \Delta\vartheta_{\text{H}_2\text{O}},$$

$$\vartheta'_G = 320$$
 °C –  $\frac{6000 \cdot 4187}{20000 \cdot 1040} \cdot 120 = 175$  °C

2)

$x = 0$ :  $\vartheta_G = 320$  °C,  $\vartheta_{\text{H}_2\text{O}} = 20$  °C:  $\Delta\vartheta(x=0) = 320 - 20 = 300$  K,

$x = l$ :  $\vartheta_G = 175$  °C,  $\vartheta_{\text{H}_2\text{O}} = 140$  °C:  $\Delta\vartheta(x=l) = 175 - 140 = 35$  K,

$$\Delta\vartheta_{av} = \frac{\Delta\vartheta(x=0) - \Delta\vartheta(x=l)}{\ln\left(\frac{\Delta\vartheta(x=0)}{\Delta\vartheta(x=l)}\right)} = \frac{300 - 35}{\ln\left(\frac{300}{35}\right)} = 123.3$$
 K,

$$P_{th} = \dot{m}_{H_2O} \cdot c_{H_2O} \cdot \Delta \vartheta_{H_2O} = \frac{6000}{3600} \cdot 4187 \cdot 120 = 837\,400 \text{ W},$$

Serienschaltung von drei Wärmeübergängen:

$$A = \frac{P_{th}}{k \cdot \Delta \vartheta_{av}} = \frac{837400}{35 \cdot 123.3} = 194 \text{ m}^2$$

3)

$$A = z \cdot d \cdot \pi \cdot l \Rightarrow l = \frac{A}{z \cdot d \cdot \pi} = \frac{194}{20 \cdot 0.007 \cdot \pi} = 441 \text{ m}$$

4)

$$\dot{V}_{H_2O} = \dot{m}_{H_2O} / \gamma_{H_2O, 20^\circ C} = \frac{6000 / 3600}{1000} = 1.67 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 / \text{s},$$

$$\dot{V}_{H_2O} / z = \frac{d^2 \pi}{4} \cdot v \Rightarrow v = \frac{1.67 \cdot 10^{-3} / 20}{0.007^2 \cdot \pi / 4} = 2.17 \text{ m/s}$$

5)

$$\dot{V}_{H_2O} = \dot{m}_{H_2O} / \gamma_{H_2O, 100^\circ C} = \frac{6000 / 3600}{960} = 1.74 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 / \text{s},$$

$$\dot{V}_{H_2O} / z = \frac{d^2 \pi}{4} \cdot v \Rightarrow v = \frac{1.74 \cdot 10^{-3} / 20}{0.007^2 \cdot \pi / 4} = 2.26 \text{ m/s}$$

$$Re = v \cdot d / \nu_{H_2O} = 2.26 \cdot 0.007 / (0.3 \cdot 10^{-6}) = 52\,631 > 2320$$

Die Strömung ist turbulent!

### Aufgabe R10: E-Mobility versus Biosprit

In *Deutschland* sind 2020 ca. 45 670 000 Personenkraftwagen (PKW) zugelassen (die meisten mit Verbrennungsmotor-Antrieb), mit denen im Mittel je Fahrzeug 12 700 km Fahrstrecke p. a. zurückgelegt werden. Kraftwagen mit Verbrennungsmotor haben den Vorteil der hohen chemischen Energiedichte des Kraftstoffs, aber den Nachteil des geringen Motorwirkungsgrads von unter 40% im Bestpunkt und als Mittelwert im Fahrspiel „Stadt-/Überland-Fahrt“ unter 20%. Alternative E-Automobile haben den Nachteil der geringen elektrochemischen Energiedichte der Batteriespeicher (z. Zt. zumeist Li-Ionen-Akkus) und langen Akku-Ladezeiten, aber den Vorteil der hohen Wirkungsgrade der elektrischen Antriebskomponenten (meist über 90% im Bestpunkt) und hoher Kurzzeit-Drehmomente. Es ergeben sich folgende typische Energiebedarfe im Fahrspiel für 100 km Fahrstrecke für Mittelklasse-Personenkraftwagen:

a) Benzinmotor, 80 PS:  $v = 6.4 \text{ l}/100 \text{ km}$

(Motorenbenzin: Heizwert  $H_i = 41.8 \text{ MJ/kg}$ , Dichte:  $0.75 \text{ kg/l}$ )

b) Dieselmotor, 110 PS:  $v = 4.9 \text{ l}/100 \text{ km}$

(Dieselkraftstoff: Heizwert  $H_i = 43.0 \text{ MJ/kg}$ , Dichte:  $0.83 \text{ kg/l}$ )

c) Elektroauto, 150 kW (200 PS):  $w = 16 \text{ kWh}/100 \text{ km}$

(Li-Ionen-Akkumulator  $W = 60 \text{ kWh}$ ,  $435 \text{ kg}$ )

1) Berechnen Sie die mögliche Reichweite in km für je einen 55-Liter-Tank für a) und b) im Vergleich zu c) und den zugehörigen Energieumsatz  $W_F$  des Fahrzeugs! Wie groß ist der spezifische Energieumsatz  $W'_F$  je km?

2) Aus Getreide kann durch Fermentierung nachhaltig (=  $\text{CO}_2$ -neutral) Äthylalkohol ( $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$ ), genannt Bio-Ethanol (Heizwert  $H_{i, BE} = 28.8 \text{ MJ/kg}$ , Dichte  $0.785 \text{ kg/l}$ ) hergestellt werden, wobei in *Deutschland* etwa  $v'_{BE} = 2560 \text{ Liter je Hektar und Jahr}$  gewonnen werden

können. Wenn alle PKWs in *Deutschland* (Grundfläche  $A_D = 357\,386\text{ km}^2$ ) von Benzin auf Bio-Ethanol umgerüstet würden: Wie hoch wäre der Anbauflächenbedarf  $A_{BE}$  für das Getreide in  $\text{km}^2$  und in % der deutschen Landfläche? Kommentieren Sie das Ergebnis!

3) Alternativ kann z. B. aus Ölpflanzen ein Ersatztreibstoff für Dieselkraftstoff als Bio-Diesel (z. B. Rapsöl-Methylester, Heizwert  $H_{i, BD} = 37\text{ MJ/kg}$ , Dichte  $0.88\text{ kg/l}$ ) hergestellt werden, wobei in *Deutschland* etwa  $v'_{BD} = 1550$  Liter je Hektar und Jahr gewonnen werden können. Wenn alle PKWs in *Deutschland* von Diesel auf Bio-Diesel umgerüstet würden: Wie hoch wäre der Anbauflächenbedarf  $A_{BD}$  für den Raps in  $\text{km}^2$  und in % der deutschen Landfläche? Kommentieren Sie das Ergebnis!

4) Wir nehmen an: Alle PKW in *Deutschland* werden auf E-Betrieb umgestellt, wobei die für das Fahren nötige elektrische Energie solar mit Photovoltaik gewonnen wird (solare Einstrahlung in *Deutschland* im Mittel  $W_s/A = 900\text{ kWh/m}^2$  p.a.). Diese Energie wird entsprechend gespeichert und mit einem mittleren Wirkungsgrad von  $\eta = 10\%$  von der Solarzelle bis zum E-Antrieb bereitgestellt. Wie groß ist der Netto-Flächenbedarf der Solarzellen in  $\text{km}^2$  und in % der deutschen Landfläche? Kommentieren Sie das Ergebnis!

**Aufgabe R10 (Lösung):** E-Mobility versus Biosprit

1)

a)  $\Delta = V/v = 55/(6.4/100) = 859\text{ km}$ ,  $W_F = 55 \cdot 41.8 \cdot 0.75 = 1724.3\text{ MJ}$

b)  $\Delta = V/v = 55/(4.9/100) = 1122\text{ km}$ ,  $W_F = 55 \cdot 43.0 \cdot 0.83 = 1963.0\text{ MJ}$

c)  $\Delta = W/w = 60/(16/100) = 375\text{ km}$ ,  $W_F = W = 60 \cdot 10^3 \cdot 3600 = 216\text{ MJ}$

a)  $W'_F = 1724.3\text{ MJ}/859\text{ km} = 2\text{ MJ/km}$ ,

b)  $W'_F = 1963\text{ MJ}/1122\text{ km} = 1.75\text{ MJ/km}$ ,

c)  $W'_F = 216\text{ MJ}/375\text{ km} = 0.58\text{ MJ/km}$

2)

Gesamtenergiebedarf im Jahr für das Fahren mit den PKWs in *Deutschland* als Benzin-Fahrzeuge:

$$W_{\text{ges,B}} = 45.67 \cdot 10^6 \cdot 12700 \frac{\text{km}}{\text{a}} \cdot 6.4 \frac{1}{100\text{ km}} \cdot 41.8 \frac{\text{MJ}}{\text{kg}} \cdot 0.75 \frac{\text{kg}}{\text{l}} = 1.163730058 \frac{\text{EJ}}{\text{a}}$$

Volumetrischer Bio-Ethanol-Bedarf je Jahr:

$$V_{BE} = \frac{W_{\text{ges,B}}}{H_{i, BE} \cdot \gamma_{BE}} = \frac{1.163730058\text{ EJ}}{28.8 \frac{\text{MJ}}{\text{kg}} \cdot 0.785 \frac{\text{kg}}{\text{l}}} = 5.147426 \cdot 10^{10}\text{ l}$$

Getreideanbau-Flächenbedarf:

$$A_{BE} = \frac{V_{BE}}{v'_{BE}} = \frac{5.147426 \cdot 10^{10}\text{ l}}{2560 \cdot \frac{1}{10000\text{m}^2}} = 201071.3\text{ km}^2, \quad \frac{A_{BE}}{A_D} = \frac{201071.3\text{ km}^2}{357386\text{ km}^2} = 0.56$$

Mit 56% der deutschen Landfläche als Getreide-Anbaufläche ist die vollständige Bio-Ethanol-Produktion in *Deutschland* nicht sinnvoll möglich. Importe aus dem Ausland (z. B. Brasilien) sind erforderlich. Der ökologische Sinn (Abholzen von Regenwäldern), aber auch der gesellschaftliche Aspekt (Nahrungsmittel als Treibstoff) ist fragwürdig.

3)

Gesamtenergiebedarf im Jahr für das Fahren mit den PKWs in *Deutschland* als Diesel-Fahrzeuge:

$$W_{\text{ges,D}} = 45.67 \cdot 10^6 \cdot 12700 \frac{\text{km}}{\text{a}} \cdot 4.9 \frac{1}{100\text{ km}} \cdot 43.0 \frac{\text{MJ}}{\text{kg}} \cdot 0.83 \frac{\text{kg}}{\text{l}} = 1.014\,3255\text{ EJ}$$

Volumetrischer Bio-Diesel-Bedarf je Jahr:

$$V_{BD} = \frac{W_{ges,D}}{H_{i,BD} \cdot \gamma_{BED}} = \frac{1.014\,3255 \text{ EJ}}{37 \frac{\text{MJ}}{\text{kg}} \cdot 0.88 \frac{\text{kg}}{\text{l}}} = 3.1152.5 \cdot 10^{10} \text{ l}$$

Rapsanbau-Flächenbedarf:

$$A_{BD} = \frac{V_{BD}}{v'_{BD}} = \frac{3.1152.5 \cdot 10^{10} \text{ l}}{1550 \cdot \frac{1}{10000 \text{ m}^2}} = 200983.9 \text{ km}^2, \quad \frac{A_{BE}}{A_D} = \frac{200983.9 \text{ km}^2}{357386 \text{ km}^2} = 0.56.$$

Es ergeben sich dieselben Gesichtspunkte wie bei 2). Zwar ist der Energieverbrauch gegenüber 2) geringer, aber auch der Flächenertrag.

4)

Gesamtenergiebedarf im Jahr für das Fahren mit den PKWs in *Deutschland* als E-Fahrzeuge:

$$W_{ges,E} = 45.67 \cdot 10^6 \cdot 12700 \frac{\text{km}}{\text{a}} \cdot 16 \frac{\text{kWh}}{100 \text{ km}} \cdot 3600 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kWh}} = 0.334\,0852 \text{ EJ},$$

Solarzellen-Flächenbedarf:

$$A_{PV} = \frac{W_{ges,E}}{\frac{W_S}{A} \cdot \eta} = \frac{0.334\,0852 \cdot 10^{18}}{900 \cdot 10^3 \cdot 3600 \cdot 0.1} = 1031.1 \text{ km}^2, \quad \frac{A_{PV}}{A_D} = \frac{1031.1 \text{ km}^2}{357386 \text{ km}^2} = 0.0029$$

Mit 0.29% der deutschen Landfläche als Solarzellenfläche lässt sich der Energiebedarf für einen E-Fahrzeug-PKW-Betrieb in *Deutschland* durch große Solarparks mit ca. 0.8% der deutschen Grundfläche prinzipiell bereitstellen. Allerdings müssten große Speicher einer bestimmten „Komfort“-Größe den volatilen Energieertrag der Sonne „jederzeit“ abrufbar bereitstellen.

### **Aufgabe R11:** Preisvergleich Erdöl vs. Erdgas

1) Der Rohölpreis im Rohstoffhandel betrug im Jahr 2016 ca. 50 US-Dollar je Barrel (US bbl), der Erdgaspreis hingegen ca. 4 US-Dollar je MMBtu. Welche der beiden fossilen Energieträger war bezogen auf den jeweiligen Energieinhalt billiger?

(1 US bbl = 159 l, 1 Btu = 1055 J, 1 MMBtu = 10<sup>6</sup> Btu,  $\gamma_{\text{Öl}} \approx 0.7 \text{ kg/l}$ , Öl:  $H_i = 44 \text{ MJ/kg}$ )

2) Wird bei Erdöl je erzeugter Energiemenge mehr CO<sub>2</sub> erzeugt als bei Erdgasverbrennung?

### **Aufgabe R11 (Lösung):** Preisvergleich Erdöl vs. Erdgas

1)

$$1 \text{ US bbl} = 159 \text{ l} \rightarrow W = 159 \text{ l} \cdot 0.7 \text{ kg/l} \cdot 44 \cdot 10^6 \text{ J/kg} = 4897.2 \cdot 10^6 \text{ J/US bbl},$$

$$1 \text{ MMBtu} = 10^6 \cdot 1055 \text{ J} = 1.055 \cdot 10^9 \text{ J}, \quad 50 \text{ US-Dollar} / 4.8972 \cdot 10^9 \text{ J} = 10.21 \text{ USD/GJ},$$

$$4 \text{ USD/MMBtu} = 4 \text{ USD} / 1.055 \cdot 10^9 \text{ J} = 3.79 \text{ USD/GJ} :$$

Das Erdgas ist je GJ um 63 % billiger.

2)

Erdöl: je CH<sub>2</sub>:  $\text{CH}_2 + 2\text{O}_2 \rightarrow \text{CO}_2 + \text{H}_2\text{O} - 650 \text{ kJ/mol}$ ,

Erdgas:  $\text{CH}_4 + 2\text{O}_2 \rightarrow \text{CO}_2 + 2\text{H}_2\text{O} - 802.4 \text{ kJ/mol}$ ,

Erdöl: 1 CO<sub>2</sub>-Molekül je 650 kJ/mol, Erdgas: 1 CO<sub>2</sub>-Molekül je 802.4 kJ/mol.

Bei der Erdgasverbrennung wird im Mittel um  $100 \cdot \left(1 - \frac{650}{802.4}\right) = 0.19 \cdot 100 = 19\%$  weniger

CO<sub>2</sub> erzeugt als bei der Erdölverbrennung.

**Aufgabe R12:** Preisvergleich Erdöl/Erdgas/Steinkohle

Folgende Handelspreise wurden 2020 im Energiesektor angegeben:

1) 1 Barrel (US bbl) Rohöl 42 USD, Erdgaspreis 4 US-Dollar je 1 MMBtu, 1 Tonne Steinkohle 71 USD. Reihen Sie die drei fossilen Energieträger nach Kosten je Energieinhalt für 1 kWh! Geben Sie die Unterschiede auch in Prozent, bezogen auf den billigsten Energieträger, an!

(1 US bbl = 159 l, 1 Btu = 1055 J, 1 MMBtu =  $10^6$  Btu, 1 kg SKE 29.3 MJ/kg, Öl:  $H_i = 9.9$  kWh/l)

2) Wie viel Gramm CO<sub>2</sub> werden je kWh erzeugt bei der Verbrennung von Erdöl, Erdgas, Steinkohle? Reihen Sie die drei fossilen Energieträger und geben Sie die Unterschiede in Prozent, bezogen auf den Energieträger mit der geringsten CO<sub>2</sub>-Erzeugung, an!

**Aufgabe R12 (Lösung):** Preisvergleich Erdöl/Erdgas/Steinkohle

1)

a) Öl: 1 US bbl = 159 l, 1 Liter Öl kostet  $42000/159 = 26.4$  US cent/l, 1 kWh Energie aus Öl kostet  $(26.4 \text{ US cent/l})/(9.9 \text{ kWh/l}) = 2.67$  US cent/kWh.

b) Erdgas: 1 MMBtu =  $10^6 \cdot 1055 \text{ J} = 1.055 \cdot 10^9 \text{ J} = 293 \text{ kWh}$ ,  
4 USD/MMBtu = 4 USD/293 kWh = 1.37 US cent/kWh,

c) Steinkohle: 1 t „Standard“-Steinkohle hat  $W = 29.3 \text{ GJ/kg}$ ,

$$W = 29.3 \cdot 10^9 \text{ J/kg} = \frac{29.3 \cdot 10^9 \text{ J/kg}}{3.6 \cdot 10^6 \text{ J/kWh}} = 8138 \text{ kWh/kg} ,$$

71 USD/(8138 kWh) = 0.87 US cent/kWh .

Die Reihung von „teuer nach billig“ ist: Erdöl, Erdgas, Steinkohle: 307% / 157% / 100% .

2)

CO<sub>2</sub>: Molmasse:  $\text{CO}_2 = {}^{12}\text{C} + 2 \cdot {}^{16}\text{O} \rightarrow (12 + 2 \cdot 16) \cdot m_u \cdot L' = 0.044 \text{ kg/mol} ,$

a) Erdöl: je CH<sub>2</sub>:  $\text{CH}_2 + 2\text{O}_2 \rightarrow \text{CO}_2 + \text{H}_2\text{O} - 650 \text{ kJ/mol} , \frac{1 \text{ kWh}}{650 \text{ kJ/mol}} \cdot 0.044 \frac{\text{kg}}{\text{mol}} = 244 \text{ g} ,$

b) Erdgas:  $\text{CH}_4 + 2\text{O}_2 \rightarrow \text{CO}_2 + 2\text{H}_2\text{O} - 802.4 \text{ kJ/mol} , \frac{1 \text{ kWh}}{802 \text{ kJ/mol}} \cdot 0.044 \frac{\text{kg}}{\text{mol}} = 197 \text{ g} ,$

c) Steinkohle:  $\text{C} + \text{O}_2 \rightarrow \text{CO}_2 - 394 \text{ kJ/mol} \rightarrow \frac{1 \text{ kWh}}{394 \text{ kJ/mol}} \cdot 0.044 \frac{\text{kg}}{\text{mol}} = 402 \text{ g} .$

Die Reihung von „viel nach wenig“ CO<sub>2</sub> ist: Steinkohle, Erdöl, Erdgas: 204% / 124% / 100% .

**Aufgabe B1:** Bevölkerungswachstum

Tabelle B1.1 zeigt das Wachstum der Weltbevölkerung und darunter zwei logistische Wachstumsfunktionen  $x_1(t)$  und  $x_2(t)$ , die dieses Wachstum beschreiben sollen.

Tabelle B1.1: Wachstum der Weltbevölkerung

Jahr	1804	1927	1960	1974	1987	1999	2005	2017
Menschenanzahl/ $10^9$								
$x(t)$	1	2	3	4	5	6	6.5	7.5
$x_1(t)$	0.045	1.493		4.057	5.0	5.992		7.432
$x_2(t)$	0.201	1.998		4.171	4.993	5.923		7.508

Anzahl der Menschen in Milliarden:  $x(t)$ , Zeit in Jahren:  $t$

$$x_1(t) = \frac{11.5}{1 + 0.893 \cdot e^{-(t-2000)/34.72}}, \quad x_2(t) = \frac{22.1}{1 + 2.68 \cdot e^{-(t-2000)/52.91}}$$

1) Ergänzen Sie in Tab. 1 die vier fehlenden Werte! Welche der beiden Funktionen approximiert das tatsächliche Wachstum besser? Nutzen Sie dazu die mittlere quadratische

Abweichung  $S_1 = \sum_{i=1}^8 (x_i - x_{1i})^2 / 8$  bzw.  $S_2 = \sum_{i=1}^8 (x_i - x_{2i})^2 / 8$ !

2) Welcher maximalen Bevölkerungszahl streben die beiden Wachstumsfunktionen  $x_1(t)$  und  $x_2(t)$  zu? Um wie viel unterscheiden sich die beiden Werte?

3) Wie groß ist gemäß den beiden Wachstumsfunktionen  $x_1(t)$  und  $x_2(t)$  die Weltbevölkerung im Jahr 2100? Um wie viel unterscheiden sich diese beiden Prognosewerte?

4) Wann sind 90% der maximalen Bevölkerungszahl gemäß den beiden Wachstumsfunktionen  $x_1(t)$  und  $x_2(t)$  erreicht?

**Aufgabe B1 (Lösung):** Bevölkerungswachstum

1)

Tabelle B1.2: Wachstum der Weltbevölkerung - ausgefüllt

Jahr	1804	1927	1960	1974	1987	1999	2005	2017
Menschenanzahl/ $10^9$								
$x(t)$	1	2	3	4	5	6	6.5	7.5
$x_1(t)$	0.045	1.493	<b>3.006</b>	4.057	5.0	5.992	<b>6.485</b>	7.432
$x_2(t)$	0.201	1.998	<b>3.295</b>	4.171	4.993	5.923	<b>6.428</b>	7.508

$$S_1 = \left[ (1 - 0.045)^2 + (2 - 1.493)^2 + (3 - 3.006)^2 + (4 - 4.057)^2 + (5 - 5)^2 + (6 - 5.992)^2 + (6.5 - 6.485)^2 + (7.5 - 7.432)^2 \right] / 8 = 0.147$$

$$S_2 = \left[ (1 - 0.201)^2 + (2 - 1.998)^2 + (3 - 3.295)^2 + (4 - 4.171)^2 + (5 - 4.993)^2 + (6 - 5.923)^2 + (6.5 - 6.428)^2 + (7.5 - 7.508)^2 \right] / 8 = 0.0957$$

Wachstumsfunktion  $x_2(t)$  approximiert das tatsächliche Wachstum im Zeitraum 1804 ... 2017 besser als Wachstumsfunktion  $x_1(t)$ .

2)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(t-2000)/34.72} = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{11.5}{1 + 0.893 \cdot e^{-(t-2000)/34.72}} = 11.5,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{22.1}{1 + 2.68 \cdot e^{-(t-2000)/52.91}} = 22.1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) / \lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = 22.1 / 11.5 = 1.92$$

Der Unterschied zwischen beiden Grenzwerten beträgt 92%!

3)

$$x_1(2100) = \frac{11.5}{1 + 0.893 \cdot e^{-(2100-2000)/34.72}} = 10.95,$$

$$x_2(2100) = \frac{22.1}{1 + 2.68 \cdot e^{-(2100-2000)/52.91}} = 15.73, \quad x_2(2100)/x_1(2100) = 15.73/10.95 = 1.44$$

Der Unterschied zwischen beiden Grenzwerten beträgt 44%!

4)

Wachstumsfunktion allgemein: 
$$x(t) = \frac{x_0 \cdot s}{x_0 + e^{-\alpha \cdot (t-t_0)} \cdot (s-x_0)} = \frac{s}{1 + e^{-\alpha \cdot (t-t_0)} \cdot \left(\frac{s}{x_0} - 1\right)},$$

Grenzwert:  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \frac{x_0 \cdot s}{x_0 + 0} = s$ , Zeit  $t^* - t_0 = \tau^*$ , wenn  $0.9 \cdot s$  erreicht sind:

$$0.9 \cdot s = \frac{x_0 \cdot s}{x_0 + e^{-\alpha \cdot \tau^*} \cdot (s-x_0)}, \quad 0.9 \cdot (x_0 + e^{-\alpha \cdot \tau^*} \cdot (s-x_0)) = x_0, \quad e^{-\alpha \cdot \tau^*} = \frac{x_0 \cdot (1-0.9)}{(s-x_0) \cdot 0.9},$$

$$\tau^* = t^* - t_0 = -\frac{\ln\left(\frac{x_0 \cdot 0.1}{(s-x_0) \cdot 0.9}\right)}{\alpha} \Rightarrow t^* = t_0 - \frac{\ln 0.1 - \ln\left(\left(\frac{s}{x_0} - 1\right) \cdot 0.9\right)}{\alpha}$$

Wachstumsfunktion  $x_1(t)$ :  $\frac{s}{x_0} - 1 = 0.893$ ,  $\alpha = 1/34.72$ ,  $t_0 = 2000$  Jahre,

$$t^* = 2000 - 34.72 \cdot (\ln 0.1 - \ln 0.8037) = 2072 \text{ Jahre,}$$

Wachstumsfunktion  $x_2(t)$ :  $\frac{s}{x_0} - 1 = 2.68$ ,  $\alpha = 1/52.91$ ,  $t_0 = 2000$  Jahre,

$$t^* = 2000 - 52.91 \cdot (\ln 0.1 - \ln 2.41) = 2168 \text{ Jahre.}$$

**Aufgabe B2:** Wachstum des Weltenergiebedarfs

Tabelle B2.1 zeigt das Wachstum des Weltenergiebedarfs  $x(t)$  (inklusive aller Umwandlungsverluste), den Energiebedarf pro Person  $y(t)$  und darunter eine logistische Wachstumsfunktion  $y_1(t)$ , die das Wachstum/Person  $y(t)$  näherungsweise beschreibt.

Tabelle B2.1: Wachstum der Weltbevölkerung

Jahr	1930	1960	1973	1990	2000	2015
Weltenergiebedarf/EJ $x(t)$	60	155	256	369	424	540
Energiebedarf/Person/GJ $y(t)$	30	51.7	64	68	69.5	74
$y_1(t)$ / GJ	30	52.5		68		74

Energiebedarf/Person in GJ:  $y_1(t)$ , Zeit in Jahren:  $t$ :

$$y_1(t) = \frac{s}{1 + b \cdot e^{-\alpha \cdot (t-t_0)}} = \frac{78.05}{1 + 0.0994 \cdot e^{-(t-2000)/25.183}}$$

1) Ergänzen Sie in Tab. 1 die zwei fehlenden Werte! Welchem maximalen Energiebedarf/Kopf strebt die Wachstumsfunktion  $y_1(t)$  zu? Wie groß ist dieser Bedarf  $W$  bei

einer maximalen Anzahl der Weltbevölkerung von 13 Mrd. Menschen in EJ und in Relation zu 2015?

2) Wie groß wird der Weltenergiebedarf gemäß  $y_1$  im Jahr 2035 sein (bei dann erwarteten 8.8 Mrd. Menschen)? Vergleichen Sie diesen Wert mit dem Prognosewert 705 EJ der *Shell-Studie 2016!* Diskutieren Sie das Ergebnis!

3) Schätzen Sie den Grenzwert  $W$  von 1) mit einem Sicherheitsaufschlag von 200% als  $W'$  nach oben hin ab! Vergleichen Sie diesen Bedarf mit der von der Sonne jährlich eingestrahlt Energie  $W_S$  (extraterrestrische Solarkonstante  $I_0 = 1.328 \text{ kW/m}^2$ , Erdradius  $r_E = 6.37 \cdot 10^6 \text{ m}$ , 30% direkte Reflexion der Solarstrahlung in der Atmosphäre)!

**Aufgabe B2 (Lösung):** Wachstum des Weltenergiebedarfs

1)

Tabelle B2.2: Wachstum der Weltbevölkerung - ausgefüllt

Jahr	1930	1960	1973	1990	2000	2015
Weltenergiebedarf/EJ $x(t)$	60	155	256	369	424	540
Energiebedarf/Person/GJ $y(t)$	30	51.7	64	68	69.5	74
$y_1(t)$ / GJ	30	52.5	<b>60.5</b>	68	<b>71</b>	74

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{78.05}{1 + 0.0994 \cdot e^{-(t-2000)/25.183}} = 78.05 \text{ GJ/Person}$$

Bei  $13 \cdot 10^9$  Menschen:  $W = 78.05 \cdot 10^9 \cdot 13 \cdot 10^9 = 1014.7 \text{ EJ}$ ,  $W/W_{2015} = 1014.7/540 = 1.88$ : Zunahme um 88%!

2)

$$y_1(t = 2035) = \frac{78.05}{1 + 0.0994 \cdot e^{-(2035-2000)/25.183}} = 76.16 \text{ GJ/Person,}$$

Bei  $8.8 \cdot 10^9$  Menschen:  $W = 76.16 \cdot 10^9 \cdot 8.8 \cdot 10^9 = 670.2 \text{ EJ}$ . Im Vergleich zur *Shell-Studie 2016* um 5% zu niedrig.

Kommentar:

Das tatsächliche Wachstum hängt von mehr als nur drei Parametern ab. So wird die Wachstumsrate  $\alpha$  in der Angabe konstant angenommen  $\alpha = 1/25.183$  pro Jahr. Tatsächlich nimmt sie aber zu, da der spezifische Energiebedarf insgesamt durch z. B. die steigenden Komfortansprüche der Einzelpersonen (Internet jederzeit und überall, Klimatisierung, E-Motorkraft statt Muskelkraft, ...) zunimmt. Insofern ist der Grenzwert von 1) (78.05 GJ/Person) offenbar zu niedrig!

3)

$$W' = 2 \cdot W = 2 \cdot 1014.7 = 2029.4 \text{ EJ}, A_E = r_E^2 \cdot \pi = (6.37 \cdot 10^6)^2 \cdot \pi = 127.476 \cdot 10^{12} \text{ m}^2,$$

$$W_S = 0.7 \cdot I_0 \cdot A_E \cdot T = 0.7 \cdot 1328 \cdot 127.476 \cdot 10^{12} \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 = 3.74 \cdot 10^{24} \text{ J/a,}$$

$$W_S / W' = 3.74 \cdot 10^{24} / (2.0294 \cdot 10^{21}) = 1843$$

Die solare Einstrahlung p.a. beträgt das 1843-fache des erwarteten maximalen jährlichen Energiebedarfs.

**Aufgabe B3** Bevölkerungszuwachs

Das Wachstum der Weltbevölkerung wird näherungsweise durch die logistische Wachstumsfunktion  $x(t)$  beschrieben.

Anzahl der Menschen in Milliarden:  $x(t)$ , Zeit in Jahren:  $t$

$$x(t) = \frac{11.5}{1 + 0.893 \cdot e^{-(t-2000)/34.72}}$$

- 1) Zu welchem Grenzwert strebt die Funktion  $x(t)$  mit wachsender Zeit  $t$ ?
- 2) Leiten Sie die Funktion des jährlichen Bevölkerungszuwachses  $y(t) = dx(t)/dt$  daraus ab!
- 3) Zeigen Sie, dass die maximale Zuwachsrate dann auftritt, wenn die Bevölkerung 50% des Endwerts erreicht hat!
- 4) Vergleichen Sie die tatsächlichen Zuwachswerte (Tabelle 1) mit den Ergebnissen der Formel  $y(t) = dx(t)/dt$  aus 2) gemäß den Tabellenwerten!

Tabelle B3.1: Welt-Bevölkerungszuwachs

Jahr	1930	1960	1980	2015
Zuwachs / Mio. p.a.	20	48	84 (Maximum)	78
$y(t)$				

Zu welchem Zeitpunkt  $t^*$  trat lt. Formel  $y(t)$  gemäß 2) das Maximum  $y_{max}$  auf? Vergleichen Sie mit dem Tabellenwert! Kommentieren Sie das Ergebnis!

**Aufgabe B3 (Lösung):** Bevölkerungszuwachs

1)

Allgemein:  $x(t) = \frac{s}{1 + b \cdot e^{-\alpha \cdot (t-2000)}}$  bzw. mit  $\tau = t - 2000$ :  $x(\tau) = \frac{s}{1 + b \cdot e^{-\alpha \cdot \tau}}$

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} x(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{s}{1 + b \cdot e^{-\alpha \cdot \tau}} = s, \quad x(t \rightarrow \infty) = \frac{11.5}{1 + 0.893 \cdot e^{-(\infty-2000)/34.72}} = 11.5$$

Es werden nach der Formel  $x(t)$  einst 11.5 Mrd. Menschen auf der Erde leben.

2)

$$y(\tau) = dx/d\tau = \frac{\alpha \cdot s \cdot b \cdot e^{-\alpha \cdot \tau}}{(1 + b \cdot e^{-\alpha \cdot \tau})^2} = \frac{\alpha \cdot s \cdot b \cdot e^{-\alpha \cdot \tau}}{1 + 2b \cdot e^{-\alpha \cdot \tau} + b^2 \cdot e^{-2\alpha \cdot \tau}} = \frac{\alpha \cdot s \cdot b}{e^{\alpha \cdot \tau} + 2b + b^2 \cdot e^{-\alpha \cdot \tau}}$$

3)

Maximum der Zuwachsrate:

$$dy(\tau)/d\tau = 0$$

$$dy(\tau)/d\tau = \frac{-\alpha \cdot s \cdot b \cdot (\alpha \cdot e^{\alpha \cdot \tau} - \alpha \cdot b^2 \cdot e^{-\alpha \cdot \tau})}{(e^{\alpha \cdot \tau} + 2b + b^2 \cdot e^{-\alpha \cdot \tau})^2} = 0, \quad e^{\alpha \cdot \tau} = b^2 \cdot e^{-\alpha \cdot \tau}, \quad (e^{\alpha \cdot \tau})^2 = b^2, \quad e^{\alpha \cdot \tau} = b > 0,$$

$$\tau^* = \ln(b)/\alpha, \quad x(\tau^*) = \frac{s}{1 + b \cdot e^{-\alpha \cdot \tau^*}} = \frac{s}{1 + b \cdot e^{-\alpha \cdot \ln(b)/\alpha}} = \frac{s}{1 + b \cdot e^{-\ln b}} = \frac{s}{1 + (b/b)} = \frac{s}{2}$$

4)

$\alpha = 1/34.72$  pro Jahr,  $s = 11.5$  Mrd.,  $b = 0.893$ :

$$y(t) = \frac{\alpha \cdot s \cdot b \cdot e^{-\alpha \cdot (t-t_0)}}{(1 + b \cdot e^{-\alpha \cdot (t-t_0)})^2} = \frac{11.5 \cdot 0.893 \cdot e^{-(t-2000)/34.72} / 34.72}{(1 + 0.893 \cdot e^{-(t-2000)/34.72})^2} = \frac{0.296 \cdot e^{-(t-2000)/34.72}}{(1 + 0.893 \cdot e^{-(t-2000)/34.72})^2},$$

$$\text{z.B.: } y(t) = \frac{0.296 \cdot e^{-(1930-2000)/34.72}}{(1 + 0.893 \cdot e^{-(1930-2000)/34.72})^2} = 0.0374 \text{ Mrd. Menschen p.a.}$$

Tabelle B3.2: Welt-Bevölkerungszuwachs - ausgefüllt

Jahr	1930	1960	1980	2015
Zuwachs / Mio. p.a.	20	48	84	78
$y(t)$ / Mio. p.a.	<b>37.4</b>	<b>64.0</b>	<b>78.6</b>	<b>77.0</b>

$$\tau^* = t^* - t_0 = t^* - 2000 = \ln(b) / \alpha = \ln(0.893) \cdot 34.72 = -3.92, \quad t^* = 2000 - 3.92 = 1996.$$

Die Formel gibt den Zuwachs nur ungenau wieder.

(i) Das Maximum trat lt. Tabelle 1980 auf und nicht erst 1996.

(ii) Die Zuwächse waren im Zweitraum 1960 ... 2015 tatsächlich höher als berechnet.

**Aufgabe P1:** Wasserkraftwerk

Der Damm des Laufwasserkraftwerks (Flusskraftwerk) *Wallsee* an der *Donau* in *Österreich* hat eine Stauhöhe  $H = 9.1$  m. Ein Wasserstrom  $\dot{V} = 2880$  m<sup>3</sup>/s ( $\gamma_{H_2O} = 1000$  kg/m<sup>3</sup>) fließt durch die sechs *Kaplan*-Turbinen. Folgende Wirkungsgrade sind zu beachten: Hydraulischer Wirkungsgrad der Wasserströmung (Reibung in Rohren etc.): 0.95, Turbinenwirkungsgrad: 0.9, Generatorwirkungsgrad: 0.98. Der Kraftwerkseigenbedarf beträgt 3% der erzeugten elektrischen Leistung. Wie groß ist die abgegebene elektrische Wirkleistung  $P_e$  des Kraftwerks und  $P_G$  je Generator?

**Aufgabe P1 (Lösung) :** Wasserkraftwerk

Eigenbedarf entspricht einer Wirkungsgradminderung um 0.97;

Kraftwerkswirkungsgrad:  $\eta_{KW} = 0.95 \cdot 0.9 \cdot 0.98 \cdot 0.97 = 0.81$

Potentielle Energie des gestauten Wassers:  $W_p = m \cdot g \cdot H = \gamma_{H_2O} V \cdot g \cdot H$

Leistung:  $P_{in} = W_p / t = \gamma_{H_2O} \cdot (V/t) \cdot g \cdot H = \gamma_{H_2O} \cdot \dot{V} \cdot g \cdot H$  ( $\dot{V}$  : Durchflussmenge)

Elektrische Leistung:  $P_{out} = P_e = \eta_{KW} \cdot P_{in} = 0.81 \cdot 9.81 \cdot 1000 \cdot \dot{V} \cdot H$

"Faustformel":  $P_e = 7946 \cdot \dot{V} \cdot H \approx 8000 \cdot \dot{V} \cdot H$  ,  $[P_e] = W, [\dot{V}] = m^3 / s, [H] = m$

$P_e = 7946 \cdot 2880 \cdot 9.1 = 208.3$  MW ,  $P_G = 208.3/6 = 34.7$  MW

**Aufgabe P2:** Mischung zweier unterschiedlich warmer Flüssigkeiten

Zwei in zwei Bechern enthaltene unterschiedliche Flüssigkeiten mit den Massen  $M_1, M_2$ , den spezifischen Wärmekapazitäten  $c_1, c_2$  haben die (absoluten) Temperaturen  $T_1$  und  $T_2$ .

1) Wie groß ist nach vollständiger Durchmischung beider Flüssigkeiten (ohne Wärmeabgabe) die sich einstellende (absolute) Temperatur  $T$  des Gemisches (Formel herleiten)?

2) Wir mischen 1 l kaltes Wasser (10°C) mit ½ Liter heißem Wasser (60°C). Wie warm (°C) ist das 1 ½ l-Gemisch?

**Aufgabe P2 (Lösung):** Mischung zweier unterschiedlich warmer Flüssigkeiten

1)

Energieerhaltungssatz im angeschlossenen System:  $U_1 + U_2 = U$  .

$U_1 = c_1 \cdot M_1 \cdot T_1$  ,  $U_2 = c_2 \cdot M_2 \cdot T_2$  ,  $U = c_1 \cdot M_1 \cdot T + c_2 \cdot M_2 \cdot T$  ,

$T = \frac{c_1 \cdot M_1 \cdot T_1 + c_2 \cdot M_2 \cdot T_2}{c_1 \cdot M_1 + c_2 \cdot M_2}$  („Mischungsformel“)

2)

$M_1 = 1$  kg,  $M_2 = 0.5$  kg,  $T_1 = 273.15 + 10 = 283.15$  K,  $T_2 = 273.15 + 60 = 333.15$  K

$T = \frac{c_{H_2O} \cdot M_1 \cdot T_1 + c_{H_2O} \cdot M_2 \cdot T_2}{c_{H_2O} \cdot M_1 + c_{H_2O} \cdot M_2} = \frac{M_1 \cdot T_1 + M_2 \cdot T_2}{M_1 + M_2} = \frac{1 \cdot 283.15 + 0.5 \cdot 333.15}{1 + 0.5} = 299.8$  K

$\vartheta = 299.8 - 273.15 = 26.7$  °C

**Aufgabe P3:** Wärmetransport

1) Die elektrische Isolierung eines geraden ( $l = 380 \text{ mm}$ ) Kupferleiters mit rechteckigem Querschnitt  $h_Q \times b_Q = 69 \times 12.5 \text{ mm}$  hat die Isolierstoffdicke  $d = 2.7 \text{ mm}$ . Wie groß ist der Wärmewiderstand durch den Isolierstoff  $\lambda_{th} = 0.2 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$ ? Verwenden Sie näherungsweise als kühlende Oberfläche  $A$  die Oberfläche des blanken Leiters!

2) Wir betrachten zwei parallele gerade ( $l = 614.8 \text{ mm}$ ) elektrisch isolierte Kupferleiter mit jeweils rechteckigem Querschnitt  $h_Q \times b_Q = 34.5 \times 12.5 \text{ mm}$ , die elektrisch parallel geschaltet sind. Wie groß ist der Wärmewiderstand beider Leiter zur kühleren Luft, wenn diese mit  $v = 12 \text{ m/s} = 43 \text{ km/h}$  vorbei strömt (erzwungene Konvektion)?

3) Von einem  $100^\circ\text{C}$  heißen elektronischen Bauteil soll die Verlustwärme durch ein angebrachtes schwarzes Blech sowohl a) über natürliche Konvektion ( $\alpha = 7 \text{ W/(m}^2\text{K)}$ ) als auch b) über Wärmestrahlung ( $c_s = 5 \cdot 10^{-8} \text{ W/(m}^2\text{K}^4)$ ) an die Umgebungsluft ( $20^\circ\text{C}$ ) abgeführt werden. Wie groß sind die Wärmestromdichten von a) und b)?

**Aufgabe P3 (Lösung):** Wärmetransport

1)

$$\text{Leiteroberfläche } A = 2 \cdot (h_Q + b_Q) \cdot l = 2 \cdot (69 + 12.5) \cdot 380 = 61940 \text{ mm}^2,$$

$$\text{Wärmewiderstand } R_{th} = \frac{d}{\lambda_{th} A} = \frac{0.0027}{0.2 \cdot 0.06194} = \underline{\underline{0.22 \text{ K/W}}}$$

2)

$$\text{Leiteroberfläche } A = 2 \cdot (h_Q + b_Q) \cdot l = 2 \cdot (34.5 + 12.5) \cdot 614.8 = 57791 \text{ mm}^2,$$

$$\text{bewegte Luft über elektrisch isolierter Oberfläche: } \alpha = 8 \cdot v^{3/4} = 8 \cdot 12^{3/4} = 51.6 \text{ W/m}^2\text{K},$$

$$R_{th} = \frac{1}{\alpha A} = \frac{1}{51.6 \cdot 0.057791} = \underline{\underline{0.335 \text{ K/W}}}, \text{ beide Leiter } R_{th,2} = \frac{0.335 \text{ K/W}}{2} = \underline{\underline{0.168 \text{ K/W}}}$$

3)

$$\text{Temperaturdifferenz } \Delta\vartheta = 80 \text{ K}, T_2 = 20 + 273.15 = 293.15 \text{ K}$$

$$T_1 = T_2 + \Delta\vartheta = 293.15 + 80 = 373.15 \text{ K}$$

$$\text{a) } q = \frac{P_{th}}{A} = \alpha \cdot \Delta\vartheta = 7 \cdot 80 = 560 \text{ W/m}^2$$

$$\text{b) } q = \frac{P_{th}}{A} = c_s \cdot (T_1^4 - T_2^4) = 5 \cdot 10^{-8} \cdot (373.15^4 - 293.15^4) = 600.1 \text{ W/m}^2$$

**Aufgabe P4:** Erwärmung durch Verlustleistung

Eine 11 kW-Elektromotor mit der Masse  $m = 76 \text{ kg}$ , der spezifischen Wärmekapazität der überwiegend aus Eisen bestehenden Bauteile  $c = c_{Fe} = 502 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$  und der kühlwirksamen Motoroberfläche (vergrößert durch Kühlrippen)  $A = 0.9 \text{ m}^2$  wird mit einer Kühlluftgeschwindigkeit infolge des rotierenden Motorlüfters  $v = 9 \text{ m/s} = 32 \text{ km/h}$  gekühlt.

1) Wie groß ist die thermische Zeitkonstante des Motors?

2) Wie groß ist die Erwärmung der Motoroberfläche, wenn der Motor 85% Wirkungsgrad aufweist?

**Aufgabe P4 (Lösung):** Erwärmung durch Verlustleistung

1)

$$\text{Lackierte Oberfläche des Motormetallgehäuses: } \alpha = 15v^{2/3} = 15 \cdot 9^{2/3} = 64.9 \text{ W/(m}^2\text{K)},$$

$$T_g = \frac{m \cdot c_{Fe}}{\alpha \cdot A} = \frac{76 \cdot 502}{64.9 \cdot 0.9} = 653s = 10.9 \text{ min}$$

2)

$$P_{out} = 11 \text{ kW}, P_{in} = 11 \text{ kW} / 0.85 = 12.941 \text{ kW}$$

$$\text{Verlustleistung: } P_d = P_{in} - P_{out} = 12.941 - 11 = 1.941 \text{ kW}$$

$$\text{Erwärmung } \Delta \vartheta(t \rightarrow \infty) = \frac{P_d}{\alpha \cdot A} = \frac{1941}{64.9 \cdot 0.9} = 33.2 \text{ K}$$

Umgebungstemperatur 25 °C: Temperatur der Motorgehäuseoberfläche 58.2 °C

**Aufgabe P5:** Abwärme in einem thermischen Kraftwerk

Ein Steinkohlekraftwerk hat eine elektrische Nennleistung  $P_{el,N} = 935 \text{ MW}$ . Der Frischdampf hat einen Druck 265 bar bei 600 °C, der Dampf kondensiert bei 0.03 bar und 25 °C.

1) Wie groß sind der maximal mögliche Wirkungsgrad  $\eta_{th}$  und die zugehörige Abwärmeleistung  $\dot{Q}_{ab}$ ?

2) Tatsächlich hat der Heizkessel einen Wirkungsgrad  $\eta_K = 0.87$ , denn 13 % der Energie gehen großteils durch die warmen Rauchgase verloren. Die Dampfturbine hat einen Wirkungsgrad  $\eta_T = 0.88$ , der Synchrongenerator  $\eta_G = 0.98$ , der Blocktransformator  $\eta_{Tr} = 0.99$ , die Rohrleitungen des Wasserkreislaufs  $\eta_R = 0.97$ , der Eigenbedarf vor allem für die Rauchgaswaschanlage beträgt 3 % von  $P_{el,N}$ . Wie groß sind der elektrische Wirkungsgrad  $\eta_{real}$  und die Abwärmeleistung  $\dot{Q}_{ab,real}$  des Kraftwerks für den Kühlkreislauf, also ohne Rauchgaswärme und Rauchgaswäsche-Energiebedarf?

3) Das Kraftwerk liegt an einem  $b = 130 \text{ m}$  breiten und im Mittel  $t = 10 \text{ m}$  tiefen Fluss, der mit  $v = 7 \text{ km/h}$  fließt! Die Abwärme  $\dot{Q}_{ab,real}$  wird mit  $\vartheta_F = 15^\circ\text{C}$  kaltem, dem Fluss entnommenem Kühlwasser dem Dampfkreislauf im Kondensator als Wärmetauscher entzogen. Wie groß muss der Kühlwasserstrom  $\dot{V}_K$  in Liter / Sekunde sein, wenn er sich um  $\Delta \vartheta_K = 30 \text{ K}$  aufheizen darf? ( $c_{H_2O} = 4185 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$ ,  $\rho_{H_2O} = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ )

4) Diesem Fluss wird das zuvor entnommene, nun erwärmte Kühlwasser wieder zugemischt! Um wie viel Grad  $\Delta \vartheta_F$  erwärmt sich dadurch das Flusswasser?

5) Mit dem erwärmten Kühlwasser sollen alternativ zu 4) großflächig Gewächshäuser zur Ertragssteigerung auf eine Lufttemperatur  $\vartheta_L = 25^\circ\text{C}$  beheizt werden. Dazu werden Rohre in  $d = 1 \text{ m}$  Tiefe im Erdreich unterhalb der Gewächshäuser verlegt, in die das Kühlwasser mit der Temperatur  $\vartheta_{K,ein} = \vartheta_F + \Delta \vartheta_K$  eintritt. Auf welchen Wert  $\vartheta_{K,aus}$  kann das Kühlwasser maximal abgekühlt werden? Wie groß ist dazu der mittlere Wärmestrom  $q$  je  $\text{m}^2$  von den Rohren an die Bodenoberfläche (Boden-Wärmeleitfähigkeit  $\lambda = 0.5 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ )? Wie groß wäre die so beheizbare Fläche  $A$ ? Welche sekundliche Restwärme  $\dot{Q}_{rest}$  führt das Kühlwasser danach dem Fluss zu, und wie groß ist die Flusswassererwärmung?

**Aufgabe P5 (Lösung):** Abwärme in einem thermischen Kraftwerk

1)

Theoretisch maximal möglicher Wirkungsgrad ist der Carnot-Wirkungsgrad:

$$\eta_{th} = \eta_C = 1 - \frac{T_K}{T_H}, T_K = 273.15 + 25 = 298.15 \text{ K}, T_H = 273.15 + 600 = 873.15 \text{ K}$$

$$\eta_{\text{th}} = 1 - \frac{298.15}{873.15} = 0.659 = 65.9\% = \frac{W}{Q_{\text{zu}}} = \frac{\dot{W}}{\dot{Q}_{\text{zu}}} = \frac{P_{\text{el}}}{\dot{Q}_{\text{zu}}},$$

$$\dot{Q}_{\text{zu}} = \frac{P_{\text{el}}}{\eta_{\text{th}}} = \frac{935 \text{ MW}}{0.6585} = 1419.82 \text{ MW}, \quad \dot{Q}_{\text{ab}} = 1419.82 - 935 = 484.82 \text{ MW} = 484.82 \cdot 10^6 \text{ J/s}.$$

2)

$$\text{Eigenbedarfs-Wirkungsgrad: } \eta_{\text{EB}} = \frac{P_{\text{el,N}}}{P_{\text{el,N}} + 0.03 \cdot P_{\text{el,N}}} = \frac{1}{1.03} = 0.97.$$

$$\eta_{\text{real}} = \eta_{\text{th}} \cdot \eta_{\text{K}} \cdot \eta_{\text{T}} \cdot \eta_{\text{G}} \cdot \eta_{\text{Tr}} \cdot \eta_{\text{R}} \cdot \eta_{\text{EB}} = 0.659 \cdot 0.87 \cdot 0.88 \cdot 0.98 \cdot 0.99 \cdot 0.97 \cdot 0.971 = 0.461 = 46.1\%$$

$$\dot{Q}_{\text{zu,real}} = P_{\text{el}} / \eta_{\text{real}} = 935 \text{ MW} / 0.461 = 2028.2 \text{ MW},$$

$$\dot{Q}_{\text{zu,real}} \cdot (1 - 0.13 - 0.03) - P_{\text{el}} = 2028.2 \cdot 0.84 - 935 = \dot{Q}_{\text{ab,real}} = 768.9 \text{ MW}.$$

3)

$$\dot{Q}_{\text{ab,real}} = \dot{V}_{\text{K}} \cdot \gamma_{\text{H}_2\text{O}} \cdot \Delta \vartheta_{\text{K}} \cdot c_{\text{H}_2\text{O}} \rightarrow \dot{V}_{\text{K}} = \frac{768.9484.82 \cdot 10^6}{1000 \cdot 30 \cdot 4185} = 6.12 \text{ m}^3/\text{s} = 6124 \text{ l/s}.$$

4)

$$\text{Fluss-Durchflussmenge vor Kühlwasserentnahme: } \dot{V}_{\text{F}} = b \cdot t \cdot v = 130 \cdot 10 \cdot \frac{7}{3.6} = 2527.8 \text{ m}^3/\text{s},$$

Wärmezufuhr:  $\dot{Q}_{\text{ab,real}} = 768.9 \text{ MW} = \dot{V}_{\text{F}} \cdot \gamma_{\text{H}_2\text{O}} \cdot \Delta \vartheta_{\text{F}} \cdot c_{\text{H}_2\text{O}}$ . Aufheizung des Flusswassers um  $\Delta \vartheta_{\text{F}} = 0.073 \text{ K}$ !

5)

Das Kühlwasser kann maximal auf  $\vartheta_{\text{K,aus}} = \vartheta_{\text{L}} = 25^\circ\text{C}$  abgekühlt werden.

Fourier-Wärmeleitungsgesetz: Wärmestromdichte am Rohreintritt:  $\vartheta_{\text{K,ein}} = 15 + 30 = 45^\circ\text{C}$ .

$$q_{\text{ein}} = \lambda \cdot \frac{\vartheta_{\text{K,ein}} - \vartheta_{\text{L}}}{d} = 0.5 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}} \cdot \frac{45^\circ\text{C} - 25^\circ\text{C}}{1 \text{ m}} = 10 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}. \text{ Am Rohraustritt: } q_{\text{aus}} = 0 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}.$$

Mittlere Wärmestromdichte:  $q = (q_{\text{ein}} + q_{\text{aus}}) / 2 = 5 \text{ W/m}^2$ . Dabei abgegebene Wärme pro Zeit an die Luft in den Gewächshäusern:

$$\Delta \dot{Q} = \dot{V}_{\text{K}} \cdot \gamma_{\text{H}_2\text{O}} \cdot c_{\text{H}_2\text{O}} \cdot (\vartheta_{\text{K,ein}} - \vartheta_{\text{K,aus}}) = 6.12 \cdot 1000 \cdot 4185 \cdot (45 - 25) = 512.24 \text{ MW}.$$

$$q = \frac{\Delta \dot{Q}}{A}, \quad A = \frac{\Delta \dot{Q}}{q} = \frac{512.24 \cdot 10^6 \text{ W}}{5 \text{ W/m}^2} = 102.45 \cdot 10^6 \text{ m}^2 = 102.45 \text{ km}^2!$$

Sekundliche Restwärme  $\dot{Q}_{\text{rest}} = \dot{Q}_{\text{ab,real}} - \Delta \dot{Q} = 768.9 - 512.24 = 256.66 \text{ MW}$ . Wärmezufuhr

im Fluss:  $\dot{Q}_{\text{rest}} = \dot{V}_{\text{F}} \cdot \gamma_{\text{H}_2\text{O}} \cdot \Delta \vartheta_{\text{F}} \cdot c_{\text{H}_2\text{O}}$ . Aufheizung des Flusswassers um  $\Delta \vartheta_{\text{F}} = 0.024 \text{ K}$ !

### Aufgabe P6: Braunkohlekraftwerk 2

In einem Braunkohlekraftwerk ( $P_{\text{el,N}} = 935 \text{ MW}$ ) werden in 24 Stunden ca. 17500 Tonnen Braunkohle ( $H_i = 10 \text{ MJ/kg}$ ) verbrannt, um Dampf zu erzeugen!

1) Wie groß ist der elektrische Wirkungsgrad des Kraftwerks?

2) Wie viele Tonnen Wasserdampf werden im Kessel je Minute aus dem  $20^\circ\text{C}$  warmen

Kondensatwasser erzeugt? (Kesselwirkungsgrad  $\eta_{\text{K}} = 0.85$ ,  $c_{\text{H}_2\text{O}} = 4185 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$ ,

Verdampfungswärme von Wasser bei  $100^\circ\text{C}$ , 1 bar:  $2253 \text{ kJ/kg}$ )

3) Wie groß wäre das Dampfvolumen  $V$ , wenn der Dampf bei 1 bar frei expandieren könnte? Wie groß ist das Dampfvolumen bei einem Druck von 260 bar und  $\vartheta = 600\text{ °C}$  (Wasserdampfvolumen bei 1 bar: 1700 l/kg)?

### Aufgabe P6 (Lösung): Braunkohlekraftwerk 2

1)

$$Q_{\text{zu}} = 17500 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 10^6 = 175 \cdot 10^{12} \text{ J je 24 h!}$$

$$\dot{Q}_{\text{zu}} = 175 \cdot 10^{12} / (24 \cdot 3600) = 2025.5 \text{ MW}$$

$$\eta = \frac{P_{\text{el,N}}}{\dot{Q}_{\text{zu}}} = \frac{935 \text{ MW}}{2025.5 \text{ MW}} = 0.462$$

2)

Aufheizen des Wassers der Masse  $m$  von  $20\text{ °C}$  auf  $100\text{ °C}$ :  $\Delta\vartheta = 80\text{ K}$ :  $Q_1 = m \cdot c_{\text{H}_2\text{O}} \cdot \Delta\vartheta$

Verdampfen des  $100\text{ °C}$  heißen Wassers bei 1 bar:  $Q_2 = m \cdot 2253 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$

Wärmezufuhr je Minute:  $\eta_K \cdot \dot{Q}_{\text{zu}} \cdot 60 \text{ s} = Q = Q_1 + Q_2$

$$0.85 \cdot 2025.5 \cdot 10^6 \cdot 60 = m \cdot (4185 \cdot 80 + 2253 \cdot 10^3) \rightarrow \dot{m} = 39918 \text{ kg/min}$$

$m = 39.918$  Tonnen Wasserdampf pro Minute

3)

Volumina: Wasser: 1 l/kg, Wasserdampf bei 1 bar: 1700 l/kg

$$\dot{V} = 1700 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{kg}} \cdot 39918 \frac{\text{kg}}{\text{min}} = 67861 \frac{\text{m}^3}{\text{min}} \text{ bei } \vartheta = 100\text{ °C}$$

$$p_1 = 1 \text{ bar}, V_1 = 67861 \text{ m}^3, T_1 = 373 \text{ K} (100\text{ °C}),$$

$$p_2 = 260 \text{ bar}, T_2 = 873 \text{ K} (600\text{ °C})$$

$$p \cdot V = \nu_m \cdot R \cdot T = \text{konst.} \Rightarrow \frac{p_1 \cdot V_1}{p_1 \cdot V_1} = \frac{T_1}{T_2} \rightarrow V_2 = \frac{p_1}{p_2} \cdot V_1 \cdot \frac{T_2}{T_1} = \frac{1}{260} \cdot 67861 \cdot \frac{873}{373} = 611 \text{ m}^3$$

### Aufgabe P7: Pelton-Turbine

1) Leiten Sie aus der *Euler*-Drehmomentgleichung das Drehmoment  $M$  einer idealen (verlustfreien) *Pelton*-Turbine in Abhängigkeit von  $v_1 = \text{konst.}$  (konstante Strahlgeschwindigkeit),  $\dot{m}$  (Massestrom) und  $n$  (veränderliche Drehzahl) ab. Stellen Sie den Verlauf  $M(n)$  graphisch dar! Beachten Sie dabei im Nennpunkt  $n = n_N$  die Beziehung  $v_1 = 2 \cdot u$  (Strahlgeschwindigkeit = doppelte Radumfangsgeschwindigkeit). Wie hoch ist  $M(n_{\text{max}})$  für  $n_{\text{max}} = 2 \cdot n_N$ ?

2) Ein Speicherkraftwerk hat eine Fallhöhe von  $h = 2220 \text{ m}$ , mit einem Massendurchfluss des Wassers von  $\dot{m} = 61986 \text{ kg/s}$ . Wie groß ist die Austrittsgeschwindigkeit  $v$  am Ende der Druckrohrleitung?

3) Das Kraftwerk hat drei jeweils sechsdüsige *Pelton*-Turbinen mit einem mittleren Laufraddurchmesser von  $d = 4.65 \text{ m}$ , die drei 14-polige Synchrongeneratoren für das 50 Hz-Netz antreiben. Wie groß sind Nenndrehzahl  $n_N$  und Düsenaustrittsgeschwindigkeit  $v_1$ ? Wie groß sind die Nennleistung  $P_T$  je Turbine und das Nennmoment  $M_N$ ?

4) Zeigen Sie, dass für  $n = n_N$  die Leistung  $P_T$  von  $v_1^3$  abhängt! Verwenden Sie dazu die Beziehung  $\dot{m}_T = \dot{m}/3 = \gamma \cdot A \cdot v_1$ , wobei  $A$  der Strahlquerschnitt aller sechs Düsen je Turbine ist ( $\gamma = 1000 \text{ kg/m}^3$ ). Wie groß ist der Strahldurchmesser  $d_s$  jeder der sechs Wasserstrahlen?

- 5) Geben Sie gemäß 1) die  $M(n)$ -Kennlinie für  $0 \leq n \leq n_{\max}$  maßstäblich an! Geben Sie die allgemeine Formel  $P_T(n)$  an und skizzieren Sie diese maßstäblich! Welche Kurvenformen haben  $M(n)$  und  $P_T(n)$ ?
- 6) Wie groß ist die spezifische Drehzahl  $n_q$  der Turbine?

**Aufgabe P7 (Lösung): Pelton-Turbine**

1)

Euler-Drehmomentgleichung:  $M = \dot{m} \cdot (v_{1u} \cdot r_1 - v_{2u} \cdot r_2)$ , Index u: Umfangsrichtung, Index 1: bezogen auf das Auftreffen auf das Schaufelrad, Index 2: bezogen auf das Ausströmen aus dem Schaufelrad

Für Pelton-Turbine:  $r_1 = r_2 = r$

$\vec{v}_{1u} = v_{1u} \cdot \vec{e}_t$  mit  $|\vec{e}_t| = 1$ , Einheitsvektor tangential zur Strahlrichtung

$\vec{v}_{2u} = v_{2u} \cdot \vec{e}_t$

$\vec{v}_1 = \vec{w}_1 + \vec{u}$ ,  $u = 2\pi \cdot r \cdot n$  mit  $w$ : Relativgeschwindigkeit zwischen Wasserstrahl und Schaufelrad

$\vec{v}_2 = \vec{w}_2 + \vec{u}$ ,  $\vec{w}_1 = -\vec{w}_2$  (verlustfrei, keine Reibung auf Schaufel)

Kraft weist nur tangentiale Komponente auf:

$\vec{v}_1 = \vec{v}_1 \cdot \vec{e}_t = \vec{w}_1 \cdot \vec{e}_t + \vec{u} \cdot \vec{e}_t \Rightarrow v_1 = w_1 + u = v_{1u}$

$\vec{v}_2 = \vec{v}_2 \cdot \vec{e}_t = \vec{w}_2 \cdot \vec{e}_t + \vec{u} \cdot \vec{e}_t = -\vec{w}_1 \cdot \vec{e}_t + \vec{u} \cdot \vec{e}_t \Rightarrow v_2 = -w_1 + u = v_{2u}$

Einsetzen in Drehmomentgleichung:

$M = \dot{m} \cdot (v_{1u} \cdot r_1 - v_{2u} \cdot r_2) = \dot{m} \cdot r \cdot (w_1 + u - (-w_1 + u)) = 2 \cdot \dot{m} \cdot r \cdot w_1 = 2 \cdot \dot{m} \cdot r \cdot (v_1 - u) = 2 \cdot \dot{m} \cdot r \cdot (v_1 - 2\pi \cdot r \cdot n)$

Im Nennpunkt:

$u = v_1 / 2 \Rightarrow M(n_N) = \dot{m} \cdot r \cdot v_1$ ,  $n_{\max} = 2n_N$ ,  $M(n_{\max}) = 0$

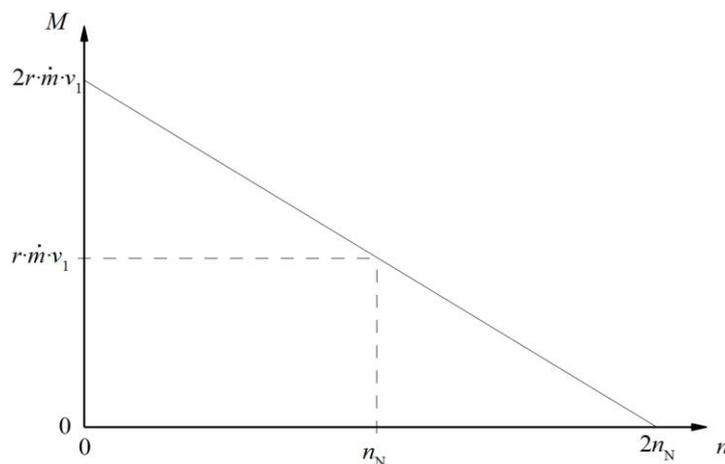


Bild P7.1: Turbinendrehmoment in Abhängigkeit von der Drehzahl

2)

$$P_N = \dot{m} \cdot g \cdot h = 61986 \cdot 9.81 \cdot 2220 = 1350 \text{ MW}$$

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 2220} = 208.7 \text{ m/s} = v_1 \quad \text{aus } W_k = W_p$$

3)

$$\text{Geg.: } 2p = 14, p = 7, f = 50 \text{ Hz}, n = f/p = 7.14 \text{ s}^{-1} = 428.57 \text{ min}^{-1}$$

$$u(n_N) = 2\pi \cdot r \cdot n_N = 2\pi \cdot 4.65 / 2 \cdot 7.14 = 104.35 \text{ m/s}, v_1 = 2 \cdot u = 208.7 \text{ m/s}$$

$$P_T = P_N / 3 = 1350 / 3 = 450 \text{ MW}, M_N = \frac{P_N}{2\pi \cdot n_N} = \frac{450 \cdot 10^6}{2\pi \cdot 7.14} = 10 \text{ MNm}$$

4)

$$n = n_N:$$

$$P_T = 2\pi \cdot n_N \cdot M(n_N) = 2\pi \cdot n_N \cdot \dot{m} \cdot 2 \cdot r \cdot v_1 / 2 = 2\pi \cdot n_N \cdot \dot{m} \cdot r \cdot v_1 = u \cdot \dot{m} \cdot v_1 = (v_1/2) \cdot \gamma \cdot A \cdot v_1 \cdot v_1 = \frac{\gamma}{2} \cdot A \cdot v_1^2$$

$$A = \frac{P_T}{v_1^3 \cdot \gamma} \cdot 2 = \frac{450 \cdot 10^6 \cdot 2}{208.7^3 \cdot 1000} = 0.099 \text{ m}^2$$

$$\frac{A}{6} = \frac{d_s^2 \cdot \pi}{4} \Rightarrow d_s = \sqrt{\frac{4A}{6 \cdot \pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 0.099}{6 \cdot \pi}} = 0.144 \text{ m}$$

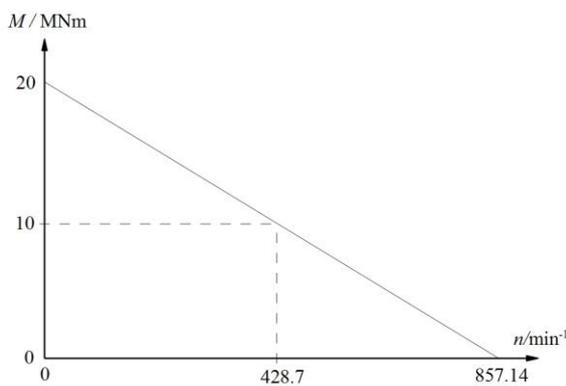
5)

Drehmomentgleichung:

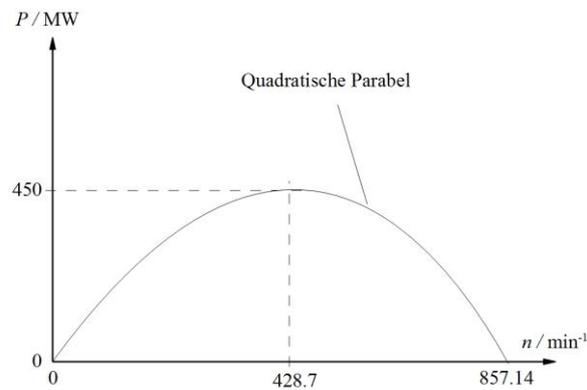
$$M = 2 \cdot \dot{m} \cdot r \cdot (v_1 - 2\pi \cdot r \cdot n)$$

Leistungsgleichung:

$$P_T = 2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot n \cdot \dot{m} \cdot r \cdot (v_1 - 2\pi \cdot r \cdot n) = 2 \cdot \dot{m} \cdot v_1 \cdot \left( 2 \cdot \pi \cdot n \cdot r - \frac{(2\pi \cdot r \cdot n)^2}{v_1} \right)$$



a)



b)

Bild P7.2: a) Turbinendrehmoment in Abhängigkeit von der Drehzahl; b) Turbinenleistung in Abhängigkeit von der Drehzahl

6) Spezifische Drehzahl einer Turbine ( $\dot{V}_0 = 1 \text{ m}^3/\text{s}; h_0 = 1 \text{ m}; h = 2220 \text{ m}$ )

$$\left( \dot{V} = \frac{\dot{m}}{\gamma} \cdot \frac{1}{3} = \frac{61986}{1000 \cdot 3} = 20.662 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \text{ je Turbine} \Rightarrow h/h_0 = 2220; \dot{V}/\dot{V}_0 = 20.662 \right)$$

$$\left( n_q = n \cdot \frac{\sqrt{\dot{V}/\dot{V}_0}}{(h/h_0)^{3/4}} = 428.7 \cdot \frac{\sqrt{20.662}}{2220^{3/4}} = 6.02 \text{ min}^{-1} \right)$$

**Aufgabe P8:** Savonius-Läufer

1) Eine Windturbine nach dem Widerstandsprinzip hat die beiden Widerstandsbeiwerte  $c_{w,1} = 1.3$  und  $c_{w,2} = 0.2$ . Bei welcher Schnellaufzahl  $\lambda^*$  wird der Leistungsbeiwert  $c_p$  maximal? Leiten Sie  $\lambda^*$  zunächst allgemein her und setzen Sie dann die Zahlenwerte ein für  $\lambda^*$  und  $c_p(\lambda^*)$ !  $c_p = \lambda \cdot [c_{w,1} \cdot (1 - \lambda)^2 - c_{w,2} \cdot (1 + \lambda)^2]$

2) Wie groß sind bei einer Windgeschwindigkeit von  $v = 40 \text{ km/h}$  die Umlaufgeschwindigkeit  $u$  und die Relativgeschwindigkeiten  $w_1$  und  $w_2$ ?

- 3) Der mittlere Rotordurchmesser für  $u$  beträgt  $d = 1$  m, daher der Außendurchmesser  $d_a = 2$  m. Die Höhe des Läufers beträgt  $L = 3$  m. Wie groß ist die projizierte Fläche  $A$  je Läuferseite? Wie groß sind Läuferdrehzahl  $n$ , Turbinenleistung  $P$  und Drehmoment  $M$ ? ( $\gamma_{\text{Luft}} = 1.243 \text{ kg/m}^3$  bei  $10^\circ\text{C}$ )
- 4) Wie groß sind die Windkräfte  $F_{w,1}$  und  $F_{w,2}$  auf die beiden Läuferhälften? Überprüfen Sie damit den Drehmomentwert  $M$  aus 3)!
- 5) Wie hoch wäre bei gleicher Windangriffsfläche  $A$  die maximal dem Wind entziehbare Leistung  $P_{\text{max}}$ ? Welchen Anteil davon erreicht man mit dem *Savonius*-Läufer?
- 6) Wie groß muss die Fläche  $A_s$  eines Solar-Panels (Wirkungsgrad  $\eta = 0.18$ ) sein, um dieselbe Leistung  $P$  wie beim *Savonius*-Läufer zu erhalten? Nehmen Sie als mittlere solare Strahlungsleistung je Fläche den Wert  $q = 800 \text{ W/m}^2$  an!

**Aufgabe P8 (Lösung): Savonius-Läufer**

1)

Optimale Schnelllaufzahl:

$$c_p = \lambda \cdot [c_{w,1} \cdot (1 - \lambda)^2 - c_{w,2} \cdot (1 + \lambda)^2] = c_{w,1} \cdot (\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda) - c_{w,2} \cdot (\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda)$$

$$\frac{dc_p}{d\lambda} = c_{w,1} \cdot (3\lambda^2 - 4\lambda + 1) - c_{w,2} \cdot (3\lambda^2 + 4\lambda + 1) = 0$$

$$0 = (3c_{w,1} - 3c_{w,2}) \cdot \lambda^2 + (-4c_{w,1} - 4c_{w,2}) \cdot \lambda + c_{w,1} - c_{w,2}$$

$$0 = \lambda^2 + \underbrace{\frac{-4c_{w,1} - 4c_{w,2}}{3c_{w,1} - 3c_{w,2}}}_p \cdot \lambda + \underbrace{\frac{c_{w,1} - c_{w,2}}{3c_{w,1} - 3c_{w,2}}}_q$$

$$\Rightarrow \lambda_1^*; \lambda_2^* = \frac{2 \cdot (c_{w,1} + c_{w,2})}{3 \cdot (c_{w,1} - c_{w,2})} \pm \sqrt{\left[ \frac{2 \cdot (c_{w,1} + c_{w,2})}{3 \cdot (c_{w,1} - c_{w,2})} \right]^2 - \frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow \lambda_1^*; \lambda_2^* = \frac{2 \cdot 1.5}{3 \cdot 1.1} \pm \sqrt{\left[ \frac{3}{3.3} \right]^2 - \frac{1}{3}} \Rightarrow \lambda_1^* = 1.611; \quad \lambda_2^* = 0.207 \Rightarrow c_p(\lambda_1^*) = -1.415; \quad c_p(\lambda_2^*) = 0.109$$

$$c_p(\lambda_1^*): \text{unphysikalische Lösung} \Rightarrow \text{Lösung: } \lambda^* = 0.207$$

2)

Geschwindigkeiten am Rotor:

$$v = 40 \text{ km/h} = 11.1 \text{ m/s}$$

$$u = \lambda^* \cdot v = 0.207 \cdot 11.1 = 2.3 \text{ m/s}$$

$$w_1 = v - u = 11.1 - 2.3 = 8.8 \text{ m/s} \quad w_2 = v + u = 11.1 + 2.3 = 13.4 \text{ m/s}$$

3)

Betrachtung von Leistung und Drehmoment:

$$A = \frac{d_a}{2} \cdot L = 2 \cdot 3 = 6 \text{ m}^2; \quad u = d \cdot \pi \cdot n \Rightarrow n = \frac{u}{d \cdot \pi} = \frac{2.3}{1 \cdot \pi} = 0.732 \text{ s}^{-1} = 43.93 \text{ min}^{-1}$$

$$P = \frac{\gamma}{2} \cdot A \cdot c_p \cdot v^3 = \frac{1.243}{2} \cdot 6 \cdot 0.109 \cdot 11.1^3 = 555.9 \text{ W}$$

$$M = \frac{P}{2 \cdot \pi \cdot n} = \frac{555.9}{2 \cdot \pi \cdot 0.732} = 120.9 \text{ Nm}$$

4)

Überprüfung der Rechnung aus 3):

$$F_{w,1} = c_{w,1} \cdot \gamma \cdot A \cdot \frac{w_1^2}{2} = 1.3 \cdot 1.243 \cdot 6 \cdot \frac{8.8^2}{2} = 375.4 \text{ N}$$

$$F_{w,2} = c_{w,2} \cdot \gamma \cdot A \cdot \frac{w_2^2}{2} = 0.2 \cdot 1.243 \cdot 6 \cdot \frac{13.4^2}{2} = 133.9 \text{ N}$$

$$P = F_{w,1} \cdot u - F_{w,2} \cdot u = 2\pi \cdot n \cdot M \Rightarrow M = \frac{F_{w,1} \cdot u - F_{w,2} \cdot u}{2\pi \cdot n} = \frac{2.3 \cdot (375.4 - 133.9)}{2\pi \cdot 0.732} = 120.8 \text{ Nm}$$

(vgl. : 120.9 Nm, Rundungsfehler)

5)

Vergleich mit maximalem Leistungsbeiwert:

$$P_{\max} = c_{p,\max} \cdot \frac{\gamma}{2} \cdot A \cdot v^3 = \frac{16}{27} \cdot \frac{1.243}{2} \cdot 6 \cdot 11.1^3 = 3022 \text{ W} \left( c_{p,\max} = \frac{16}{27} \text{ aus Betz'scher Formel} \right)$$

$$c_{p,\max} = \frac{16}{27} \Rightarrow \frac{c_p(\lambda^*)}{c_{p,\max}} = \frac{0.109}{0.593} = 18.4\%$$

6) Vergleich mit Solarpanel:

$$q = 800 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}; \eta = 0.18; P = q \cdot A_s \cdot \eta \Rightarrow A_s = \frac{P}{q \cdot \eta} = \frac{555.9}{800 \cdot 0.18} = 3.86 \text{ m}^2$$

**Aufgabe P9:** Härteprozess

In einer Härterei wird eine Stahlwelle für Hochdrehzahlenwendungen mit einer Masse  $m_{\text{St}} = 150 \text{ kg}$  ( $c_{\text{St}} = 502 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ ) in einem Ofen von  $20 \text{ }^\circ\text{C}$  auf  $\vartheta_{\text{St}} = 1000 \text{ }^\circ\text{C}$  binnen  $T = 1 \text{ h}$  aufgeheizt!

1) Wie groß sind die dafür erforderliche Heizleistung  $P$  und die Wärmeenergie  $W$ , wenn der Ofen einen Wirkungsgrad von  $\eta = 0.85$  hat?

2) Die Härtung der Welle wird durch plötzliches Abkühlen („Abschrecken“) in einem salzhaltigen Wasserbad ( $20 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $V = 1000 \text{ Liter}$ ,  $\gamma_{\text{H}_2\text{O}} = 1 \text{ kg/Liter}$ ,  $c_{\text{H}_2\text{O}} = 4186 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ ) auf  $\vartheta_{\text{St}} = 180 \text{ }^\circ\text{C}$  erreicht! Um wie viel Grad Celsius erwärmt sich dabei das Wasserbad?

**Aufgabe P9 (Lösung):** Härteprozess

1)

$$\Delta\vartheta = 1000 \text{ }^\circ\text{C} - 20 \text{ }^\circ\text{C} = 980 \text{ K}$$

$$\Delta Q = m_{\text{St}} \cdot c_{\text{St}} \cdot \Delta\vartheta = 150 \cdot 502 \cdot 980 = 73\,794 \text{ kJ}$$

$$W = \frac{\Delta Q}{\eta} = \frac{73794000}{0.85} = 86\,816\,471 \text{ J}, \quad P = \frac{W}{T} = \frac{86\,816\,471}{3600} = 24.1 \text{ kW}$$

2)

$$\Delta\vartheta' = 1000 \text{ }^\circ\text{C} - 180 \text{ }^\circ\text{C} = 820 \text{ K}, \quad m_{\text{H}_2\text{O}} = V \cdot \gamma_{\text{H}_2\text{O}} = 1000 \cdot 1 = 1000 \text{ kg}$$

$$\Delta Q' = m_{\text{St}} \cdot c_{\text{St}} \cdot \Delta\vartheta' = m_{\text{H}_2\text{O}} \cdot c_{\text{H}_2\text{O}} \cdot \Delta\vartheta_{\text{H}_2\text{O}} \Rightarrow \Delta\vartheta_{\text{H}_2\text{O}} = \frac{150 \cdot 502 \cdot 820}{1000 \cdot 4186} = 14.75 \text{ K}$$

**Aufgabe P10:** Kühlschranks

Ein Kühlschrank mit 150 l Volumen kühlt den Inhalt auf 5 °C und hat eine elektrische Leistung des Kältekompressors  $P = 150 \text{ W}$ .

- 1) Die Hälfte des Kühlschrank-Innenraums wird mit Lebensmitteln (Raumtemperatur außen 25 °C) befüllt, die näherungsweise zu 100% aus Wasser bestehend angenommen werden (z.B. Obst, Milch,...). Welche Wärmemenge  $\Delta Q$  wird den Lebensmitteln entzogen ( $c_{\text{H}_2\text{O}} = 4186 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$ )?
- 2) Stellen Sie die Wärmebilanz mit  $Q_{\text{zu}}$ ,  $Q_{\text{ab}}$  für das Abkühlen während der Zeit  $t$  (Kompressorarbeit  $W_{\text{zu}} = P \cdot t$ ) für den technischen Kreisprozess auf!
- 3) Nehmen Sie für den Wirkungsgrad  $\eta = Q_{\text{zu}}/W_{\text{zu}}$  den idealen Carnot-Wirkungsgrad für Kühlprozesse an:

$$\eta = \frac{T_{\text{kalt}}}{T_{\text{heiß}} - T_{\text{kalt}}} = \frac{1}{\frac{T_{\text{heiß}}}{T_{\text{kalt}}} - 1}$$

Wie groß ist dieser Wirkungsgrad? Wie lange dauert die Abkühlung  $t$  des Kühlguts?

- 4) Wie lange würde ungekühlt die Zeit  $t'$  zum Aufheizen des Kühlguts von 5 °C auf 25 °C mit der Heizleistung  $P = 150 \text{ W}$  dauern?
- 5) Beim realen Kühlschrank muss die Heißeite (das sind die schwarzen Wärmetauschgitter hinter dem Kühlschrank) deutlich wärmer als die Umgebungstemperatur sein, damit die Wärme an die Umgebungsluft via Konvektion abgegeben werden kann ( $T_{\text{heiß}} \approx 50 \text{ °C}$ ). Wie lange dauert nun der Abkühlvorgang  $t''$ ?

**Aufgabe P10 (Lösung):** Kühlschranks

- 1) Wärmemenge:

$$V = \frac{150}{2} = 75 \text{ l}; m = V_{\text{H}_2\text{O}} \cdot \rho_{\text{H}_2\text{O}} = 75 \cdot 10^{-3} \cdot 1000 = 75 \text{ kg}$$

$$\Delta \vartheta = 25 \text{ °C} - 5 \text{ °C} = 20 \text{ K}$$

$$\Delta Q = m_{\text{H}_2\text{O}} \cdot c_{\text{H}_2\text{O}} \cdot \Delta \vartheta = 75 \cdot 4186 \cdot 20 = 6279 \text{ kJ}$$

- 2) Wärmebilanz:

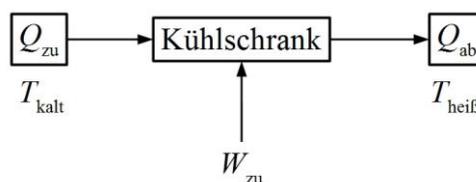


Bild P10.1: Vereinfachtes Energieflussdiagramm eines Kühlschranks

$$Q_{\text{zu}} = \Delta Q$$

$$W_{\text{zu}} = P \cdot t$$

$$Q_{\text{ab}} = \Delta Q + P \cdot t = Q_{\text{zu}} + W_{\text{zu}}$$

- 3)

Kühlprozess:

$$T_{\text{heiß}} = 273 + 25 = 298 \text{ K}, T_{\text{kalt}} = 273 + 5 = 278 \text{ K}$$

$$\eta = \frac{Q_{\text{zu}}}{W_{\text{zu}}} = \frac{\Delta Q}{P \cdot t} = \frac{1}{\frac{T_{\text{heiß}}}{T_{\text{kalt}}} - 1} = \frac{1}{\frac{298}{278} - 1} = 13.9 > 1!$$

$$t = \frac{\Delta Q}{\eta \cdot P} = \frac{6279000}{13.9 \cdot 150} = 3011.5 \text{ s} = 50.19 \text{ min}$$

4)

Aufwärmprozess:

$$t' = \frac{\Delta Q}{P} = \frac{6279000}{150} = 41860 \text{ s} = 697.7 \text{ min} \rightarrow 13.9\text{-fache Zeit}$$

5)

Realer Kühltisch:

$$T_{\text{heiß}} = 273 + 50 = 323 \text{ K}, T_{\text{kalt}} = 273 + 5 = 278 \text{ K}$$

$$\eta' = \frac{Q_{\text{zu}}}{W_{\text{zu}}} = \frac{\Delta Q}{P \cdot t''} = \frac{1}{\frac{T_{\text{heiß}}}{T_{\text{kalt}}} - 1} = \frac{1}{\frac{323}{278} - 1} = 6.18 > 1!$$

$$t'' = \frac{\Delta Q}{\eta' \cdot P} = \frac{6279000}{6.18 \cdot 150} = 6775.9 \text{ s} = 112.93 \text{ min}$$

**Aufgabe P11:** Wärmepumpe 1

Bei der Wärmepumpe wird eine spezielle Flüssigkeit in einem Rohrsystem im Erdreich durch die Erdwärme  $Q_{\text{zu}}$  bei ca.  $10^\circ\text{C}$  verdampft. Im Gebäude wird sie durch Kompression in einem elektrisch betriebenen Kompressor (Arbeit  $W_{\text{zu}}$ ) verflüssigt und gibt die Verdampfungswärme als Nutzwärme  $Q_{\text{ab}} = Q_{\text{zu}} + W_{\text{zu}}$  bei ca.  $35^\circ\text{C}$  z.B. in einer Fußbodenheizung ab. Nach Überströmen aus diesem hohen Druckbereich über ein Drosselventil gelangt die Flüssigkeit im Kreislauf wieder zum Rohrsystem ins Erdreich.

1) Berechnen Sie die absolute Temperatur (*Kelvin*-Skala!) der Heiß- und Kaltseite  $T_{\text{heiß}}$  und  $T_{\text{kalt}}$ !

2) Berechnen Sie den *Carnot*-Wirkungsgrad  $\eta_C$  dieser Kraft-Wärme-Maschine mit

$$\eta_C = \frac{Q_{\text{ab}}}{W_{\text{zu}}} = \frac{T_{\text{heiß}}}{T_{\text{heiß}} - T_{\text{kalt}}}$$

! Wie groß ist die Wärmemenge  $Q_{\text{ab}}$  im Verhältnis zu  $Q_{\text{zu}}$ ?

3) Wie groß ist die Kompressorleistung  $P_{\text{zu}}$  für eine dem Erdreich entzogene, thermische Leistung  $P = 10 \text{ kW} = Q_{\text{zu}}/t$ ?

4) Nehmen Sie im Folgenden an, dass eine reale Wärmepumpe die doppelte Kompressorleistung  $P_{\text{zu}}' = 2 \cdot P_{\text{zu}}$  von 3) benötigt. Welchen Wert der Primärenergie  $W_{\text{zu}}$  in einem thermischen Kraftwerk mit  $\eta_{\text{KW}} = 0.4$  ist für eine Heizenergie  $Q_{\text{ab}} = 1 \text{ kWh}$  bei elektrischen Übertragungsverlusten von 8% erforderlich? Wenn diese Primärenergie z.B. in Form von Erdgas direkt im Gebäude mit 100% Wirkungsgrad verheizt würde: Wäre die Wärmepumpe im Vergleich zu Heizungsarbeit noch energetisch sinnvoll?

**Aufgabe P11 (Lösung):** Wärmepumpe 1

1)

Temperaturen:

$$T_{\text{heiß}} = 273 + 35 = 308 \text{ K}, T_{\text{kalt}} = 273 + 10 = 283 \text{ K}$$

2)

Wirkungsgrad:

$$\eta_C = \frac{1}{1 - \frac{T_{\text{kalt}}}{T_{\text{heiß}}}} = \frac{1}{1 - \frac{283}{308}} = 12.32$$

$$\frac{Q_{\text{ab}}}{Q_{\text{zu}}} = \frac{Q_{\text{ab}} \cdot W_{\text{zu}}}{W_{\text{zu}} \cdot Q_{\text{zu}}} = \eta_C \cdot \frac{W_{\text{zu}}}{Q_{\text{ab}} - W_{\text{zu}}} = \eta_C \cdot \frac{1}{\eta_C - 1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{\eta_C}} = 1.09$$

3)

Leistung:

$$P = \frac{Q_{zu}}{t} \rightarrow P_{zu} = \frac{W_{zu}}{t}; \frac{P}{P_{zu}} = \frac{Q_{zu}}{W_{zu}} = \frac{T_{kalt}}{T_{heiß} - T_{kalt}} = \frac{1}{\frac{T_{heiß}}{T_{kalt}} - 1} = \frac{1}{\frac{308}{283} - 1} = 11.32$$

$$P_{zu} = \frac{P}{\frac{Q_{zu}}{W_{zu}}} = \frac{10000}{11.32} = 883.392 \text{ W}$$

4)

Vergleich mit thermischem Kraftwerk:

$$Q_{ab} = 1 \text{ kWh}; Q_{zu} = \frac{Q_{ab}}{\frac{Q_{ab}}{Q_{zu}}} = \frac{1}{1.09} = 0.92 \text{ kWh}$$

$$W_{zu} = Q_{ab} - Q_{zu} = 1 - 0.92 = 0.081 \text{ kWh} = P_{zu} \cdot t; P_{zu}' = 2 \cdot P_{zu}$$

$$W_{zu}' = 2 \cdot W_{zu} = 2 \cdot 0.081 = 0.162 \text{ kWh}$$

$$\eta_{\ddot{u}} = 1 - 0.08 = 0.92$$

$$W = \frac{W_{zu}'}{\eta_{\ddot{u}} \cdot \eta_{KW}} = \frac{0.162}{0.92 \cdot 0.4} = 0.44 \text{ kWh Primärenergie je 1 kWh Heizenergie}$$

$$W = 0.44 \text{ kWh} < Q_{ab} = 1 \text{ kWh} :$$

Die Wärmepumpe liefert bei gleichem Primärenergiebedarf  $W = 0.44 \text{ kWh}$  eine höhere Heizenergie ( $1 \text{ kWh} > 0.44 \text{ kWh}$ ) und ist somit energetisch günstiger als das direkte Verheizen des Primärenergieträgers bei 100 % Wirkungsgrad, da sowohl die Kompressorenergie als auch die Erdwärme genutzt werden.

### Aufgabe P12: Wärmepumpe 2

Eine Stadt mit  $z = 10000$  Haushalten (40000 Einwohner) soll zentral durch eine große Wärmepumpe mit Heizwärme  $Q_{ab}$  über ein Heißwasser-Fernwärme-Rohrleitungssystem versorgt werden. Als Wärmesponder  $Q_{zu}$  ist der durch die Stadt mit  $v = 5 \text{ km/h}$  fließende Fluss (Flussbreite/ -tiefe:  $50 \text{ m/1 m}$ ) vorgesehen, dessen Wassertemperatur im Winter im Mittel  $8 \text{ °C}$  ist. Eine spezielle Flüssigkeit wird durch Rohre im Flusswasser geleitet und verdampft bei  $8 \text{ °C}$ . Danach wird sie durch einen Kompressor unter Druck verflüssigt (Arbeit  $W_{zu}$ ). Sie gibt ihre Kondensationswärme  $Q_{ab} = W_{zu} + Q_{ab}$  in einem Wärmetauscher an das Fernwärme-Wasser bei  $88 \text{ °C}$  ab und wird nach Druckreduzierung durch ein Drosselventil wieder in das Rohrsystem im Fluss gepumpt.

1) Wie groß ist das Verhältnis  $\eta_C = Q_{ab}/W_{zu} = T_{heiß} / (T_{heiß} - T_{kalt})$  ? Je kW Kompressorleistung werden wie viele kW Heizleistung erzielt?

2) Wie groß ist die Wärmeleistung  $P_{th}$  des Flusses, wenn dieser auf  $4 \text{ °C}$  abgekühlt wird ( $c_{H2O} = 4186 \text{ J/(kg·K)}$ )?

3) Ein Haushalt verbrauchte mit konventioneller Ölheizung während der Heizperiode von sieben Monaten á 30 Tagen  $V_{\ddot{o}l} = 5000 \text{ l}$  Heizöl ( $\gamma_{\ddot{o}l} = 0.9 \text{ kg/l}$ ; Heizwert:  $H_0 = 3.5 \cdot 10^7 \text{ J/kg}$ ). Wie groß ist der Wärmebedarf  $Q_{th}$  der Stadt je Heizperiode und wie groß die mittlere Heizleistung  $P_{th}$  (Wirkungsgrad der Ölheizung idealisiert 100%)?

4) Wie groß ist die erforderliche Kompressorleistung  $P_K$ , um gemäß 3) die Stadt mit der Wärmepumpe zu beheizen? Um wie viel  $\text{°C}$  muss der Fluss abgekühlt werden, um die Stadt zu beheizen?

5) Wie groß ist die Einsparung an Primärenergie mit der Wärmepumpe, wenn die elektrische Energie für den Kompressor von einem thermischen Kraftwerk ( $\eta_{KW} = 40\%$ ) mit Übertragungsverlusten von 8% bereitgestellt wird?

**Aufgabe P12 (Lösung):** Wärmepumpe 2

1)

Heizleistung

$$T_{\text{heiß}} = 273 + 88 = 361 \text{ K}, T_{\text{kalt}} = 273 + 8 = 281 \text{ K}$$

$$\eta_C = \frac{Q_{\text{ab}}}{W_{\text{zu}}} = \frac{T_{\text{heiß}}}{T_{\text{heiß}} - T_{\text{kalt}}} = \frac{361}{361 - 281} = 4.51$$

$$Q_{\text{ab}} = \eta_C \cdot W_{\text{zu}} = 4.51 \cdot W_{\text{zu}}$$

$$\frac{Q_{\text{ab}}}{t} = P_{\text{ab}} = 4.51 \cdot \frac{W_{\text{zu}}}{t} = 4.51 \cdot P$$

→  $P = 1 \text{ kW}$  Kompressorleistung je  $P_{\text{ab}} = 4.51 \text{ kW}$  abgegebener Heizleistung

2)

Prozessleistung:

$$\dot{V} = A \cdot v = 50 \cdot 1 \cdot \frac{5}{3.6} = 69.44 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\frac{m_{\text{H}_2\text{O}}}{t} = \dot{m}_{\text{H}_2\text{O}} = \gamma_{\text{H}_2\text{O}} \cdot \dot{V}_{\text{H}_2\text{O}} = 1000 \cdot 69.44 = 69.44 \cdot 10^3 \text{ kg/s}$$

$$\frac{Q_{\text{zu}}}{t} = \frac{m_{\text{H}_2\text{O}}}{t} \cdot c_{\text{H}_2\text{O}} \cdot \Delta g = P_{\text{zu,Fluss}} = 69.44 \cdot 10^3 \cdot 4186 \cdot 4 = 1162.77 \cdot 10^6 \text{ W}$$

3)

Wärmemenge der Stadt:

$$Q_{\text{th}} = V_{\text{Öl}} \cdot \gamma_{\text{Öl}} \cdot H_0 \cdot z = 5000 \cdot 0.9 \cdot 3.5 \cdot 10^7 \cdot 10^4 = 1.575 \cdot 10^{15} \text{ J} = 1.575 \text{ PJ}$$

$$z = 10000; T = 7 \cdot 30 \cdot 24 \cdot 3600 = 18144000 \text{ s}$$

$$P_{\text{th}} = \frac{Q_{\text{th}}}{T} = \frac{1.575 \cdot 10^{15}}{18.144 \cdot 10^6} = 86.806 \cdot 10^6 \text{ W}$$

4)

Abkühlung des Flusses:

$$P_K = \frac{P_{\text{th}}}{P_{\text{ab}} / P} = \frac{86.806 \cdot 10^6}{4.51/1} = 19.235 \cdot 10^6 \text{ W} = 19.2 \text{ MW}$$

$$P_{\text{Fluss}} = P_{\text{th}} \cdot \frac{3.51}{4.51} = 67.57 \cdot 10^6 \text{ W}$$

$$\Delta g' = \frac{P_{\text{Fluss}}}{P_{\text{zu,Fluss}}} \cdot \Delta g = \frac{67.571 \cdot 10^6}{1162.77 \cdot 10^6} \cdot 4 = 0.23 \text{ K}$$

→ Abkühlung von  $8^\circ\text{C}$  auf  $7.77^\circ\text{C}$

5)

Einsparung an Primärenergie:

$$\eta_{\text{ü}} = 1 - 0.08 = 0.92$$

$$\frac{P_K}{\eta_{\text{ü}} \cdot \eta_{\text{KW}}} = \frac{19.235 \cdot 10^6}{0.92 \cdot 0.4} = 52.269 \cdot 10^6 \text{ W im Vergleich zu } 86.806 \cdot 10^6 \text{ W}$$

$$\text{Einsparung an Primärenergie: } \frac{52.269 - 86.806}{86.806} = -39.79\%$$

**Aufgabe P13:** Stirling-Maschine

Eine Stirling-Maschine soll als Motor für einen autonomen Grundwasser-Pumpenantrieb in einem sonnenreichen, aber entlegenen Gebiet in Äquatornähe arbeiten. Das in der Maschine befindliche Arbeitsgas wird auf der Heißeite durch einen das Sonnenlicht konzentrierenden

Parabolspiegel auf  $\vartheta_H = 170^\circ\text{C}$  aufgeheizt. An der Kaltseite herrscht die Umgebungstemperatur  $\vartheta_K = 35^\circ\text{C}$ .

- 1) Wie groß ist der maximal mögliche Wirkungsgrad  $\eta_{\max}$  einer idealen *Stirling*-Maschine bei der Umsetzung der Wärmeenergie in mechanische Arbeit?
- 2) Die reale *Stirling*-Maschine hat auf Grund der Reibungs- und Wärmeverluste einen um den Faktor 3 geringeren Wirkungsgrad  $\eta$ . Welche Wärmeleistung  $P_{\text{th}}$  muss der Maschine zugeführt werden, damit für die Pumpenleistung  $P_P = 10\text{ kW}$  zur Verfügung stehen?
- 3) Berechnen Sie vereinfacht die Fläche  $A$  und den Durchmesser  $D$  des Parabolspiegels mit der extraterrestrischen Solarkonstante  $I_0 = 1328\text{ W/m}^2$  und 30 % Reflexion der solaren Einstrahlung in der Atmosphäre!
- 4) Eine ähnliche *Stirling*-Maschine soll in einem Labor als Kältemaschine ein Bad aus flüssigem Stickstoff (Siedetemperatur bei Normal-Luftdruck 77.15 K) kalt halten. In diesem Kältebad (Kryostat) befindet sich ein Versuchstransformator mit supraleitenden Spulen, deren ohmscher Widerstand bei 77 K verschwindend klein ist. Infolge des Transformator-Wechselstrombetriebs treten aber Wirbelströme in den Supraleiter-Spulen auf, die gemeinsam mit dem von außen aus der Umgebung eintretenden Wärmefluss die Wärmeleistung  $P_{\text{th}} = 550\text{ W}$  im Stickstoffbad verursachen. Diese Wärmeleistung soll durch die *Stirling*-Maschine über deren mechanische Antriebsleistung  $P$  von  $T_K = 77.15\text{ K}$  auf die Heißeite (Umgebungstemperatur)  $\vartheta_H = 25^\circ\text{C}$  befördert werden. Wie groß ist dafür der ideale *Carnot*-Wirkungsgrad  $\eta_{\text{C,KWM}} = P_{\text{th}} / P$  und die (ideale) Kompressorleistung  $P$ ? Bestimmen Sie auch die um den Faktor 3 größere reale Kompressorleistung  $P'$  und den realen Wirkungsgrad  $\eta_{\text{KWM}}!$

### Aufgabe P13 (Lösung): Stirling-Maschine

1)

$$T_K = \vartheta_K + 273.15\text{ K} = (35 + 273.15)\text{ K} = 308.15\text{ K},$$

$$T_H = \vartheta_H + 273.15\text{ K} = (170 + 273.15)\text{ K} = 443.15\text{ K},$$

Wärme-Kraft-Maschine (WKM):

Idealer maximal möglicher Wirkungsgrad = *Carnot*-Wirkungsgrad:

$$\eta_{\max} = \eta_{\text{C}} = 1 - \frac{T_K}{T_H} = 1 - \frac{308.15}{443.15} = 0.3046 = 30.46\%,$$

2)

$$\eta = \eta_{\text{C}} / 3 = 0.3046 / 3 = 10.15\%, \quad P_{\text{th}} = P_P / \eta = 10000 / 0.1015 = 98522\text{ W}$$

3)

$$\text{Direkte Reflexion: } 30\% \Rightarrow I = I_0 \cdot (1 - 0.3) = 1328 \cdot 0.7 = 929.6\text{ W/m}^2,$$

$$A = P_{\text{th}} / I = 98522 / 929.6 = 106\text{ m}^2 = D^2 \cdot \pi / 4, \quad D = \sqrt{4 \cdot A / \pi} = \sqrt{4 \cdot 106 / \pi} = 11.6\text{ m}$$

4)

$$\text{Kraft-Wärme-Maschine (KWM): } \eta_{\text{C,KWM}} = P_{\text{th}} / P = (P_{\text{th}} \cdot t) / (P \cdot t) = Q_{\text{zu}} / W_{\text{zu}},$$

Auf der Kaltseite bei  $T_K = 77.15\text{ K}$ :

Wärmeabfuhr aus dem Bad = der *Stirling*-Maschine zugeführte Wärmemenge  $Q_{\text{zu}} \sim T_K$ ,

Auf der Heißeite bei  $T_H = \vartheta_H + 273.15\text{ K} = (25 + 273.15)\text{ K} = 298.15\text{ K}$ :

Wärmeabfuhr aus der der *Stirling*-Maschine an die Umgebung: Wärmemenge  $Q_{\text{ab}} \sim T_H$ .

Theoretisch maximal möglich ist der *Carnot*-Wirkungsgrad („Idealzustand“).

$$\eta_{C, \text{KWM}} = \frac{Q_{\text{zu}}}{W_{\text{zu}}} = \frac{Q_{\text{zu}}}{Q_{\text{ab}} - Q_{\text{zu}}} = \frac{T_{\text{K}}}{T_{\text{H}} - T_{\text{K}}} = \frac{77.15}{298.15 - 77.15} = 0.349,$$

Erforderliche mechanische Antriebsleistung für die *Stirling*-Maschine:

Idealzustand:  $P = P_{\text{th}} / \eta_{C, \text{KWM}} = 550 / 0.349 = 1576 \text{ W}$ ,

Realer Zustand:  $P' = 3P = 3 \cdot 1576 = 4728 \text{ W}$ ,  $\eta_{\text{KWM}} = P_{\text{th}} / P' = 550 / 4728 = 0.1163 = 11.63\%$

**Aufgabe P14:** Wärmepumpe 3

Das Erdreich eines Gartens eines Einfamilienhauses dient im Winter mit z. B. 7 °C Bodentemperatur als Wärmequelle (Erdwärme) für eine Niedrigtemperaturheizung (57 °C) z. B. als Fußbodenheizung im Haus.

- 1) Wie groß ist die ideale „Leistungszahl“  $\eta_{C, \text{WP}}$  ( $\text{COP}_C$ ) der Wärmepumpe?
- 2) Die reale Wärmepumpe benötigt die doppelte mechanische Antriebsleistung als Kompressorleistung! Bestimmen Sie die reale „Leistungszahl“  $\text{COP}$ ! Das Wievielfache der aufgebrauchten Antriebsleistung  $P$  steht als Heizleistung  $P_{\text{H}}$  zur Verfügung?
- 3) Die elektrische Leistung für den E-Motor des mechanischen Antriebs der Wärmepumpe (Kompressor) wird in einem Kohle-Kraftwerk ( $\eta_{\text{KW}} = 0.42$ ) zentral erzeugt und mit 8 % Übertragungsverlusten zur Wärmepumpe übertragen. Wie groß ist der erforderliche Primärenergieeinsatz  $W_{\text{prim}}$  der Kohle je kWh Heizenergie? Ist es energetisch günstiger, die Kohle ( $W_{\text{prim}}$ ) direkt als Heizenergie im Einfamilienhaus (bei einem Heizungswirkungsgrad  $\eta_{\text{Heiz}} = 95 \%$ ) anstelle der Wärmepumpe einzusetzen?

**Aufgabe P14 (Lösung):** Wärmepumpe 3

1)

$$T_{\text{K}} = \vartheta_{\text{K}} + 273.15 \text{ K} = (7 + 273.15) \text{ K} = 280.15 \text{ K},$$

$$T_{\text{H}} = \vartheta_{\text{H}} + 273.15 \text{ K} = (57 + 273.15) \text{ K} = 330.15 \text{ K},$$

Wärmepumpe (WP):

Auf der Kaltseite bei  $T_{\text{K}} = 280.15 \text{ K}$  :

Wärmeabfuhr aus dem Erdreich = der Wärmepumpe zugeführte Wärmemenge  $Q_{\text{zu}} \sim T_{\text{K}}$ ,

Auf der Heißseite bei  $T_{\text{H}} = 330.15 \text{ K}$  :

Wärmeabfuhr aus der Wärmepumpe an die Heizung: Wärmemenge  $Q_{\text{ab}} \sim T_{\text{H}}$ .

Idealer maximal möglicher Wirkungsgrad = *Carnot*-Wirkungsgrad:

$$\eta_{C, \text{WP}} = \text{COP}_C = \frac{Q_{\text{ab}}}{W_{\text{zu}}} = \frac{Q_{\text{ab}}}{Q_{\text{ab}} - Q_{\text{zu}}} = \frac{T_{\text{H}}}{T_{\text{H}} - T_{\text{K}}} = \frac{330.15}{330.15 - 280.15} = 6.6 > 1!,$$

2)

$$W_{\text{zu, real}} = 2W_{\text{zu}} : \text{COP} = \frac{Q_{\text{ab}}}{W_{\text{zu, real}}} = \frac{Q_{\text{ab}}}{2W_{\text{zu}}} = \text{COP}_C / 2 = 3.3.$$

$$P = W_{\text{E}} / t, P_{\text{H}} = Q_{\text{ab}} / t = 3.3 \cdot P$$

Es steht das 3.3-fache der mechanischen Leistung  $P$  als Heizleistung  $P_{\text{H}}$  zur Verfügung, da sowohl Antriebsenergie als auch Erdwärme für die Heizungswärme nutzbar sind!

3)

Heizenergie:  $Q_{\text{ab}} = \text{COP} \cdot W_{\text{zu, real}}$ , Übertragungsverluste: 8 %:  $\eta_{\text{ii}} = 1 - 0.8 = 0.92$ ,

$$W_{\text{prim}} = W_{\text{zu, real}} / (\eta_{\text{KW}} \cdot \eta_{\text{ii}}),$$

$$\frac{W_{\text{prim}}}{Q_{\text{ab}}} = \frac{W_{\text{zu,real}}}{Q_{\text{ab}} \cdot \eta_{\text{KW}} \cdot \eta_{\text{ü}}} = \frac{Q_{\text{ab}}}{\text{COP} \cdot \eta_{\text{KW}} \cdot \eta_{\text{ü}}} \cdot \frac{1}{Q_{\text{ab}}} = \frac{1}{\text{COP} \cdot \eta_{\text{KW}} \cdot \eta_{\text{ü}}} = \frac{1}{3.3 \cdot 0.42 \cdot 0.92} = 0.784,$$

$$Q_{\text{Heiz}} = \eta_{\text{Heiz}} \cdot W_{\text{prim}} = 0.95 \cdot 0.784 \cdot Q_{\text{ab}} = 0.745 \cdot Q_{\text{ab}} < Q_{\text{ab}}$$

Nein, es ist nicht energetisch günstiger,  $W_{\text{prim}}$  direkt zu verheizen, sondern die Wärmepumpe zu benutzen!

**Aufgabe P15:** Kolbenverdichter

In einem energietechnischen Labor wird für Versuche zur optimalen Flambildung bei der Verbrennung von Müll zur Energieerzeugung Druckluft mit 3 bar Überdruck benötigt. Diese Druckluft wird mit einem einstufigen Kolbenverdichter je Stunde aus  $1000 \text{ m}^3$  Umgebungsluft (diese hat Normalbedingungen: 1013 mbar, 20 °C) erzeugt. Der Zylinderraum des Kolbenverdichters wird mit einer Wassermantelkühlung so gekühlt, dass die Temperatur der Luft bei der Kompression konstant bleibt (= isotherme Verdichtung).

- 1) Bestimmen Sie die theoretisch aufzuwendende Verdichterleistung  $P$  eines idealen Verdichters!
- 2) Wie groß ist die nötige Kühlwassermenge  $\dot{V}_{\text{H}_2\text{O}}$  in l/s, wenn es sich, ausgehend von einer Eintrittstemperatur  $\vartheta_{\text{H}_2\text{O}} = 20 \text{ °C}$ , um  $\Delta\vartheta_{\text{H}_2\text{O}} = 20 \text{ K}$  erwärmt ( $c_{\text{H}_2\text{O}} = 4186 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ ,  $\gamma_{\text{H}_2\text{O}} = 1 \text{ kg/l}$ )?
- 3) Wie groß wäre die Verdichterleistung  $P_{\text{ad}}$  bei ideal adiabatischer Verdichtung infolge eines ideal thermisch isolierten Verdichterzylinders ( $\kappa_{\text{Luft}} = 1.4$ )? Bestimmen Sie die prozentuale Änderung  $P_{\text{ad}}/P$  !

**Aufgabe P15 (Lösung):** Kolbenverdichter

1)

Luft wird als ideales Gas betrachtet:  $p \cdot V = \nu_m \cdot R \cdot T$ ,

Luftzustand vor der Kompression (Index 1):  $p_1, V_1, T_1$

Luftzustand nach der Kompression (Index 2):  $p_2, V_2, T_2$ , wobei  $T_1 = T_2$

$$p_1 = 1.013 \text{ bar}, \Delta p = 3.0 \text{ bar}, p_2 = p_1 + \Delta p = 1.013 + 3.0 = 4.013 \text{ bar}, \dot{V}_1 = 1000 \text{ m}^3/\text{h},$$

$$T = \text{konst.} : \frac{p_1 \cdot V_1}{p_2 \cdot V_2} = \frac{\nu_m \cdot R \cdot T_1}{\nu_m \cdot R \cdot T_2} = \frac{T_1}{T_2} = 1 \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{p_2}{p_1}$$

Kapitel P2: Isotherme Kompressionsarbeit = Technische Arbeit  $W_t$  für  $p_1 \rightarrow p_2 > p_1$ :

$$W_t = - \int_{p_1}^{p_2} V \cdot dp = -p_1 V_1 \cdot \int_{p_1}^{p_2} (1/p) \cdot dV = -p_1 V_1 \cdot \ln(p) \Big|_{p_1}^{p_2} = -p_1 V_1 \cdot \ln(p_2 / p_1) = p_1 V_1 \cdot \ln(p_1 / p_2)$$

Isotherme Kompressionsleistung:  $P = dW_t / dt = \dot{W}_t = p_1 \dot{V}_1 \cdot \ln(p_1 / p_2)$ ,

$$P = 1.013 \cdot 10^5 \cdot \frac{1000}{3600} \cdot \ln(1.013/4.013) = -38737 \text{ W} < 0, \text{ weil es ist eine dem System}$$

zugeführte mechanische Leistung.

Weiter ist bei isothermer Kompression gemäß Kap. P2:  $W_t = W_{12}$ , wobei  $W_{12}$  auch die

Druckarbeit enthält, daher  $P = dW_t / dt = dW_{12} / dt$ .

2)

Kapitel G2:  $dQ = dU + dW$ , Luft als ideales Gas:  $U \sim T$ . Wegen  $T = \text{konst.} \Rightarrow U = \text{konst.}$ ,

daher:  $dQ = dW \Rightarrow \int_1^2 dQ = Q_{12} = \int_1^2 dW = W_{12}$ . Diese bei der Kompression auftretende

Wärmemenge  $Q_{12}$  muss über den Kühlwassermantel abgeführt werden, damit  $T = \text{konst.}$

$dQ = dW \Rightarrow dQ/dt = dW/dt$  bzw.  $\dot{Q}_{12} = \dot{W}_{12} \Rightarrow |\dot{Q}_{12}| = |\dot{W}_{12}| = |\dot{W}_t| = |-38737| = 38737 \text{ W}$ .

$\dot{Q}_{12} = \dot{m}_{\text{H}_2\text{O}} \cdot c_{\text{H}_2\text{O}} \cdot \Delta \vartheta_{\text{H}_2\text{O}} = \dot{V}_{\text{H}_2\text{O}} \cdot \gamma_{\text{H}_2\text{O}} \cdot c_{\text{H}_2\text{O}} \cdot \Delta \vartheta_{\text{H}_2\text{O}}$ ,

$$\dot{V}_{\text{H}_2\text{O}} = \frac{\dot{Q}_{12}}{\gamma_{\text{H}_2\text{O}} \cdot c_{\text{H}_2\text{O}} \cdot \Delta \vartheta_{\text{H}_2\text{O}}} = \frac{38737}{1000 \cdot 4186 \cdot 20} = 0.46 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s} = 0.46 \text{ l/s}$$

3)

Kap. P2: Adiabate:  $\frac{p}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V}\right)^\kappa$

Adiabatische Kompressionsarbeit:

$$W_t = - \int_{p_1}^{p_2} V \cdot dp = - p_1^{1/\kappa} V_1 \cdot \int_{p_1}^{p_2} p^{-\frac{1}{\kappa}} \cdot dp = - \frac{p_1^{1/\kappa} \cdot V_1}{1 - \frac{1}{\kappa}} \cdot p^{1 - \frac{1}{\kappa}} \Big|_{p_1}^{p_2} = \frac{\kappa \cdot p_1 \cdot V_1}{1 - \kappa} \cdot \left[ \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa-1} - 1 \right] = \kappa \cdot W_{12}$$

Mit  $\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^\kappa$  folgt:  $W_t = \frac{\kappa \cdot p_1 \cdot V_1}{1 - \kappa} \cdot \left[ \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right]$ ,

$$P_{\text{ad}} = \dot{W}_t = \frac{\kappa \cdot p_1 \cdot \dot{V}_1}{1 - \kappa} \cdot \left[ \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right] = \frac{1.4}{-0.4} \cdot 1.013 \cdot 10^5 \cdot \frac{1000}{3600} \cdot \left[ \left(\frac{4.013}{1.013}\right)^{0.4} - 1 \right] = -47460 \text{ W}$$

$$P_{\text{ad}} / P = (-47460 \text{ W}) / (-38737 \text{ W}) = 1.225 \Rightarrow P_{\text{ad}} / P - 1 = 22.5 \%$$

### Aufgabe P16: Glühofen

Durch Abschrecken glühend erhitzter Stahlwellen in einem Salzbad werden diese Wellen gehärtet und dadurch ihre mechanische Festigkeit erhöht. Somit eignen sie sich z. B. als Wellen für schnell drehende Schwungradspeicher. Der für die Erhitzung der Wellen nötige, mit Gasheizung befeuerte Glühofen in einer Härtereier hat eine Außenwandfläche  $A = 4 \text{ m}^2$ , die mit einer  $\delta_1 = 0.5 \text{ m}$  Schamotte-Schicht thermisch isoliert ist. Deren Wärmeleitfähigkeit beträgt  $\lambda_1 = 0.93 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ . Der Ofen wird im Inneren auf  $\vartheta = 1000^\circ\text{C}$  erhitzt und „rund um die Uhr“ im Dreischicht-Betrieb verwendet.

1) Wie groß ist der tägliche Wärmeverlust  $\Delta Q$  in MJ und in kcal bei einer Raumtemperatur  $\vartheta_{\text{amb}} = 30^\circ\text{C}$  ?

2) Um wie viel Prozent verringert sich dieser Wärmeverlust, wenn die Außenwand durch eine weitere Isolierschicht mit sehr geringer thermischer Leitfähigkeit (Dicke  $\delta_{\text{II}} = 3 \text{ cm}$ ,  $\lambda_{\text{II}} = 0.09 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ ) verstärkt wird?

**Aufgabe P16 (Lösung):** Glühofen

1)

Temperaturdifferenz an der Ofenwand:  $\Delta\vartheta_1 = 1000^\circ\text{C} - 30^\circ\text{C} = 970\text{ K}$ ,

Wärmeleistung durch Wärmeleitung, die durch die Ofenwand fließt (Kap. P):

$$P_{\text{th}} = A \cdot \lambda_1 \cdot \Delta\vartheta_1 / \delta_1 = 4 \cdot 0.93 \cdot 970 / 0.5 = 7216.8\text{ W},$$

$$\Delta Q = P_{\text{th}} \cdot T = 7216.8 \cdot 24 \cdot 3600 = 623.53\text{ MJ}, \Delta Q = 623.53 \cdot 10^6 / 4186 = 148956\text{ kcal}$$

2)

Serienschaltung zweier Isolierschichten, durch die beide dieselbe, nunmehr verringerte Wärmeleistung  $P'_{\text{th}}$  fließt:

$$P'_{\text{th}} = A \cdot \lambda_1 \cdot \Delta\vartheta_1 / \delta_1, P'_{\text{th}} = A \cdot \lambda_{\text{II}} \cdot \Delta\vartheta_{\text{II}} / \delta_{\text{II}}$$

$$\Rightarrow \Delta\vartheta_1 = \delta_1 \cdot P'_{\text{th}} / (A \cdot \lambda_1), \Delta\vartheta_{\text{II}} = \delta_{\text{II}} \cdot P'_{\text{th}} / (A \cdot \lambda_{\text{II}})$$

Gesamte Temperaturdifferenz an der Ofenwand:  $\Delta\vartheta = \Delta\vartheta_1 + \Delta\vartheta_{\text{II}} = 970\text{ K}$ ,

$$\Delta\vartheta = \frac{P'_{\text{th}}}{A} \cdot \left( \frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_{\text{II}}}{\lambda_{\text{II}}} \right) \Rightarrow P'_{\text{th}} = \frac{\Delta\vartheta \cdot A}{\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_{\text{II}}}{\lambda_{\text{II}}}} = \frac{970 \cdot 4}{\frac{0.5}{0.93} + \frac{0.03}{0.09}} = 4454.8\text{ W},$$

$$1 - \frac{P'_{\text{th}}}{P_{\text{th}}} = 1 - \frac{4454.8}{7216.8} = 0.383: \text{ Der Wärmeverlust verringert sich um } 38.3\%!$$

**Aufgabe P17:** Boiler

Ein elektrischer Boiler (Wasserkocher) in der Küche eines Privathaushalts hat ein Fassungsvermögen von  $V = 10$  Liter Wasser, das mit  $\vartheta_{\text{in}} = 12^\circ\text{C}$  aus der öffentlichen Wasserversorgung in den Boiler eintritt. Eine el. Widerstandsheizspirale mit den Anschlussdaten  $U_N = 230\text{ V}$ ,  $I_N = 15\text{ A}$ ,  $50\text{ Hz}$ , erhitzt das Wasser bei Umgebungsdruck auf die Siedetemperatur  $\vartheta = 100^\circ\text{C}$ , wobei 30% der über die Spirale zugeführten el. Leistung als Wärmeverlust durch die Boilerwand an die Umwelt verloren gehen.

1) Berechnen Sie die elektrische Anschlussleistung  $P_e$  und die thermisch für die Aufheizung des Wassers zu Verfügung stehende Heizleistung  $P_{\text{th}}$ !2) Wie lange benötigt der Boiler zum Aufheizen des Wassers auf  $100^\circ\text{C}$  ( $\gamma_{\text{H}_2\text{O}} = 1000\text{ kg/m}^3$ ,  $c_{\text{H}_2\text{O}} = 4187\text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$ )?3) Der Haushaltsstrom-Arbeitspreis beträgt 22 ct. je kWh. Wie hoch sind die Strom-Arbeitskosten  $K$  für das Aufheizen des Wassers auf  $100^\circ\text{C}$ ?**Aufgabe P17 (Lösung):** Boiler

1)

$$P_e = U_N \cdot I_N = 230 \cdot 15 = 3450\text{ W}, 30\% \text{ Wärmeverluste: } \eta_{\text{th}} = 1 - 0.3 = 0.7,$$

$$P_{\text{th}} = \eta_{\text{th}} \cdot P_e = 0.7 \cdot 3450 = 2415\text{ W}$$

2)

Wassererwärmung:  $\Delta\vartheta = \vartheta - \vartheta_{\text{in}} = 100^\circ\text{C} - 12^\circ\text{C} = 88\text{ K}$ , Wassermasse:

$$m_{\text{H}_2\text{O}} = V \cdot \gamma_{\text{H}_2\text{O}} = 10 \cdot 10^{-3} \cdot 1000 = 10\text{ kg}$$

Erforderliche Wärmemenge:  $Q = m_{\text{H}_2\text{O}} \cdot c_{\text{H}_2\text{O}} \cdot \Delta\vartheta = 10 \cdot 4187 \cdot 88 = 3684560\text{ J}$ ,

Aufheizzeit:  $P_{th} = Q/T \Rightarrow T = Q/P_{th} = 3684560/2415 = 1526 \text{ s} = 25.4 \text{ min}$

3)

$$W_e = P_e \cdot T = 3450 \cdot 1526 = 5264700 \text{ J} = 1.46 \text{ kWh},$$

$$K^{[ct]} = W_e^{[kWh]} \cdot 22 \text{ ct/kWh} = 1.46 \cdot 22 = 32 \text{ ct} = 0.32 \text{ Euro}$$

### Aufgabe P18: Raumklimatisierung

In einem Großraumbüro wird während der kalten Jahreszeit eine Lufterwärmung von  $\vartheta_{in} = 8^\circ\text{C}$  auf  $\vartheta = 22^\circ\text{C}$  und eine Luftbefeuchtung von  $0.6 \text{ kg}$  Wasser je  $100 \text{ m}^3/\text{h}$  Luftstrom über eine elektrisch betriebene Klimaanlage für einen Luftstrom  $\dot{V}_L = 600 \text{ m}^3/\text{h}$  eingestellt. Sowohl die Lufterwärmung als auch die Wasserverdampfung erfolgen über eine elektrische Widerstandsheizung bei  $U_N = 230 \text{ V}$ ,  $50 \text{ Hz}$ .

1) Berechnen Sie die für die Lufterwärmung erforderliche thermische Leistung  $P_{th,L}$  ( $c_p = 1.005 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ ,  $\gamma_{L,20^\circ\text{C}} = 1.2041 \text{ kg}/\text{m}^3$ )!

2) Berechnen Sie die für die Wasserverdampfung bei  $20^\circ\text{C}$  erforderliche thermische Leistung  $P_{th,W}$ ! Die gemessene Verdampfungswärme von Wasser in Abhängigkeit der absoluten Temperatur  $T$  wird mit der empirisch ermittelten Formel beschrieben:

$$Q_V = H_V = 2779.7 - 51.6 \cdot \frac{T}{1000} - 3617.6 \cdot \left(\frac{T}{1000}\right)^2 \quad [Q_V] = \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}, \quad [T] = \text{K}.$$

3) Wie groß ist bei einem thermischen Wirkungsgrad  $\eta_{th} = 0.85$  die einphasige elektrische Anschlussleistung  $P_N$ ? Reicht eine 16-A- oder eine 32-A-Absicherung?

4) Der Strom-Arbeitspreis beträgt  $22 \text{ ct}$ . je kWh. Wie hoch sind die Strom-Arbeitskosten  $K$  für die Winterperiode von 4 Monaten zu je 30 Tagen (ohne Wochenend- und Nachtabenkung der Temperatur durch die Heizung)?

### Aufgabe P18 (Lösung): Raumklimatisierung

1)

Lufterwärmung:  $\Delta\vartheta = \vartheta - \vartheta_{in} = 22^\circ\text{C} - 8^\circ\text{C} = 14 \text{ K}$

$$P_{th,L} = Q_L / t = (c_p \cdot V \cdot \gamma_L \cdot \Delta\vartheta) / t = c_p \cdot \gamma_L \cdot \Delta\vartheta \cdot (V/t) = c_p \cdot \gamma_L \cdot \Delta\vartheta \cdot \dot{V},$$

Erforderliche Wärmeleistung:  $P_{th,L} = 1005 \cdot 1.2041 \cdot 14 \cdot (600/3600) = 2824 \text{ W}$

2)

Wasserverdampfung bei  $20^\circ\text{C}$ :  $T = 273 + 20 = 293 \text{ K}$ ,

$$Q_V = H_V = 2779.7 - 51.6 \cdot \frac{293}{1000} - 3617.6 \cdot \left(\frac{293}{1000}\right)^2 = 2454 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}},$$

Wassermasse/Stunde:  $\dot{m}_{\text{H}_2\text{O}} = 0.6 \text{ kg/h} \cdot \frac{600 \text{ m}^3}{100 \text{ m}^3} = 3.6 \text{ kg/h}$

Erforderliche Wärmeleistung:  $P_{th,W} = Q_W / t = \dot{m}_{\text{H}_2\text{O}} \cdot Q_V = \frac{3.6}{3600} \cdot 2454 \cdot 10^3 = 2454 \text{ W}$ ,

3)

$$P_e = (P_{th,L} + P_{th,W}) / \eta_{th} = (2824 + 2454) / 0.85 = 6209 \text{ W},$$

$$I_N = P_e / U_N = 6209 / 230 = 27.0 \text{ A}:$$

Eine 16-A-Sicherung reicht nicht aus. Es muss mit 32 A abgesichert werden!

4)

$$T = 4 \cdot 30 \cdot 24 = 2880 \text{ h}, W_e = P_e \cdot T = 6.209 \cdot 2880 = 17881.9 \text{ kWh},$$

$$K = W_e \cdot 22 \text{ ct/kWh} = 17881.9 \text{ kWh} \cdot 22 \text{ ct/kWh} = 3934 \text{ Euro}$$

**Aufgabe P19: Raumheizung**

Eine  $100 \text{ m}^2$ -Wohnung mit quadratischer Grundfläche  $A$  und Raumhöhe  $h = 2.5 \text{ m}$  hat Außenwände aus  $36.5 \text{ cm}$  dicken Mauerziegeln. Dadurch ergibt sich eine Wärmestromdichte je  $\text{K}$  Temperaturdifferenz zwischen Innen- und Außen-Temperatur von

$$k = P / (A \cdot \Delta \vartheta) = 0.8 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}).$$

In diesem 4-Personen-Haushalt werden während  $24 \text{ h}$  durch die von den Menschen ausgeatmete wasserhaltige Atemluft, durch Transpiration, durch Kochen, Waschen, Duschen, Baden, aber auch durch die Blattatmung der Zimmerpflanzen  $10 \text{ Liter}$  Wasser an die  $20^\circ\text{C}$  warme Innenluft abgegeben.

1) Bei  $20^\circ\text{C}$  führen  $17.3 \text{ g}$  Wasser je  $\text{m}^3$  Luft zu  $100\%$  relativer Luftfeuchte. Darüber setzt Taubildung an den Wänden ein. Nach wie viel Stunden (Zeit  $\tau$ ) ist dieser Punkt, ausgehend von absolut trockener Luft, (ohne Lüftung) erreicht ( $\gamma_{\text{H}_2\text{O}} = 1000 \text{ kg}/\text{m}^3$ )?

2) Um Schimmelbildung zu vermeiden und die verbrauchte Atemluft zu ersetzen, muss die Innenluft regelmäßig durch Lüften ausgetauscht werden. Empfohlen wird für Wohnräume ein Luftwechsel von  $0.5 \text{ m}^3/\text{h}$  je  $\text{m}^3$  Luftvolumen im Wohnraum. Wie groß ist der zugehörige Luftvolumenstrom  $\dot{V}_L$  beim (theoretisch kontinuierlichem) Luftwechsel?

3) Die Innenluft-Temperatur soll konstant  $\vartheta_L = 22^\circ\text{C}$  betragen. Berechnen Sie für einen Wintermonat bei einer Außen-Temperatur  $\vartheta_{\text{amb}} = -4^\circ\text{C}$  die erforderliche Heizleistung  $P_{\text{th}}$  ( $c_p = 1.005 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ ,  $\gamma_{L,20^\circ\text{C}} = 1.2041 \text{ kg}/\text{m}^3$ )!

4) Um wie viel Prozent verringert sich die Heizleistung  $P'_{\text{th}}$  bei Anbringen einer Wärmedämmung (z. B. Polyurethan-Hartschaum) mit  $k' = P' / (A \cdot \Delta \vartheta) = 0.32 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ ?

5) Berechnen Sie für 4) die Heizkosten pro Monat (= 30 Tage) mit einer Erdgasheizung (Wirkungsgrad  $\eta_{\text{th}} = 0.9$ , Erdgas-Heizwert  $H_1 = 30 \text{ MJ}/\text{m}^3$ ), wenn  $1 \text{ m}^3$  Erdgas  $38 \text{ ct.}$  kostet („Arbeitspreis“), und der Grundpreis („Anschlussgebühr“)  $21 \text{ Euro}/\text{Monat}$  beträgt! Ist eine elektrische Widerstandsheizung ( $100\%$  thermischer Wirkungsgrad) bei  $25 \text{ ct.}/\text{kWh}$  („Arbeitspreis“) und  $10 \text{ Euro}/\text{Monat}$  („Anschlussgebühr“) billiger?

**Aufgabe P19 (Lösung): Raumheizung**

1)

$$\text{Luftvolumen: } V_L = A \cdot h = 100 \cdot 2.5 = 250 \text{ m}^3, V_{\text{H}_2\text{O}} = 10 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3, T = 24 \text{ h},$$

$$\dot{m}_{\text{H}_2\text{O}} = V_{\text{H}_2\text{O}} \cdot \gamma_{\text{H}_2\text{O}} / T = 0.01 \cdot 1000 / 24 = 0.417 \text{ kg}/\text{h} = 417 \text{ g}/\text{h},$$

$$\dot{m}_{\text{H}_2\text{O}} / V_L = \frac{417 \text{ g}/\text{h}}{250 \text{ m}^3} = 1.67 \frac{\text{g}}{\text{h} \cdot \text{m}^3}, \text{ Luftfeuchte } 100\% : m'_{\text{H}_2\text{O}, \text{max}} = 17.3 \text{ g}/\text{m}^3,$$

$$\tau = \frac{m'_{\text{H}_2\text{O}, \text{max}}}{\dot{m}_{\text{H}_2\text{O}} / V_L} = \frac{17.3}{1.67} = 10.4 \text{ h}$$

2)

$$\dot{V}_L / V_L = 0.5 / h \Rightarrow \dot{V}_L = 0.5 \cdot V_L / h = 0.5 \cdot 250 \text{ m}^3 / h = 125 \text{ m}^3 / h$$

3)

$$P_{th} = P_{th,1} + P_{th,2} = \underbrace{m_L \cdot c_p \cdot \frac{d\Delta\mathcal{G}}{dt}}_{\text{(Wärmespeicherung)}} + \underbrace{\frac{\Delta\mathcal{G}}{R_{th}}}_{\text{(Wärmeabfuhr)}} = m_L \cdot c_p \cdot \frac{d\Delta\mathcal{G}}{dt} + k \cdot A \cdot \Delta\mathcal{G} \quad (\text{lin. DGL 1. Ordnung})$$

$$\Delta\mathcal{G} = \mathcal{G}_L - \mathcal{G}_{amb} = 22 - (-4) = 26 \text{ K},$$

$$P_{th,1} = \dot{m}_L \cdot c_p \cdot \Delta\mathcal{G} = \dot{V}_L \cdot \gamma_L \cdot c_p \cdot \Delta\mathcal{G} = \frac{125}{3600} \cdot 1.2041 \cdot 1005 \cdot 26 = 1092.5 \text{ W},$$

$$A = L^2 \Rightarrow L = \sqrt{A} = \sqrt{100} = 10 \text{ m}, \text{ Außenwandfläche: } A_L = 4 \cdot L \cdot h = 4 \cdot 10 \cdot 2.5 = 100 \text{ m}^2,$$

$$P_{th,2} = k \cdot A_L \cdot \Delta\mathcal{G} = 0.8 \cdot 100 \cdot 26 = 2080 \text{ W}, \quad P_{th} = P_{th,1} + P_{th,2} = 1092.5 + 2080 = 3172.5 \text{ W}$$

4)

$$P'_{th,2} = k' \cdot A_L \cdot \Delta\mathcal{G} = 0.32 \cdot 100 \cdot 26 = 832 \text{ W}, \quad P'_{th} = P_{th,1} + P'_{th,2} = 1092.5 + 832 = 1924.5 \text{ W},$$

$$\frac{1924.5}{3172.5} - 1 = -0.393: \text{ Absenkung der Heizleistung um } 39.3\%$$

5)

$$P = P'_{th} / \eta_{th} = 1924.5 / 0.9 = 2138.3 \text{ W}, \quad W = P \cdot 30 \cdot T = 2138.3 \cdot 30 \cdot 24 \cdot 3600 = 5542.56 \text{ MJ},$$

$$z = W / H_i = 5542.56 / 30 = 184.75 \text{ m}^3, \quad K = z \cdot 0.38 + 21 = 184.75 \cdot 0.38 + 21 = 91.20 \text{ Euro}.$$

$$\text{Alternativ: Elektrowiderstandsheizung: } \eta_{th} = 1 \Rightarrow P_e = P'_{th} / \eta_{th} = P'_{th} = 1924.5 \text{ W},$$

$$W' = P'_{th} \cdot 30 \cdot T = 1924.5 \cdot 30 \cdot 24 = 1385.6 \text{ kWh},$$

$$K' = W' \cdot 0.25 + 10 = 1385.6 \cdot 0.25 + 10 = 356.4 \text{ Euro},$$

$$\frac{356.4 \text{ Euro}}{91.2 \text{ Euro}} = 3.9: \text{ Die Elektroheizung ist um } 290\% \text{ teurer als die Gasheizung!}$$

**Aufgabe P20:** Kraftwerksarten

- 1) Ergänzen Sie die nichtvolatilen Kraftwerks-Kategorien zu der nachfolgenden Tagesganglinie der Netzverbraucherleistung  $P(t)$  (Bild P20.1).
- 2) Nennen Sie jeweils einen zugehörigen Kraftwerkstyp.

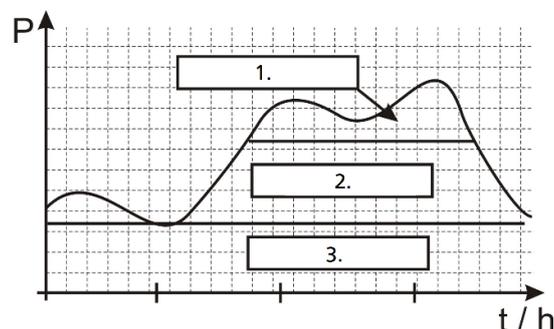


Bild P20.1: Tagesganglinie der Netzverbraucherleistung  $P(t)$

**Aufgabe P20 (Lösung):** Kraftwerksarten

- 1)
- 1: Spitzenlast, 2: Mittellast, 3: Grundlast

2)

- 1: Gasturbinenkraftwerk, Pumpspeicherkraftwerk
- 2: Steinkohlekraftwerk, GuD-Kraftwerk, Biomasse-Kraftwerk
- 3: Kernkraftwerk, Laufwasserkraftwerk, Braunkohlekraftwerk

**Aufgabe P21:** Synchrongeneratoren im Flusskraftwerk

Im *Donau-Wasserkraftwerk Altenwörth/Österreich* werden neun vierflügelige Kaplan-Wasserturbinen mit horizontaler Welle als Rohrturbinen mit starr gekuppelten elektrisch erregten Schenkelpol-Synchrongeneratoren betrieben. Das Kraftwerk ist für einen Wasserdurchfluss  $\dot{V}_N = 2700 \text{ m}^3/\text{s}$  bei einer Fallhöhe  $h = 13.9 \text{ m}$  durch Aufstauen des Flusses ausgelegt. Die elektrisch erzeugte Energie pro Jahr beträgt (im Mittel)  $W_a = 1\,967\,600 \text{ MWh}$ , was 1/6 der in *Österreich* durch Flusskraftwerke an der *Donau* erzeugten elektrischen Energie darstellt.

- 1) Wie groß ist die den Turbinen zugeführte mechanische Leistung  $P_{m,in}$  ( $\gamma_{\text{H}_2\text{O}} = 1000 \text{ kg/m}^3$ )?
- 2) Bestimmen Sie mit den folgenden Wirkungsgraden die ins Netz gelieferte elektrische Leistung  $P_{e,out}$ ! (Transformatoren:  $\eta_{Tr} = 98.5\%$ , Generatoren:  $\eta_G = 98\%$ , Turbinen:  $\eta_T = 94\%$ , hydraulische Verluste: 1.3% von  $P_{m,in}$ , Eigenbedarfsleistung: 0.5% von  $P_{m,in}$ ).
- 3) Geben Sie die Volllaststundenzahl  $t_{nutz}$  an! Welchen monetären Erlös  $E$  erarbeitet das Kraftwerk pro Jahr, wenn ihm nur die Stromgestehungskosten von 0.04 Euro/kWh vergütet werden?
- 4) Wie viele 3-Personen-Haushalte  $z$  mit einer mittleren el. Jahresenergienutzung  $W_e = 4500 \text{ kWh}$  kann das Kraftwerk im Jahres-Mittel versorgen?
- 5) Wie groß ist der Beitrag  $k$  der *österreichischen Donau-Kraftwerke* zum *österreichischen* elektrischen End-Energieverbrauch (Netto-Stromverbrauch) (2018:  $W = 66 \text{ TWh}$ )?
- 6) Die Turbinen drehen mit  $n = 103.44/\text{min}$ . Bestimmen Sie die Polzahl  $2p$  der Generatoren und mit deren Bohrungsdurchmesser  $d_{si} = 6 \text{ m}$  die Polteilung  $\tau_p$  der Schenkelpole sowie deren Umfangsgeschwindigkeit  $v$ !
- 7) Wie groß ist die Lochzahl  $q_s$  bei einer Statornutz Zahl  $Q_s = 522$ ? Bestimmen Sie die Nennleistung  $P_N$  je Generator und bei einer Nennspannung  $U_N = 10.5 \text{ kV}$  den Nennstrom  $I_N$  je Strang für einen übererregten Betrieb mit  $\cos\varphi_N = 0.85$ !

**Aufgabe P21 (Lösung):** Synchrongeneratoren im Flusskraftwerk

1)

$$P_{m,in} = \gamma_{\text{H}_2\text{O}} \cdot \dot{V}_N \cdot g \cdot h = 1000 \cdot 2700 \cdot 9.81 \cdot 13.9 = 368.17 \text{ MW}$$

2)

$$P_{e,out} = P_{m,in} \cdot \eta_{Tr} \cdot \eta_G \cdot \eta_T \cdot \eta_H \cdot \eta_{EB} = 368.17 \cdot 0.985 \cdot 0.98 \cdot 0.94 \cdot 0.987 \cdot 0.995 = 328 \text{ MW}$$

3)

$$t_{\text{nutz}} = W_a / P_{e,\text{out}} = 1967600 / 328 = 5998.9 \text{ h},$$

$$E = W_a \cdot 0.04 \text{ Euro/kWh} = 1967.6 \cdot 10^6 \cdot 0.04 = 78704000 \text{ Euro} = 78.7 \text{ Mio. Euro}$$

4)

$$z = \frac{W_a}{W_e} = \frac{1967600 \cdot 10^6}{4.5 \cdot 10^6} = 437244 \text{ Haushalte bzw. } 3 \cdot 437244 = 1311733 \text{ Personen.}$$

5)

$$k = \frac{6 \cdot W_a}{W} = \frac{6 \cdot 1967600 \cdot 10^6}{66 \cdot 10^{12}} = \frac{6 \cdot 1.9676 \cdot 10^{12}}{66 \cdot 10^{12}} = 17.9\% .$$

6)

Österreich: Öffentliches Netz hat  $f = 50 \text{ Hz}$ !  $2p = 2f / n = 2 \cdot 50 / (103.44 / 60) = 58$ .

$$\tau_p = d_{si} \pi / (2p) = 6000 \cdot \pi / 58 = 325 \text{ mm},$$

$$v = v_{\text{syn}} = 2f \cdot \tau_p = 2 \cdot 50 \cdot 0.325 = 32.5 \text{ m/s} = 117 \text{ km/h}$$

7)

Dreisträngige Generatoren:  $m_s = 3 \Rightarrow q_s = Q_s / (2p \cdot m_s) = 522 / (58 \cdot 3) = 3$ ,

Generator: Nennleistung  $P_N$  ist el. Wirkleistungsabgabe!

$$P_N = P_{e,\text{out}} / 9 = 328 / 9 = 36.44 \text{ MW}, S_N = P_N / \cos \varphi_N,$$

$$I_N = S_N / (\sqrt{3} \cdot U_N) = P_N / (\sqrt{3} \cdot U_N \cdot \cos \varphi_N) = \frac{36.44 \cdot 10^6}{\sqrt{3} \cdot 10500 \cdot 0.85} = 2357.6 \text{ A} .$$

**Aufgabe T1:** Magnetischer Eisenkreis, Ampère'scher Durchflutungssatz

Der geblechte magnetische Eisenkreis gemäß Bild T1.1 mit dem Querschnitt  $A = 30 \times 30 \text{ mm}^2$  hat einen Luftspalt  $\delta = 3 \text{ mm}$ . Die Werkstoffkennlinie des warmgewalzten Elektroblechs  $B(H)$  ist in Bild T1.2, Kurve 1, dargestellt. Die Erregerspule mit  $N$  Windungen führt den Gleichstrom  $I$ , der im Luftspalt eine magnetische Flussdichte  $B_\delta = 1.8 \text{ T}$  erregt.

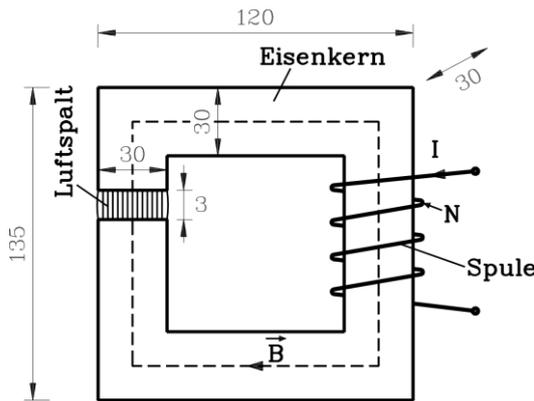


Bild T1.1: Magnetischer Eisenkreis

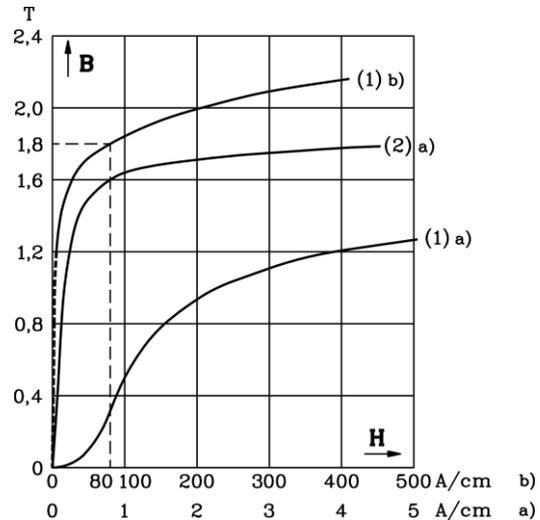


Bild T1.2: Gleichstrom-Magnetisierungskurven

- 1) Wie groß ist der magnetische Fluss  $\Phi_\delta$  im Luftspalt?
- 2) Wie groß ist die magnetische Flussdichte  $B_{Fe}$  im Eisenkern entlang der gestrichelt eingezeichneten Feldlinie in Bild T1.1?
- 3) Wie groß ist die magnetische Feldstärke  $H_\delta$  im Luftspalt und  $H_{Fe}$  im Eisen? Wie groß ist die magnetische Permeabilität  $\mu$  im Luftspalt und im Eisen?
- 4) Wie groß ist die erforderliche elektrische Durchflutung  $\Theta = N \cdot I$  in der Erregerspule, um die oben genannte magnetische Flussdichte  $B_\delta = 1.8 \text{ T}$  zu erregen?
- 5) Wie groß ist der Wert von  $I$ , wenn die Spule  $N = 500$  Windungen hat?

**Aufgabe T1 (Lösung):** Magnetischer Eisenkreis, Ampère'scher Durchflutungssatz

1)

Polfläche im Luftspalt:  $A_\delta = 30 \times 30 = 900 \text{ mm}^2$

Magnetischer Fluss im Luftspalt:  $\Phi_\delta = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = B_\delta A_\delta = 1.8 \cdot 900 \cdot 10^{-6} = \underline{\underline{1.62 \text{ mWb}}}$

2)

Eisenquerschnitt  $A_{Fe} =$  Polfläche im Luftspalt  $A_\delta$ . Da die Flüsse  $\Phi_\delta$  im Luftspalt und  $\Phi_{Fe}$  im Eisen gleich groß sind (Annahme: kein Streufluss vorhanden, vgl. Bild T1.1), gilt:

$\Phi_\delta = \Phi_{Fe} = \Phi_h = A_\delta B_\delta = A_{Fe} B_{Fe} \Rightarrow \underline{\underline{B_{Fe} = B_\delta \cdot (A_\delta / A_{Fe}) = B_\delta = 1.8 \text{ T}}}$

3)

Im Luftspalt gilt:  $\underline{\underline{\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/(Am)}}}$ ,  $\underline{\underline{H_\delta = B_\delta / \mu_0 = 1.8 / (4\pi \cdot 10^{-7}) = 1432395 \text{ A/m}}}$

Im Eisenblech gilt:  $B_{Fe} = \mu_{Fe} (H_{Fe}) = 1.8 \text{ T}$ . Die Kennlinie 1 von Bild T1.2 liefert:

$\underline{\underline{H_{Fe} = 80 \text{ A/cm} = 8000 \text{ A/m}}}$ ,  $\underline{\underline{\mu_{Fe} = B_{Fe} / H_{Fe} = 1.8 / 8000 = 0.000225 \text{ Vs/(Am)} = 179 \mu_0}}$

4)

Ampère'scher Durchflutungssatz längs geschlossener Kurve  $C$  (Bild T1.1):

$$\underline{\underline{\Theta}} = N \cdot I = H_{\delta} \cdot \delta + H_{Fe} \cdot s_{Fe} = 1432395 \cdot 0.003 + 8000 \cdot 0.387 = 4297 + 3096 = \underline{\underline{7393A}}$$

Länge von  $s_{Fe} = 2 \cdot (120 - 30) + 2 \cdot (135 - 30) - 3 = 387 \text{ mm}$

5)

$$\underline{\underline{I}} = \Theta / N = 7393 / 500 = \underline{\underline{14.79A}}$$

**Aufgabe T2:** Faraday'sches Induktionsgesetz - Ruhinduktion

Ein Magnetkreis (Bild T2.1 a) hat die Maße  $\delta = 3 \text{ mm}$ ,  $b = l = 30 \text{ mm}$ . Die Erregerspule mit  $N = 500$  Windungen wird mit Wechselstrom  $i(t) = \hat{I} \cdot \sin(2\pi f \cdot t)$ ,  $f = 100 \text{ Hz}$ ,  $\hat{I} = 7.8 \text{ A}$  gespeist. Die magnetische Permeabilität des Eisens  $\mu_{Fe}$  kann gegenüber dem Wert  $\mu_0$  im Luftspalt näherungsweise als unendlich groß angenommen werden. Im Luftspalt des Magnetkreises befindet sich eine quadratische Spule mit  $30 \text{ mm}$  Seitenlänge und  $N_s = 10$  Windungen (Bezugsrichtung der orientierten Spulenfläche gemäß Bild T2.1 b).

1) Berechnen Sie  $B_{\delta}(t)$  und skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf von  $i(t)$  und der magnetischen Luftspaltflussdichte  $B_{\delta}(t)$  maßstäblich!

Anmerkung: Der magnetische Fluss  $\Phi$ , die magnetische Flussdichte  $B$  und die magnetische Feldstärke  $H$  werden wegen der nichtlinearen  $B(H)$ -Kennlinie des Eisens stets als Scheitelwerte angegeben, unabhängig von der zeitlichen Kurvenform. Wenn sich z. B. der Fluss  $\Phi(t)$  zeitlich sinusförmig ändert, so ist die Angabe eines Effektivwerts des Flusses physikalisch sinnlos, da die Eisen-Sättigung durch den Scheitelwert bestimmt wird. Daher wird in der Bezeichnungsweise nicht zwischen den Symbolen  $\hat{\Phi}$  und  $\Phi$  unterschieden, sondern es ist mit  $\Phi$  stets der Scheitelwert gemeint.

2) Wie groß ist die magnetische Flussverketzung  $\psi(t)$  des von der Erregerspule erzeugten Magnetfelds mit der im Luftspalt befindlichen Spule?

3) Wie groß ist die induzierte Spannung  $u_i(t)$ , die in die Luftspaltspule induziert wird? Skizzieren Sie ihren zeitlichen Verlauf maßstäblich!

4) Berechnen Sie die Gegeninduktivität  $M$  zwischen Erregerspule und Luftspaltspule!

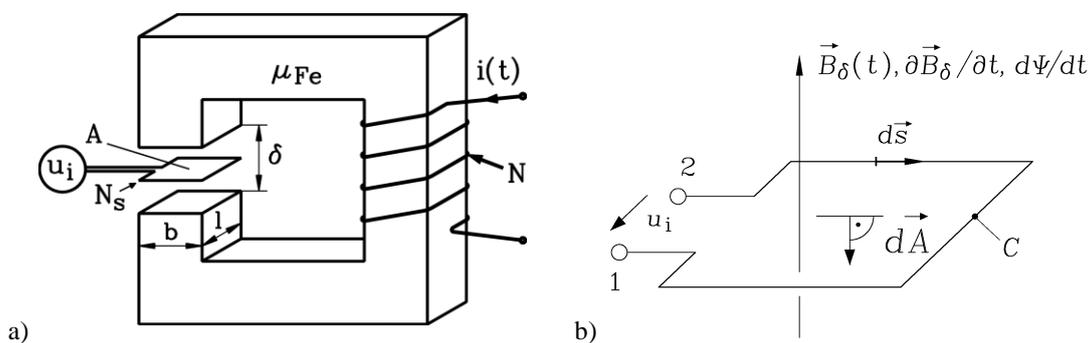


Bild T2.1: a) Spule im Luftspalt eines Magnetkreises, b) Bezugsrichtung der orientierten Spulenfläche

**Aufgabe T2 (Lösung):** Faraday'sches Induktionsgesetz – Ruhinduktion

1)

Eisenquerschnitt  $A_{Fe} = \text{Polfläche im Luftspalt } A_{\delta}$ . Da die Flüsse  $\Phi_{\delta}$  im Luftspalt und im Eisen  $\Phi_{Fe}$  gleich groß sind (Annahme: kein Streufluss vorhanden, vgl. Bild T1.1), gilt:

$$\Phi_{\delta} = \Phi_{Fe} = \Phi_h = A_{\delta} B_{\delta} = A_{Fe} B_{Fe} \Rightarrow B_{Fe} = B_{\delta} \cdot (A_{\delta} / A_{Fe}) = B_{\delta}$$

Wegen der unendlich groß angenommenen Permeabilität des Eisens ist die magnetische Feldstärke im Eisen Null:  $H_{Fe} = B_{Fe} / \mu_{Fe} = 0$ . Ampère'scher Durchflutungssatz längs geschlossener Kurve C (Bild T1.1):

$$\text{Durchflutung } \Theta(t) = N \cdot i(t) = H_{\delta} \cdot \delta + H_{Fe} \cdot s_{Fe} = H_{\delta} \cdot \delta = B_{\delta} \cdot \delta / \mu_0 \Rightarrow B_{\delta}(t) = \mu_0 \cdot \frac{N \cdot i(t)}{\delta}$$

Magnetische Luftspaltflussdichte:

$$\underline{B_{\delta}(t)} = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{500 \cdot 7.8 \cdot \sin(2\pi \cdot 100 \cdot t)}{0.003} = \underline{1.63T \cdot \sin(2\pi 100 \cdot t)}$$

$$\text{Schwingungsdauer } T = 1/f = 1/100 = 10\text{ms}$$

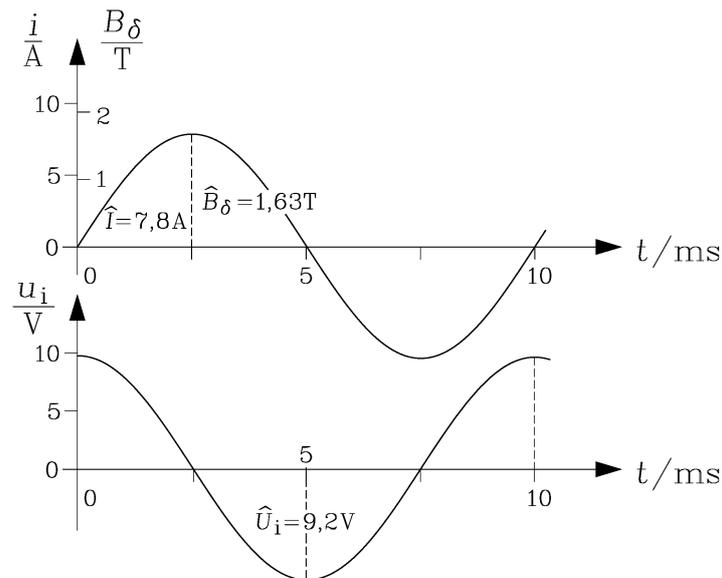


Bild T2.2: Zeitverläufe des Erregerstroms  $i$ , der Luftspalt-Flussdichte  $B_{\delta}$  und der induzierten Spannung  $u_i$

2)

Der Flussdichtevektor  $\vec{B}_{\delta}$  tritt gegen die  $d\vec{A}$ -Richtung durch die Spulenfläche:

$$\underline{\psi(t)} = N_s \Phi(t) = -N_s A_{\delta} B_{\delta}(t) = -10 \cdot 30 \cdot 30 \cdot 10^{-6} \cdot 1.63 \cdot \sin(2\pi \cdot 100 \cdot t) = \underline{-0.0147Vs \cdot \sin(2\pi \cdot 100 \cdot t)}$$

3)

Faraday'sches Induktionsgesetz:  $\underline{u_i(t)} = -d\psi(t)/dt = -2\pi f \cdot \hat{\Psi} \cdot \cos(2\pi f \cdot t)$

$$\underline{u_i(t)} = -2\pi \cdot 100 \cdot (-0.0147) \cdot \cos(2\pi \cdot 100 \cdot t) = \underline{9.2V \cdot \cos(2\pi \cdot 100 \cdot t)}$$

4)

Die Gegeninduktivität  $M$  ist als der Verhältnisfaktor zwischen dem mit der Spule 2 verketteten Fluss und dem in der Spule 1 erregenden Strom wegen der Bezugsrichtung in Bild T1.3 b) negativ.

$$\underline{M} = M_{21} = \frac{\psi_2(t)}{i_1(t)} = \frac{\hat{\Psi} \cdot \sin(2\pi f \cdot t)}{\hat{I} \cdot \sin(2\pi f \cdot t)} = \frac{\hat{\Psi}}{\hat{I}} = \frac{-0.0147}{7.8} = \underline{-1.88\text{mH}}$$

### Aufgabe T3: Faraday'sches Induktionsgesetz - Bewegungsinduktion

Ein Magnetkreis gemäß Bild T2.1 a) mit quadratische Querschnittsabmessungen  $b = l = 30 \text{ mm}$  wird über eine Erregerspule mit Gleichstrom  $I$  so erregt, dass im Luftspalt  $\delta$  eine magnetische Flussdichte  $B_{\delta} = 1.8 \text{ T}$  auftritt. Die im Luftspalt befindliche quadratische

Spule (Richtungssinn der Flächennormalen gemäß Bild T2.1 b),  $N_c = 10$  Windungen, 30 mm Seitenlänge, Innenwiderstand  $R_c = 0.1 \Omega$  liegt zum Zeitpunkt  $t = 0$  so, dass die Spulenseiten genau über den Kanten der Polfläche liegen.

- 1) Die Luftspaltspule wird ab dem Zeitpunkt  $t = 0$  mit  $v = 20$  m/s nach links durch eine externe Antriebskraft  $F_m$  aus dem Luftspalt gezogen (siehe Bild T2.2). Welcher physikalische Effekt tritt auf?
- 2) Skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf der in die Luftspaltspule induzierten Spannung  $u_i(t)$  von Klemme 2 nach Klemme 1 (Bild T2.1 b)) maßstäblich für den Zeitraum von 0 bis 2 ms.
- 3) Die Luftspaltspule wird mit einem Widerstand  $R = 1 \Omega$  belastet. Zeichnen Sie das elektrische Ersatzschaltbild der belasteten Spule mit der induzierten Spannung, wobei Sie die positive Stromrichtung  $i_c$  gemäß dem Umlaufsinn von Bild T2.1 b) wählen.
- 4) Berechnen und skizzieren Sie maßstäblich den in der Spule fließenden Strom  $i_c(t)$ ! Der Einfluss der Spulenselbstinduktivität wird vernachlässigt. Welche Wirkung hat der fließende Spulenstrom?
- 5) Wie groß ist die auf die bewegte Luftspaltspule wirkende *Lorentz-Kraft*  $F$ ? In welche Richtung wirkt diese Kraft?
- 6) Wie wirkt die bewegte Spule als elektromechanischer Energiewandler? Geben Sie die Energiebilanz im Erzeugerzählpeilsystem an und ermitteln Sie den Wirkungsgrad  $\eta$ !

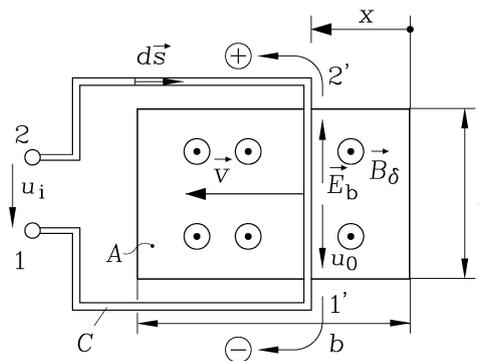


Bild T3.1: Nach links mit  $v$  bewegte Luftspaltspule (zu Bild T2.1 a): Blick von oben auf die Spule)

**Aufgabe T3 (Lösung):** Faraday'sches Induktionsgesetz - Bewegungsinduktion

1)  
Es wird durch Bewegungsinduktion eine Spannung  $u_i$  in der bewegten Spule induziert, solange sich die rechte Spulenseite durch das Magnetfeld im Luftspalt nach links bewegt (Bild T3.1). Sobald die Spule den Luftspalt vollständig verlassen hat, befindet sie sich im feldfreien Raum, so dass die induzierte Spannung nun Null ist. Eine Ruhinduktion tritt wegen der zeitlich konstanten Flussdichte  $\vec{B}_\delta$  nicht auf:  $\partial \vec{B}_\delta / \partial t = 0$ .

2)  
Von den beiden zu  $l$  parallelen Spulenseiten befindet sich nur die rechte Spulenseite ab  $t > 0$  noch im Luftspalt, so dass dort die bewegungsinduzierte Feldstärke  $\vec{E}_b = \vec{v} \times \vec{B}_\delta$  parallel zum Tangentenvektor  $d\vec{s}$  an die Spulenseite der Länge  $l$  auftritt. Die anderen beiden Spulenseiten liegen parallel zu  $b$  und schließen mit der bewegungsinduzierten elektrischen Feldstärke  $\vec{E}_b = \vec{v} \times \vec{B}_\delta$  einen rechten Winkel ein, so dass  $\vec{E}_b \cdot d\vec{s} = 0$  ist. Folglich ist die induzierte Spannung je Windung

$$u_i = \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}_\delta) \cdot d\vec{s} = \int_2^1 (\vec{v} \times \vec{B}_\delta) \cdot d\vec{s} = - \int_2^1 v \cdot B_\delta \cdot ds = v \cdot B_\delta \cdot l.$$

Induzierte Spannung für die gesamte Spule (Bild T3.3 a)):

$$\underline{u_i} = -N_c \cdot v \cdot B_\delta \cdot l = -10 \cdot 20 \cdot 1.8 \cdot 30 \cdot 10^{-3} = \underline{\underline{-10.8 \text{ V}}}$$

Nach der Zeit  $\underline{t_1} = b/v = 30 \cdot 10^{-3} / 20 = \underline{\underline{1.5 \text{ ms}}}$  hat die Spule den Luftspalt verlassen; die induzierte Spannung ist ab diesem Zeitpunkt Null.

3)

$u + u_i = R_c \cdot i_c$ ,  $u = -R \cdot i_c$ , da  $u$  von 2 nach 1 gezählt wird, der Spulenstrom  $i_c$  aber gemäß dem Umlaufsinn der Kurve  $C$  in Bild T2.1 b):  $u_i - R \cdot i_c = R_c \cdot i_c \Rightarrow u_i = (R + R_c) \cdot i_c$  (Bild T3.2).

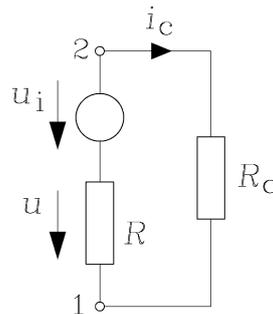
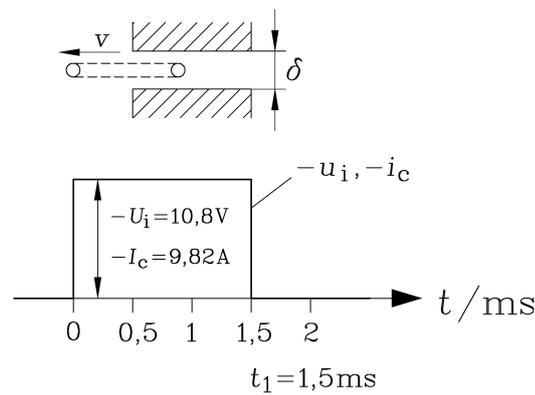
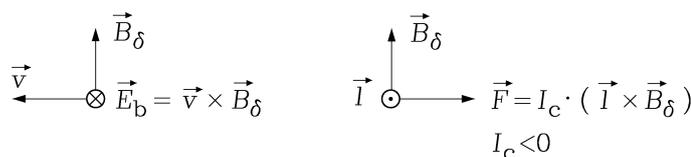


Bild T3.2: Bewegte Spule: Elektrisches Ersatzschaltbild der mit dem Widerstand  $R$  belasteten induzierten Spule

4)



a)



b)

Bild T3.3: Bewegte Spule: a) Zeitverläufe von induzierter Spannung und Spulenstrom, b) bewegungsinduzierte Feldstärke  $E_b$  und Lorentz-Kraft  $F$  der Spule

$$\underline{i_c} = I_c = \frac{U_i}{R_c + R} = \frac{-10.8}{0.1 + 1} = \underline{\underline{-9.82 \text{ A}}} \text{ (Gleichstrom), } 0 \leq t \leq t_1 \quad \underline{i_c} = 0, t > t_1 \text{ (Bild T3.3 a))}$$

Der Spulenstrom bewirkt in der Spule die ohm'schen Verluste  $R_c I_c^2 = 0.1 \cdot (-9.82)^2 = 9.64 \text{ W}$  und  $R \cdot I_c^2 = 1 \cdot (-9.82)^2 = 96.4 \text{ W}$  im äußeren Belastungswiderstand. Weiter erregt er über die (hier vernachlässigte) Spulenselbstinduktivität ein Eigen-Magnetfeld, das in Richtung von  $\vec{B}_\delta$  wirkt und somit versucht, den auf Grund der Spulenbewegung abnehmenden Spulenfluss

$\Phi_c = -B_\delta \cdot l \cdot (b - v \cdot t)$ ,  $0 \leq t \leq t_1$  und  $\Phi_c = 0$ ,  $t \geq t_1$  aufrecht zu erhalten (Lenz'sche Regel!). Weiter bewirkt der Strom eine bremsende Lorentz-Kraft.

5)

$$\vec{F} = N_c \cdot \oint_C i_c \cdot d\vec{s} \times \vec{B}_\delta = N_c \cdot I_c \cdot \oint_C d\vec{s} \times \vec{B}_\delta = N_c \cdot I_c \cdot \int_l d\vec{s} \times \vec{B}_\delta = N_c \cdot I_c \cdot (\vec{l} \times \vec{B}_\delta)$$

$$\underline{F} = N_c \cdot I_c \cdot l \cdot B_\delta = 10 \cdot (-9.82) \cdot 0.03 \cdot 1.8 = \underline{\underline{-5.3 \text{ N}}}$$

Die Lorentz-Kraft  $F$  wirkt entgegen  $\vec{v}$  und damit entgegen der Bewegungsrichtung der Spule (Bild T3.3 b)). Sie bremst und muss von der externen Antriebskraft  $F_m = -F = 5.3 \text{ N}$  überwunden werden, um die Bewegung aufrecht zu erhalten.

6)

Der Wandler wirkt als Generator. Die externe Antriebskraft  $F_m$  muss die Spule gegen die bremsende elektromagnetische Lorentz-Kraft  $F$  mit der Geschwindigkeit  $v$  bewegen. Es wird (in gerundeten Zahlen) der bewegten Spule mechanische Leistung  $P_m = F_m \cdot v = 5.3 \cdot 20 = 106 \text{ W}$  zugeführt, die im Erzeugerzählpfeilsystem positiv gezählt wird, und in elektrische Leistung umgewandelt  $P_e = U_1 I_c = (-10.8) \cdot (-9.82) = 106 \text{ W}$ , die in den ohm'schen Widerständen in Wärme umgesetzt wird:  $(R_c + R) \cdot I_c^2 = 106 \text{ W}$ .

Wirkungsgrad:

$$\underline{\eta} = \frac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}} = \frac{R \cdot I_c^2}{P_m} = \frac{96.4}{106} = \underline{\underline{0.909}} \text{ oder } \eta = \frac{R}{R + R_c} = \frac{1}{1.1} = 0.909.$$

**Aufgabe T4:** Einfacher elektromechanischer Energiewandler

Ein elektrischer Leiter (Länge  $l = 1 \text{ m}$ , Widerstand  $R = 0.2 \Omega$ , Bild T4.1) wird über zwei flexible Zuleitungen aus einer Batterie (Leerlaufspannung  $U_{B0} = 12 \text{ V}$ , Innenwiderstand  $R_{Bi} = 0.1 \Omega$ ) mit Gleichstrom  $I$  gespeist. Der Leiter befindet sich in einem Luftspalt zwischen zwei normal zur Leiterrichtung sehr langen Permanentmagnet-Polschuhen, die im Luftspalt eine senkrecht zur Leiterachse nach unten gerichtete magnetische Flussdichte  $B_\delta = 0.8 \text{ T}$  erzeugen. Die Selbstinduktivität des Leiters und der Drahtanschlüsse wird vernachlässigt.

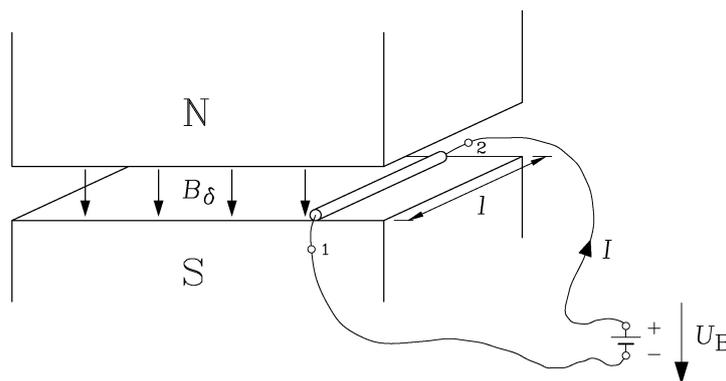


Bild T4.1: Einfacher elektromechanischer Energiewandler: Stromdurchflossener Leiter im Magnetfeld

- 1) Zeichnen Sie das elektrische Ersatzschaltbild von Batterie und Leiter und tragen Sie die Stromflussrichtung  $I$  im Verbraucherzählpfeilsystem ein. Wie groß ist  $I$ ?
- 2) Welcher physikalische Effekt tritt bei dem im Luftspalt ruhenden stromdurchflossenen Leiter auf?
- 3) In welche Richtung zeigt die auf den Leiter wirkende Lorentz-Kraft  $F$ ? Wie groß ist sie? Was bewirkt sie?

- 4) Zeichnen Sie das elektrische Ersatzschaltbild für die Kombination aus bewegtem Leiter und speisender Batterie und die Verhältnisse am Leiterabschnitt  $l$ . Welche zusätzliche elektrische Spannung tritt auf? Geben Sie die Formel an! Wie wirkt sie?
- 5) Geben Sie alternativ zu 4. das Ersatzschaltbild mit Verwendung der „Quellenspannung“ an!
- 6) Auf welche Endgeschwindigkeit  $v_0$  wird der Leiter im Luftspalt durch  $F$  beschleunigt, wenn keine mechanische Bremskraft auf ihn wirkt? Wie groß ist der Strom  $I$  im Leiter nach Erreichen der Endgeschwindigkeit?
- 7) Angenommen, der Leiter erfährt durch Reibung eine bremsende Kraft  $F_R = 10 \text{ N}$ . Auf welche Endgeschwindigkeit  $v$  beschleunigt nun der Leiter? Wie groß ist der Strom  $I$  im Leiter?
- 8) Welche mechanische Leistung  $P_m$  ist erforderlich, damit sich der Leiter gegen die bremsende Reibungskraft  $F_R = 10 \text{ N}$  mit der unter 7) bestimmten Endgeschwindigkeit  $v$  bewegen kann? Skizzieren Sie die Kurven  $v(I)$  und  $v(F)$  bei veränderlicher Bremskraft  $F_R$  zwischen  $v_0$  und  $v = 0$ !
- 9) Wie groß ist die der Batterie entnommene elektrische Leistung  $P_e$  zu Punkt 7)? Wie groß sind der Wirkungsgrad  $\eta$  und die Verlustleistung  $P_d$  bei der Umsetzung von elektrischer in mechanische Leistung? Wie wirkt der Leiter als elektromechanischer Energiewandler?

**Aufgabe T4 (Lösung):** Einfacher elektromechanischer Energiewandler

1)

Da das Magnetfeld zeitlich konstant ist, tritt keine Ruhinduktion auf. Es wirkt nur die elektrische Batteriespannung gemäß dem Ersatzschaltbild in Bild T4.2:

$$I = \frac{U_{B0}}{R_{Bi} + R} = \frac{12}{0.1 + 0.2} = \underline{\underline{40 \text{ A}}}.$$

2)

Auf den stromdurchflossenen Leiter übt das Magnetfeld eine elektromagnetische Lorentz-Kraft  $F$  aus, die rechtwinklig zur Feld- und Stromflussrichtung wirkt.

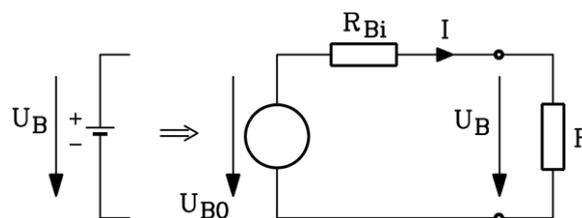


Bild T4.2: Elektrisches Ersatzschaltbild für die speisende Batterie und den elektrischen Leiter

3)

Die Kraft  $F$  wirkt rechtwinklig zur Feld- und Stromflussrichtung, also in Richtung der Luftspaltfläche nach rechts (Bild T4.3 a)). Da Stromflussrichtung und Feldrichtung einen rechten Winkel miteinander einschließen, tritt die maximal mögliche Kraft auf:  $\underline{\underline{F}} = I \cdot l \cdot B_\delta = 40 \cdot 1 \cdot 0.8 = \underline{\underline{32 \text{ N}}}$ . Da der Leiter über flexible Verbindungen beweglich an die Batterie angeschlossen ist, wird er durch die Kraft  $F$  im Luftspalt in ihre Richtung nach rechts seitlich beschleunigt.

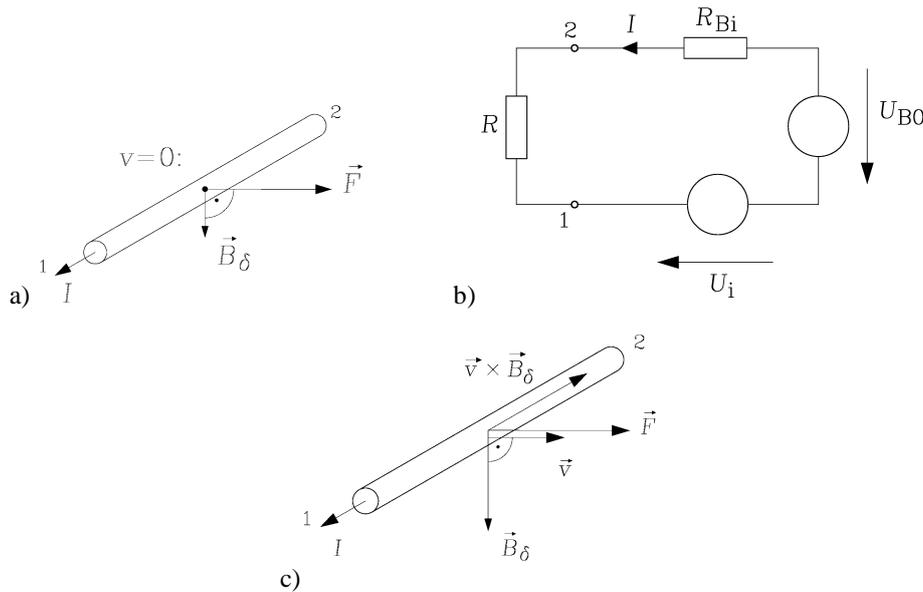
4)

Wird der Leiter durch die Kraft  $F$  mit der Geschwindigkeit  $v$  bewegt, so wird durch Bewegungsinduktion im Leiter auf der Länge  $l$  eine Bewegungsfeldstärke  $\vec{E}_b = \vec{v} \times \vec{B}_\delta$  entgegen der Richtung des Tangentenvektors  $d\vec{s}$  (Rechtsumlauf in der Schleife gemäß der in

Bild T4.1 eingetragenen Stromrichtung) induziert, so dass zwischen 2 und 1 die induzierte Spannung  $u_i$  auftritt:

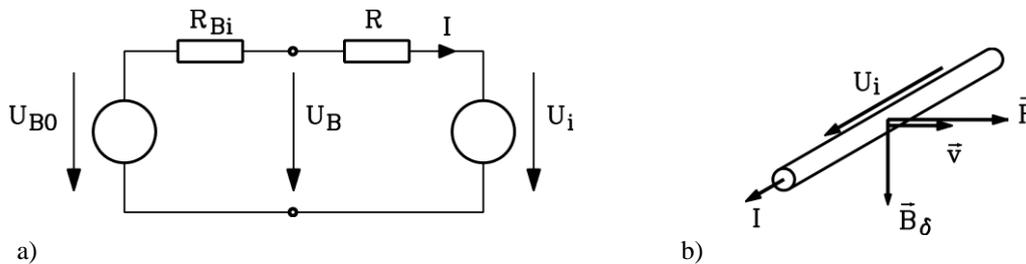
$$u_i = \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}_\delta) \cdot d\vec{s} = \int_2^1 (\vec{v} \times \vec{B}_\delta) \cdot d\vec{s} = - \int_2^1 v \cdot B_\delta \cdot ds = \underline{\underline{-v \cdot B_\delta \cdot l = U_i}}$$

Im Ersatzschaltbild (Bild T4.3 b)) wirkt die induzierte Spannung in Serie mit der Batteriespannung:  $U_{B0} + U_i = (R_{Bi} + R) \cdot I = U_{B0} - v \cdot B_\delta \cdot l$ . Solange  $v \cdot B_\delta \cdot l$  kleiner als  $U_{B0}$  ist, ist  $I > 0$ , und es bleibt die antreibende Kraft  $F > 0$  wirksam. Die induzierte Spannung wirkt gegen die Stromrichtung  $I$ , die über  $F$  die Ursache der Leiterbewegung ist, und wirkt somit gegen die Ursache ihrer Entstehung (Lenz'sche Regel, Bild T4.3 c)).



**Bild T4.3:** a) Kraftrichtung von  $F$ : In diese Richtung wird der Leiter beschleunigt. b) ) elektrisches Ersatzschaltbild des bewegten Leiters mit der induzierten Spannung  $U_i$  als „äußerer“ Spannung zwischen 2 und 1, c) Richtung der Lorentz-Kraft und der Geschwindigkeit  $v$

5)  
Die induzierte Spannung als „innere“ Quellenspannung ist das Negative der in 4) berechneten induzierten Spannung  $-U_i = v \cdot B_\delta \cdot l$ . Wird nun ersatzweise diese „innere“ Spannung als induzierte Spannung weiterverwendet, so gilt  $I = (U_{B0} - U_i) / (R_{Bi} + R)$  (Bild T4.4 a)). Solange diese „innere“ Quellenspannung  $U_i$  kleiner als  $U_{B0}$  ist, ist  $I > 0$ , und es bleibt die antreibende Kraft  $F > 0$  wirksam (Bild T4.4 b)).



**Bild T4.4:** Wie Bild T4.3 b), c), jedoch mit der Darstellung der induzierten Spannung  $U_i$  als „innerer“ Quellenspannung: a) Ersatzschaltbild, b) Kraft am Leiter

6)

Die Endgeschwindigkeit  $v_0$  im Luftspalt ist erreicht, wenn gemäß dem 2. *Newton*'schen Axiom (Kraft = Masse x Beschleunigung) die Summe aller auf den Leiter wirkenden Kräfte Null ist:  $\Sigma F = 0$  (Bild T4.5). Ohne mechanische Krafteinwirkung ist dies wegen  $F = I \cdot l \cdot B_\delta$  im Luftspalt nur dann der Fall, wenn  $\underline{I} = 0$  ist. Aus dem Ersatzschaltbild von Punkt 5) (Bild T4.4 a)) folgt mit der „inneren“ Quellenspannung  $U_i$ :

$$U_{B0} = (R_{Bi} + R) \cdot I + U_i \Rightarrow U_{B0} = U_i = v_0 \cdot B_\delta \cdot l ,$$

$$\text{Endgeschwindigkeit } \underline{v_0} = \frac{U_{B0}}{B_\delta \cdot l} = \frac{12}{0.8 \cdot 1} = \underline{\underline{15 \text{ m/s}}} .$$

Induzierte Spannung und Batteriespannung heben sich bei der Endgeschwindigkeit  $v_0$  auf, so dass die Stromaufnahme  $I$  Null ist.

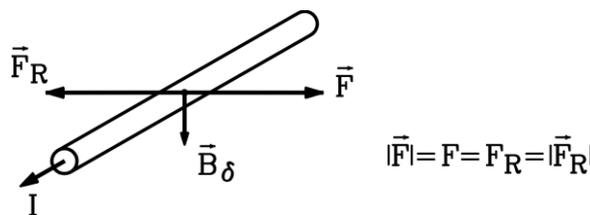


Bild T4.5: Kräftegleichgewicht nach Erreichen der Endgeschwindigkeit  $v$

7)

Die Endgeschwindigkeit  $v$  ist erreicht, wenn keine weitere beschleunigende Kraft auf den Leiter wirkt, wenn also  $F - F_R = 0$  ist:  $F = I \cdot l \cdot B_\delta = F_R = 10 \text{ N} \Rightarrow \underline{I} = \frac{10}{1 \cdot 0.8} = \underline{\underline{12.5 \text{ A}}} .$

Das Ersatzschaltbild von Punkt 5) liefert:  $U_{B0} = (R_{Bi} + R)I + U_i$ . Mit  $U_i = v \cdot B_\delta \cdot l$  folgt:

$$\underline{v} = \frac{U_{B0} - (R_{Bi} + R) \cdot I}{B_\delta \cdot l} = \frac{12 - 0.3 \cdot 12.5}{0.8 \cdot 1} = \underline{\underline{10.31 \text{ m/s}}} .$$

8)

$$\underline{P_m} = F_R \cdot v = 10 \cdot 10.31 = \underline{\underline{103.1 \text{ W}}} , \text{ Bild T4.6.}$$

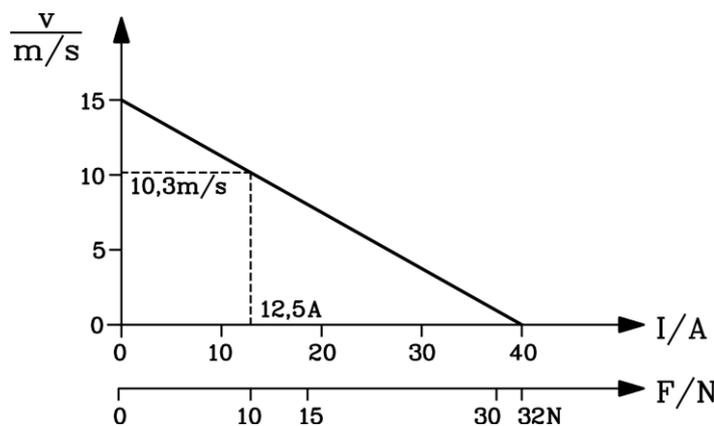


Bild T4.6: Leiterendgeschwindigkeit  $v$  in Abhängigkeit des Leiterstroms  $I$  bzw. der Leiterkraft  $F$

9)

$$\underline{P_e} = U_{B0} \cdot I = 12 \cdot 12.5 = \underline{\underline{150 \text{ W}}} , \underline{\eta} = \frac{P_{out}}{P_{in}} = \frac{P_m}{P_e} = \frac{103.1}{150} = \underline{\underline{68.7 \%}} ,$$

$$\text{Gesamtverluste: } P_d = P_{in} - P_{out} = 150 - 103.1 = 46.9 \text{ W} .$$

oder  $\underline{P}_d = (R_{Bi} + R) \cdot I^2 = 0.3 \cdot 12.5^2 = \underline{\underline{46.9 \text{ W}}}$ .

Der Leiter bewegt sich gegen die bremsende äußere Reibungskraft  $F_R$ . Er wirkt als Motor. Er wandelt elektrische Energie aus der Batterie in mechanische Energie um.

**Aufgabe T5:** Drehstromsystem

Eine Drehstrom-Steckdose stellt 3x400V/50Hz sowie den Sternpunkt N zur Verfügung.

- 1) Welche Spannungen sind als Effektivwerte nutzbar?
- 2) Zeichnen Sie maßstäblich die drei komplexen Spannungszeiger der verketteten Spannungen  $u_{UV}(t)$ ,  $u_{VW}(t)$  und  $u_{WU}(t)$ ! Legen Sie dabei  $\underline{U}_{UV}$  in die reelle Achse!
- 3) Leiten Sie aus den verketteten Spannungen die Strangspannungen  $u_U(t)$ ,  $u_V(t)$ ,  $u_W(t)$  ab. Fertigen Sie eine maßstäbliche Skizze der Lage der Strangspannungszeiger an!
- 4) Berechnen Sie mit den komplexen Zeigern das Verhältnis der Amplituden bzw. Effektivwerte von Strang- zu verketteter Spannung. Wie groß ist die Phasenverschiebung zwischen  $u_{UV}(t)$  und  $u_U(t)$ ?
- 5) Wie groß sind die Spannungsamplituden der Strang- und der verketteten Spannungen  $\hat{U}_{ph}, \hat{U}_{verk}$ ?
- 6) Ein Heizwiderstand  $R = 10 \Omega$  wird zwischen den Klemmen V und N angeschlossen. Skizzieren Sie maßstäblich den zeitlichen Verlauf der im Widerstand umgesetzten Momentanleistung  $p(t)$  und deren Mittelwert  $P$ ! Wählen Sie den Zeitpunkt  $t = 0$  so, dass  $p(0) = 0$  ist. Welche Art von Leistung liegt vor?
- 7) Im Unterschied zu 6) wird je ein Widerstand  $R = 10 \Omega$  zwischen den Klemmen U-N, V-N, W-N als symmetrische Drehstromlast angeschlossen. Skizzieren Sie maßstäblich den zeitlichen Verlauf der in den Widerständen wirksamen gesamten Momentan-Leistung  $p_{ges}(t)$  und deren Mittelwert  $P_{ges}$ !

**Aufgabe T5 (Lösung):** Drehstromsystem

- 1) Zwischen den Klemmen U, V, W sind die verketteten Spannungen mit jeweils 400V nutzbar:  
 $U_{UV} = 400 \text{ V}, U_{VW} = 400 \text{ V}, U_{WU} = 400 \text{ V}$ .  
 Zwischen U, V, W und N sind die Strangspannungen  $400 / \sqrt{3} = \underline{\underline{231 \text{ V}}}$  nutzbar:  
 $U_{UN} = U_U = 231 \text{ V}, U_{VN} = U_V = 231 \text{ V}, U_{WN} = U_W = 231 \text{ V}$ .

2)

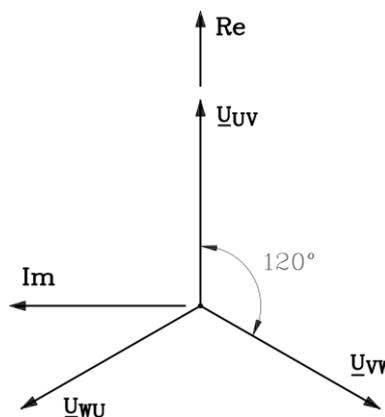


Bild T5.1: Symmetrisches Spannungssystem der verketteten Spannungen

$u_{vw}(t)$  eilt  $u_{uv}(t)$  um  $120^\circ$ el. nach,  $u_{wu}(t)$  eilt  $u_{uv}(t)$  um  $2 \times 120^\circ$ el. =  $240^\circ$ el. nach (Bild T5.1)

3)

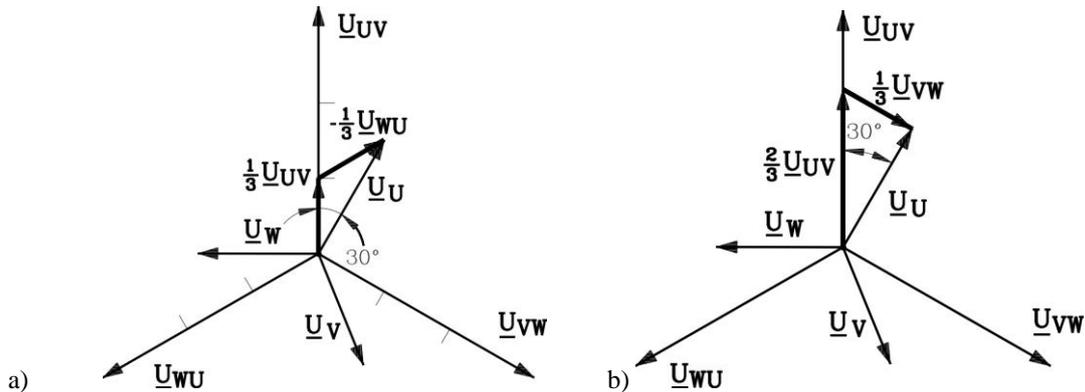


Bild T5.2: Ermittlung der Strangspannung aus den verketteten Spannungen mit den Varianten a) und b)

Darstellung der Strangspannungen durch verkettete Spannungen auf mehrere Arten möglich, wobei man sich zunutze macht, dass beim symmetrischen Drehstromsystem die Summe der drei Strang- und der drei verketteten Spannungen jeweils Null ist. Dies sieht man sofort, indem man z. B. die drei komplexen Zeiger  $\underline{U}_{UV}$ ,  $\underline{U}_{VW}$ ,  $\underline{U}_{WU}$  von Punkt 2) graphisch addiert. Rechnung für Strangspannung  $u_U(t)$ : z. B. Darstellungen Bild T5.2 a) und b):

Darstellung A:  $u_U - u_V = u_{UV}, u_V - u_W = u_{VW}, u_U + u_V + u_W = 0 \Rightarrow u_U = \frac{u_{VW} + 2 \cdot u_{UV}}{3}$ ,

Darstellung B: mit  $u_{UV} + u_{VW} + u_{WU} = 0 \Rightarrow u_U = \frac{-u_{UV} - u_{WU} + 2u_{UV}}{3} = \frac{u_{UV} - u_{WU}}{3}$ ,

Ergebnis:  $u_U = \frac{u_{VW} + 2 \cdot u_{UV}}{3} = \frac{u_{UV} - u_{WU}}{3}$ ,  $u_V = \frac{u_{WU} + 2 \cdot u_{VW}}{3} = \frac{u_{VW} - u_{UV}}{3}$ ,

$u_W = \frac{u_{UV} + 2 \cdot u_{WU}}{3} = \frac{u_{WU} - u_{VW}}{3}$ .

4)

Komplexe Rechnung:

Verkettete Spannungen:  $\underline{U}_{UV} = U_{UV} = U_{verk}, \underline{U}_{VW} = U_{verk} \cdot e^{-j2\pi/3}, \underline{U}_{WU} = U_{verk} \cdot e^{-j4\pi/3}$ .

Berechnung der Strangspannung  $u_U$  z. B. mit Darstellung A:

$\underline{U}_U = \frac{\underline{U}_{VW} + 2\underline{U}_{UV}}{3} = \frac{U_{verk}}{3} \cdot (e^{-j2\pi/3} + 2) = \frac{U_{verk}}{3} \cdot (\cos(2\pi/3) - j \sin(2\pi/3) + 2)$  mit

$\cos(\frac{2\pi}{3}) - j \sin(\frac{2\pi}{3}) + 2 = -\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 = \frac{3}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \cdot \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - j \frac{1}{2} \right) = \sqrt{3} \cdot \left( \cos(\frac{\pi}{6}) - j \sin(\frac{\pi}{6}) \right)$

folgt  $\underline{U}_U = \frac{U_{verk}}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot e^{-j\pi/6} = \frac{U_{verk}}{\sqrt{3}} \cdot e^{-j\pi/6}$ .

Ergebnis: Die Strangspannung  $u_U(t)$  eilt der verketteten Spannung  $u_{UV}(t)$  um  $30^\circ$ el. nach. Ihre Amplitude und ihr Effektivwert sind um den Faktor  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  kleiner als jene der verketteten Spannung.

5)

Der Zeitverlauf der Strang- und der verketteten Spannungen ist sinusförmig.

Effektivwert einer Sinusspannung:

$$u(t) = \hat{U} \sin(\omega t), \quad \omega = 2\pi f, \quad f = 1/T : U = u_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt},$$

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \frac{\hat{U}^2}{2} (1 - \cos(2\omega t)) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \frac{\hat{U}^2}{2} dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot T \cdot \frac{\hat{U}^2}{2}} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}.$$

Strangspannung: Amplitude:  $\hat{U}_{ph} = \sqrt{2} U_{ph} = \sqrt{2} \cdot 231 = \underline{\underline{326.7V}}$ .

verkettete Spannung: Amplitude:  $\hat{U}_{verk} = \sqrt{2} U_{verk} = \sqrt{2} \cdot 400 = \underline{\underline{565.7V}}$ .

6)

$$p(t) = p_V(t) = u_V(t) i_V(t) = \frac{u_V^2(t)}{R} = \frac{\hat{U}_V^2}{R} \sin^2(2\pi f t) = \frac{\hat{U}_V^2}{2R} (1 - \cos(4\pi f t)) = \frac{U_{ph}^2}{R} (1 - \cos(4\pi f t)),$$

$$\underline{\underline{p(t)}} = \frac{231^2}{10} \cdot (1 - \cos(2\pi \cdot 2 \cdot 50 \cdot t)) = \underline{\underline{5336.1W}} \cdot (1 - \cos(2\pi \cdot 100 \cdot t)),$$

$$\underline{\underline{P}} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{U_{ph}^2}{R} \cdot (1 - \cos(4\pi f t)) \cdot dt = \frac{U_{ph}^2}{R} = \underline{\underline{5336.1W}}.$$

Die Momentan-Leistung  $p(t)$  pulsiert sinusförmig mit doppelter Netzfrequenz 100 Hz zwischen den Werten 0 und 10672.2W um den Mittelwert 5336.1W. Dieser Mittelwert stellt die Wirkleistung dar, die im Widerstand in thermische Leistung (Erwärmung des Widerstands) umgesetzt wird.

Anmerkung: Bei einer Induktivität oder Kapazität ist der Mittelwert der Leistung Null: Die Amplitude der Momentanleistung heißt Blindleistung.

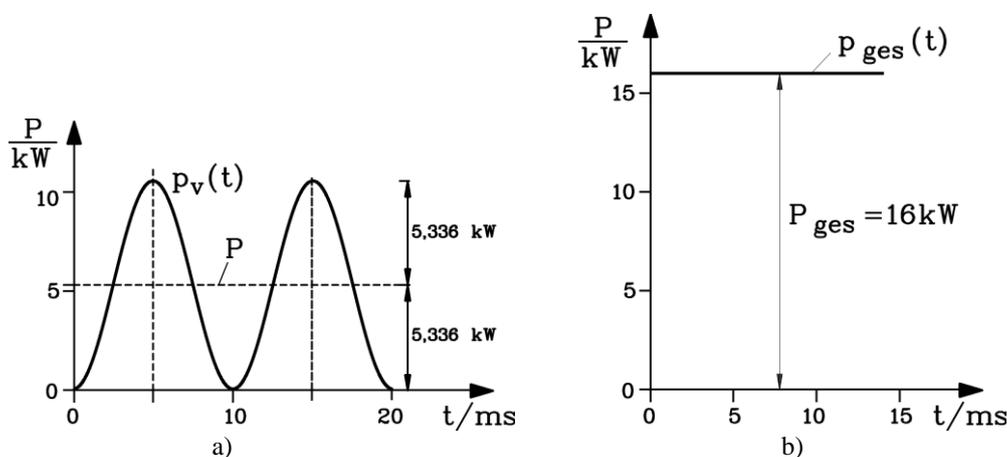


Bild T5.3: a) zu 6): Pulsierende Einphasen-Leistung im Strang V, b) zu 7) Konstante Drehstromleistung bei symmetrischem Drehstrom-Verbraucher

7)

$$\underline{\underline{P_{ges}(t)}} = p_U(t) + p_V(t) + p_W(t) = 3 \cdot \frac{U_{ph}^2}{R} = 3 \cdot \frac{231^2}{10} = 3 \cdot 5336.1 = \underline{\underline{16.0kW}}.$$

Die mit doppelter Netzfrequenz pulsierenden Leistungsanteile sind zueinander phasenverschoben und zwar – bezogen auf Strang U – in Strang V um  $240^\circ$ el. und im Strang

W um  $480^\circ\text{el.}$ , so dass deren Summe stets Null ist. Es verbleibt somit die Summe der drei

$$\text{Mittelwerte je Strang: } \underline{\underline{P_{ges}}} = \frac{1}{T} \int_0^T p_{ges}(t) \cdot dt = 3P = \underline{\underline{16.0kW}}.$$

Die Momentanleistung  $p_{ges}(t)$ , die in den drei Widerständen umgesetzt wird, ist zeitlich konstant und daher gleichzeitig der Mittelwert  $P_{ges}$ , der die Wirkleistung darstellt, die in den Widerständen in thermische Leistung (Heizen!) umgewandelt wird.

**Aufgabe T6:** Einphasentransformator - Induktivitäten

Der in Bild T6.1 mit den Hauptabmessungen dargestellte Einphasentransformator hat einen geblechten Eisenkern (Querschnitt  $A = 80 \times 80 \text{ mm}^2$ ) aus kaltgewalztem, kornorientierten Elektroblech mit einer Werkstoffkennlinie  $B(H)$  gemäß Bild T6.2, Kurve 2. Primär- und Sekundärspule haben die Windungszahlen  $N_1 = 100$ ,  $N_2 = 10$  und die ohm'schen Widerstände  $R_1 = 16 \text{ m}\Omega$  und  $R_2 = 0.13 \text{ m}\Omega$ . Die magnetische Flussdichte im Eisenkern beträgt  $B_{Fe} = 1.7 \text{ T}$ .

- 1) Wie groß ist der Hauptfluss  $\Phi_h$ ?
- 2) Bestimmen Sie die magnetische Feldstärke  $H_{Fe}$  und die Eisenpermeabilität  $\mu_{Fe}$  !
- 3) Wie groß ist die Gegeninduktivität  $M$  zwischen Primär- und Sekundärspule?
- 4) Bestimmen Sie die primäre und sekundäre Hauptinduktivität  $L_{1h}$ ,  $L_{2h}$  !
- 5) Berechnen Sie die primäre und sekundäre Streuinduktivität  $L_{1\sigma}$ ,  $L_{2\sigma}$ , wenn das Verhältnis Streufluss/Hauptfluss wie folgt ist: Bei  $I_2 = 0$ :  $\Phi_{1\sigma} / \Phi_h = 0.001$ , bei  $I_1 = 0$ :  $\Phi_{2\sigma} / \Phi_h = 0.001$ .
- 6) Geben Sie das elektrische T-Ersatzschaltbild mit auf die Primärseite umgerechneten Parametern an: a) für beliebige Zeitverläufe von  $u$  und  $i$ , b) für sinusförmige Zeitverläufe.

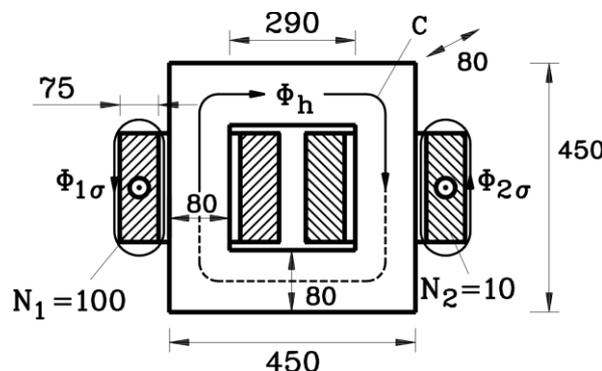


Bild T6.1: Einphasentransformator in einfachster Bauform (technisch gängige Bauformen siehe Foliensatz)

**Aufgabe T6 (Lösung):** Einphasentransformator - Induktivitäten

- 1)
 

Querschnittsfläche:  $A_{Fe} = 80 \times 80 = 6400 \text{ mm}^2$ . Magnetischer Hauptfluss im Eisenkern:

$$\underline{\underline{\Phi_h}} = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = B_{Fe} A_{Fe} = 1.7 \cdot 6400 \cdot 10^{-6} = \underline{\underline{10.88 \text{ mWb}}}.$$
- 2)
 

Im Eisenblech gilt:  $B_{Fe} = \mu_{Fe} (H_{Fe}) = 1.7 \text{ T}$ .

Die Kennlinie 2 von Bild T6.2 liefert  $\underline{\underline{H_{Fe}}} = 1.5 \text{ A/cm} = \underline{\underline{150 \text{ A/m}}}$ .

Eisenpermeabilität:  $\underline{\underline{\mu_{Fe}}} = B_{Fe} / H_{Fe} = 1.7 / 150 = \underline{\underline{0.0113 \text{ Vs/(Am)}}} = \underline{\underline{9019 \mu_0}}$ .

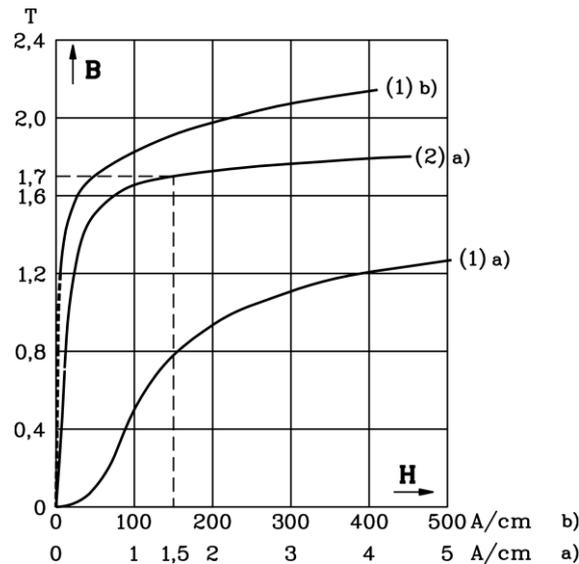


Bild T6.2: Gleichstrom-Magnetisierungskurven (Achtung: Skala b) gegenüber Skala a) um 1/100 gestaucht)

3)

Die Gegeninduktivität ist der Verhältnissfaktor zwischen dem mit der Spule 2 verketteten Fluss und dem in der Spule 1 erregenden Strom:

$$M = M_{21} = \frac{\psi_2(t)}{i_1(t)} = \frac{\hat{\Psi}_2 \sin(2\pi f \cdot t)}{\hat{I}_1 \sin(2\pi f \cdot t)} = \frac{\hat{\Psi}_2}{\hat{I}_1} = \frac{N_2 \Phi_h}{\hat{I}_1}$$

Mit dem Ampère'schen Durchflutungssatz längs einer geschlossenen Kurve C im Eisenkreis bei stromdurchflossener Primärspule und stromloser Sekundärspule folgt:

$$\oint_C \vec{H}_{Fe}(t) \cdot d\vec{s} = H_{Fe}(t) \cdot l \Rightarrow H_{Fe}(t) = N_1 i_1(t) / l$$

$$\Phi_h = B_{Fe} \cdot A_{Fe} = A_{Fe} \mu_{Fe} H_{Fe} = \frac{A_{Fe} \mu_{Fe} N_1 \hat{I}_1}{l} = A_h N_1 \hat{I}_1$$

Länge der Kurve C:  $l = 4 \cdot (450 - 80) = 1480 \text{ mm}$ ,

$$M = N_1 N_2 A_h = N_1 N_2 \mu_{Fe} \frac{A_{Fe}}{l} = 100 \cdot 10 \cdot 0.0113 \cdot \frac{6400 \cdot 10^{-6}}{1.480} = 48.86 \text{ mH}$$

4)

Die Hauptinduktivität ist die Selbstinduktivität je Spule zufolge des mit der Spule verketteten und von ihr selbst erregten Hauptflusses.

$$\text{Primärspule: } L_{1h} = \frac{\psi_{1h}(t)}{i_1(t)} = \frac{\hat{\Psi}_{1h} \sin(2\pi f \cdot t)}{\hat{I}_1 \sin(2\pi f \cdot t)} = \frac{\hat{\Psi}_{1h}}{\hat{I}_1} = \frac{N_1 \Phi_h}{\hat{I}_1}$$

$$L_{1h} = N_1^2 A_h = N_1^2 \mu_{Fe} \frac{A_{Fe}}{l} = \frac{N_1}{N_2} \cdot M = \frac{100}{10} \cdot 48.86 \cdot 10^{-3} = 488.6 \text{ mH}$$

$$\text{Sekundärspule: } L_{2h} = N_2^2 A_h = N_2^2 \mu_{Fe} \frac{A_{Fe}}{l} = \frac{N_2}{N_1} \cdot M = \frac{10}{100} \cdot 48.86 \cdot 10^{-3} = 4.886 \text{ mH}$$

5)

Die Streuinduktivität ist die Selbstinduktivität je Spule zufolge des mit der Spule verketteten Streuflusses.

$$\text{Primärspule: } L_{1\sigma} = \frac{\psi_{1\sigma}(t)}{i_1(t)} = \frac{\hat{\Psi}_{1\sigma} \sin(2\pi f \cdot t)}{\hat{I}_1 \sin(2\pi f \cdot t)} = \frac{\hat{\Psi}_{1\sigma}}{\hat{I}_1} = \frac{N_1 \Phi_{1\sigma}}{\hat{I}_1}$$

Mit  $\frac{\Phi_{1\sigma}}{\Phi_h} = \frac{A_{1\sigma} N_1 \hat{I}_1}{A_h N_1 \hat{I}_1} = \frac{A_{1\sigma}}{A_h} = 0.001$  folgt:

$$L_{1\sigma} = \frac{N_1}{\hat{I}_1} \frac{A_{1\sigma}}{A_h} \Phi_h = \frac{A_{1\sigma}}{A_h} \frac{N_1 \Phi_h}{\hat{I}_1} = \frac{A_{1\sigma}}{A_h} L_{1h} = 0.001 \cdot 488.6 \cdot 10^{-3} = 0.4886 \text{ mH}.$$

Sekundärspule:

$$L_{2\sigma} = \frac{N_2}{\hat{I}_2} \frac{A_{2\sigma}}{A_h} \Phi_h = \frac{A_{2\sigma}}{A_h} \frac{N_2 \Phi_h}{\hat{I}_2} = \frac{A_{2\sigma}}{A_h} L_{2h} = 0.001 \cdot 4.886 \cdot 10^{-3} = 0.004886 \text{ mH}.$$

6)

T-Ersatzschaltbild Bild T6.3:  $\ddot{u} = N_1 / N_2 = 100 / 10 = 10$ .

Parameter:  $R_1 = 16 \text{ m}\Omega, R'_2 = \ddot{u}^2 R_2 = 10^2 \cdot 0.13 \cdot 10^{-3} = 13 \text{ m}\Omega,$

$L_{1\sigma} = 0.4886 \text{ mH}, L_h = L_{1h} = \ddot{u} M = 488.6 \text{ mH},$

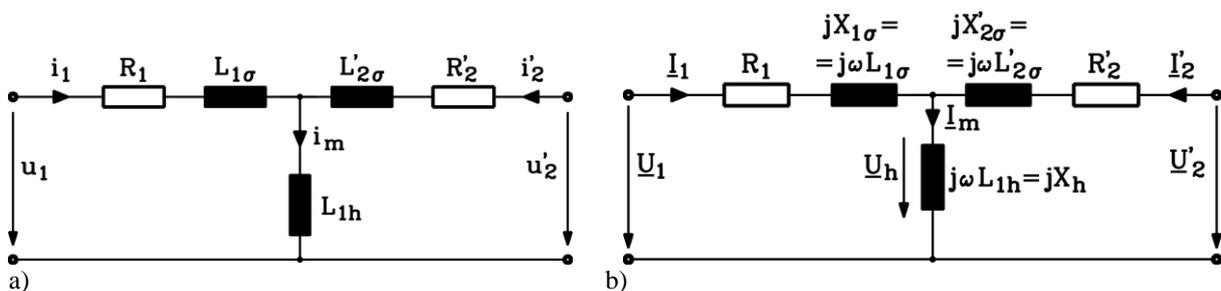
$L'_{2h} = \ddot{u}^2 L_{2h} = 10^2 \cdot 4.886 \cdot 10^{-3} = 488.6 \text{ mH} = L_h,$

$L'_{2\sigma} = \ddot{u}^2 L_{2\sigma} = 10^2 \cdot 0.004886 \cdot 10^{-3} = 0.4886 \text{ mH}.$

Reaktanzen:

$X_{1\sigma} = 2\pi f L_{1\sigma} = 2\pi \cdot 50 \cdot 0.4886 \cdot 10^{-3} = 0.1535 \Omega, X_h = 2\pi f L_h = 2\pi \cdot 50 \cdot 488.6 \cdot 10^{-3} = 153.5 \Omega,$

$X'_{2\sigma} = 2\pi f L'_{2\sigma} = 2\pi \cdot 50 \cdot 0.4886 \cdot 10^{-3} = 0.1535 \Omega.$



**Bild T6.3:** T-Ersatzschaltbild des Einphasentransformators für a) zeitlich beliebig veränderliche Vorgänge, b) zeitlich sinusförmige Vorgänge

**Aufgabe T7:** Einphasentransformator – Spannungen, Ströme

Ein Einphasentransformator hat folgende Ersatzschaltbild-Parameter bei 50 Hz:

$R_1 = 16 \text{ m}\Omega, R'_2 = 13 \text{ m}\Omega, X_{1\sigma} = 0.1535 \Omega, X_h = 153.5 \Omega, X'_{2\sigma} = 0.1535 \Omega, \ddot{u} = 10$ . Der Nennwert der Primärspannung ist  $U_{IN} = 350 \text{ V}$  (Effektivwert). Der Nennstrom beträgt primär  $I_{IN} = 80 \text{ A}$ . Der Transformator wird primär mit Nennspannung betrieben.

- 1) Berechnen Sie die Nennscheinleistung  $S_N$  ! Wie groß sind Nennspannung  $U_{2N}$  und Nennstrom  $I_{2N}$  sekundär?
- 2) Bestimmen Sie den Effektivwert des Primär-Leerlaufstroms  $I_{10}$  !
- 3) Wie groß ist die an den offenen Klemmen der Sekundärspule gemessene Spannung  $U_{20}$  ?
- 4) Der Transformator wird sekundär kurz geschlossen. Wie groß ist der Strom  $I_{1k}$  primär und  $I_{2k}$  sekundär?
- 5) Berechnen Sie die bezogene Kurzschlussspannung  $u_k$ !
- 6) Wie groß ist der Wirkungsgrad  $\eta$  des Transformators bei  $\cos \varphi_2 = 1$  und Nennstrom, wenn  $P_{Fe} = 160 \text{ W}$  ist?

**Aufgabe T7 (Lösung):** Einphasentransformator – Spannungen, Ströme

1)

$$\underline{S}_N = U_{1N} I_{1N} = 350 \cdot 80 = \underline{28kVA}, \underline{U}_{2N} = U_{1N} / \ddot{u} = 350 / 10 = \underline{35V}, \underline{I}_{2N} = I_{1N} \ddot{u} = 80 \cdot 10 = \underline{800A}$$

2)

$$\underline{I}_{10} = \frac{\underline{U}_1}{R_1 + j(X_{1\sigma} + X_h)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{I}_{10} = \frac{U_1}{\sqrt{R_1^2 + (X_{1\sigma} + X_h)^2}} = \frac{350}{\sqrt{0.016^2 + (0.1535 + 153.5)^2}} = \frac{350}{153.65} = \underline{2.28A}$$

3)

$$\underline{U}'_{20} = jX_h \underline{I}_m = jX_h \underline{I}_{10} \Rightarrow U'_{20} = X_h I_{10} = 153.5 \cdot 2.28 = 349.65V$$

$$\Rightarrow \underline{U}_{20} = U'_{20} / \ddot{u} = 349.65 / 10 = \underline{34.97V}$$

Die sekundäre Leerlaufspannung weicht nur um 0.09% von der Nennspannung 35 V ab.

4)

Bei Kurzschluss sekundär liegt  $X'_{2\sigma}$  parallel zu  $X_h$  ( $R_2'$  vernachlässigt), wobei  $X_h \gg X'_{2\sigma}$  ist:

$$X_h \parallel X'_{2\sigma} = \frac{X_h X'_{2\sigma}}{X_h + X'_{2\sigma}} = \frac{0.1535 \cdot 153.5}{0.1535 + 153.5} = 0.1533 \Omega \approx X'_{2\sigma}$$

Folglich kann der Einfluss von  $X_h$  vernachlässigt werden. Daraus folgt das vereinfachte

Ersatzschaltbild (siehe Skript):  $\underline{I}_{1k} \cong \frac{\underline{U}_1}{R_1 + R_2' + j(X_{1\sigma} + X'_{2\sigma})}$

$$\underline{I}_{1k} = \frac{U_1}{\sqrt{(R_1 + R_2')^2 + (X_{1\sigma} + X'_{2\sigma})^2}} = \frac{350}{\sqrt{(0.016 + 0.013)^2 + (0.1535 + 0.1535)^2}} = \underline{1135A}$$

Wegen  $X_h \gg X'_{2\sigma}$  folgt:  $\underline{I}'_{2k} = -\underline{I}_{1k} \Rightarrow \underline{I}_{2k} = I'_{2k} \ddot{u} = 1135 \cdot 10 = \underline{11350A}$

5)

Mit  $u_R = \frac{(R_1 + R_2') I_{1N}}{U_{1N}} = \frac{(0.016 + 0.013) \cdot 80}{350} = 0.0066$  und

$$u_S = \frac{(X_{1\sigma} + X'_{2\sigma}) I_{1N}}{U_{1N}} = \frac{(0.1535 + 0.1535) \cdot 80}{350} = 0.0702 \text{ folgt:}$$

$$\underline{u}_k = \sqrt{u_R^2 + u_S^2} = \sqrt{0.0066^2 + 0.0707^2} = \underline{0.0705}$$

6)

$$P_{Cu} = (R_1 + R_2') I_{1N}^2 = (0.016 + 0.013) \cdot 80^2 = 185.6W$$

$$P_{Fe} = 160W \Rightarrow P_d = P_{Cu} + P_{Fe} = 185.6 + 160 = 345.6W$$

$$\eta = \frac{P_{out}}{P_{in}} = \frac{P_{out}}{P_{out} + P_d} = \frac{S_N \cos \varphi_2}{S_N \cos \varphi_2 + P_d} = \frac{28000 \cdot 1}{28000 \cdot 1 + 345.6} = \underline{98.78\%}$$

**Aufgabe T8:** Drehstromtransformator – Schaltgruppe, Stundenziffer

Ein Drehstromtransformator hat folgende Leistungsschilddaten:

Nennscheinleistung  $S_N = 630 \text{ kVA}$ , verkettete Nennspannungen:  $U_{1N} = 10.5 \text{ kV}$ ,  $U_{2N} = 400 \text{ V}$ , Betriebsfrequenz:  $f = 50 \text{ Hz}$ , Schaltgruppe: Yy6,

Ersatzschaltbildparameter:  $R_1 + R'_2 = 0.875 \Omega$ ,  $X_{1\sigma} + X'_{2\sigma} = 10.5 \Omega$

- 1) Skizzieren Sie die allpolige Schaltung des Transformators. Bezeichnen Sie die Klemmen!
- 2) Begründen Sie die Bezeichnung Yy6 !
- 3) Berechnen Sie den primären und sekundären Nennstrom je Strang  $I_{1N}$ ,  $I_{2N}$  !
- 4) Wie groß ist das Übersetzungsverhältnis  $\ddot{u}$ ?
- 5) Bestimmen Sie die bezogenen Spannungsfälle  $u_R$ ,  $u_S$ ,  $u_k$ !

**Aufgabe T8 (Lösung):** Drehstromtransformator – Schaltgruppe, Stundenziffer

1)



Bild T8.1: Schaltung Yy6: a) Alte, b) neue Klemmenbezeichnung für Ober- und Unterspannungsseite

2)

Die Strangspannungen je Schenkel (z. B. U) werden auf Grund der gegenüber der Oberspannungsseite (U-X) vertauschten Reihenfolge der Anschlussklemmen (x-u statt u-x) unterspannungsseitig gegenphasig zur Oberspannungsseite induziert. Daher eilt  $u_u$  der Spannung  $u_U$  um  $\underline{6 \times 30 = 180^\circ}$ el. nach. Dabei wird die Phasenverschiebung durch die Stundenziffer 6 angegeben, während Yy bedeutet, dass die drei Wicklungsstränge der Ober- und der Unterspannungsseite jeweils in Stern geschaltet sind.

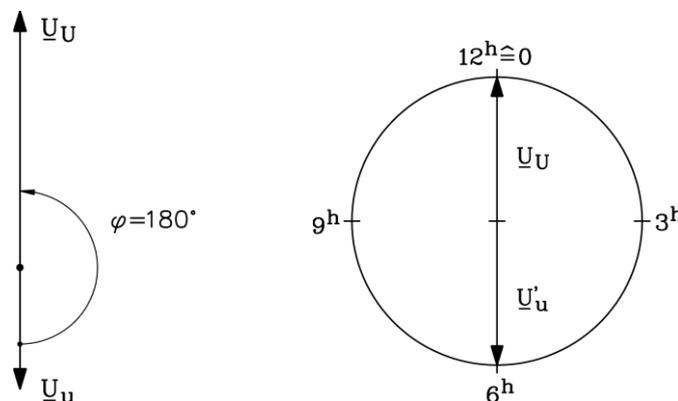


Bild T8.2: Phasenverschiebung 180° (links) als Stundenziffer 6 (rechts) dargestellt

3)

$$S_N = 3U_{Nph}I_{Nph} = \sqrt{3}U_{Nverk}I_{Nph} \Rightarrow \underline{I_{1N}} = I_{1Nph} = \frac{S_N}{\sqrt{3}U_{1Nverk}} = \frac{630000}{\sqrt{3} \cdot 10500} = \underline{\underline{34.6A}}$$

$$\underline{I_{2N}} = I_{2Nph} = \frac{S_N}{\sqrt{3}U_{2Nverk}} = \frac{630000}{\sqrt{3} \cdot 400} = \underline{\underline{909.3A}}$$

4)

$$\ddot{u} = \frac{U_{1N}}{U_{2N}} = \frac{U_{1Nverk}}{U_{2Nverk}} = \frac{10500}{400} = \underline{\underline{26.25}}$$

5)

$$\underline{u_R} = \frac{(R_1 + R'_2)I_{1Nph}}{U_{1Nph}} = \frac{0.875 \cdot 34.6}{(10500 / \sqrt{3})} = \underline{0.005 = 0.5\%}$$

$$\underline{u_S} = \frac{(X_{1\sigma} + X'_{2\sigma})I_{1Nph}}{U_{1Nph}} = \frac{10.5 \cdot 34.6}{(10500 / \sqrt{3})} = \underline{0.06 = 6.0\%}$$

$$\underline{u_k} = \sqrt{u_R^2 + u_S^2} = \sqrt{0.005^2 + 0.06^2} = \underline{0.0602}$$

**Aufgabe T9:** Drehstromtransformator – Spannungsfall bei unterschiedlicher Last

Ein Drehstromtransformator mit  $S_N = 630 \text{ kVA}$ ,  $3 \times 10.5 \text{ kV} / 3 \times 400 \text{ V}$  (Effektivwert, verkettet),  $50 \text{ Hz}$ ,  $Yy6$ ,  $u_R = 0.5\%$ ,  $u_S = 6.0\%$ ,  $u_k = 6.02\%$ , liegt überspannungsseitig an  $10.5 \text{ kV}$  ("starres Netz") und wird sekundär mit Nennstrom belastet. Für die folgenden Fragestellungen kann  $u_R$  in guter Näherung gegenüber  $u_S$  vernachlässigt werden.

- 1) Wie groß ist der Effektivwert der sekundären verketteten Spannung  $U_{2verk}$ , wenn der Transformator induktiv belastet wird, so dass  $\cos \varphi_I = 0$  ist?
- 2) Um wieviel ist die sekundäre Spannung  $U_{2verk}$  bei Lastzustand 1) kleiner als bei sekundärem Leerlauf?
- 3) Skizzieren Sie zu 1) und 2) maßstäblich das Strom- und Spannungszeigerdiagramm je Strang!
- 4) Wie groß ist die sekundäre Spannung  $U_{2verk}$ , wenn – anders als bei 1) – die Belastung ohm'sch erfolgt, so daß  $\cos \varphi_I = 1$  ist?
- 5) Um wieviel ist die sekundäre Spannung  $U_{2verk}$  bei Lastzustand 3) kleiner als bei sekundärem Leerlauf?

**Aufgabe T9 (Lösung):** Drehstromtransformator – Spannungsfall bei unterschiedlicher Last

1)

$$u_R \ll u_S \Rightarrow u_k \cong u_S = (X_{1\sigma} + X'_{2\sigma})I_{1Nph} / U_{1Nph} = 0.06$$

$$U_{1Nph} = U_{1N} / \sqrt{3} = 10500 / \sqrt{3} = 6062.2 \text{ V}, I_{1Nph} = S_N / (3U_{1Nph}) = 630000 / (3 \cdot 6062.2) = 34.6 \text{ A}$$

$$X_{1\sigma} + X'_{2\sigma} = u_S \cdot U_{1Nph} / I_{1Nph} = 0.06 \cdot 6062.2 / 34.6 = 10.5 \Omega$$

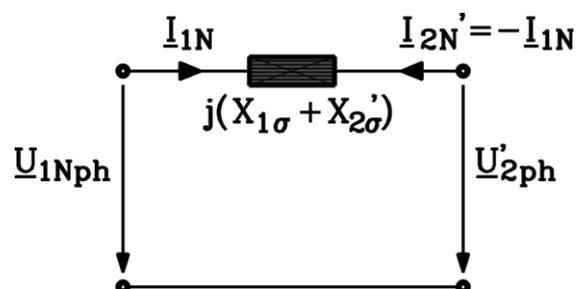


Bild T9.1: Ersatzschaltbild des Transformators bei sekundärer Belastung und Vernachlässigung von  $u_R$

$\cos \varphi_I = 0$  bedeutet, dass  $I_{Iph}$  der Spannung  $\underline{U}_{Iph}$  um  $90^\circ$  el. nacheilt:  $\underline{I}_1 = -jI_{1Nph}$ , wenn  $\underline{U}_{1Nph} = U_{1Nph}$  willkürlich in die reelle Achse gelegt wird:  $\underline{U}'_{2ph} = \underline{U}_{1Nph} - j(X_{1\sigma} + X'_{2\sigma})\underline{I}_1$

$$\underline{U}'_{2ph} = U_{1Nph} - j(X_{1\sigma} + X'_{2\sigma}) \cdot (-jI_{1Nph}) = U_{1Nph} - (X_{1\sigma} + X'_{2\sigma}) \cdot I_{1Nph},$$

$$\ddot{u} = U_{1Nverk} / U_{2Nverk} = 10500 / 400 = 26.25,$$

$$\underline{U}'_{2ph} = 6062.2 - 10.5 \cdot 34.6 = 5698.5V,$$

$$\underline{U}_{2verk} = \sqrt{3}U_{2ph} = \sqrt{3}U'_{2ph} / \ddot{u} = \sqrt{3} \cdot 5698.5 / 26.25 = \underline{\underline{376.0V}}.$$

2)

Leerlauf sekundär:  $I_2 = 0$ .

Da der Magnetisierungsstrom vernachlässigt wird (siehe Ersatzschaltbild Bild T9.1), gilt:

$$\underline{U}'_{2ph,0} = U_{1Nph} \Rightarrow U_{2Nverk,0} = \sqrt{3} \cdot U_{2ph,0} = \sqrt{3} \cdot U_{1Nph} / \ddot{u} = 10500 / 26.25 = 400V.$$

Spannungsdifferenz zwischen Lastzustand 1) und Leerlauf 2):  $\frac{376 - 400}{400} = -0.06 = \underline{\underline{-6\%}}$ .

Die Sekundärspannung ist bei rein induktiver Belastung mit Nennstrom um 6% kleiner als die Leerlaufspannung. Dieser prozentuale Spannungsfall entspricht der Kurzschlussspannung  $u_k$ .

3)

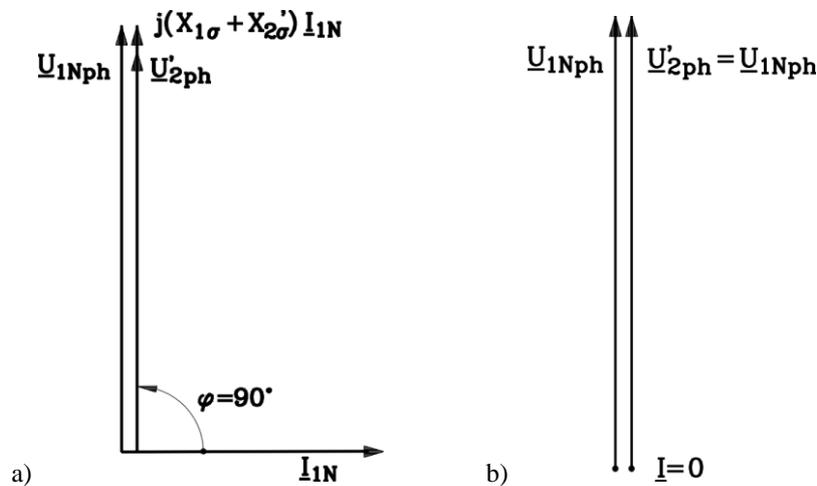


Bild T9.2: Spannungs- und Stromzeigerdiagramm je Strang: a) induktive Last 1), b) Leerlauf 2)

4)

$\cos\varphi_l = 1$  bedeutet, dass  $\underline{I}_{lph}$  mit der Spannung  $\underline{U}_{lph}$  in Phase ist:  $\underline{I}_1 = I_{1Nph}$ , wenn  $\underline{U}_{1Nph} = U_{1Nph}$  willkürlich in die reelle Achse gelegt wird.

$$\underline{U}'_{2ph} = \underline{U}_{1Nph} - j(X_{1\sigma} + X'_{2\sigma}) \underline{I}_1 = U_{1Nph} - j(X_{1\sigma} + X'_{2\sigma}) \cdot I_{1Nph},$$

$$\underline{U}'_{2ph} = 6062.2 - j \cdot 10.5 \cdot 34.6 = 6062.2 - j363.7V,$$

$$\underline{U}_{2verk} = \sqrt{3}U_{2ph} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{6062.2^2 + 363.7^2} / 26.25 = \underline{\underline{400.7V}}.$$

5)

Spannungsdifferenz zwischen Lastzustand 4) und Leerlauf 2):  $\frac{400.7 - 400}{400} = 0.0018 = \underline{\underline{0.18\%}}$

Die Sekundärspannung ist bei rein *ohm'scher* Belastung des Transformators mit Nennstrom um 0.18% größer als die Leerlaufspannung, also nahezu gleich groß.

### Aufgabe T10: Einphasiger Trenntransformator

Ein kleiner Einphasentransformator wird als Trenntransformator eingesetzt und hat folgende Daten:  $U_{1N} = 220V$ ,  $U_{2N} = 220V$ ,  $S_N = 200VA$ ,  $f_N = 50Hz$ ,  $u_k = 0.1$ ,  $u_R = 0.06$ .

- 1) Berechnen Sie die Nennströme  $I_{1N}$  und  $I_{2N}$  und das Übersetzungsverhältnis  $\ddot{u}$ .
- 2) Wie groß ist der bezogene induktive Spannungsfall  $u_S$ ?
- 3) Bestimmen Sie  $R_k = R_1 + R'_2$ ,  $L_k = X_k / \omega$  und den Wirkungsgrad  $\eta_N$  des Transformators bei  $I_2 = I_{2N}$ ,  $U_2 = U_{2N}$  und  $\cos \varphi_1 = 1$ , wenn die Ummagnetisierungsverluste  $P_{Fe} = 10 \text{ W}$  betragen.
- 4) Auf der Sekundärseite tritt ein Klemmenkurzschluss auf. Wie groß sind die effektiven Dauerkurzschlussströme  $I_{1k}$ ,  $I_{2k}$  auf der Primär- und Sekundärseite? Nehmen Sie  $R_{Fe} \rightarrow \infty$ ,  $X_h \rightarrow \infty$  an!
- 5) Wie groß sind  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $X_{1\sigma}$  und  $X_{2\sigma}$ ? Wie groß ist die Kurzschlussspannung  $u_k$ ?

**Aufgabe T10 (Lösung):** Einphasiger Trenntransformator

1)

$$I_{1N} = I_{2N} = S_N / U_{1N} = 200 / 220 = \underline{0.01 \text{ A}}, \quad \ddot{u} = U_{1N} / U_{2N} = 220 / 220 = \underline{1}.$$

2)

$$u_S = \sqrt{u_k^2 - u_R^2} = \sqrt{0.1^2 - 0.06^2} = \underline{0.08}.$$

3)

$$R_k = u_R \cdot U_{1N} / I_{1N} = 0.06 \cdot 220 / 0.91 = \underline{14.5 \Omega},$$

$$X_k = u_S \cdot (U_{1N} / I_{1N}) = 0.08 \cdot (220 / 0.91) = 19.34 \Omega,$$

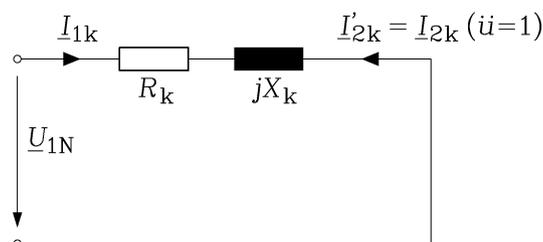
$$L_k = X_k / (2\pi f_N) = 19.34 / (2\pi 50) = 19.34 \Omega / 314.15 \text{ s}^{-1} = \underline{61.56 \text{ mH}},$$

$$P_{Cu} = (R_1 + R'_2) \cdot I_{1N}^2 = R_k \cdot I_{1N}^2 = 14.5 \cdot 0.91^2 = 12.0 \text{ W}, \quad P_2 = S_N \cdot \cos \varphi_1 = 200 \cdot 1 = 200 \text{ W},$$

$$\eta_N = P_2 / (P_2 + P_{Cu} + P_{Fe}) = 200 / (200 + 12 + 10) = \underline{0.9} = \underline{90.0\%}.$$

4)

Gemäß Bild T10.1 gilt:  $I_{1k} = I_{2k} = \frac{U_{1N}}{\sqrt{R_k^2 + X_k^2}} = \frac{I_{1N}}{u_k} = \frac{0.91}{0.1} = \underline{9.1 \text{ A}}$



**Bild T10.1:** Ersatzschaltbild des sekundär kurzgeschlossenen Einphasentransformators für  $R_{Fe} \rightarrow \infty$ ,  $X_h \rightarrow \infty$

5)

$\ddot{u} = 1$ : Primär- und Sekundärwicklung sind etwa identisch aufgebaut, daher

$$R_1 = R'_2 = R_2 \cdot \ddot{u}^2 = R_2 \cdot 1 = R_2, \quad R_1 = R_2 = R_k / 2 = 14.5 / 2 = \underline{7.25 \Omega},$$

$$X_{1\sigma} = X'_{2\sigma} = X_{2\sigma} \cdot \ddot{u}^2 = X_{2\sigma} \cdot 1 = X_{2\sigma}, \quad X_{1\sigma} = X'_{2\sigma} = X_k / 2 = 19.34 / 2 = \underline{9.67 \Omega},$$

$$U_k = u_k \cdot U_{1N} = 0.1 \cdot 220 = \underline{22 \text{ V}}.$$

**Aufgabe T11:** Einphasiger Verteiltransformator

Ein Einphasentransformator im Verteilnetz einer Fabrik hat die Leistungsschilddaten:

$$U_{1N} / U_{2N} = 20 \text{ kV} / 0.66 \text{ kV}, \quad S_N = 250 \text{ kVA}, \quad f_N = 50 \text{ Hz}, \quad u_k = 7.5 \%$$

Der Kurzschlussversuch bei Nennstrom  $I_1 = I_{1N}$  lieferte die Verluste  $P_k = 4 \text{ kW}$ .

- 1) Berechnen Sie die Nennströme  $I_{1N}$ ,  $I_{2N}$  und das Übersetzungsverhältnis  $\ddot{u}$ .
- 2) Berechnen Sie die primäre Kurzschlussspannung  $U_k$  und den dabei auftretenden Leistungsfaktor  $\cos\varphi_k$ !
- 3) Wie groß ist der Dauerkurzschlussstrom  $I_{1k}$  bei Nennspannung?
- 4) Berechnen Sie die Serieneratzimpedanzen  $R_k = R_1 + R'_2$ ,  $X_k = X_{1\sigma} + X'_{2\sigma}$ ,  $L_{1\sigma} + L'_{2\sigma}$  sowie  $u_R$ ,  $u_S$ !
- 5) Wie groß ist die Sekundärspannung  $U_2$  bei rein induktivem Primärstrom  $I_{1N}$ ,  $\cos\varphi_1 = 0$  induktiv,  $U_1 = U_{1N}$ ? Nehmen Sie dazu an:  $L_h \rightarrow \infty$ ,  $R_{Fe} \rightarrow \infty$ , und den Spannungszeiger  $U_1$  reell! Wie groß ist der Spannungseinbruch in Prozent gegenüber der Nennspannung?

**Aufgabe T11 (Lösung):** Einphasiger Verteiltransformator

1)  
 $I_{1N} = S_N / U_{1N} = 250000 / 20000 = \underline{12.5A}$ ,  $I_{2N} = S_N / U_{2N} = 250000 / 660 = \underline{378.8A}$ ,  
 $\ddot{u} = U_{1N} / U_{2N} = 20000 / 660 = \underline{30.3}$

2)  
 $U_k = u_k \cdot U_{1N} = 0.075 \cdot 20000 = \underline{1500V}$ ,  
 $\cos\varphi_k = P_k / S_k = P_k / (U_k \cdot I_{1N}) = 4000 / (1500 \cdot 12.5) = \underline{0.213}$ .

3)  
 $I_{1k} = I_{1N} / u_k = 12.5 / 0.075 = \underline{166.67A}$ : 13.3-facher Nennstrom!

4)  
 $P_k = R_k \cdot I_{1N}^2 \Rightarrow R_k = P_k / I_{1N}^2 = 4000 / 12.5^2 = \underline{25.6\Omega}$ ,  
 $u_R = R_k \cdot I_{1N} / U_{1N} = 25.6 \cdot 12.5 / 20000 = \underline{0.016} = \underline{1.6\%}$ ,  
 $u_S = \sqrt{u_k^2 - u_R^2} = \sqrt{0.075^2 - 0.016^2} = \underline{0.0733}$ ,  
 $X_k = u_S \cdot U_{1N} / I_{1N} = 0.0733 \cdot 20000 / 12.5 = \underline{117.24\Omega}$ ,  
 $L_{1\sigma} + L'_{2\sigma} = X_k / (2\pi f_N) = 117.24 / (2\pi \cdot 50) = \underline{0.373H}$ .

5)  
 Gemäß Bild T11.1 a) für  $L_h \rightarrow \infty$ ,  $R_{Fe} \rightarrow \infty$  folgt Bild T11.1 b):  $\underline{U}_1 = (R_k + jX_k) \cdot \underline{I}_{1N} + \underline{U}'_2$ ,  
 $\underline{U}'_2 = \underline{U}_1 - (R_k + jX_k) \cdot \underline{I}_{1N}$ .

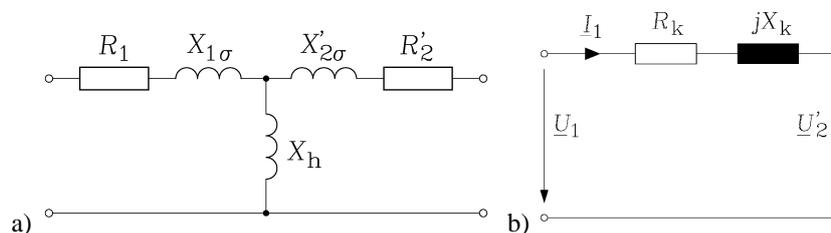


Bild T11.1: Ersatzschaltbild des Einphasentransformators für a)  $R_{Fe} \rightarrow \infty$ , b)  $R_{Fe} \rightarrow \infty$ ,  $X_h \rightarrow \infty$

Spannungszeiger  $U_1$  reell:  $\underline{U}'_2 = U_1 - (R_k + jX_k) \cdot \underline{I}_{1N}$ . Wegen  $\cos\varphi_1 = 0$  induktiv eilt der Primärstrom der Primärspannung um  $90^\circ$  nach:  $\underline{I}_{1N} = -j \cdot I_{1N}$ .

$$\underline{U}'_2 = U_1 + j \cdot (R_k + j \cdot X_k) \cdot I_{1N} = U_1 - I_{1N} \cdot X_k + j \cdot I_{1N} \cdot R_k,$$

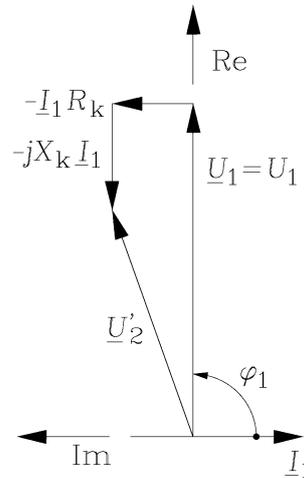
$$U'_2 = |\underline{U}'_2| = \sqrt{(U_1 - I_{1N} \cdot X_k)^2 + (I_{1N} \cdot R_k)^2},$$

$$U'_2 = \sqrt{(20000 - 12.5 \cdot 117.24)^2 + (12.5 \cdot 25.6)^2} = \sqrt{18534.5^2 + 320^2} = 18537.3V,$$

$$U_2 = U_2' / \ddot{u} = 18537.3 / 30.3 = \underline{611.8\text{V}}, \quad U_2 / U_{2N} = 611.8 / 660 = 0.927.$$

$$\text{Spannungseinbruch gegenüber } U_{2N}: 1 - U_2 / U_{2N} = 1 - 0.927 = \underline{0.073} = \underline{7.3\%}.$$

Anmerkung: Dies entspricht in etwa  $u_k = 7.5\%$  (vgl. Bild T11.2)!



**Bild T11.2:** Spannungs- und Strom-Zeigerdiagramm des Einphasentransformators gemäß Bild T11.1 b) ( $R_{Fe} \rightarrow \infty, X_h \rightarrow \infty$ ) für induktiven Primärstrom  $I_1$

**Aufgabe T12:** Einphasen-Transformator einer Drehstrombank

Ein Einphasentransformator einer Drehstrombank in den USA hat die Daten  $S_N = 600 \text{ MVA}$ ,  $U_{1N} = 460 \text{ kV}$ ,  $U_{2N} = 120 \text{ kV}$ ,  $f_N = 60 \text{ Hz}$ . Die T-Ersatzschaltbildparameter sind  $R_1 = 3.5 \Omega$ ,  $L_{1\sigma} = 75 \text{ mH}$ ,  $L_h = 100 \text{ H}$ ,  $R_2 = 0.25 \Omega$ ,  $L_{2\sigma} = 5 \text{ mH}$ ,  $R_{Fe} \rightarrow \infty$ .

- 1) Berechnen Sie die beiden Nennströme  $I_{1N}$ ,  $I_{2N}$  und das Übersetzungsverhältnis  $\ddot{u}$ ! Zeichnen Sie das Ersatzschaltbild mit den Werten  $R_1$ ,  $R_2'$ ,  $X_{1\sigma}$ ,  $X_{2\sigma}'$  und  $X_h$ .
- 2) Wie groß ist der primäre Leerlaufstrom  $I_{10}$  bei  $U_1 = U_{1N}$  ( $I_2 = 0$ ) in Ampere und in Prozent des Nennstroms  $I_{1N}$ ?
- 3) Berechnen Sie  $R_k$ ,  $X_k$ ,  $u_R$ ,  $u_S$  und  $u_k$ !
- 4) Wie groß ist  $U_2$  bei rein kapazitivem Primärstrom  $I_1 = I_{1N}$ ,  $\cos\phi_1 = 0$  kapazitiv,  $U_1 = U_{1N}$ , in Volt und in Prozent der sekundären Nennspannung? Wie groß ist die Spannungsüberhöhung in Prozent („Ferranti“-Effekt)? Nehmen Sie dazu  $L_h \rightarrow \infty$  an, und den Spannungszeiger  $U_1$  reell!

**Aufgabe T12 (Lösung):** Einphasen-Transformator einer Drehstrombank

1)

$$I_{1N} = S_N / U_{1N} = 600 \cdot 10^6 / (460 \cdot 10^3) = \underline{1304.3\text{A}},$$

$$I_{2N} = S_N / U_{2N} = 600 \cdot 10^6 / (120 \cdot 10^3) = \underline{5000\text{A}}, \quad \ddot{u} = U_{1N} / U_{2N} = 460 / 120 = \underline{3.83},$$

$$\omega_N = 2\pi f_N = 2\pi \cdot 60 = 377 \text{ /s}, \quad R_2' = R_2 \cdot \ddot{u}^2 = 0.25 \cdot 3.83^2 = \underline{3.67\Omega},$$

$$X_{1\sigma} = \omega_N L_{1\sigma} = 377 \cdot 0.075 = \underline{28.27\Omega}, \quad X_h = \omega_N L_h = 377 \cdot 100 = \underline{37700\Omega},$$

$$X_{2\sigma}' = \omega_N L_{2\sigma}' = \omega_N L_{2\sigma} \cdot \ddot{u}^2 = 377 \cdot 0.005 \cdot 3.83^2 = \underline{27.65\Omega}, \text{ ESB siehe Bild T12.1!}$$

2)

$$I_2 = 0: \quad I_2' = 0: \quad I_{10} = \frac{U_{1N}}{R_1 + j \cdot (X_{1\sigma} + X_h)},$$

$$I_{10} = |I_{10}| = \frac{U_{1N}}{\sqrt{R_1^2 + (X_{1\sigma} + X_h)^2}} = \frac{460000}{\sqrt{3.5^2 + (28.27 + 37700)^2}} = \underline{12.19A},$$

$$I_{10} / I_{1N} = 12.19 / 1304.3 = 0.0093 = \underline{0.93\%}$$

3)

$$u_R = (R_1 + R'_2) \cdot I_{1N} / U_{1N} = (3.5 + 3.67) \cdot 1304.3 / 460000 = \underline{0.02}$$

$$R_k = R_1 + R'_2 = 3.5 + 3.67 = \underline{7.17\Omega}$$

$$u_S = (X_{1\sigma} + X'_{2\sigma}) \cdot I_{1N} / U_{1N} = (28.27 + 27.56) \cdot 1304.3 / 460000 = \underline{0.1586}$$

$$X_k = X_{1\sigma} + X'_{2\sigma} = 28.27 + 27.56 = \underline{55.92\Omega}$$

$$u_k = \sqrt{u_R^2 + u_S^2} = \sqrt{0.02^2 + 0.1586^2} = \underline{0.16}$$

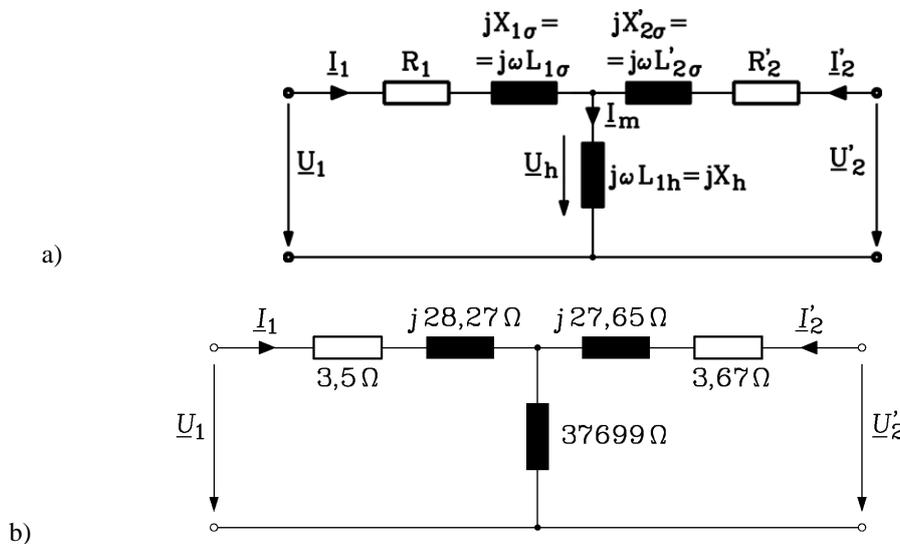


Bild T12.1: a) T-Ersatzschaltbild des Einphasentransformators für zeitlich sinusförmige Vorgänge mit b) den Zahlenwerten  $R_1 = 3.5 \Omega$ ,  $R'_2 = 3.67 \Omega$ ,  $X_{1\sigma} = 28.27 \Omega$ ,  $X_h = 37700 \Omega$ ,  $X'_{2\sigma} = 27.65 \Omega$ ,  $R_{Fe} \rightarrow \infty$ .

4)

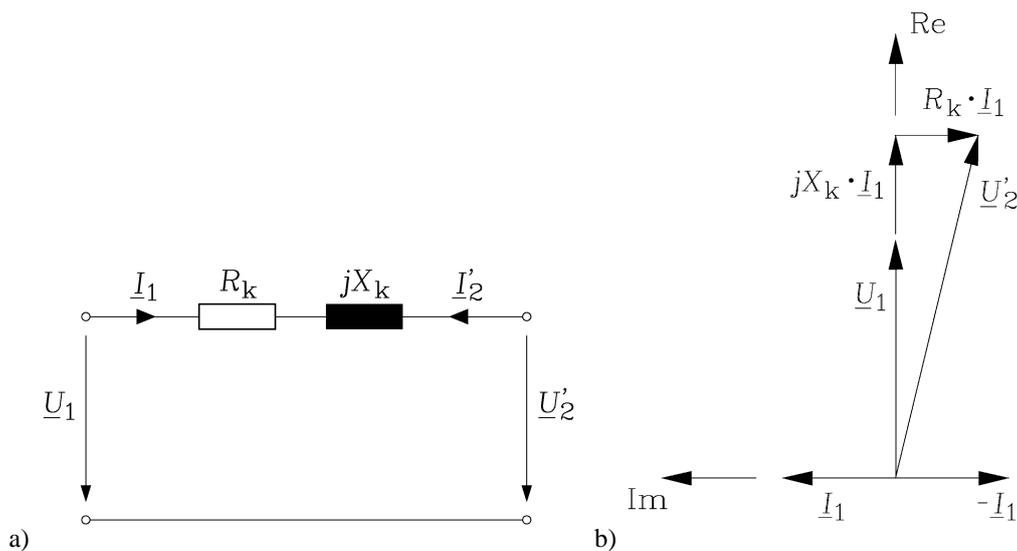


Bild T12.2: a) Ersatzschaltbild des Einphasentransformators für  $R_{Fe} \rightarrow \infty$ ,  $X_h \rightarrow \infty$ , b) Zugehöriges Spannungs- und Strom-Zeigerdiagramm für kapazitiven Primärstrom  $I_1$

$L_h \rightarrow \infty, R_{Fe} \rightarrow \infty$  und Spannungszeiger  $U_1$  reell:  $\underline{U}'_2 = U_1 - (R_k + jX_k) \cdot \underline{I}_{1N}$ .

Wegen  $\cos \varphi_1 = 0$  kapazitiv, eilt der Primärstrom der Primärspannung um  $90^\circ$  vor:

$$\underline{I}_{1N} = j \cdot I_{1N} \text{ (vgl. Bild T12.2)}$$

$$\underline{U}'_2 = U_1 - j \cdot (R_k + j \cdot X_k) \cdot I_{1N} = U_1 + I_{1N} \cdot X_k - j \cdot I_{1N} \cdot R_k$$

$$U'_2 = |\underline{U}'_2| = \sqrt{(U_1 + I_{1N} \cdot X_k)^2 + (I_{1N} \cdot R_k)^2}$$

$$U'_2 = \sqrt{(460000 + 1304.3 \cdot 55.92)^2 + (1304.3 \cdot 7.17)^2} = \sqrt{532936^2 + 9351.8^2} = 533018.5 \text{ V}$$

$$U_2 = U'_2 / \ddot{u} = 533018.5 / 3.83 = \underline{139169 \text{ V}}, U_2 / U_{2N} = 139169 / 120000 = 1.16$$

Spannungserhöhung gegenüber  $U_{2N}$ :  $U_2 / U_{2N} - 1 = 1.16 - 1 = \underline{0.16} = \underline{16\%}$

Anmerkung: Dies entspricht der Spannungszunahme um  $u_k = 16\%$  !

### Aufgabe T13: Verlustarmer Einphasen-Transformator

An einem speziell verlustarm ausgeführten Einphasentransformator  $S_N = 10 \text{ MVA}$ ,  $U_{1N}/U_{2N} = 30 \text{ kV}/6.3 \text{ kV}$ ,  $f_N = 50 \text{ Hz}$  wurden im Hochspannungs-Prüffeld folgende Messungen durchgeführt:

- Leerlaufmessung bei Speisung der Unterspannungsseite mit offenen Primärklemmen:  $U_2 = U_{2N}$ ,  $I_2 = I_{20} = 12,7 \text{ A}$ ,  $I_1 = 0$ ,  $P_0 = 20 \text{ kW}$ ,
- Kurzschlussmessung bei unterspannungsseitigem Klemmenkurzschluss:  $I_1 = I_{1N}$ ,  $U_k = 2700 \text{ V}$ ,  $P_k = 40 \text{ kW}$ .

- 1) Bestimmen Sie die Nennströme  $I_{1N}$ ,  $I_{2N}$  und das Übersetzungsverhältnis  $\ddot{u}$  sowie das Verhältnis  $N_1/N_2$ !
- 2) Bestimmen Sie  $u_k$ ,  $u_S$ ,  $u_R$  und  $R_k = R_1 + R'_2$  und  $X_k = X_{1\sigma} + X'_{2\sigma}$ !
- 3) Wie groß sind  $R_{Fe}$  und  $L_h$ , wenn Sie näherungsweise im Leerlauf den Einfluss von  $R_2$  und  $X_{2\sigma}$  vernachlässigen? Überprüfen Sie die Annahme  $R_k$  und  $X_k \ll X_h, R_{Fe}$  auf ihre Richtigkeit!
- 4) Wie groß ist der Magnetisierungsstrom  $I_m/I_{1N}$ ?
- 5) Geben Sie das Ersatzschaltbild an, wenn näherungsweise  $R_1 \cong R'_2$ ,  $X_{1\sigma} \cong X'_{2\sigma}$  angenommen wird!
- 6) Wie groß sind  $R_2$  und  $X_{2\sigma}$  sowie  $L_{1\sigma}$  und  $L_{2\sigma}$ ?
- 7) Wie groß wären der primäre und der sekundäre Dauerkurzschlussstrom  $I_{1k}$  und  $I_{2k}$  sowie  $I_{1k}/I_{1N}$  und  $I_{2k}/I_{2N}$ ?

### Aufgabe T13 (Lösung): Verlustarmer Einphasen-Transformator

1)

$$I_{1N} = S_N / U_{1N} = 10 \cdot 10^6 / (30 \cdot 10^3) = \underline{333.3 \text{ A}},$$

$$I_{2N} = S_N / U_{2N} = 10 \cdot 10^6 / (6.3 \cdot 10^3) = \underline{1587.3 \text{ A}}, \ddot{u} = U_{1N} / U_{2N} = 30 / 6.3 = \underline{4.76},$$

$$N_1 / N_2 = \ddot{u} = \underline{4.76}$$

2)

$$u_k = U_k / U_{1N} = 2700 / 30000 = \underline{0.09}, P_k = P_{Cu} = (R_1 + R'_2) \cdot I_{1N}^2 = R_k \cdot I_{1N}^2,$$

$$R_k = P_{Cu} / I_{1N}^2 = 40000 / 333.3^2 = \underline{0.36 \Omega}$$

$$P_k / S_N = R_k \cdot I_{1N}^2 / (U_{1N} I_{1N}) = R_k \cdot I_{1N} / U_{1N} = u_R = 40 \cdot 10^3 / 10 \cdot 10^6 = \underline{0.004}$$

$$u_S = \sqrt{u_k^2 - u_R^2} = \sqrt{0.09^2 - 0.004^2} = \underline{0.0899}$$

$$X_k = u_S \cdot U_{1N} / I_{1N} = 0.0899 \cdot 30000 / 333.3 = \underline{8.09\Omega}$$

3)

Leerlaufversuch auf der Sekundärseite:  $I_1 = 0$ . Wegen  $R_k$  und  $X_k \ll X_h, R_{Fe}$  werden der Einfluss von  $R_2$  und  $X_{2\sigma}$  vernachlässigt. Daher gilt mit  $\underline{I}_{Fe} + \underline{I}_m = \underline{I}'_{20}$ :

$$\underline{I}_{Fe} \cdot R_{Fe} = jX_h \cdot \underline{I}_m = \underline{U}'_{2N} \text{ und folglich}$$

$$P_0 = U_{2N}'^2 / R_{Fe} = \dot{u}^2 \cdot U_{2N}'^2 / R_{Fe} \Rightarrow R_{Fe} = \dot{u}^2 \cdot U_{2N}'^2 / P_0 = 4.76^2 \cdot 6300^2 / 20000 = \underline{44964\Omega}$$

$$\underline{I}'_{20} / \underline{U}'_{2N} = (\underline{I}_m / \underline{U}'_{2N}) + (\underline{I}_{Fe} / \underline{U}'_{2N}) = (-j / X_h) + (1 / R_{Fe})$$

$$|\underline{I}'_{20} / \underline{U}'_{2N}| = I'_{20} / U'_{2N} = \sqrt{(1 / X_h)^2 + (1 / R_{Fe})^2}$$

$$X_h = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{I_{20}}{\dot{u}^2 U_{2N}'}\right)^2 - \frac{1}{R_{Fe}^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{12.7}{4.76^2 \cdot 6300}\right)^2 - \frac{1}{44964^2}}} = 11608\Omega,$$

$$L_h = X_h / (2\pi f_N) = 11608 / (2\pi \cdot 50) = \underline{36.95H}$$

Kontrolle:  $X_h = 11608\Omega, R_{Fe} = 44964\Omega \gg X_k = 8.09\Omega, R_k = 0.36\Omega$  ist erfüllt.

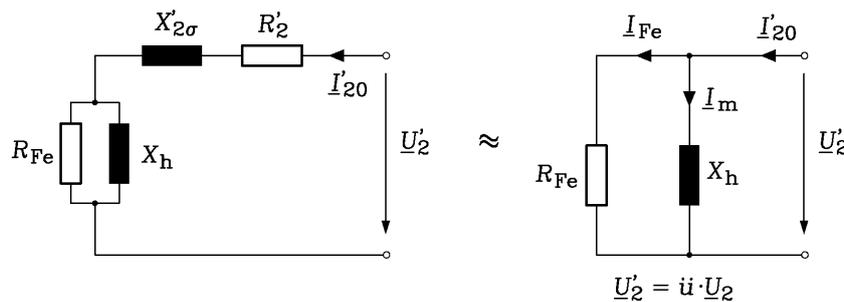


Bild T13.1: Ersatzschaltbild des Einphasentransformators für bei primärem Leerlauf und sekundärer Speisung, mit der Vernachlässigung von  $R_2$  und  $X_{2\sigma}$

4)

$$I_m = U_{2N}' / X_h \Rightarrow I_m / I_{1N} = U_{2N}' / (X_h \cdot I_{1N}) = U_{1N} / (X_h \cdot I_{1N}) = 30 \cdot 10^3 / (11608 \cdot 333.3) = \underline{0.0078} = \underline{0.78\%}$$

5)

$$R_1 = R_2' = R_k / 2 = 0.36 / 2 = \underline{0.18\Omega}, X_{1\sigma} = X_{2\sigma}' = X_k / 2 = 8.09 / 2 = \underline{4.045\Omega}, \text{ Bild T13.2!}$$

6)

$$R_2' = \dot{u}^2 R_2 \Rightarrow R_2 = R_2' / \dot{u}^2 = 0.18 / 4.76^2 = \underline{7.94m\Omega},$$

$$X_{2\sigma}' = \dot{u}^2 X_{2\sigma} \Rightarrow X_{2\sigma} = X_{2\sigma}' / \dot{u}^2 = 4.045 / 4.76^2 = \underline{0.179\Omega},$$

$$L_{1\sigma} = X_{1\sigma} / (2\pi f_N) = 4.045 / (2\pi \cdot 50) = \underline{12.87mH},$$

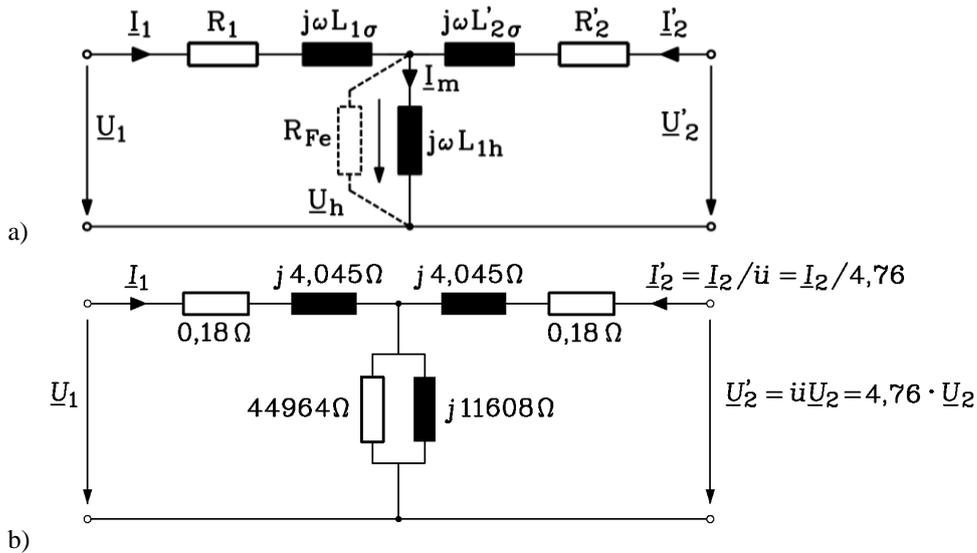
$$L_{2\sigma} = X_{2\sigma} / (2\pi f_N) = 0.179 / (2\pi \cdot 50) = \underline{0.568mH}.$$

7)

$$I_{1k} = I_{1N} / u_k = 333.3 / 0.09 = \underline{3703.3A}, I_{2k} = I_{2N} / u_k = 1587.3 / 0.09 = \underline{17636.7A}$$

$$I_{1k} / I_{1N} = 1 / u_k = 1 / 0.09 = \underline{11.1}: 11.1\text{-facher Nennstrom!}$$

$$I_{2k} / I_{2N} = 1 / u_k = 1 / 0.09 = \underline{11.1}.$$

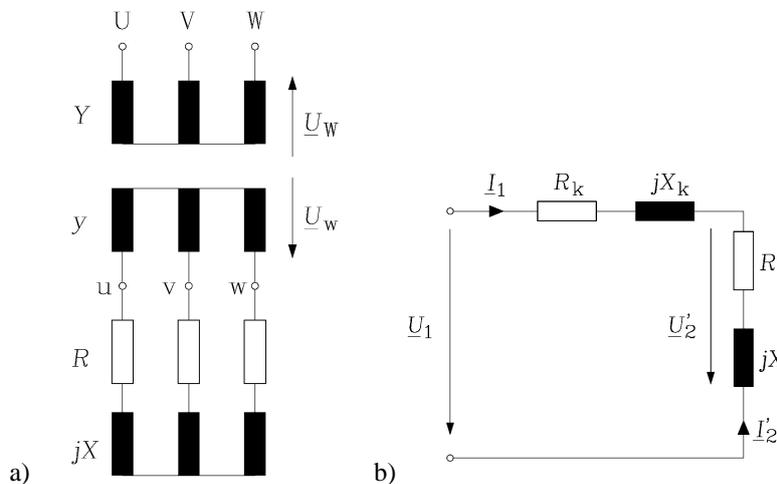


**Bild T13.2:** a) T-Ersatzschaltbild des Einphasentransformators für zeitlich sinusförmige Vorgänge mit b) den Werten  $R_1 = 0.18 \Omega$ ,  $R'_2 = 0.18 \Omega$ ,  $X_{1\sigma} = 4.045 \Omega$ ,  $X_h = 11608 \Omega$ ,  $X'_{2\sigma} = 4.045 \Omega$ ,  $R_{Fe} = 44964 \Omega$ .

**Aufgabe T14:** Drehstromtransformator für einen Industrieofen

Ein Drehstrom-Verteiltransformator  $U_{1N}/U_{2N} = 10 \text{ kV}/400 \text{ V}$  (Außenleiterwerte!) mit der Nennscheinleistung  $S_N = 500 \text{ kVA}$  und den Daten  $f_N = 50 \text{ Hz}$ ,  $u_k = 0.06$ ,  $u_R = 0.02$ , Schaltung Yy6, versorgt einen Industrieofen und weitere symmetrische Verbraucher in einer Fabrik. Diese Verbraucher werden durch eine resultierende symmetrische Last, bestehend je Strang aus der Serienschaltung  $R = 0.3 \Omega$ ,  $L = 1.0 \text{ mH}$ , dargestellt.

- 1a) Geben Sie die allpolige Schaltung von Transformator und Last an mit den Klemmen U, V, W, u, v, w, und begründen Sie Yy6.
- 1b) Bestimmen Sie  $I_{1N}$ ,  $I_{2N}$ ,  $U_{1Nph}$ ,  $U_{2Nph}$ ,  $R_k$  und  $X_k$  je Strang.
- 2) Bestimmen Sie mit dem Übersetzungsverhältnis  $\ddot{u}$  die komplexe Lastimpedanz  $\underline{Z}' = R' + j \cdot X'$  je Strang.
- 3) Berechnen Sie für  $U_{1ph} = U_{1N}/\sqrt{3}$  als reellen Spannungszeiger die Stromzeiger  $\underline{I}_1$ ,  $\underline{I}_2$ , die Effektivwerte  $I_1$ ,  $I_2$  und  $I_1/I_{1N}$ ,  $I_2/I_{2N}$  sowie die sekundäre Klemmspannung je Strang  $\underline{U}_2$ ,  $U_2$  und  $U_2/U_{2Nph}$  (Nehmen Sie dazu an:  $L_h \rightarrow \infty$ ,  $R_{Fe} \rightarrow \infty$ ).



**Bild T14.1:** a) Allpolige Schaltung für die Drehstrom-Transformator-Schaltgruppe Yy6 mit ohm'sch-induktiver symmetrischer Belastung in Y-Schaltung, b) einsträngiges Ersatzschaltbild für  $R_{Fe} \rightarrow \infty$ ,  $X_h \rightarrow \infty$ .

**Aufgabe T14 (Lösung):** Drehstromtransformator für einen Industrieofen

1a)

Für Leerlaufbetrieb gilt z. B. für die Strangspannungen auf dem Schenkel W (Bild T14.1 a)), gezählt von der jeweiligen Klemme W bzw. w zum jeweiligen Sternpunkt N1 bzw. N2:

$-\underline{U}_w = \underline{U}_W / \ddot{u}$ . Es tritt zwischen den beiden Strangspannungen die Phasenverschiebung  $180^\circ = 6 \times 30^\circ$  auf, also die Stundenziffer 6: Yy6.

1b)

$$I_{1N} = S_N / (\sqrt{3} \cdot U_{1N}) = 500 / (\sqrt{3} \cdot 10) = \underline{28.9A},$$

$$I_{2N} = S_N / (\sqrt{3} \cdot U_{2N}) = 500 / (\sqrt{3} \cdot 0.4) = \underline{721.7A},$$

$$U_{1Nph} = U_{1N} / \sqrt{3} = 10000 / \sqrt{3} = \underline{5780V}, \quad U_{2Nph} = U_{2N} / \sqrt{3} = 400 / \sqrt{3} = \underline{231V},$$

$$R_k = u_R \cdot U_{1Nph} / I_{1Nph} = u_R \cdot U_{1Nph} / I_{1N} = 0.02 \cdot 5780 / 28.9 = \underline{4.0\Omega},$$

$$u_S = \sqrt{u_k^2 - u_R^2} = \sqrt{0.06^2 - 0.02^2} = 0.0566, \quad X_k = (u_S / u_R) \cdot R_k = (0.0566 / 0.02) \cdot 4 = \underline{11.31\Omega}.$$

2)

$$\ddot{u} = U_{1N} / U_{2N} = 10000 / 400 = 25,$$

$$\underline{Z}' = R' + j \cdot X' = \ddot{u}^2 \cdot (R + j \cdot 2\pi f_N \cdot L) = 25^2 \cdot (0.3 + j \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot 0.001) = \underline{(187.5 + j \cdot 196.3)\Omega}.$$

3)

$$\underline{U}_{1Nph} = U_{1Nph}: \quad I_1 = \frac{\underline{U}_{1Nph}}{R_k + j \cdot X_k + \underline{Z}'} = \frac{5780}{(4 + 187.5) + j \cdot (11.3 + 196.3)} = \frac{5780}{191.5 + j \cdot 207.61}$$

Gemäß Bild T14.1 b) folgt:

$$\underline{I}_1 = \frac{5780 \cdot (191.5 - j \cdot 207.61)}{191.5^2 + 207.61^2} = \underline{(13.88 - j \cdot 15.04)A}, \quad I_1 = \sqrt{13.88^2 + 15.04^2} = \underline{20.47A},$$

$I_1 / I_{1N} = 20.47 / 28.9 = \underline{0.7}$ . Der Transformator ist mit 70% seines Nennstroms belastet.

$$\underline{I}_2 = -\ddot{u} \cdot \underline{I}_1 = -25 \cdot (13.88 - j \cdot 15.04) = \underline{(-347 + j \cdot 376)A}, \quad I_2 = \sqrt{347^2 + 376^2} = \underline{511.64A},$$

$$I_2 / I_{2N} = 511.64 / 721.7 = \underline{0.71}.$$

$$\underline{U}'_2 = -\underline{I}'_2 \cdot (R' + j \cdot X') = \underline{I}_1 \cdot (R' + j \cdot X') = (13.88 - j \cdot 15.04) \cdot (187.5 + j \cdot 196.3) = \\ = (13.88 \cdot 187.5 + 15.4 \cdot 196.3) + j \cdot (-15.04 \cdot 187.5 + 13.88 \cdot 196.3) = (5554.85 - j \cdot 95.36)V$$

$$\underline{U}_2 = \underline{U}'_2 / \ddot{u} = (5554.85 - j \cdot 95.36) / 25 = \underline{(222.19 - j \cdot 3.81)V},$$

$$U_2 = |\underline{U}_2| = \sqrt{222.19^2 + 3.81^2} = \underline{222.2V}, \quad U_2 / U_{2Nph} = 222.2 / 231 = \underline{0.962}.$$

**Aufgabe T15:** Parallelschaltung zweier Drehstromtransformatoren

Zwei Drehstrom-Leistungstransformatoren in einem Umspannungswerk sind elektrisch parallel geschaltet zwischen der Ober- und Unterspannungsseite  $U_{1N}/U_{2N} = 110 \text{ kV}/30 \text{ kV}$  und werden mit der  $f_N = 50 \text{ Hz}$  jeweils mit der Schaltgruppe Yy0 betrieben.

Transformator 1:  $S_{N1} = 25 \text{ MVA}$ , Transformator  $S_{N2} = 16 \text{ MVA}$ .

Ihre Kurzschlussspannungen  $u_k$  sind identisch ( $u_k = 8 \%$ ), damit sich die Betriebsströme proportional zu den jeweiligen Nennströmen aufteilen, also jeder der beiden Transformatoren anteilig im Verhältnis der beiden Nennscheinleistungen belastet wird.

1) Berechnen Sie die primären und sekundären Nennströme und Übersetzungsverhältnisse beider Transformatoren!

- 2) Zeigen Sie, dass es erforderlich ist, dass beide parallelen Transformatoren gleiche  $u_k$ -Werte haben müssen, damit bei Vollast ihre jeweiligen Nennströme auftreten.
- 3) Berechnen Sie bei  $U_{1N} = 100 \text{ kV}$  für eine oberspannungsseitige, wirksame Gesamtbelastung von  $S = 40 \text{ MVA}$ ,  $\cos\varphi_1 = 0$  induktiv, wobei Sie näherungsweise  $u_k = u_S$ ,  $u_R \approx 0$  annehmen,
- a) den Primär- und Sekundärstrom  $I_1$  und  $I_2$  für jeden der beiden Transformatoren,
- b) die Sekundärspannung  $U_2$  je Strang. Nehmen Sie dazu  $U_{1Nph}$  reell an. Wie groß ist  $U_{2,verk}/U_{2N}$ ?

**Aufgabe T15 (Lösung):** Parallelschaltung zweier Drehstromtransformatoren

1)

Transformator 1:

$$I_{1N1} = S_{N1} / (\sqrt{3} \cdot U_{1N}) = 25000 / (\sqrt{3} \cdot 110) = \underline{131.2 \text{ A}},$$

$$I_{2N1} = S_{N1} / (\sqrt{3} \cdot U_{2N}) = 25000 / (\sqrt{3} \cdot 30) = \underline{481.1 \text{ A}},$$

Transformator 2:

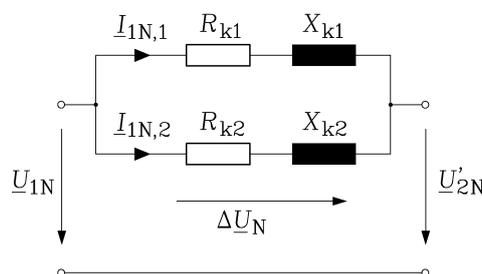
$$I_{1N2} = S_{N2} / (\sqrt{3} \cdot U_{1N}) = 16000 / (\sqrt{3} \cdot 110) = \underline{83.98 \text{ A}},$$

$$I_{2N2} = S_{N2} / (\sqrt{3} \cdot U_{2N}) = 16000 / (\sqrt{3} \cdot 30) = \underline{307.9 \text{ A}},$$

$$\ddot{u}_1 = \ddot{u}_2 = U_{1N} / U_{2N} = 110 / 30 = \underline{3.67}.$$

2)

Für  $L_h \rightarrow \infty$ ,  $R_{Fe} \rightarrow \infty$  gilt:  $\underline{U}_{1N} = \underline{U}'_{2N} + \underline{U}_k$ .



**Bild T15.1:** Einsträngige Ersatzschaltung für zwei parallel geschaltete Drehstrom-Transformatoren für  $R_{Fe} \rightarrow \infty$ ,  $X_h \rightarrow \infty$ .

Wegen der Parallelschaltung (Bild T15.1) folgt:

$$\underline{U}_k = (R_{k1} + jX_{k1}) \cdot \underline{I}_{1N1} = (R_{k2} + jX_{k2}) \cdot \underline{I}_{1N2} = \Delta \underline{U}_N,$$

wobei wegen der Sternschaltung die Strang- und Außenleiterströme identisch sind:

$$\underline{I}_{1N1} = \underline{I}_{1N1ph}, \underline{I}_{1N2} = \underline{I}_{1N2ph},$$

$$\underline{U}_k = (R_{k1} + jX_{k1}) \cdot \underline{I}_{1N1ph} = (R_{k2} + jX_{k2}) \cdot \underline{I}_{1N2ph},$$

$$\left| \frac{\underline{U}_k}{U_{1Nph}} \right| = \left| \frac{(R_{k1} + jX_{k1}) \cdot \underline{I}_{1N1ph}}{U_{1Nph}} \right| = u_{k1} = \left| \frac{(R_{k2} + jX_{k2}) \cdot \underline{I}_{1N2ph}}{U_{1Nph}} \right| = u_{k2},$$

$$|u_{R1} + j \cdot u_{S1}| = u_{k1} = |u_{R2} + j \cdot u_{S2}| = u_{k2}.$$

Bei anliegender Ober- und Unterspannung  $U_{1N}$ ,  $U_{2N}$  können beide Transformatoren nur dann ihren jeweiligen Nennstrom führen, wenn ihre beiden bezogenen Kurzschlussspannungen  $u_{k1}$ ,  $u_{k2}$  identisch sind. Dabei können, wie obige Gleichung zeigt, die Werte  $u_{R1}$ ,  $u_{R2}$  bzw.  $u_{S1}$ ,  $u_{S2}$  durchaus unterschiedlich sein, denn es gilt

$$u_k = \sqrt{u_{R1}^2 + u_{S1}^2} = \sqrt{u_{R2}^2 + u_{S2}^2} \text{ mit i. A. } u_{R1} \neq u_{R2}, u_{S1} \neq u_{S2}.$$

3a)

$$S = 40\text{MVA} = \sqrt{3} \cdot U_{1N} \cdot I_{1ges}, \quad I_{1ges} = 40000 / (\sqrt{3} \cdot 110) = 209.94\text{A},$$

$$I_{1N1} + I_{1N2} = 131.2 + 83.98 = 215.18\text{A}, \quad I_{1ges} / (I_{1N1} + I_{1N2}) = 209.94 / 215.18 = 0.9756.$$

$$I_{1,1} = 0.9756 \cdot I_{1N1} = 0.9756 \cdot 131.2 = \underline{128.0\text{A}},$$

$$I_{1,2} = 0.9756 \cdot I_{1N2} = 0.9756 \cdot 83.98 = \underline{81.93\text{A}}.$$

3b)

$$L_h \rightarrow \infty, R_{Fe} \rightarrow \infty: \underline{U}_{1Nph} = U_{1Nph} = (R_{k1} + jX_{k1}) \cdot \underline{I}_{1,1} + \underline{U}'_2 \approx jX_{k1} \cdot \underline{I}_{1,1} + \underline{U}'_2,$$

$$\underline{U}'_2 = U_{1Nph} - jX_{k1} \cdot \underline{I}_{1,1} = U_{1Nph} - j \frac{X_{k1} I_{1N}}{U_{1Nph}} \cdot U_{1Nph} \cdot \frac{\underline{I}_{1,1}}{I_{1N}} = U_{1Nph} - j \cdot u_s \cdot U_{1Nph} \cdot \frac{\underline{I}_{1,1}}{I_{1N}}.$$

Wegen  $\cos \varphi_1 = 0$  induktiv eilt der Primär-Strangstrom der Primär-Strangspannung um  $90^\circ$  nach:  $\underline{I}_{1,1} = \underline{I}_{1,1ph} = -j \cdot I_{1,1}$ .

$$\underline{U}'_2 = U_{1Nph} \cdot \left( 1 - j \cdot u_s \cdot \frac{-j \cdot I_{1,1}}{I_{1N}} \right) = U_{1Nph} \cdot \left( 1 - u_s \cdot \frac{I_{1,1}}{I_{1N}} \right) \approx U_{1Nph} \cdot \left( 1 - u_k \cdot \frac{I_{1,1}}{I_{1N}} \right) =$$

$$= \frac{110000}{\sqrt{3}} \cdot (1 - 0.08 \cdot 0.9756) = 58551.8\text{V}.$$

$$U_2 = U'_2 / \ddot{u} = 58551.8 / 3.67 = \underline{15954.2\text{V}}, \quad U_{2verk} / U_{2N} = \sqrt{3} \cdot 15954.2 / 30000 = \underline{0.921},$$

Spannungseinbruch gegenüber  $U_{2N}$ :  $1 - U_2 / U_{2N} \approx 1 - 0.9756 \cdot u_k = 0.921$ .

**Aufgabe T16:** Ortsnetztransformator

Ein Drehstrom-Verteiltransformator im Ortsnetz 20 kV/400 V,  $S_N = 250\text{ kVA}$ ,  $f_N = 50\text{ Hz}$  hat die in Bild T16.1 a) dargestellte Schaltung.

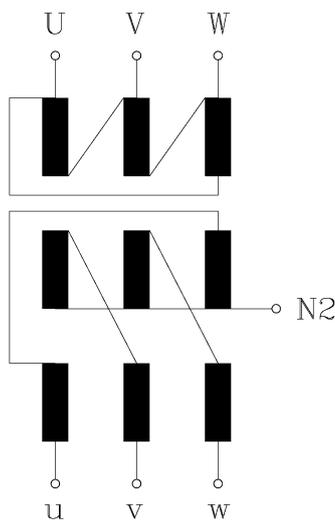


Bild T16.1 a)

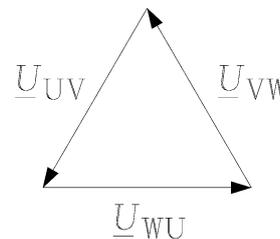


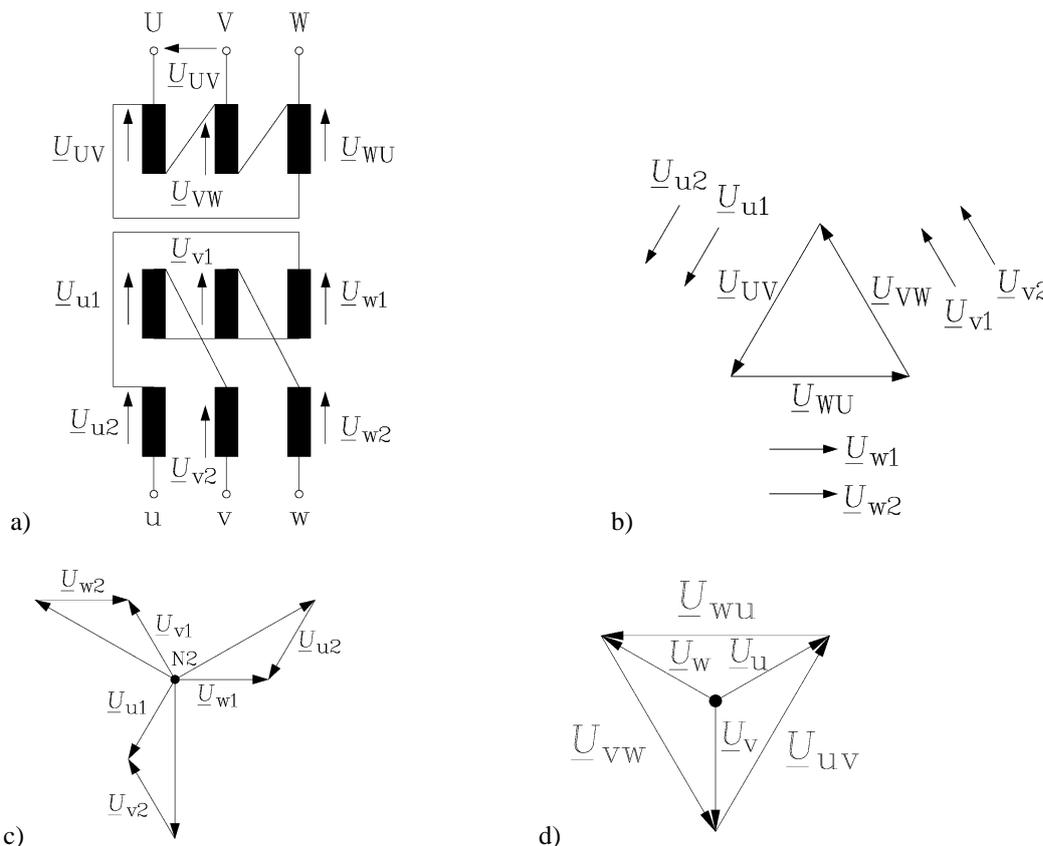
Bild T16.1 b)

- 1) Zeichnen Sie zu den primär symmetrisch eingprägten Spannungszeigern gemäß Bild T16.1 b) die Sekundärspannung zwischen den Klemmen N2 und u, v, w. Welche Stundenziffer tritt auf? Wie heißt die Schaltung?
- 2) Wie groß ist  $\ddot{u}$ , ausgedrückt durch die Windungszahlen je Strang  $N_1, N_2$ ?
- 3) Darf der Transformator sekundär einphasig belastet werden? Begründen Sie die Antwort anhand der Schaltung für eine einphasige Belastung zwischen w und N2.

- 4) Bestimmen Sie  $N_1/N_2$ ! Wie groß sind  $N_1$  und  $N_2$ , wenn die Spannung zwischen zwei Windungen primär 19 V beträgt? Beachten Sie, dass  $N_1$  und  $N_2$  ganze Zahlen sein müssen!
- 5) Wie groß sind die primäre und sekundäre Nenndurchflutung  $\Theta_{1N} = N_1 I_{1Nph}$  je Schenkel und  $\Theta_{2Nh} = (N_2/2) \cdot I_{2Nph}$  (h: je halbem Schenkel) und  $\Theta_{2N} = \sqrt{3} \cdot \Theta_{2Nh}$  (je Schenkel)? (Hinweis: Wegen der Durchflutungsausgleichs sollten  $\Theta_{1N}$  und  $\Theta_{2N}$  identisch sein, abgesehen von Rundungsfehlern!)

**Aufgabe T16 (Lösung): Ortsnetztransformator**

1)  
 Werden die positiven Bezugsrichtungen der primärseitigen Spannungszeiger je Strang gemäß Bild T16.2 a) gewählt, so ergeben sich die Leerlaufspannungen auf der Unterspannungsseite gemäß den in Bild T16.2 a) eingezeichneten Spannungsrichtungen. Mit den gemäß der primären Dreieckschaltung (D) verschalteten und vom Netz vorgegebenen verketteten Primärspannungszeiger  $\underline{U}_{UV}$ ,  $\underline{U}_{VW}$ ,  $\underline{U}_{WU}$  aus Bild T16.1 b) sind folglich diese jeweiligen Unterspannungszeiger  $\underline{U}_{u1}$ ,  $\underline{U}_{u2}$  parallel zu  $\underline{U}_{UV}$ , weiter  $\underline{U}_{v1}$ ,  $\underline{U}_{v2}$  parallel zu  $\underline{U}_{VW}$  und  $\underline{U}_{w1}$ ,  $\underline{U}_{w2}$  parallel zu  $\underline{U}_{WU}$ . Diese werden nun gemäß der sekundärseitigen Zickzack-Schaltung (Bild 16.2 a)) verschaltet (Bild T16.2 c)). Damit wie auf der Primärseite die verketteten Spannungen z. B. von u nach v positiv gezählt werden, müssen die Phasenspannungen von z. B. u nach N2 positiv gezählt werden, so dass sich die sekundäre Phasenspannung  $\underline{U}_u = \varphi_u - \varphi_{N2} = -\underline{U}_{u2} + \underline{U}_{w1}$  ergibt.



**Bild T16.2:** Konstruktion des dreiphasigen Spannungszeigerdiagramms der Sekundärspannungen der Schaltgruppe Dz6: a) allpolige Schaltung, b) Primär- und unverschaltete Sekundärspannungszeiger, c) gemäß Zickzack verschaltete Sekundärspannungszeiger, d) zugehörige verkettete Spannungen sekundär

Die verketteten Spannungen  $\underline{U}_{uv}$ ,  $\underline{U}_{vw}$ ,  $\underline{U}_{wu}$  aus diesen Phasenspannungen sind zu den primären verketteten Spannungen um  $180^\circ = 6 \times 30^\circ$  phasenverschoben, was der Stundenziffer 6 entspricht. Daher heißt die Schaltgruppe Dz6.

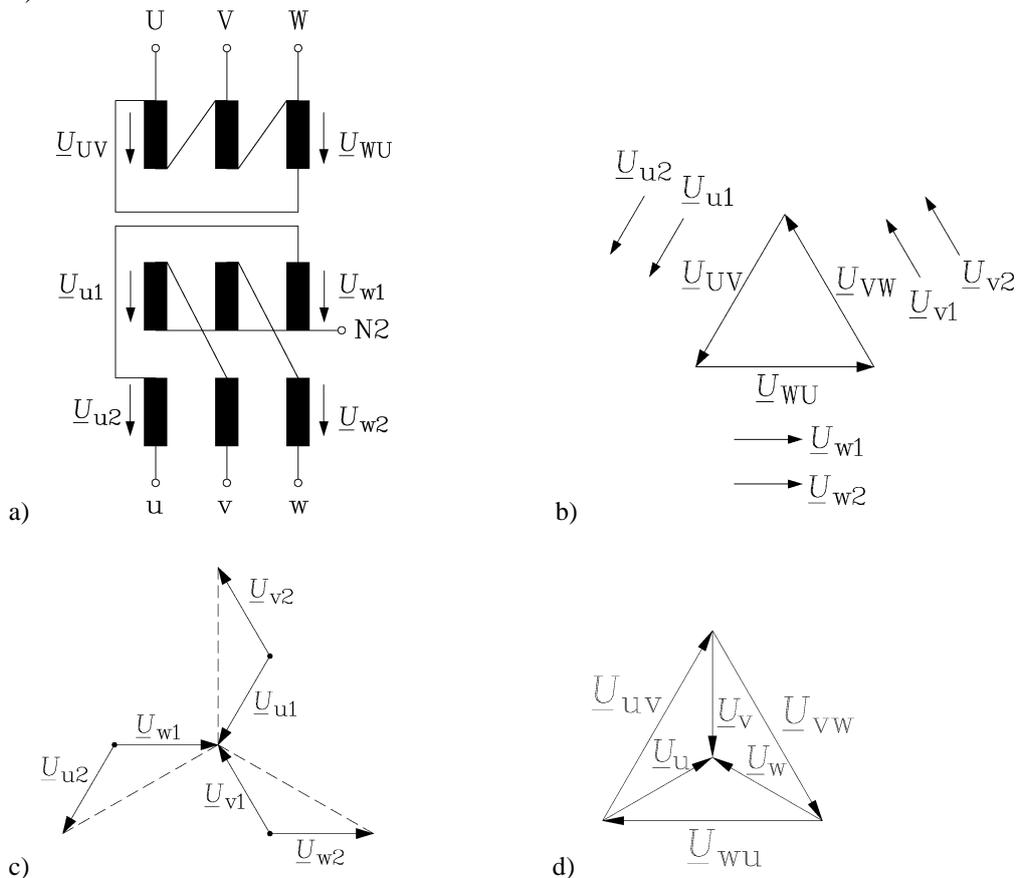
Beachten Sie, dass auch bei Wahl der umgekehrten Bezugsrichtung der Spannungszeiger primärseitig dasselbe Ergebnis erhalten wird, auch wenn die Spannungszeigerdiagramme sekundär dann spiegelverkehrt erscheinen, wie Bild T16.3 zeigt.

2)

$$\underline{u} = U_{1N} / U_{2N} = U_{1verk} / U_{2verk} = U_{UV} / U_{uv} = U_{UV} / (\sqrt{3} \cdot U_u) = U_{UV} / (\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot U_{u2})$$

$$\underline{u} = \frac{1}{3} \cdot \frac{U_{UV}}{U_{u2}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{N_1}{N_2/2} = \underline{\underline{\frac{2}{3} \cdot \frac{N_1}{N_2}}}$$

3)



**Bild T16.3:** Wie Bild T16.2, jedoch mit umgekehrten Bezugsrichtungen der Spannungszeiger in der allpoligen Schaltung a), so dass mit den wie in Bild T16.2 b) angegebenen Primär- und unverschalteten Sekundärspannungszeiger sich die c) gemäß Zickzack verschaltete Sekundärspannungszeiger und die d) zugehörigen verketteten Spannungen sekundär ergeben. Das Ergebnis, die Schaltgruppe Dz6, ist dasselbe!

Ja, weil für jeden der drei Eisenschenkel entweder Durchflutungsungleich oder Leerlaufbetrieb auftritt, so dass der Nennfluss und damit die Nennsättigung je Schenkel auch bei sekundär einphasiger Belastung erhalten bleiben. Gemäß Bild T16.4 fließt bei der Klemme W der Strom  $\underline{I}_W = \underline{I}_{1a} + \underline{I}_{1b} + \underline{I}_{mW} \approx \underline{I}_{1a} + \underline{I}_{1b}$  zu, wobei der Magnetisierungsstrom  $\underline{I}_{mW} \approx 0$  den Schenkel W mit dem Nennfluss magnetisiert. Der Strom  $\underline{I}_{1a}$  ist auf dem Schenkel W im Durchflutungsungleich mit  $\underline{I}_2$  in der Wicklung w2:  $\underline{I}_{1a} = -\underline{I}'_2$ . Der Strom  $\underline{I}_{1b}$  ist auf dem Schenkel V im Durchflutungsungleich mit  $\underline{I}_2$  in der Wicklung v1:  $\underline{I}_{1b} = -\underline{I}'_2$ . Der Schenkel U wird mit dem Magnetisierungsstrom  $\underline{I}_{mU} \approx 0$  magnetisiert. An

der Klemme U fließt folglich der Strom  $\underline{I}_U = -\underline{I}_{1a} + \underline{I}_{mU} \approx -\underline{I}_{1a}$ . Der Schenkel V wird mit dem Magnetisierungsstrom  $\underline{I}_{mV} \approx 0$  magnetisiert. An der Klemme V fließt der Strom  $\underline{I}_V = -\underline{I}_{1b} + \underline{I}_{mV} \approx -\underline{I}_{1b}$ .

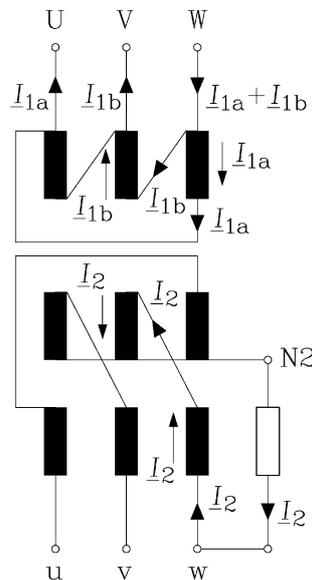


Bild T16.4: Stromfluss in der Schaltgruppe Dz6 bei einphasiger Belastung sekundärseitig zwischen w und N2

4)

$$\ddot{u} = U_{1N} / U_{2N} = 20000 / 400 = 50 = \frac{2}{3} \cdot \frac{N_1}{N_2} \Rightarrow \frac{N_1}{N_2} = \underline{\underline{75}}$$

$$19 \text{ V} \cdot N_1 = 20000 \text{ V} \Rightarrow N_1 = 20000 / 19 = \underline{\underline{1050}}, N_2 = 1050 / 75 = \underline{\underline{14}}$$

5)

$$I_{1N} = S_N / (\sqrt{3} \cdot U_{1N}) = 250000 / (\sqrt{3} \cdot 20000) = 7.21 \text{ A}, I_{1Nph} = I_{1N} / \sqrt{3} = 7.21 / \sqrt{3} = 4.16 \text{ A}$$

$$\Theta_{1N} = N_1 \cdot I_{1Nph} = 1050 \cdot 4.16 = \underline{\underline{4370 \text{ A}}}$$

$$I_{2N} = S_N / (\sqrt{3} \cdot U_{2N}) = 250000 / (\sqrt{3} \cdot 400) = 360.8 \text{ A} = I_{2Nph},$$

$$\Theta_{2Nh} = (N_2 / 2) \cdot I_{2Nph} = (14 / 2) \cdot 360.8 = \underline{\underline{2525.6 \text{ A}}}$$

$$\Theta_{2N} = \sqrt{3} \cdot \Theta_{2Nh} = \sqrt{3} \cdot 2525.6 = \underline{\underline{4370 \text{ A}}} = \Theta_{1N}$$

### Aufgabe T17: 60Hz-Drehstromtransformator

Ein Drehstromtransformator in den USA mit den Daten  $S_N = 125 \text{ MVA}$ ,  $U_{1N}/U_{2N} = 120 \text{ kV}/17 \text{ kV}$ ,  $f_N = 60 \text{ Hz}$ ,  $u_k = 0.09$ , hat die in Bild T17.1 a) dargestellte Schaltung, die primär von den drei Strangspannungen  $\underline{U}_U$ ,  $\underline{U}_V$ ,  $\underline{U}_W$  gemäß Bild T17.1 b) gespeist wird.

- 1) Zeichnen Sie das Zeigerdiagramm der Sekundärspannungen und bestimmen Sie die Schaltgruppe mit der Stundenziffer! Wie groß ist der Effektivwert der primären Strangspannung  $U_{1Nph}$ ?
- 2) Drücken Sie das Übersetzungsverhältnis  $\ddot{u}$  durch das Windungszahlverhältnis  $N_1/N_2$  je Strang aus und berechnen Sie  $N_1/N_2$ !
- 3) Wie groß ist die resultierende Streuinduktivität  $L_{1\sigma} + L'_{2\sigma}$  je Strang, wenn  $u_R = 0.015$  ist?

- 4) Berechnen Sie den Wirkungsgrad bei Nennbetrieb  $\eta_N$  für  $\cos\varphi_N = 0.9$ , wenn die Ummagnetisierungsverluste  $P_{Fe,N} = 1.0 \text{ MW}$  und die Kühlleistung  $P_{Kühl,N} = 50 \text{ kW}$  betragen!
- 5) Welche verkettete Kurzschlussspannung  $U_{Ik,verk}$  muss im Prüffeld primärseitig angelegt werden, damit der halbe Nennstrom fließt?

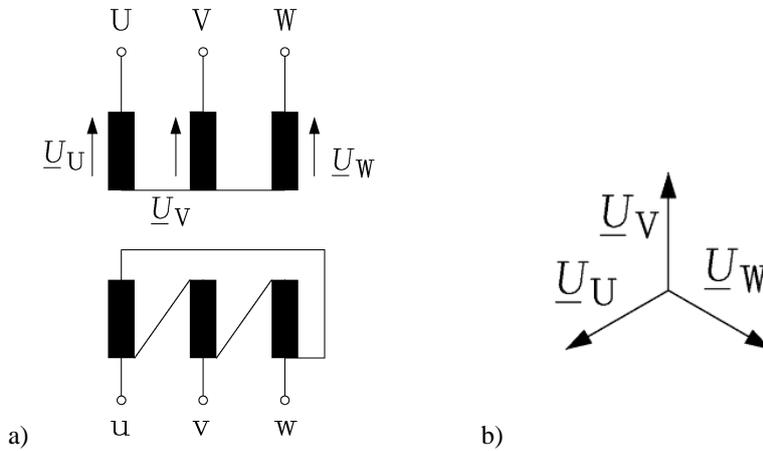


Bild T17.1: a) Schaltungsgruppe, b) eingprägtes Primärstrangspannungssystem

**Aufgabe T17 (Lösung):** 60Hz-Drehstromtransformator

1)

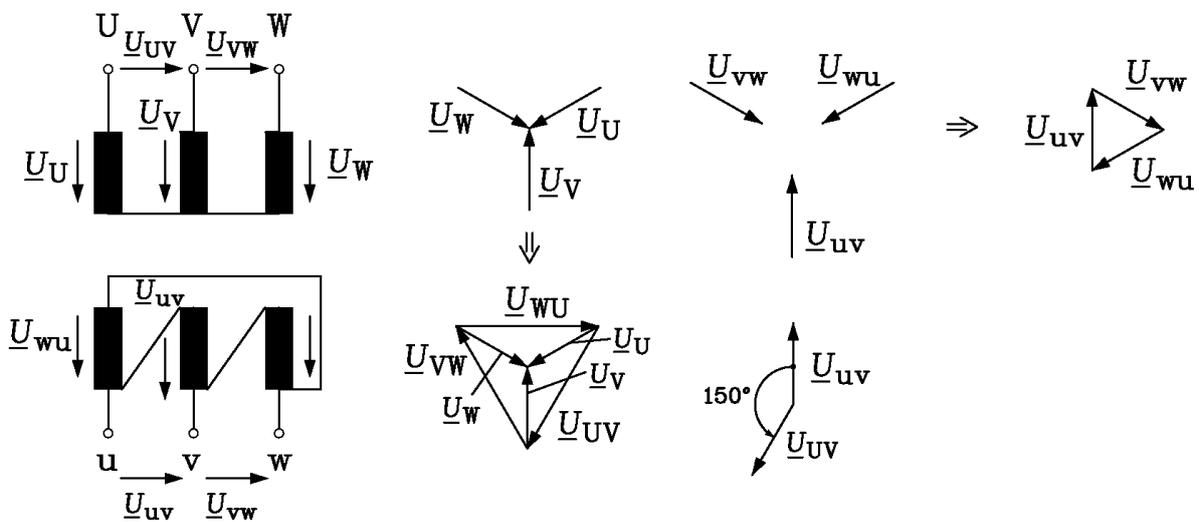
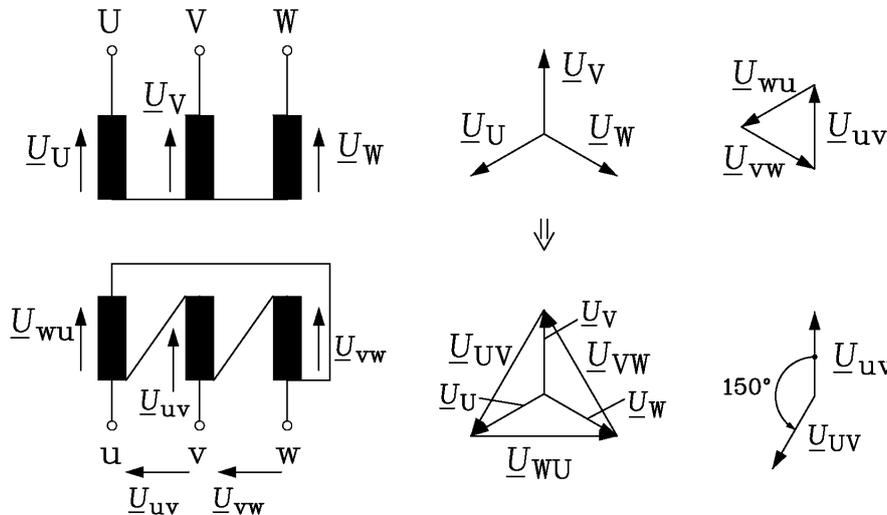


Bild T17.2: Konstruktion des dreiphasigen Spannungszeigerdiagramms der Sekundärspannungen der Schaltungsgruppe Yd5: a) allpolige Schaltungsgruppe, b) Primär- und unverschaltete Sekundärspannungszeiger, c) gemäß Dreieck verschaltete Sekundärspannungszeiger

Werden die positiven Bezugsrichtungen der primärseitigen Spannungszeiger je Strang gemäß Bild T17.2 a) gewählt, so ergeben sich die Leerlaufspannungen auf der Unterspannungsseite gemäß den in Bild T17.2 a) eingezeichneten Spannungsrichtungen. Mit den gemäß der primären Sternschaltung (Y) vom Netz vorgegebenen verketteten Primärspannungszeiger  $\underline{U}_{UV}$ ,  $\underline{U}_{VW}$ ,  $\underline{U}_{WU}$  und deren Strangspannungszeigern  $\underline{U}_U$ ,  $\underline{U}_V$ ,  $\underline{U}_W$  aus Bild T17.1 b) sind folglich diese jeweiligen Unterspannungszeiger  $\underline{U}_{uv}$  parallel zu  $\underline{U}_V$ , weiter  $\underline{U}_{vw}$  parallel zu  $\underline{U}_W$  und  $\underline{U}_{wu}$  parallel zu  $\underline{U}_U$ . Diese werden nun gemäß der sekundärseitigen Dreieck-Schaltung (Bild T17.2 a)) verschaltet (Bild T17.2 c)). Diese verketteten Spannungen  $\underline{U}_{uv}$ ,  $\underline{U}_{vw}$ ,  $\underline{U}_{wu}$

sind zu den primären verketteten Spannungen  $\underline{U}_{UV}$ ,  $\underline{U}_{VW}$ ,  $\underline{U}_{WU}$  um  $150^\circ = 5 \times 30^\circ$  phasenverschoben, was der Stundenziffer 5 entspricht. Daher heißt die Schaltgruppe Yd5.

**Beachten Sie:** Damit auf der Primärseite die verketteten Spannungen z. B. von U nach V positiv gezählt werden, müssen die Phasenspannungen von z. B. U zum Sternpunkt N1 positiv gezählt werden, so dass sich die Phasenspannung  $\underline{U}_U = \varphi_U - \varphi_{N1}$  ergibt. Aber auch bei Wahl der umgekehrten Bezugsrichtung der Spannungszeiger primärseitig wird dasselbe Ergebnis Yd5 erhalten, auch wenn die Spannungszeigerdiagramme dann spiegelverkehrt erscheinen, wie Bild T17.3 zeigt.



**Bild T17.3:** Wie Bild T17.2, jedoch mit umgekehrten Bezugsrichtungen der Spannungszeiger in der allpoligen Schaltung a). Das Ergebnis, die Schaltgruppe Yd5, ist dasselbe!

2)

$$\ddot{u} = U_{1N} / U_{2N} = U_{1verk} / U_{2verk} = U_{UV} / U_{uv} = (\sqrt{3} \cdot U_V) / U_{uv} = \sqrt{3} \cdot (U_V / U_{uv}) = \sqrt{3} \cdot (N_1 / N_2)$$

$$\ddot{u} = U_{1N} / U_{2N} = 120 / 17 = 7.0588, \quad N_1 / N_2 = \ddot{u} / \sqrt{3} = 7.0588 / \sqrt{3} = \underline{4.075}$$

$$U_{1Nph} = U_{1N} / \sqrt{3} = 120 / \sqrt{3} = \underline{69.28kV}$$

3)

$$u_S = \sqrt{u_k^2 - u_R^2} = \sqrt{0.09^2 - 0.015^2} = 0.0887,$$

$$I_{1N} = S_N / (\sqrt{3} \cdot U_{1N}) = 125000 / (\sqrt{3} \cdot 120) = 601.4A,$$

$$X_k = u_S \cdot (U_{1Nph} / I_{1Nph}) = u_S \cdot (U_{1Nph} / I_{1N}) = 0.0887 \cdot (69280 / 601.4) = 10.218\Omega,$$

$$L_{1\sigma} + L'_{2\sigma} = X_k / (2\pi f_N) = 10.218 / (2\pi 60) = \underline{27.1mH}.$$

4)

$$R_k = u_R \cdot (U_{1Nph} / I_{1Nph}) = u_R \cdot (U_{1Nph} / I_{1N}) = 0.015 \cdot (69280 / 601.4) = 1.728\Omega,$$

$$P_{Cu,N} = 3 \cdot R_k \cdot I_{1N}^2 = 3 \cdot 1.728 \cdot 601.4^2 = 1.875MW, \quad P_N = S_N \cdot \cos \varphi_N = 125 \cdot 0.9 = 112.5MW,$$

$$\eta_N = \frac{P_N}{P_N + P_{Cu,N} + P_{Fe,N} + P_{Kühl,N}} = \frac{112.5}{112.5 + 1.875 + 1.0 + 0.05} = \underline{0.9747} = \underline{97.47\%}.$$

5)

$$\underline{U}_{1k} = (R_k + j \cdot X_k) \cdot (I_{1N} / 2),$$

$$U_{1k,verk} = \sqrt{3} \cdot U_{1k} = \sqrt{3} \cdot |\underline{U}_{1k}| = \sqrt{3} \cdot \sqrt{R_k^2 + X_k^2} \cdot (I_{1N} / 2) = \sqrt{3} \cdot Z_k \cdot (I_{1N} / 2),$$

$$U_{1k,verk} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{Z_k \cdot I_{1N}}{U_{1Nph}} \cdot \frac{U_{1N}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot u_k \cdot \frac{U_{1N}}{\sqrt{3}} = \frac{u_k}{2} \cdot U_{1N} = \frac{U_{k,verk,N}}{2} = \frac{0.09}{2} \cdot 120 = \underline{\underline{5.4kV}}.$$

Es ist die halbe verkettete Kurzschlussspannung anzulegen, damit bei sekundärem Kurzschluss der halbe Nennstrom fließt.

**Aufgabe T18:** 60Hz-Drehstromtransformator in einem Umspannwerk

Ein Drehstromtransformator in einem Umspannwerk in den USA hat die Daten  $U_{1N} = 132 \text{ kV}$  (Außenleiterwert),  $U_{2N} = 24 \text{ kV}$  (Außenleiterwert),  $S_N = 30 \text{ MVA}$ ,  $f_N = 60 \text{ Hz}$ ,  $u_k = 0.13$ ,  $u_R = 0.05$ , Schaltung  $Yy0$ .

- 1) Berechnen Sie: Bezogener induktiver Spannungsfall  $u_S$ , Übersetzungsverhältnis  $\ddot{u}$ !
- 2) Der Transformator liegt überspannungsseitig an Nennspannung und wird mit 80 % des Nennstroms so belastet, dass sich  $\cos\varphi_1 = 1$  einstellt.
  - a) Zeichnen Sie maßstäblich das zugehörige Zeigerdiagramm ( $\underline{U}_1, \underline{U}'_2, \underline{I}_1, \underline{I}'_2$ ) für einen Strang (für  $L_h \rightarrow \infty, R_{Fe} \rightarrow \infty, \underline{U}_1 = U_1$  ist reell,  $1 \text{ cm} \hat{=} 5 \text{ kV}, 1 \text{ cm} \hat{=} 10 \text{ A}$ ).
  - b) Welchen Wert besitzt die Sekundärspannung  $U_2$  (Strangwert aus der Zeichnung abgelesen)?
  - c) Welchen Wert besitzt der Sekundärstrom  $I_2$  (Strangwert)? Geben Sie den Außenleiterwert des Stromeffektivwerts und den sekundären verketteten Spannungseffektivwert sowohl in A bzw. V als auch in % des jeweiligen Nennwerts an!
  - d) Bestimmen Sie  $U_2$  rechnerisch und vergleichen Sie mit b). Wie groß ist  $U_{2,verk}/U_{2N}$ ?
- 3) Der Transformator soll am europäischen 50 Hz-Netz eingesetzt werden. Bestimmen Sie die neuen Spannungen  $U_{1N}, U_{2N}$  sowie die neue Scheinleistung  $S_N$ . Beachten Sie, dass auf Grund der vorhandenen Spulenleiterquerschnitte die Nennströme gleich bleiben.
- 4) Wie wäre das maßstäbliche Zeigerdiagramm je Phase zu zeichnen, wenn die Schaltung  $Yd5$  ist? Wie groß ist dann der Strangwert  $I_2$ ?

**Aufgabe T18 (Lösung):** 60Hz-Drehstromtransformator in einem Umspannwerk

1)

$$u_S = \sqrt{u_k^2 - u_R^2} = \sqrt{0.13^2 - 0.05^2} = \underline{\underline{0.12}}, \quad \ddot{u} = U_{1N} / U_{2N} = 132 / 24 = \underline{\underline{5.5}}$$

2a)

$$I_{1N} = S_N / (\sqrt{3} \cdot U_{1N}) = 30000 / (\sqrt{3} \cdot 132) = 131.2 \text{ A} = I_{1Nph},$$

$$I_{1ph} = 0.8 \cdot I_{1N} = 0.8 \cdot 131.2 = 104.97 \text{ A} \Leftrightarrow 10.5 \text{ cm},$$

$$U_{1Nph} = U_{1N} / \sqrt{3} = 132 / \sqrt{3} = 76.2 \text{ kV} \Leftrightarrow 15.24 \text{ cm},$$

Gemäß Bild T18.1 folgt:  $\underline{U}_1 = (R_k + j \cdot X_k) \cdot \underline{I}_1 + \underline{U}'_2, \quad \underline{I}_1 = -\underline{I}'_2,$

Mit  $\underline{U}_1 = U_1$  reell folgt bei  $\cos\varphi_1 = 1$ :  $\underline{I}_1 = I_1, \quad \underline{I}'_2 = I'_2, \quad \underline{U}'_2 = U_1 - R_k I_1 - j \cdot X_k I_1.$

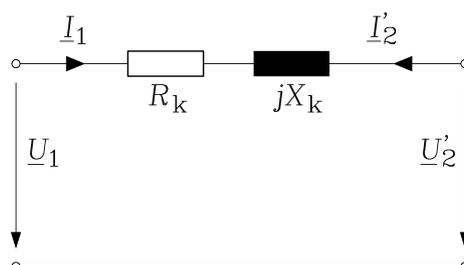


Bild T18.1: Transformator-Ersatzschaltbild je Strang bei symmetrischer Belastung für  $L_h \rightarrow \infty, R_{Fe} \rightarrow \infty$

Bei  $I_1 = 0.8 \cdot I_{1N}$  ist je Strang  $U_k = 0.8 \cdot u_k \cdot U_{1Nph} = 0.8 \cdot 0.13 \cdot 76.2 = 7.92 \text{ kV}$ .

$$R_k I_1 = 0.8 \cdot R_k \cdot I_{1N} = 0.8 \cdot u_R \cdot U_{1Nph} = 0.8 \cdot 0.05 \cdot 76.2 = 3.05 \text{ kV} \Leftrightarrow 0.6 \text{ cm},$$

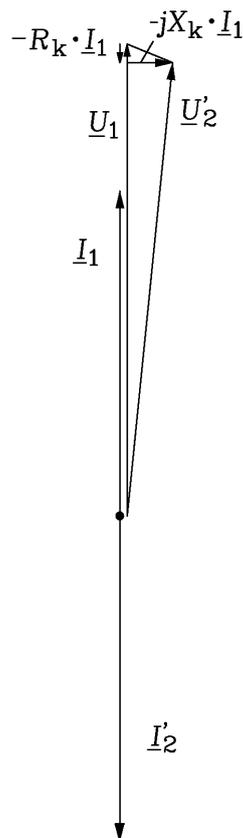
$$X_k I_1 = 0.8 \cdot X_k \cdot I_{1N} = 0.8 \cdot u_S \cdot U_{1Nph} = 0.8 \cdot 0.12 \cdot 76.2 = 7.3 \text{ kV} \Leftrightarrow 1.46 \text{ cm}$$

Mit diesen Werten wird das maßstäbliche Zeigerdiagramm Bild T18.2 gezeichnet.

2b)

Aus Bild T18.2 wird abgelesen:  $U'_2 : 14.5 \text{ cm} \Leftrightarrow 72.5 \text{ kV}$ . Diese Spannung ist aus der primären Strangspannung ermittelt worden, und ist wegen Yy-Schaltung ebenfalls ein Strangwert. Der echte sekundäre Strangwert ist wegen  $\ddot{u} = N_1/N_2$  bei Yy-Schaltung:

$$U_2 = U'_2 / \ddot{u} = 72.5 / 5.5 = \underline{\underline{13.18 \text{ kV}}}.$$



**Bild T18.2:** Maßstäbliches Strom- und Spannungszeigerdiagramm je Strang bei primärem Leistungsfaktor 1 (1 Spannungs-Einheit  $\hat{=}$  5 kV:  $U_1 = 15.24$  Einheiten, 1 Strom-Einheit  $\hat{=}$  10 A:  $I_1 = 10.5$  Einheiten)

2c)

$I'_2 = I_2 / \ddot{u} = -I_1 \Rightarrow I_2 = -\ddot{u} \cdot I_1 = -5.5 \cdot 104.97 = \underline{\underline{-577.3 \text{ A}}}$  als Strangwert. Wegen der Yy-Schaltung ist dies auch gleichzeitig der Außenleiterwert.

Sekundäre Sternschaltung: Verkettete Spannung:  $U_{2verk} = \sqrt{3} \cdot U_2 = \sqrt{3} \cdot 13.18 = \underline{\underline{22.83 \text{ kV}}}$ ,

$$U_{2verk} / U_{2N} = 22.83 / 24 = 0.951 = \underline{\underline{95.1\%}}, I_{2,\text{Außenleiter}} = I_2 = \underline{\underline{577.3 \text{ A}}},$$

$$I_{2N} = S_N / (\sqrt{3} \cdot U_{2N}) = 30000 / (\sqrt{3} \cdot 24) = 721.7 \text{ A}, I_2 / I_{2N} = 577.3 / 721.7 = \underline{\underline{0.8}}.$$

2d)

$$U'_2 = |U'_2| = \sqrt{(U_1 - R_k I_1)^2 + (X_k I_1)^2} = \sqrt{(76.2 - 3.05)^2 + 7.3^2} = \underline{\underline{73.5 \text{ kV}}} \Leftrightarrow 14.7 \text{ cm},$$

$$U_2 = U'_2 / \ddot{u} = 73.5 / 5.5 = \underline{\underline{13.36 \text{ kV}}}, U_{2verk} = \sqrt{3} \cdot U_2 = \sqrt{3} \cdot 13.36 = \underline{\underline{23.15 \text{ kV}}}.$$

Auf Grund der Zeichenungenauigkeit ergibt sich zeichnerisch eine um  $1 - (14.5/14.7) = 0.0136$  eine 1.36% kleinere Spannung:  $U_{2verk}/U_{2N} = 23.15/24 = 0.964 = \underline{96.4\%}$ .

3)

Bei gleichbleibenden Strömen  $I_1 = I_{1ph} = I_{1N}$ ,  $I_2 = I_{2ph} = I_{2N}$  bleiben die Durchflutungen je Schenkel und damit die magnetisierende Durchflutung je Schenkel unverändert:  $\mathcal{Q}_m = \mathcal{Q}_1 + \mathcal{Q}_2 = N_1 \cdot I_{1ph} + N_1 \cdot I_{2ph}$ . Damit bleiben magnetische Feldstärke, Flussdichte und Fluss im Eisen unverändert:  $H_{Fe} = \sqrt{2} \cdot \mathcal{Q}_m / s_{Fe}$ ,  $B_{Fe} = \mu_{Fe} \cdot H_{Fe}$ ,  $\Phi_h = A_{Fe} \cdot B_{Fe}$ . Das gleiche gilt für den primären und sekundären Streufluss und den primären und sekundären Wicklungswiderstand. Es ändert sich nur die Betriebsfrequenz  $f$ , weshalb die primären und sekundären Spannungen  $U \sim \Phi \cdot f$  proportional zu  $(50/60) = 0.3$  kleiner werden:

$$U_{1N,50} = (50/60) \cdot U_{1N} = 0.83 \cdot 132 = \underline{110kV}, \quad U_{2N,50} = (50/60) \cdot U_{2N} = 0.83 \cdot 24 = \underline{20kV},$$

$$S_{N,50} = \sqrt{3} \cdot U_{1N,50} \cdot I_{1N} = (50/60) \cdot S_N = 0.83 \cdot 30 = \underline{25MVA}.$$

4)

Bei Yd5 ist zu beachten, dass sekundär wegen der Dreieckschaltung die Strangspannungen gleichzeitig die verketteten Spannungen sind, was durch das Übersetzungsverhältnis  $\ddot{u}$  als Verhältnis der verketteten Spannungen von Primär- und Sekundärseite automatisch berücksichtigt wird. Man zeichnet deshalb das Zeigerdiagramm gleich mit den verketteten Spannungen und daher auch mit den Außenleiterströmen!

Mit gegenüber 2) um  $\sqrt{3}$  vergrößerten Spannungsmaßstab  $1 \text{ cm} \hat{=} 8.65 \text{ kV}$ , aber unverändertem Strommaßstab (da  $I_{1N} = I_{1Nph}$ )  $1 \text{ cm} \hat{=} 10 \text{ A}$  erhalten wir:

$$\text{Für die Außenleiterströme: } I_{1N} = S_N / (\sqrt{3} \cdot U_{1N}) = 30000 / (\sqrt{3} \cdot 132) = 131.2 \text{ A} = I_{1Nph},$$

$$I_{2N} = S_N / (\sqrt{3} \cdot U_{2N}) = 30000 / (\sqrt{3} \cdot 24) = 721.7 \text{ A}$$

$$I_1 = 0.8 \cdot I_{1N} = 0.8 \cdot 131.2 = 104.97 \text{ A} \Leftrightarrow 10.5 \text{ cm},$$

$$\text{Für die Außenleiterspannungen: } U_{1N} = 132 \text{ kV} \Leftrightarrow 15.24 \text{ cm},$$

$$\underline{U}_{1N} = (R_{k,verk} + j \cdot X_{k,verk}) \cdot I_1 + \underline{U}'_{2,verk}$$

$$R_{k,verk} I_1 = 0.8 \cdot R_{k,verk} \cdot I_{1N} = 0.8 \cdot u_R \cdot U_{1N} = 0.8 \cdot 0.05 \cdot 132 = 5.28 \text{ kV} \Leftrightarrow 0.6 \text{ cm},$$

$$X_{k,verk} I_1 = 0.8 \cdot X_{k,verk} \cdot I_{1N} = 0.8 \cdot u_S \cdot U_{1N} = 0.8 \cdot 0.12 \cdot 132 = 12.67 \text{ kV} \Leftrightarrow 1.46 \text{ cm}$$

Es ergibt sich in cm dasselbe Zeigerdiagramm wie in Bild T18.2, aber mit dem neuen Spannungsmaßstab! Der Strangwert  $U'_2 : 14.5 \text{ cm} \Leftrightarrow 14.5 \cdot 8.65 = 125.6 \text{ kV}$  ist gleichzeitig der verkettete Wert  $U'_{2verk} = 125.6 \text{ kV}$ . Es ergibt sich übereinstimmend mit 2):

$$U_{2verk} = U'_{2verk} / \ddot{u} = 125.6 / 5.5 = \underline{22.83 \text{ kV}}, \quad U_{2verk} / U_{2N} = 22.83 / 24 = 0.951 = \underline{95.1\%}.$$

$$I'_2 = I_2 / \ddot{u} = -I_1 \Rightarrow I_2 = -\ddot{u} \cdot I_1 = -5.5 \cdot 104.97 = -577.3 \text{ A} \text{ als Außenleiterwert:}$$

$$I_{2,Außenleiter} = I_2 = 577.3 \text{ A}, \quad I_2 / I_{2N} = 577.3 / 721.7 = \underline{0.8}.$$

$$\text{Wegen der Yd-Schaltung ist der Strangwert } I_{2ph} = I_2 / \sqrt{3} = 577.3 / \sqrt{3} = \underline{333.3 \text{ A}}.$$

Bei symmetrischer Belastung verhalten sich Drehstromtransformatoren mit unterschiedlichen Schaltgruppen, aber identischen Außenleiter-Bemessungsdaten identisch hinsichtlich ihrer netzbelastenden Größen.

### Aufgabe T19: 50Hz-Drehstrom-Verteiltransformator

Bei einem Drehstrom-Verteiltransformator  $S_N = 500 \text{ kVA}$ ,  $U_{1N}/U_{2N} = 6 \text{ kV}/0.4 \text{ kV}$ ,  $f_N = 50 \text{ Hz}$  mit der Schaltung gemäß Bild T19.1 a) wurde im Prüffeld ein Kurzschlussversuch mit

Nennstrom  $I_{1N}$  durchgeführt. Es ergaben sich eine primäre Kurzschlussspannung  $U_k = 360$  V und Verluste  $P_k = 8.4$  kW.

- 1) Zeichnen Sie die sekundären Phasenspannungen und verketteten Spannungen bei Leerlauf! Wie heißt die Schaltgruppe? Wie groß ist die Stundenziffer?
- 2) Geben Sie die Außenleiter- und Strangströme  $I_{1N}$ ,  $I_{1N,ph}$ ,  $I_{2N}$ ,  $I_{2N,ph}$  sowie verkettete und Phasen-Spannungen  $U_{1N}$ ,  $U_{1N,ph}$ ,  $U_{2N}$ ,  $U_{2N,ph}$  auf der Ober- und Unterspannungsseite als Nenngrößen an und bestimmen Sie das Übersetzungsverhältnis  $\ddot{u}$ ! Bestimmen Sie  $\ddot{u}$  in Abhängigkeit des Windungszahlverhältnisses  $N_1/N_2$ ! Wie groß ist  $N_1/N_2$ ?
- 3) Bestimmen Sie aus dem Kurzschlussversuch  $u_R$ ,  $u_S$ ,  $u_k$  und  $\cos\phi_k$ ! Leiten Sie die Ausdrücke  $u_R = P_k/S_N$ ,  $u_S = \sqrt{S_k^2 - P_k^2}/S_N$  her und zeigen Sie damit, dass  $u_R$ ,  $u_S$  und damit  $u_k$ ,  $\cos\phi_k$  unabhängig von der Schaltungsart (Y oder D) sind.
- 4) Geben Sie  $R_k$ ,  $X_k$  für ein Ersatzschaltbild an, bei dem die primäre D-Schaltung auf eine äquivalente Y-Schaltung umgerechnet wurde, damit ein primär in Y geschaltetes Netz rechnerisch berücksichtigt werden kann (siehe 5)).
- 5) Verwenden Sie 4), um den primären Kurzschlussstrom  $I_{1k}$  und  $I_{1k}/I_{1N}$  bei sekundärem, allpoligen Kurzschluss der Klemmen u, v, w zu berechnen, wobei das speisende Netz durch eine Y-Schaltung der Quellenspannungen  $u_q = U_{1N}/\sqrt{3}$  und eine Induktivität  $L_L = 4$  mH je Strang der Netzzuleitung bestimmt ist.

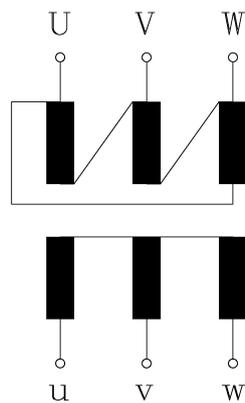


Bild T19.1 a)

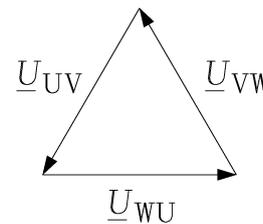


Bild T19.1 b)

**Aufgabe T19 (Lösung):** 50Hz-Drehstrom-Verteiltransformator

1)  
 Werden die positiven Bezugsrichtungen der primärseitigen Spannungszeiger je Strang willkürlich gemäß Bild T19.2 a) gewählt, so ergeben sich die Leerlaufspannungen auf der Unterspannungsseite gemäß den in Bild T19.2 a) eingezeichneten Spannungsrichtungen. Mit den gemäß der primären Dreieckschaltung (D) vom Netz vorgegebenen verketteten Primärspannungszeiger  $\underline{U}_{UV}$ ,  $\underline{U}_{VW}$ ,  $\underline{U}_{WU}$  aus Bild T19.1 b) sind folglich diese jeweiligen Unterspannungszeiger  $-\underline{U}_u$  parallel zu  $\underline{U}_{UV}$  (Bild T19.2 b)), weiter  $-\underline{U}_v$  parallel zu  $\underline{U}_{VW}$  und  $-\underline{U}_w$  parallel zu  $\underline{U}_{WU}$ . Diese werden nun gemäß der sekundärseitigen Sternschaltung (Bild T19.2 a)) verschaltet (Bild T19.2 c)). Die zugehörigen verketteten Spannungen  $\underline{U}_{uv}$ ,  $\underline{U}_{vw}$ ,  $\underline{U}_{wu}$  sind zu den primären verketteten Spannungen  $\underline{U}_{UV}$ ,  $\underline{U}_{VW}$ ,  $\underline{U}_{WU}$  um  $150^\circ = 5 \times 30^\circ$  phasenverschoben, was der Stundenziffer 5 entspricht. Daher heißt die Schaltgruppe Dy5.

- 2)  
 Primär Dreieckschaltung:  $U_{1Nph} = U_{1N} = \underline{6kV}$ ,  
 Außenleiterstrom:  $I_{1N} = S_N / (\sqrt{3} \cdot U_{1N}) = 500 / (\sqrt{3} \cdot 6) = \underline{48.1A}$ ,  
 Strangstrom:  $I_{1ph} = I_{1N} / \sqrt{3} = 48.1 / \sqrt{3} = \underline{27.77A}$ .

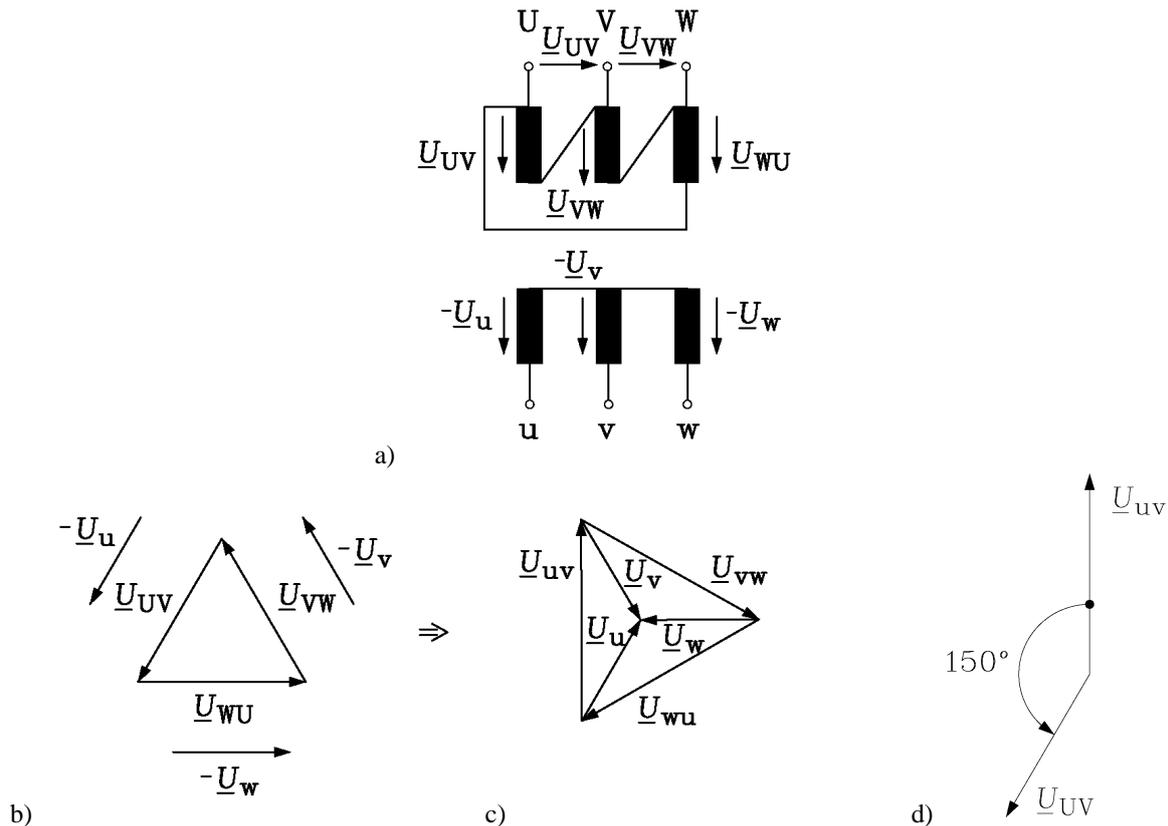
Sekundär Sternschaltung:  $U_{2N} = \underline{0.4kV}$ ,  $U_{2Nph} = U_{2N} / \sqrt{3} = \underline{231V}$ ,

Außenleiterstrom = Strangstrom:  $I_{2N} = I_{2Nph} = S_N / (\sqrt{3} \cdot U_{2N}) = 500 / (\sqrt{3} \cdot 0.4) = \underline{721.7A}$ ,

$\ddot{u} = U_{1N} / U_{2N} = U_{1verk} / U_{2verk} = 6 / 0.4 = \underline{15}$ ,

$\ddot{u} = U_{1verk} / U_{2verk} = U_{UV} / U_{uv} = U_{UV} / (\sqrt{3} \cdot U_u) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{U_{UV}}{U_u} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{N_1}{N_2}$ ,

$\frac{N_1}{N_2} = \sqrt{3} \cdot \ddot{u} = \sqrt{3} \cdot 15 = \underline{26}$ .



**Bild T19.2:** Konstruktion des dreiphasigen Spannungszeigerdiagramms der Sekundärspannungen der Schaltgruppe Dy5: a) allpolige Schaltung, b) Primär- und unverschaltete Sekundärspannungszeiger, c) gemäß Stern verschaltete Sekundärspannungszeiger, d) Phasenverschiebung zwischen primärer und sekundärer verketteter Spannung.

3)

$$u_R = \frac{R_k \cdot I_{1Nph}}{U_{1Nph}} = \frac{3 \cdot R_k \cdot I_{1Nph}^2}{3 \cdot U_{1Nph} I_{1Nph}} = \frac{P_k}{S_N}, \quad u_S = \frac{X_k \cdot I_{1Nph}}{U_{1Nph}} = \frac{3 \cdot X_k \cdot I_{1Nph}^2}{3 \cdot U_{1Nph} I_{1Nph}} = \frac{Q_k}{S_N} = \frac{\sqrt{S_k^2 - P_k^2}}{S_N}$$

Diese beiden Ausdrücke sind unabhängig von der Schaltgruppe!

$$u_R = \frac{P_k}{S_N} = \frac{8400}{500000} = \underline{0.0168}, \quad u_k = \frac{U_k}{U_{1N}} = \frac{360}{6000} = \underline{0.06},$$

$$u_S = \sqrt{u_k^2 - u_R^2} = \sqrt{0.06^2 - 0.0168^2} = \underline{0.0576},$$

$$\cos \varphi_k = \frac{P_k}{S_k} = \frac{P_k}{\sqrt{3} \cdot U_k I_{1N}} = \frac{8400}{\sqrt{3} \cdot 360 \cdot 48.1} = \underline{0.28}.$$

4)

Ersatz-Sternschaltung: Fiktive primäre Stern-Strangspannung: 3464 V.

$$U_{1Nph} = U_{1N} / \sqrt{3} = 6000 / \sqrt{3} = 3464 \text{ V},$$

$$R_k = \frac{u_R \cdot U_{1Nph}}{I_{1Nph}} = \frac{0.0168 \cdot 3464}{48.1} = \underline{1.21\Omega}, \quad X_k = \frac{u_S \cdot R_k}{u_R} = \frac{0.0576 \cdot 1.21}{0.0168} = \underline{4.15\Omega}.$$

5)

$$X_L = 2\pi f_N \cdot L_L = 2\pi \cdot 50 \cdot 0.004 = 1.256\Omega, \quad \underline{U}_q = \underline{I}_{1k} \cdot (R_k + j \cdot (X_L + X_k)),$$

$$I_{1k} = |\underline{I}_{1k}| = \frac{U_q}{\sqrt{R_k^2 + (X_L + X_k)^2}} = \frac{3464}{\sqrt{1.21^2 + (1.256 + 4.15)^2}} = \underline{625.2\text{A}}, \quad \frac{I_{1k}}{I_{1N}} = \frac{625.2}{48.1} = \underline{13}.$$

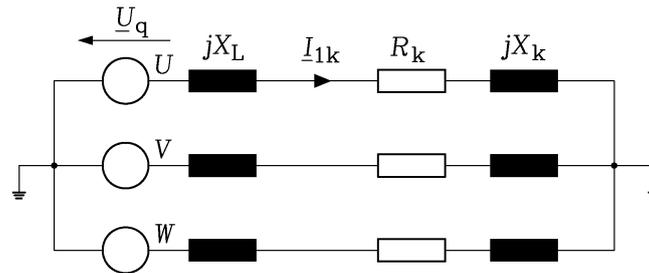


Bild T19.3: Ersatz-Sternschaltung mit fiktiven primären Stern-Strangspannungen  $\underline{U}_q$

### Aufgabe T20: 50Hz-Drehstrom-Umspann-Transformator

Ein Drehstromtransformator 100 MVA, 110 kV/30 kV, Dy5,  $f_N = 50 \text{ Hz}$  in einem Umspannwerk hat im Prüffeld eine gemessene Kurzschlussspannung  $U_{k0,5} = 6050 \text{ V}$  bei primär halbem Nennstrom und  $P_{k0,5} = 250 \text{ kW}$ .

- 1) Berechnen Sie  $I_{1N}$ ,  $I_{2N}$ ,  $\ddot{u}$ ,  $I_{1N,ph}$  und  $I_{2N,ph}$ ,  $U_{1N,ph}$ ,  $U_{2N,ph}$ !
- 2) Bestimmen Sie  $u_k$ ,  $u_R$ ,  $u_S$  und  $\cos\varphi_k$ !
- 3) Bestimmen Sie  $R_k$ ,  $X_k$  aus 2) für die Außenleiterwerte der primären Dreieckschaltung
- 4) Wie groß ist die sekundäre verkettete Spannung  $U_{2verk}$  im Vergleich zu  $U_{2N}$ , wenn sekundär eine rein kapazitive Belastung mit dem Nennstrom  $I_{2N}$  auftritt? Verwenden Sie die Ersatzschaltbildparameter von 3) und  $\ddot{u}$  von 1)!

### Aufgabe T20 (Lösung): 50Hz-Drehstrom-Umspann-Transformator

1)

Primär Dreieckschaltung:  $U_{1Nph} = U_{1N} = \underline{110\text{kV}}$ ,

Außenleiterstrom:  $I_{1N} = S_N / (\sqrt{3} \cdot U_{1N}) = 100 \cdot 10^3 / (\sqrt{3} \cdot 110) = \underline{524.8\text{A}}$ ,

Strangstrom:  $I_{1ph} = I_{1N} / \sqrt{3} = 524.8 / \sqrt{3} = \underline{303\text{A}}$ ,

Sekundär Sternschaltung:  $U_{2N} = \underline{30\text{kV}}$ ,  $U_{2Nph} = U_{2N} / \sqrt{3} = 30 / \sqrt{3} = \underline{17.32\text{kV}}$ ,

Außenleiterstrom = Strangstrom:

$$I_{2N} = I_{2Nph} = S_N / (\sqrt{3} \cdot U_{2N}) = 100 \cdot 10^3 / (\sqrt{3} \cdot 30) = \underline{1924.5\text{A}},$$

$$\ddot{u} = U_{1N} / U_{2N} = U_{1verk} / U_{2verk} = 110 / 30 = \underline{3.67}.$$

2)

Rechnen mit Außenleiterströmen und verketteten Spannungen:

Bei  $I_{1k} = I_{1N}/2$ :  $U_{k0,5} = Z_k \cdot (I_{1k} / 2) = 6050 \text{ V}$ ,

Bei  $I_{1k} = I_{1N}$ :  $U_k = Z_k \cdot I_{1k} = 2 \cdot Z_k \cdot (I_{1k} / 2) = 2 \cdot U_{k0.5} = 2 \cdot 6050 = 12100 \text{ V}$ ,

$$u_k = \frac{U_k}{U_{1N}} = \frac{12100}{110000} = \underline{\underline{0.11}}.$$

$P_{k0.5} = 3 \cdot R_k \cdot (I_{1N} / 2)^2 \Rightarrow P_k = 3 \cdot R_k \cdot (I_{1N})^2 = 4 \cdot P_{k0.5} = 4 \cdot 250 = 1000 \text{ kW}$ ,

$$u_R = \frac{P_k}{S_N} = \frac{100}{100 \cdot 10^3} = \underline{\underline{0.01}}, \quad u_S = \sqrt{u_k^2 - u_R^2} = \sqrt{0.11^2 - 0.01^2} = \underline{\underline{0.1095}},$$

$$\cos \varphi_k = \frac{P_k}{S_k} = \frac{P_k / S_N}{S_k / S_N} = \frac{u_R}{U_k / U_{1N}} = \frac{u_R}{u_k} = \frac{0.01}{0.11} = \underline{\underline{0.091}}.$$

3)

$$u_R = \frac{R_k \cdot I_{1N}}{U_{1N}} \Rightarrow R_k = \frac{u_R \cdot U_{1N}}{I_{1N}} = \frac{0.01 \cdot 110000}{524.8} = \underline{\underline{2.096 \Omega}},$$

$$X_k = \frac{R_k \cdot u_S}{u_R} = \frac{2.096 \cdot 0.1095}{0.01} = \underline{\underline{22.95 \Omega}}.$$

4)

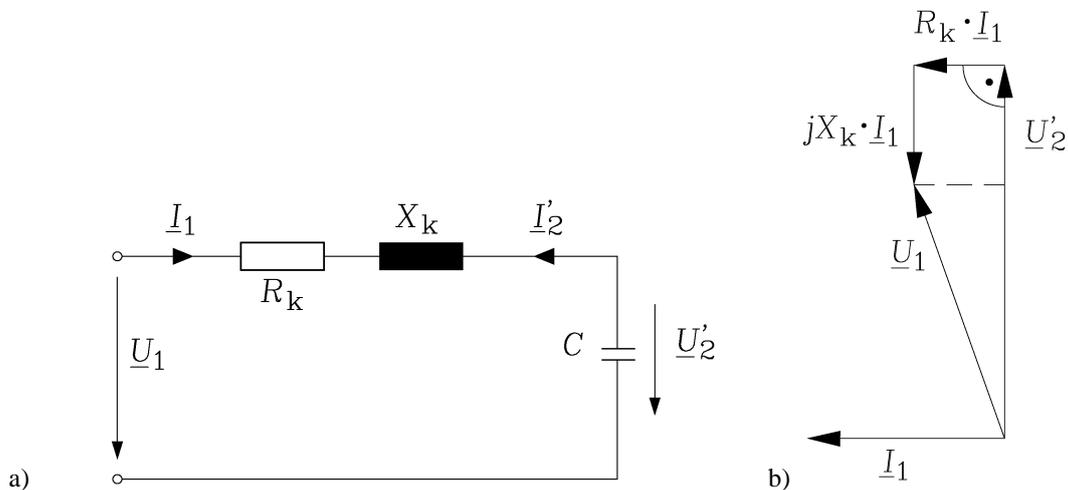


Bild T20.1: a) Ersatzschaltung je Strang bei kapazitiver sekundärer Belastung, b) Prinzipskizze des Spannungs- und Stromzeigerdiagramms je Strang.

$$\underline{U}'_2 = -\frac{1}{j\omega C'} \cdot \underline{I}'_{2N} \Rightarrow \underline{I}'_{2N} = -j\omega C' \cdot \underline{U}'_2 = -j \cdot \underline{U}'_2 / X'_C = -\underline{I}_{1N},$$

$$\underline{U}'_2 + \underline{I}_{1N} \cdot (R_k + j \cdot X_k) = -j \cdot \underline{I}_{1N} \cdot X'_C + \underline{I}_{1N} \cdot (R_k + j \cdot X_k) = \underline{U}_{1N}$$

$$\underline{I}_{1N} \cdot (R_k + j \cdot (X_k - X'_C)) = \underline{U}_{1N}, \quad R_k + j \cdot (X_k - X'_C) = \underline{U}_{1N} / \underline{I}_{1N},$$

$$U_{1N} / I_{1N} = |\underline{U}_{1N} / \underline{I}_{1N}| = \sqrt{R_k^2 + (X_k - X'_C)^2}$$

$$(X_k - X'_C)^2 = (U_{1N} / I_{1N})^2 - R_k^2, \quad X_k - X'_C = \pm \sqrt{(U_{1N} / I_{1N})^2 - R_k^2}$$

$$X_k \mp \sqrt{(U_{1N} / I_{1N})^2 - R_k^2} = X'_C > 0 \Rightarrow X'_C = X_k + \sqrt{(U_{1N} / I_{1N})^2 - R_k^2}$$

$$X'_C = 22.95 + \sqrt{(110000 / 524.8)^2 - 2.096^2} = 232.54 \Omega$$

Da  $R_k, X_k$  aus den Außenleiterwerten bestimmt wurden, ergibt sich mit  $\ddot{u}$  direkt die Spannung  $U_2$  als verkettete Spannung  $U_{2verk}$ .

$$U'_2 = X'_C \cdot I_{1N} = 232.54 \cdot 524.8 = 122038.7 \text{ V},$$

$$U_2 = U'_2 / \ddot{u} = U_{2verk} = 122038.7 / 3.67 = \underline{\underline{33253 \text{ V}}},$$

$$U_{2verk} / U_{2N} = 33253 / 30000 = \underline{\underline{1.108}} \approx 1 + u_k = 1.11.$$

Es ergibt sich auf Grund der kapazitiven Belastung eine sekundäre Spannungsüberhöhung (*Ferranti-Effekt*, Bild T20.1b).

**Aufgabe T21:** Auslegungsparameter eines Drehstromtransformators

Ein Drehstrom-Verteiltransformator für die Nenn-Scheinleistung  $S_N = 250 \text{ kVA}$ ,  $U_{1N}/U_{2N} = 10 \text{ kV}/0.525 \text{ kV}$ ,  $Yy0$ ,  $u_k = 0.05$ ,  $u_R = 0.01$  besitzt einen Eisenschenkelquerschnitt  $A = 136 \text{ cm}^2$ . Die Flussdichteamplitude beträgt  $B_{Fe} = 1.6 \text{ T}$  bei einer Frequenz  $f_N = 50 \text{ Hz}$ .

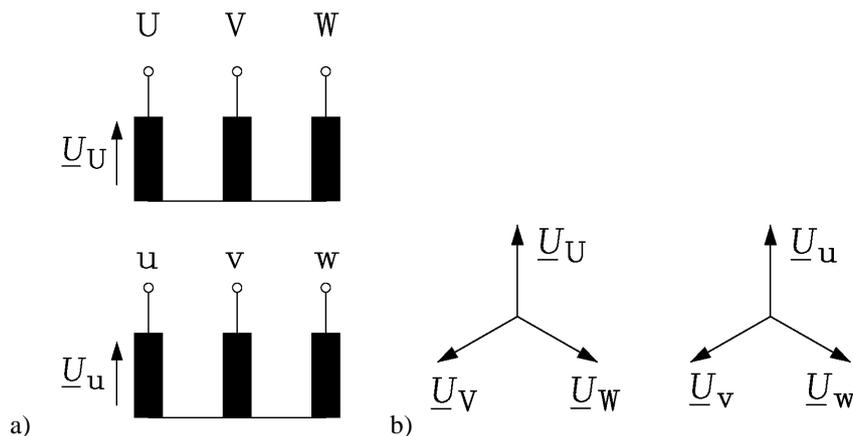


Bild T21.1: a) Allpolige Schaltung der Schaltgruppe  $Yy0$ , b) Primär- und Sekundärspannungszeiger

- 1) Berechnen Sie die primären und sekundären Nennströme  $I_{1N}$ ,  $I_{2N}$ !
- 2) Skizzieren Sie die allpolige Schaltung und begründen Sie die o.g. Schaltgruppe mit dem Zeigerdiagramm der drei Spannungen für Ober- und Unterspannung im Leerlauf des Transformators!
- 3) Berechnen Sie das Übersetzungsverhältnis  $\ddot{u}$ !
- 4) Berechnen Sie die Windungszahlen je Strang  $N_1$  und  $N_2$ ! Vernachlässigen Sie dazu den Streufluss und die ohm'schen Spannungsfälle! Wie groß ist die Spannung zwischen zwei benachbarten Windungen primär und sekundär?
- 5) Überprüfen Sie  $N_1$  und  $N_2$  mit  $\ddot{u}$  aus 3).
- 6) Der Transformator wird sekundär so belastet, dass primär 70 % des Nennstroms bei  $\cos\varphi_1 = 0.8$  induktiv (nacheilender Primärstrangstrom zur Primärstrangspannung) auftritt. Wie groß sind  $U_{2,ph}$  und  $U_{2,verk}$  zwischen zwei Sekundärklemmen? Wie groß ist die relative sekundäre Spannungsänderung gegenüber der Nennspannung? Nehmen Sie  $\underline{U}_{1Nph} = U_{1Nph}$  reell an.

**Aufgabe T21 (Lösung):** Auslegungsparameter eines Drehstromtransformators

1)

$$I_{1N} = S_N / (\sqrt{3} \cdot U_{1N}) = 250 \cdot 10^3 / (\sqrt{3} \cdot 10 \cdot 10^3) = \underline{\underline{14.43 \text{ A}}}$$

$$I_{2N} = S_N / (\sqrt{3} \cdot U_{2N}) = 250 \cdot 10^3 / (\sqrt{3} \cdot 525) = \underline{\underline{274.92 \text{ A}}}$$

2)

Primär- und Sekundärseite sind in Stern geschaltet (Bild T21.1 a)). Werden die positiven Bezugsrichtungen der primärseitigen Spannungszeiger je Strang willkürlich gemäß Bild T21.2 a) gewählt, so ergeben sich die Leerlauf-Strangspannungen auf der Unterspannungsseite gemäß den in Bild T21.2 a) eingezeichneten Spannungsrichtungen. Mit

den gemäß der primären Sternschaltung (Y) vom Netz vorgegebenen Primärspannungszeiger  $\underline{U}_U, \underline{U}_V, \underline{U}_W$  aus Bild T21.1 b) sind folglich die jeweiligen Unterspannungszeiger  $\underline{U}_u$  parallel zu  $\underline{U}_U$ , weiter  $\underline{U}_v$  parallel zu  $\underline{U}_V$  und  $\underline{U}_w$  parallel zu  $\underline{U}_W$ . Diese werden nun gemäß der sekundärseitigen Sternschaltung (Bild T21.2 a)) verschaltet. Die zugehörigen verketteten Spannungen  $\underline{U}_{uv}, \underline{U}_{vw}, \underline{U}_{wu}$  sind mit den primären verketteten Spannungen  $\underline{U}_{UV}, \underline{U}_{VW}, \underline{U}_{WU}$  in Phase, was der Stundenziffer 0 entspricht. Daher heißt die Schaltgruppe Yy0.

3)

$$\ddot{u} = U_{1N} / U_{2N} = U_{1verk} / U_{2verk} = 10 / 0.525 = \underline{\underline{19.04}} .$$

4)

Leerlauf, Streufluss vernachlässigt:  $\sqrt{2} \cdot U_{1Nph} = 2\pi f_N \cdot N_1 \cdot B_{Fe} A_{Fe}$ ,

$$N_1 = \frac{\sqrt{2} \cdot U_{1Nph}}{2\pi f_N \cdot B_{Fe} A_{Fe}} = \frac{\sqrt{2} \cdot 10000 / \sqrt{3}}{2\pi \cdot 50 \cdot 1.6 \cdot 136 \cdot 10^{-4}} = 1194.4 \Rightarrow \underline{\underline{1195}} ,$$

$$N_2 = \frac{U_{2Nph}}{U_{1Nph}} \cdot N_1 = \frac{525}{10000} \cdot 1194.4 = 62.7 \Rightarrow \underline{\underline{63}} ,$$

Windungsspannung:

$$U_{windung,1} = U_{1Nph} / N_1 = \frac{10000 / \sqrt{3}}{1195} = \underline{\underline{4.83V}} , U_{windung,2} = U_{2Nph} / N_2 = \frac{525 / \sqrt{3}}{63} = \underline{\underline{4.81V}} .$$

5)

Kontrolle:  $\ddot{u} = N_1 / N_2 = 1195 / 63 = 18.968 \approx \underline{\underline{19.04}} .$

6)

$$u_S = \sqrt{u_k^2 - u_R^2} = \sqrt{0.05^2 - 0.02^2} = 0.046 , R_k = \frac{u_R \cdot U_{1Nph}}{I_{1N}} = \frac{0.02 \cdot 5773.5}{14.43} = 8.0\Omega ,$$

$$X_k = \frac{R_k \cdot u_S}{u_R} = \frac{8.0 \cdot 0.046}{0.02} = 18.4\Omega , I_1 = 0.7 \cdot I_{1N} , I_{1w} = I_1 \cdot \cos \varphi_1 = 0.8 \cdot I_1 ,$$

$$\sin \varphi_1 = \sqrt{1 - (\cos \varphi_1)^2} = \sqrt{1 - 0.8^2} = 0.6 , I_{1b} = I_1 \cdot \sin \varphi_1 = 0.6 \cdot I_1 ,$$

nacheilender Strom (Bild T21.2):  $\underline{I}_1 = I_{1w} - j \cdot I_{1b}$ . Es sei  $\underline{U}_{1Nph} = U_{1Nph}$  reell.

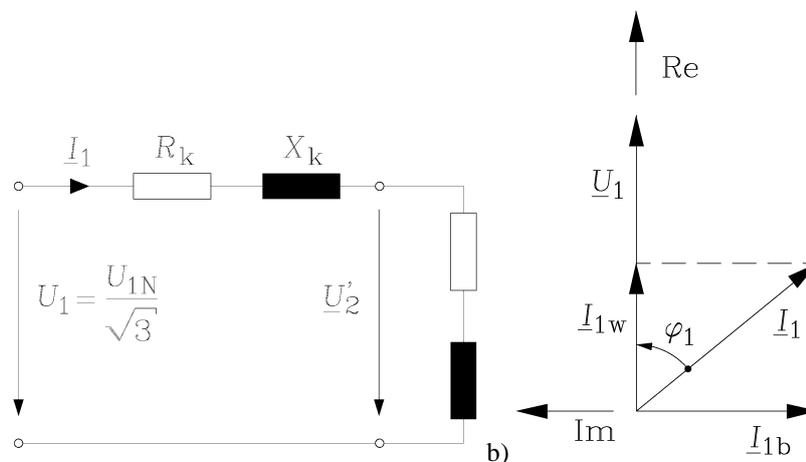


Bild T21.2: a) Einsträngiges Ersatzschaltbild bei ohm'sch-induktiver Belastung, b) Prinzipskizze des Spannungs- und Stromzeigerdiagramms je Strang.

$$\underline{U}'_2 = U_{1Nph} - \underline{I}_1 \cdot (R_k + j \cdot X_k) = U_{1Nph} - (I_{1w} - j \cdot I_{1b}) \cdot (R_k + j \cdot X_k) ,$$

$$\begin{aligned} \underline{U}'_2 &= U_{1Nph} - R_k \cdot I_{1w} - X_k \cdot I_{1b} - j \cdot (X_k \cdot I_{1w} - R_k \cdot I_{1b}), \\ \underline{U}'_2 &= U_{1Nph} - 0.7 \cdot I_{1N} \cdot [R_k \cdot 0.8 + X_k \cdot 0.6] - j I_{1N} \cdot [X_k \cdot 0.8 - R_k \cdot 0.6], \\ \underline{U}'_2 &= 5773.5 - 0.7 \cdot 14.43 \cdot [8 \cdot 0.8 + 18.4 \cdot 0.6] - j \cdot 0.7 \cdot 14.43 \cdot [18.4 \cdot 0.8 - 8 \cdot 0.6], \\ \underline{U}'_2 &= 5773.5 - 176.16 - j \cdot 100.2 = (5597.3 - j \cdot 100.2) \text{V}, \\ U'_2 &= |\underline{U}'_2| = \sqrt{5597.3^2 + 100.2^2} = 5598.2 \text{V}, \quad U_{2ph} = U'_2 / \ddot{u} = 5598.2 / 19.04 = \underline{294.0 \text{V}}, \\ U_{2verk} &= \sqrt{3} \cdot U_{2ph} = \sqrt{3} \cdot 294.0 = \underline{509.3 \text{V}}, \quad U_{2verk} / U_{2N} = 509.3 / 525 = \underline{0.97}. \end{aligned}$$

Relative Spannungsänderung gegenüber Leerlauf:  $0.97 - 1 = -0.03$  : Spannungsabnahme 3%.

**Aufgabe T22:** Prüffeldmessungen bei einem Drehstromtransformator

An einem Drehstromtransformator mit der Nennscheinleistung  $S_N = 100 \text{ MVA}$ ,  $U_{1N} = 220 \text{ kV}$ ,  $U_{2N} = 110 \text{ kV}$ ,  $f_N = 50 \text{ Hz}$ ,  $Yy0$ , wurden im Prüffeld folgende Tests durchgeführt:  
 Leerlaufmessung:  $P_0 = 0.32 \text{ MW}$ ,  $U_{10} = U_{1N} = 220 \text{ kV}$ ,  $I_{10} = 7.23 \text{ A}$ ,  $I_2 = 0$ ,  
 Kurzschlussmessung:  $P_k = 1.0 \text{ MW}$ ,  $U_k = 20 \text{ kV}$  primär,  $U_2 = 0$  sekundär,  $I_{1k} = 262.43 \text{ A}$ .

- 1) Bestimmen Sie den primären und sekundären Nennstrom  $I_{1N}$ ,  $I_{2N}$ , das Übersetzungsverhältnis  $\ddot{u}$  und das Strangwindungszahlverhältnis  $N_1/N_2$ !
- 2) Bestimmen Sie aus dem Leerlaufversuch  $L_h$ ,  $X_h$ ,  $R_{Fe}$  je Strang, wobei Sie wegen  $X_{1\sigma}$ ,  $R_1 \ll R_{Fe}$ ,  $X_h$  den Einfluss von  $X_{1\sigma}$ ,  $R_1$  vernachlässigen!
- 3) Berechnen Sie  $u_k$ ,  $u_s$ ,  $u_R$ ,  $R_k$ ,  $X_k$  je Strang aus dem Kurzschlussversuch!
- 4) Geben Sie das Ersatzschaltbild je Strang an mit  $R_1 = R'_2$ ,  $X_{1\sigma} = X'_{2\sigma}$ !
- 5) Wie groß ist der Dauerkurzschlussstrom  $I_{1k}/I_{1N}$  bei  $U_{1N}$  und sekundärem Kurzschluss?
- 6) Wie groß ist die sekundäre Klemmspannung  $U_{2,verk}/U_{2N}$  bei Nennstrom  $I_{1N}$ , Nennspannung  $U_{1N}$  und  $\cos\varphi_1 = 0.8$  induktiv? Verwenden Sie  $R_{Fe} \rightarrow \infty$ ,  $X_h \rightarrow \infty$ , wegen  $R_k$ ,  $X_k \ll R_{Fe}$ ,  $X_h$ !
- 7) Bestimmen Sie den Nennwirkungsgrad  $\eta_N$ , bezogen auf  $\cos\varphi_N = 1$ , bei einer Verlustleistung der Kühlaggregate  $P_{kühl}$  von 3 % der Gesamtverlustleistung  $P_0 + P_k$ !

**Aufgabe T22 (Lösung):** Prüffeldmessungen bei einem Drehstromtransformator

- 1)
 
$$I_{1N} = S_N / (\sqrt{3} \cdot U_{1N}) = 100 \cdot 10^6 / (\sqrt{3} \cdot 220 \cdot 10^3) = \underline{262.43 \text{ A}},$$

$$I_{2N} = S_N / (\sqrt{3} \cdot U_{2N}) = 100 \cdot 10^6 / (\sqrt{3} \cdot 110 \cdot 10^3) = \underline{524.86 \text{ A}},$$

$$\ddot{u} = U_{1N} / U_{2N} = 220 / 110 = \underline{2},$$

$$Yy: N_1 / N_2 = U_{1Nph} / U_{2Nph} = (U_{1N} / \sqrt{3}) / (U_{2N} / \sqrt{3}) = U_{1N} / U_{2N} = \ddot{u} = \underline{2}.$$
- 2)
 
$$X_{1\sigma}, R_1 \ll R_{Fe}, X_h, \underline{U}_{1Nph} \text{ reell gewählt: } \underline{U}_{1Nph} = U_{1Nph} = \underline{I}_{Fe} \cdot R_{Fe} = \underline{I}_m \cdot (jX_h),$$

$$\underline{I}_{Fe} + \underline{I}_m = \underline{I}_{10} \Rightarrow I_{Fe}^2 + I_m^2 = I_{10}^2 \text{ (Bild T22.1),}$$

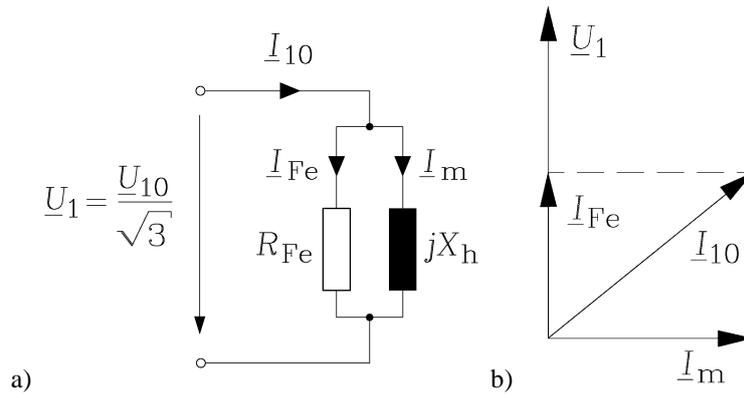
$$P_0 = 3 \cdot U_{1Nph}^2 / R_{Fe} = U_{1N}^2 / R_{Fe} \Rightarrow R_{Fe} = U_{1N}^2 / P_0 = (220 \cdot 10^3)^2 / (320 \cdot 10^3) = \underline{151250 \Omega},$$

$$I_{Fe} = U_{1N} / (\sqrt{3} \cdot R_{Fe}) = 220000 / (\sqrt{3} \cdot 151250) = 0.84 \text{ A},$$

$$I_m = \sqrt{I_{10}^2 - I_{Fe}^2} = \sqrt{7.23^2 - 0.84^2} = 7.18 \text{ A},$$

$$X_h = U_{10} / (\sqrt{3} \cdot I_m) = 220000 / (\sqrt{3} \cdot 7.18) = \underline{17687.5 \Omega},$$

$$L_h = X_h / (2\pi f_N) = 17687.5 / (2\pi \cdot 50) = \underline{56.3 \text{ H}}.$$



**Bild T22.1:** a) Einsträngiges Ersatzschaltbild des leerlaufenden Transformators bei vernachlässigten Primärwiderstand und Streureaktanz, b) Prinzipskizze des Strom-Spannungs-Zeigerdiagramms.

3)

$$u_k = \frac{U_k}{U_{1N}} = \frac{20000}{220000} = \underline{0.0909}. \text{ Es ist } I_{1k} = 262.43\text{A} = I_{1N} \text{ gemäß 1) und der Angabe, daher}$$

$$\text{ist (Bild T22.2) } P_k = 3 \cdot R_k \cdot I_{1k}^2 = 3 \cdot R_k \cdot I_{1N}^2 \Rightarrow R_k = \frac{P_k}{3 \cdot I_{1N}^2} = \frac{1000000}{3 \cdot 262.43^2} = \underline{4.84\Omega},$$

$$u_R = \frac{R_k \cdot I_{1N}}{U_{1N}} = \frac{4.84 \cdot 262.43}{220000/\sqrt{3}} = \underline{0.01\Omega}, \quad u_S = \sqrt{u_k^2 - u_R^2} = \sqrt{0.0909^2 - 0.01^2} = \underline{0.0903},$$

$$X_k = \frac{R_k \cdot u_S}{u_R} = \frac{4.84 \cdot 0.0903}{0.01} = \underline{43.73\Omega}.$$

Alternativer Rechnungsgang:

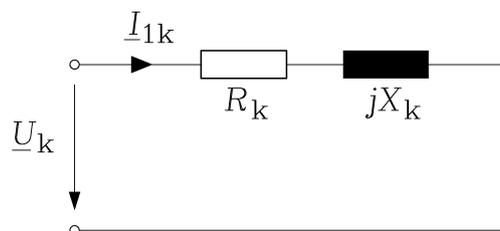
$$\cos \varphi_k = \frac{P_k}{\sqrt{3} \cdot U_k \cdot I_{1N}} = \frac{1000 \cdot 10^3}{\sqrt{3} \cdot 20 \cdot 10^3 \cdot 262.43} = 0.11,$$

$$\sin \varphi_k = \sqrt{1 - (\cos \varphi_k)^2} = \sqrt{1 - 0.11^2} = 0.9939,$$

je Strang:

$$U_R = R_k \cdot I_{1N} = U_k \cdot \cos \varphi_k = \frac{20000}{\sqrt{3}} \cdot 0.11 = 1270\text{V} \Rightarrow R_k = U_R / I_{1N} = 1270 / 262.43 = \underline{4.84\Omega},$$

$$U_X = X_k \cdot I_{1N} = U_k \cdot \sin \varphi_k = \frac{20000}{\sqrt{3}} \cdot 0.9939 = 11477\text{V} \Rightarrow X_k = U_X / I_{1N} = 11477 / 262.43 = \underline{43.73\Omega}.$$



**Bild T22.2:** Einsträngiges Ersatzschaltbild des sekundär kurzgeschlossenen Transformators bei vernachlässigten  $R_{Fe}, X_h$

4)

$$R_1 = R_2' = R_k / 2 = \underline{2.42\Omega}, \quad X_{1\sigma} = X_{2\sigma}' = X_k / 2 = \underline{21.87\Omega} \text{ (Bild T22.3).}$$

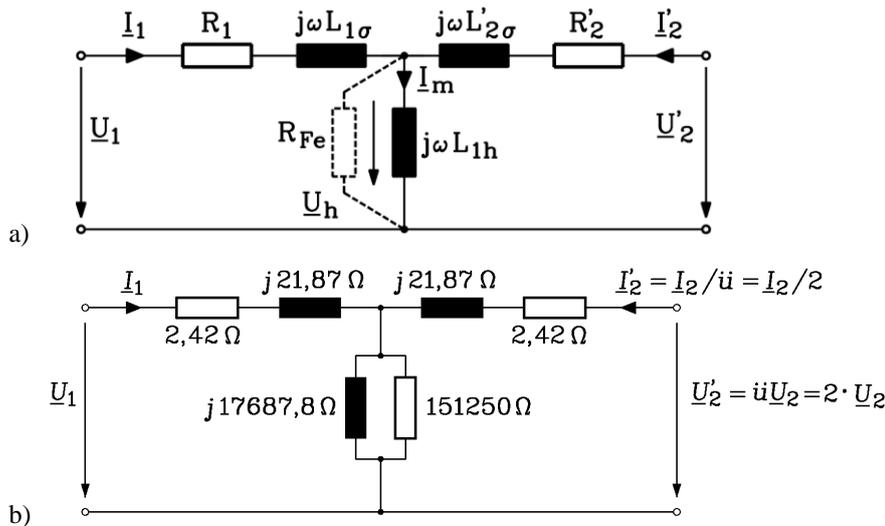


Bild T22.3: a) T-Ersatzschaltbild je Strang des Drehstrom-Transformators für zeitlich sinusförmige Vorgänge mit b) den Werten  $R_1 = 2.42 \Omega$ ,  $R'_2 = 2.42 \Omega$ ,  $X_{1\sigma} = 21.87 \Omega$ ,  $X_h = 17687.5 \Omega$ ,  $X'_{2\sigma} = 21.87 \Omega$ ,  $R_{Fe} = 151250 \Omega$ .

5)

$$I_{1k} / I_{1N} = 1 / u_k = 1 / 0.0909 = \underline{\underline{11}}.$$

6)

$R_{Fe} \rightarrow \infty$ ,  $X_h \rightarrow \infty$ :  $I_{1wirk} = I_{1N} \cdot \cos \varphi_1$ ,  $I_{1blind} = I_{1N} \cdot \sin \varphi_1$ , induktiv = nacheilender Strom:

$\underline{I}_1 = \underline{I}_{1wirk} - j \cdot \underline{I}_{1blind}$ . Achtung:  $\underline{U}_{1Nph}$ ,  $\underline{I}_{1wirk}$ ,  $\underline{I}_{1blind}$  sind in Phase.

$$\underline{U}'_2 = \underline{U}_1 - \underline{I}_1 \cdot (R_k + j \cdot X_k) = \underline{U}_{1Nph} - (\underline{I}_{1wirk} - j \cdot \underline{I}_{1blind}) \cdot (R_k + j \cdot X_k),$$

$$\underline{U}'_2 = (\underline{U}_{1Nph} - \underline{I}_{1wirk} R_k + \underline{I}_{1blind} X_k) - j \cdot (X_k \underline{I}_{1wirk} - R_k \underline{I}_{1blind}),$$

$$U'_2 = |\underline{U}'_2| = \sqrt{(\underline{U}_{1Nph} - \underline{I}_{1wirk} R_k - \underline{I}_{1blind} X_k)^2 + (X_k \underline{I}_{1wirk} - R_k \underline{I}_{1blind})^2},$$

$$\underline{I}_{1wirk} = I_{1N} \cdot \cos \varphi_1 = 262.43 \cdot 0.8 = 209.94 \text{ A}, \quad \sin \varphi_1 = \sqrt{1 - (\cos \varphi_1)^2} = \sqrt{1 - 0.8^2} = 0.6,$$

$$\underline{I}_{1blind} = I_{1N} \cdot \sin \varphi_1 = 262.43 \cdot 0.6 = 157.46 \text{ A}, \quad \underline{U}_{1Nph} = U_{1N} / \sqrt{3} = 220000 / \sqrt{3} = 127017 \text{ V},$$

$$U'_2 = \sqrt{(127017 - 209.94 \cdot 4.84 - 157.46 \cdot 43.73)^2 + (43.73 \cdot 209.94 - 4.84 \cdot 157.46)^2},$$

$$U'_2 = 119412.3 \text{ V}, \quad U_{2verk} / (\ddot{u} \cdot U_{2N}) = (\sqrt{3} \cdot 119412.3) / (110000 \cdot 2) = \underline{\underline{0.94}}.$$

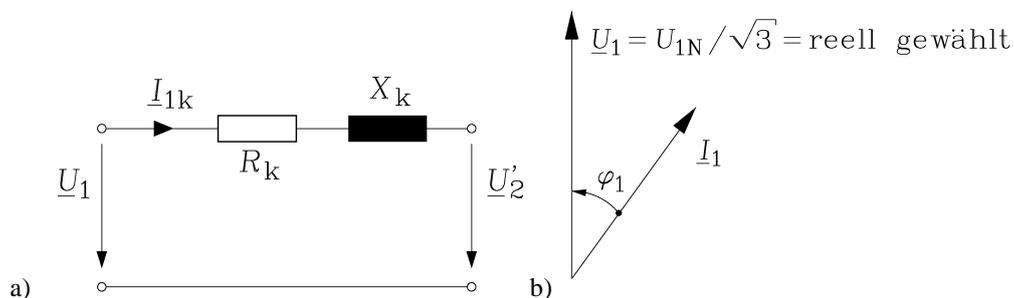


Bild T22.4: a) Einsträngiges Ersatzschaltbild des Transformators bei vernachlässigten  $R_{Fe}$ ,  $X_h$ , b) prinzipielles Strom-Spannungs-Zeigerdiagramm bei ohm'sch-induktiver Belastung

7)

$$P_{kühl} = 0.03 \cdot (P_0 + P_k) = 0.03 \cdot (320 + 1000) = 0.03 \cdot 1320 = 39.6 \text{ kW},$$

$$P_N = S_N \cdot \cos \varphi_N = S_N = 100 \text{ MW},$$

$$\eta_N = \frac{P_N}{P_N + P_0 + P_k + P_{kühl}} = \frac{100000}{100000 + 320 + 1000 + 39.6} = \underline{\underline{0.9865}} = \underline{\underline{98.65\%}}$$

**Aufgabe T23:** Turbogenerator - Betriebsdaten

In einem Dampfkraftwerk erzeugt ein elektrischer Synchrongenerator (Turbogenerator) elektrische Energie. Der zweipolige Turbogenerator ist für  $S_N = 125$  MVA Scheinleistung,  $U_N = 10.5$  kV (verkettet) und  $f_s = 50$  Hz bemessen. Die Ständerwicklung ist – wie bei Generatoren üblich – in Stern geschaltet. Der Generator hat folgende Auslegungsmerkmale: Länge des Blechpakets  $l = 2.94$  m, Statorinnendurchmesser  $d_{si} = 1040$  mm, Luftspalt  $\delta = 60$  mm, ideale Polbedeckung  $\alpha_e = 0.66$ , Windungszahl je Strang  $N_s = 11$ . Der Scheitelwert der magnetischen Flussdichte im Luftspalt bei Leerlauf ist  $B_\delta = 0.88$  T.

- 1) Wie groß ist die Synchrondrehzahl  $n_{syn}$ ?
- 2) Berechnen Sie die Polteilung  $\tau_p$  !
- 3) Bestimmen Sie die Umfangsgeschwindigkeit des Läufers  $v_r$  in km/h und m/s!
- 4) Wie groß ist der magnetische Luftspaltfluss pro Pol im Leerlauf  $\Phi_p$ ?
- 5) Geben Sie den Effektivwert der Leerlaufspannung des Generators als Strangwert an.
- 6) Der Generator soll mit einem Leistungsfaktor  $\cos \varphi_N = 0.88$  induktive Verbraucher im Netz mit Nennstrom und Nennspannung versorgen. Berechnen Sie den Generatornennstrom  $I_N$  und den Betrag der elektrischen Generatorwirkleistung  $P_e$ !
- 7) Wie groß ist die erforderliche mechanische Wirkleistung  $P_{m,in}$ , die die Dampfturbine dem Generator an der Welle zuführen muss, wenn der Generatorwirkungsgrad  $\eta_N = 98.7\%$  beträgt?
- 8) Die Dampfturbine ist direkt mit dem Generator gekuppelt. Für welches Drehmoment muss die Kupplung zumindest bemessen sein?
- 9) Welche elektromagnetische Läufer-Umfangskraft  $F_e$  (Lorentz-Kraft) tritt im Luftspalt des Synchrongenerators bei Belastung gemäß Punkt 6) und 7) auf? (Hinweis: Vernachlässigen Sie das bremsende Verlustmoment im Generator.)
- 10) Wie groß ist der primäre Leistungsbedarf  $P_{prim}$  des Kraftwerks (modernes Braunkohlekraftwerk) zu Punkt 6), 7), wenn dessen Gesamtwirkungsgrad  $\eta_{ges} = 45\%$  beträgt?
- 11) Wie groß ist die für eine mögliche Fernwärmenutzung zur Verfügung stehende thermische Leistung zu Punkt 10)?
- 12) Wie schwer ist der Rotor des Synchrongenerators, wenn zwecks vereinfachter Abschätzung nur die Masse  $m$  im Bereich des Blechpakets berücksichtigt wird? (Dichte des Eisens:  $\gamma_{Fe} = 7850$  kg/m<sup>3</sup>)

**Aufgabe T23 (Lösung):** Turbogenerator - Betriebsdaten

1)

Zweipolige Maschine:  $2p = 2$ ,  $\underline{\underline{n_{syn}}} = \frac{f_s}{p} = \frac{50}{1} = 50 / s = \underline{\underline{3000 / min}}$  .

2)

Polteilung:  $\underline{\underline{\tau_p}} = \frac{d_{si} \cdot \pi}{2p} = \frac{1040 \cdot \pi}{2} = \underline{\underline{1633.6 mm}}$  .

3)

Synchronmaschine: Synchrondrehzahl  $n_{syn}$  = Läuferdrehzahl  $n$ :

$\underline{\underline{v_r}} = d_r \cdot \pi \cdot n = (d_{si} - 2\delta) \cdot \pi \cdot n = (1.04 - 2 \cdot 0.06) \cdot \pi \cdot 50 = \underline{\underline{144.5 m / s}} = \underline{\underline{520.3 km / h}}$  .

4)

$$\underline{\underline{\Phi_p}} = \alpha_e \cdot \tau_p \cdot l \cdot B_\delta = 0.66 \cdot 1.6336 \cdot 2.94 \cdot 0.88 = \underline{\underline{2.7895 \text{ Wb}}}.$$

5)

$$U_i = \underline{\underline{U_0}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2\pi f_s \cdot N_s \cdot \Phi_p = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 11 \cdot 2.7895 = \underline{\underline{6816.4 \text{ V}}}.$$

6)

Nennstromberechnung aus Nennscheinleistung:

$$S_N = 3 \cdot U_{Nph} \cdot I_{Nph} = \sqrt{3} \cdot U_{Nverk} \cdot I_N \Rightarrow \underline{\underline{I_N}} = \frac{S_N}{\sqrt{3} \cdot U_{Nverk}} = \frac{125000000}{\sqrt{3} \cdot 10500} = \underline{\underline{6873.2 \text{ A}}}.$$

Betrag der Nennwirkleistung:  $P_e = \underline{\underline{P_N}} = S_N \cdot \cos \varphi_N = 125 \cdot 0.88 = \underline{\underline{110 \text{ MW}}}$ .

7)

$$P_{out, Turbine} = \underline{\underline{P_{m,in}}} = \frac{P_e}{\eta_N} = \frac{110}{0.987} = \underline{\underline{111.45 \text{ MW}}}.$$

8)

Die Kupplung muss für das im Betrieb auftretende maximale Drehmoment bemessen sein, sonst wird sie überlastet und bricht. Das maximal mögliche Betriebsmoment tritt bei maximaler Wirkleistungsabgabe des Generators (Nennstrom, Nennspannung,  $\cos \varphi = 1$ ) auf. Mit der Annahme, dass der Wirkungsgrad des Generators bei  $\cos \varphi = 0.88$  und bei  $\cos \varphi = 1$  derselbe ist (was in etwa stimmt), ergibt sich für das maximale Betriebsdrehmoment:

$$\underline{\underline{M}} = \frac{S_N \cos \varphi}{\eta} \cdot \frac{1}{2\pi n} = \frac{125000000 \cdot 1}{0.987} \cdot \frac{1}{2\pi \cdot 50} = 403128 \text{ Nm} = \underline{\underline{403.1 \text{ kNm}}}.$$

Für dieses Drehmoment ist die Kupplung zumindest zu bemessen.

*Anmerkung:* Auf Grund von Drehmoment“spitzen“ bei Störfällen wie z. B. plötzlichem Kurzschluss an den Generatorklemmen ist die Kupplung in der Praxis für deutlich höhere Momente zu bemessen.

9)

Bei Vernachlässigung des bremsenden Verlustmoments (z. B. infolge Reibung) im Generator sind das antreibende Moment an der Welle  $M$  und das bremsende elektromagnetische Luftspaltmoment  $M_e$  gleich groß. Für den Lastpunkt gemäß Punkt 7) gilt:

$$M = \frac{P_{m,in}}{2\pi n} = M_e = \frac{111448834}{2\pi \cdot 50} = 354753 \text{ Nm} \Rightarrow \underline{\underline{F_e}} = \frac{M_e}{d_r / 2} = \frac{354753}{0.92 / 2} = \underline{\underline{771201 \text{ N}}}.$$

*Anmerkung:* Um sich die Größe dieser Kraft zu veranschaulichen, bedenken Sie bitte: Die Masse einer der elektrischen Umfangskraft entsprechenden Erdanziehungskraft beträgt:

$$m = \frac{F_e}{g} = \frac{771201}{9.81} = 78613 \text{ kg} = 78.6 \text{ Tonnen!}$$

10)

$$\underline{\underline{P_{prim}}} = \frac{P_{e,out}}{\eta_{ges}} = \frac{110000000}{0.45} = 244444444 \text{ W} = \underline{\underline{244.44 \text{ MW}}}.$$

11)

Folgende thermische Verlustleistung muss aus der Dampfturbine abgeführt werden:

$$\underline{\underline{P_{th}}} = P_{prim} - P_{m,in} = 244.444 - 111.449 = \underline{\underline{132.995 \text{ MW}}}.$$

Diese im heißen Dampf gespeicherte Wärme kann als thermische Leistung für eine Fernwärmeheizung genutzt werden.

12)

Masse des Rotors: Abschätzung: Vollzylinder aus Eisen mit Länge  $l = 2.94 \text{ m}$ ,

$$\text{Durchmesser } d_r = 0.92 \text{ m, Dichte } \rho_{Fe}: \underline{m} = \rho_{Fe} \frac{d_r^2 \pi}{4} l = 7850 \frac{0.92^2 \pi}{4} 2.94 = \underline{\underline{15342 \text{ kg}}}$$

Die tatsächliche Gesamtmasse des Läufers mit Berücksichtigung der Masse der Wellenenden und der Kupplung beträgt ca. 17 Tonnen.

### Aufgabe T24: Turbogenerator – Zeigerdiagramm, Kippmoment

Ein zweipoliger Synchrongenerator mit  $S_N = 125 \text{ MVA}$  Nennscheinleistung,  $U_N = 10.5 \text{ kV}$  Nennspannung (verkettet), speist bei 50 Hz Ständerfrequenz mit in Stern geschalteter Ständerwicklung das elektrische Verbundnetz so, dass induktive Verbraucher mit einem resultierenden Leistungsfaktor  $\cos \varphi = 0.88$  versorgt werden können. Als Ersatzschaltbildparameter ist im Folgenden ausschließlich die Synchroninduktivität  $L_d = 5.6 \text{ mH}$  je Strang zu berücksichtigen, während der *ohm'sche* Ständerwiderstand  $R_s$  je Strang vernachlässigt werden kann.

- 1) Berechnen Sie die Synchronreaktanz  $X_d$  !
- 2) Zeichnen Sie maßstäblich das Zeigerdiagramm je Strang bei Betrieb mit Nennspannung, Nennstrom und  $\cos \varphi = 0.88$  (Spannungsmaßstab:  $\mu_U = 1000 \text{ V/cm}$ , Strommaßstab:  $\mu_I = 1000 \text{ A/cm}$ ), und lesen Sie aus dem Zeigerdiagramm den Effektivwert der Polradspannung  $U_p$  ab! Wie groß ist die elektrische Blindleistung  $Q$  ?
- 3) Bestimmen Sie mit 2) den Polradwinkel  $\vartheta$  !
- 4) Berechnen Sie das zu 2) zugehörige synchrone Kippmoment  $M_{p0}$  !

### Aufgabe T24 (Lösung): Turbogenerator – Zeigerdiagramm, Kippmoment

- 1)
 
$$\underline{X_d} = 2\pi f_s \cdot L_d = 2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 0.0056 = \underline{\underline{1.76 \Omega}}.$$
- 2)
  - a) Nennstrom:  $I_{Nph} = I_N = \frac{S_N}{\sqrt{3} \cdot U_{Nverk}} = \frac{125000000}{\sqrt{3} \cdot 10500} = 6873.2 \text{ A},$
  - b)  $X_d I_N = 1.76 \cdot 6873.2 = 12097 \text{ V} \Leftrightarrow 12.10 \text{ cm},$
  - c) Generatorstrangspannung:  $U_{Nph} = \frac{U_{Nverk}}{\sqrt{3}} = \frac{10500}{\sqrt{3}} = 6062 \text{ V} \Leftrightarrow 6.06 \text{ cm},$
  - d) Abgegebene elektrische Leistung (Generatorleistung) ist im Verbraucher-Zählpfeilsystem negativ:  $P_e = 3 \cdot U_{Nph} \cdot I_N \cdot \cos \varphi < 0 \Rightarrow \cos \varphi = -0.88 < 0 \Rightarrow \varphi = \arccos(-0.88) = -151.6^\circ,$   
gezählt vom Strom zur Spannung, positiv im mathematisch positiven Zählsinn, daher negativ, weil der Strom der Spannung voreilt (Generator verhält sich als kapazitiver Verbraucher).
  - e) Damit der Generator induktive Verbraucher versorgen kann, muss er selbst im Verbraucher-Zählpfeilsystem als Kapazität wirken, und daher eine negative Blindleistung aufweisen:  $\underline{Q} = 3 \cdot U_{Nph} \cdot I_N \cdot \sin \varphi = 3 \cdot 6062 \cdot 6873.2 \cdot \sin(-151.6^\circ) = \underline{\underline{-59.37 \text{ MVar}}}.$

Aus dem Zeigerdiagramm (Bild T24.1) folgt:  $U_p : 16 \text{ cm} \Leftrightarrow \underline{U_p} = \underline{\underline{16000 \text{ V}}}.$

- 3)
 

Polradwinkel  $\vartheta = 41^\circ > 0$  (gezählt von der Strangspannung zur Polradspannung, positiv im mathematisch positiven Zählsinn)

4)

Zweipolige Maschine:  $2p = 2$ , Polrad-Kippwinkel  $\vartheta = 90^\circ$ :  $\underline{M}_{p0} = \frac{1}{2\pi n_{syn}} \cdot \frac{3 \cdot U_s \cdot U_p}{X_d}$ ,

$$\underline{M}_{p0} = \frac{1}{2\pi \frac{f_s}{p}} \cdot \frac{3 \cdot U_{Nph} \cdot U_p}{X_d} = \frac{1}{2\pi \frac{50}{1}} \cdot \frac{3 \cdot 6062 \cdot 16000}{1.76} = 526253 Nm = \underline{\underline{526.3 kNm}}.$$

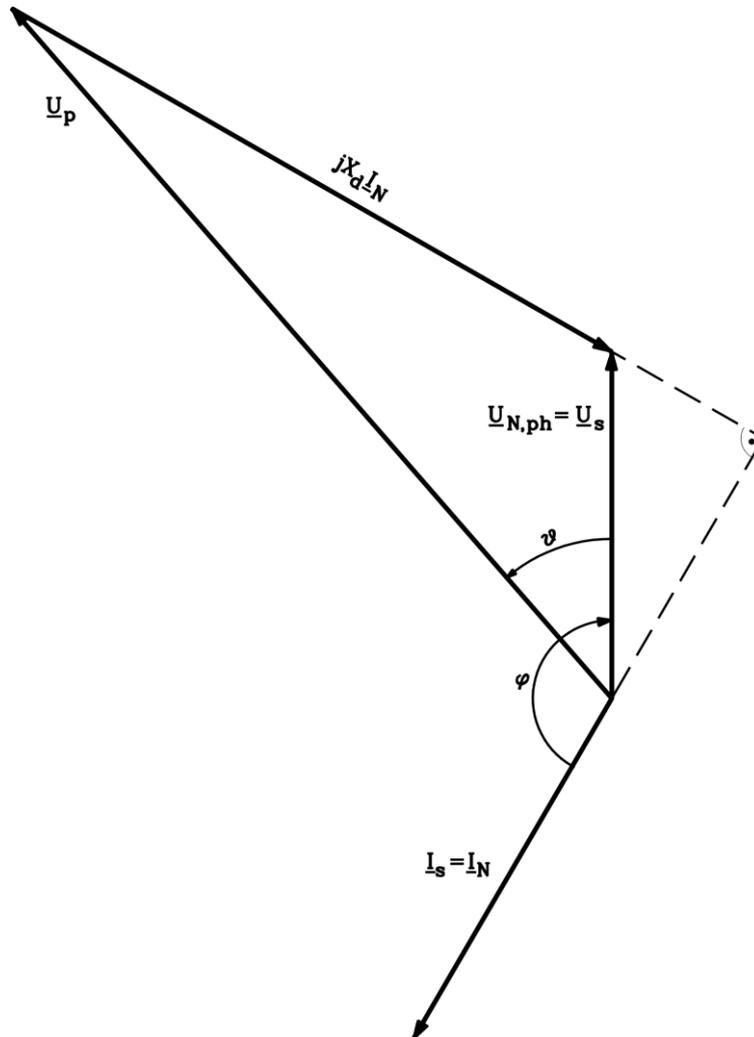


Bild T24.1: Zeigerdiagramm des Synchrongenerators mit Stranggrößen von Strom und Spannung.

**Aufgabe T25:** Blindleistungskompensation in einem Industriebetrieb

An einem Niederspannungs-Drehstromnetz  $3 \times 690 \text{ V}$ ,  $50 \text{ Hz}$  sind parallel drei symmetrische Verbraucher angeschlossen:

- Asynchronmotor:  $P_{N1} = 110 \text{ kW}$ ,  $\cos\varphi_{N1} = 0.85$ ,  $\eta_{N1} = 0.91$ , Y
- Drehstromofen:  $P_{N2} = 50 \text{ kW}$ ,  $\cos\varphi_{N2} = 1$ , Y
- Ohm'sch-kapazitiver Verbraucher:  $P_{N3} = 40 \text{ kW}$ ,  $\cos\varphi_{N3} = 0.95$ , Y

- 1) Berechnen Sie die Wirk-, Blind- und Scheinleistungsaufnahme  $P$ ,  $Q$ ,  $S$  am Netzanschlusspunkt!
- 2) Wie groß ist der resultierende Leistungsfaktor  $\cos\varphi_{ges}$ ?

- 3) Wie groß sind die Netzströme  $I_1, I_2, I_3$  je Strang der drei Verbraucher und der resultierende Netzstrom  $I_{\text{Netz}}$  am Netzanschlusspunkt?
- 4) Bestimmen Sie die Größe der Kapazitäten  $C_D$ , die - im Dreieck geschaltet - den  $\cos\varphi_{\text{ges}} = 1$  einstellen sollen!
- 5) Wie groß ist der Strom  $I_C$  je Kapazität  $C_D$  und der resultierende Netzstrom  $I_{\text{Netz}}$ ? Wie groß ist die relative Stromänderung  $\Delta I_{\text{Netz}}/I_{\text{Netz}}$  gegenüber 3)?

**Aufgabe T25 (Lösung):** Blindleistungskompensation in einem Industriebetrieb

1)

$$P = (P_{N1}/\eta_N) + P_{N2} + P_{N3} = (110/0.91) + 50 + 40 = \underline{210.88\text{kW}},$$

$$S_{N1} = \frac{P_{N1}}{\cos\varphi_s \cdot \eta_N} = \frac{110}{0.85 \cdot 0.91} = 142.2\text{kVA}, P_{N1}/\eta_N = 110/0.91 = 120.88\text{kW},$$

$$Q_{N1} = \sqrt{S_{N1}^2 - (P_{N1}/\eta_N)^2} = \sqrt{142.2^2 - 120.88^2} = 74.9\text{kVAr (induktiv)}, Q_{N2} = 0,$$

$$S_{N3} = P_{N3}/\cos\varphi_{N3} = 40/0.95 = 42.1\text{kVA},$$

$$Q_{N3} = \sqrt{S_{N3}^2 - P_{N3}^2} = \sqrt{42.1^2 - 40^2} = -13.15\text{kVAr (kapazitiv)},$$

$$Q = Q_{N1} + Q_{N2} + Q_{N3} = 74.9 + 0 - 13.15 = \underline{61.75\text{kVAr}},$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{210.88^2 + 61.75^2} = \underline{219.73\text{kVA}}.$$

2)

$$\cos\varphi_{\text{res}} = P/S = 210.88/219.73 = 0.9597 \approx \underline{0.96}.$$

3)

$$I_1 = S_{N1}/(\sqrt{3} \cdot U_N) = 142.2/(\sqrt{3} \cdot 0.69) = 118.98 \approx \underline{119\text{A}},$$

$$I_2 = S_{N2}/(\sqrt{3} \cdot U_N) = P_{N2}/(\sqrt{3} \cdot U_N) = 50/(\sqrt{3} \cdot 0.69) = \underline{41.8\text{A}},$$

$$I_3 = S_{N3}/(\sqrt{3} \cdot U_N) = 42.1/(\sqrt{3} \cdot 0.69) = \underline{35.25\text{A}},$$

$$I_{\text{Netz}} = S/(\sqrt{3} \cdot U_N) = 219.73/(\sqrt{3} \cdot 0.69) = \underline{183.85\text{A}}.$$

4)

$$Q_C = -Q = -61.75\text{kVAr} = 3 \cdot \frac{U_N}{\frac{1}{\omega C_D}} \cdot U_N = -3 \cdot U_N^2 \cdot \omega C_D,$$

$$C_D = \frac{Q}{3 \cdot U_N^2 \cdot \omega} = \frac{61750}{3 \cdot 690^2 \cdot 2\pi \cdot 50} = \underline{0.1376\text{mF}}.$$

5)

$$I_C = U_N \cdot \omega C_D = 690 \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot 0.1376 \cdot 10^{-3} = \underline{29.8\text{A}},$$

$$\cos\varphi_{\text{res}} = 1 \Rightarrow S = P : I'_{\text{Netz}} = P/(\sqrt{3} \cdot U_N) = 210.88/(\sqrt{3} \cdot 0.69) = \underline{176.4\text{A}},$$

$$\Delta I_{\text{Netz}} = (I'_{\text{Netz}} - I_{\text{Netz}})/I_{\text{Netz}} = (176.4 - 183.85)/183.85 = -0.04 = \underline{-4.0\%}.$$

**Aufgabe T26:** Synchrongenerator in einem Speicherkraftwerk

Ein Drehstrom-Synchrongenerator in einem Speichersee-Wasserkraftwerk in den kanadischen Rocky Mountains hat die Daten  $S_N = 45\text{MVA}$ ,  $f_N = 60\text{Hz}$ ,  $U_N = 21\text{kV}$ , Y,  $|\cos\varphi_N| = 0.8$

übererregt. Der Wirkungsgrad  $\eta_N$  ist näherungsweise 1, d.h. alle Generatorverluste sind vernachlässigt. Die Turbinendrehzahl ist  $n_N = 900 \text{ min}^{-1}$ !

- 1) Wie groß ist die Polzahl des Generators? Wie groß ist die Synchrondrehzahl des Stator-Drehfelds  $n_{\text{syn}}$ ?
- 2) Wie groß ist der Nennstrom je Strang  $I_{sN}$ ?
- 3) Wie groß ist der Phasenwinkel  $\varphi_N$ , von  $I_s$  zu  $U_s$  gezählt im mathematisch positiven Zählsinn?
- 4) Die Synchronreaktanzen beträgt  $X_d = 8.5\Omega$ ! Wie groß ist die Polradspannung  $\underline{U}_p$  und  $|\underline{U}_p|$  je Strang im Nennpunkt, wenn  $\underline{U}_{sN} = U_{sN}$  reell angenommen wird! Verwenden Sie das Verbraucherzählpfeilsystem!
- 5) Zeichnen Sie maßstäblich das Strom-Spannungs-Zeigerdiagramm je Strang und ermitteln Sie  $U_p$  über  $U_{sN}$ ,  $I_{sN}$ ,  $X_d$  und  $\varphi_N$  grafisch. Überprüfen Sie  $U_p$  grafisch mit dem Ergebnis von 4). Bestimmen Sie  $\vartheta_N$  grafisch! ( $250 \text{ A} \hat{=} 1 \text{ cm}$ ,  $2500 \text{ V} \hat{=} 1 \text{ cm}$ )
- 6) Bestimmen Sie das Kippmoment  $M_{p0}$  und das Drehmoment  $M_N$  an der Welle a) rechnerisch und b) mit  $\vartheta_N$  grafisch!
- 7) Wie groß ist die generatorische Überlastbarkeit  $|M_{p0}/M_N|$ ?

**Aufgabe T26 (Lösung):** Synchrongenerator in einem Speicherkraftwerk

1)

$$2p = 2 \cdot f_N / n_N = 2 \cdot 60 / (900 / 60) = \underline{\underline{8}}, \quad n_{\text{syn}} = n_N = \underline{\underline{900/\text{min}}}.$$

2)

$$I_{sN} = S_N / (\sqrt{3} \cdot U_N) = 45000 / (\sqrt{3} \cdot 21) = \underline{\underline{1237 \text{ A}}}.$$

3)

$$|\cos \varphi_N| = 0.8:$$

a) Generatorbetrieb, im Verbraucher-Zählpfeilsystem:  $\cos \varphi_N < 0$ , da die ins Netz gelieferte elektrische Leistung negativ gezählt wird.

b) übererregt: Maschine wirkt kapazitiv,  $I_s$  eilt  $\underline{U}_s$  vor:  $\sin \varphi_N < 0$ .

$\cos \varphi_N = -0.8 \Rightarrow \varphi_N = \underline{\underline{216.87^\circ}}$ , gezählt vom Strom  $I_s$  zur Spannung  $\underline{U}_s$  im mathematisch positiven Zählsinn!

$$\text{Kontrolle: } \sin \varphi = \pm \sqrt{1 - (\cos \varphi)^2} = \pm \sqrt{1 - (-0.8)^2} = \pm 0.6, \quad \sin \varphi_N = -0.6, \quad \sin 216.87^\circ = -0.6.$$

4)

$$\underline{U}_{sN} = U_{sN} = U_N / \sqrt{3} = 21000 / \sqrt{3} = 12124 \text{ V},$$

$$\underline{I}_{sN} = I_{sw} - j \cdot I_{sb} = I_{sN} \cdot (\cos \varphi_N - j \cdot \sin \varphi_N),$$

$$I_{sw} = I_{sN} \cdot \cos \varphi_N = 1237 \cdot (-0.8) = -989.6 \text{ A}, \quad I_{sb} = I_{sN} \cdot \sin \varphi_N = 1237 \cdot (-0.6) = -742.2 \text{ A},$$

$$R_s = 0: \underline{U}_p + jX_d \cdot \underline{I}_{sN} = U_{sN}, \quad \underline{U}_p = U_{sN} - jX_d \cdot \underline{I}_{sN},$$

$$\underline{U}_p = U_{sN} - j \cdot X_d \cdot I_{sN} \cdot (\cos \varphi_N - j \cdot \sin \varphi_N),$$

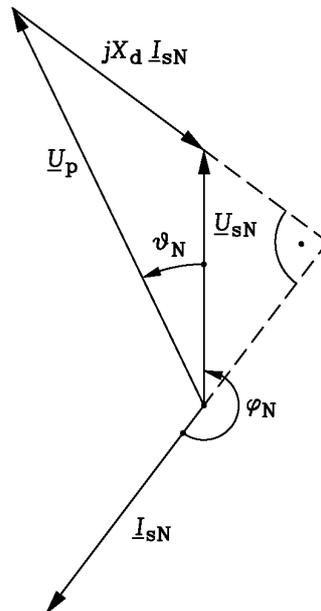
$$\underline{U}_p = U_{sN} - X_d \cdot I_{sN} \cdot \sin \varphi_N - j \cdot X_d \cdot I_{sN} \cdot \cos \varphi_N,$$

$$\underline{U}_p = 12124 + 8.5 \cdot 742.2 + j \cdot 8.5 \cdot 989.6 = \underline{\underline{(18432.7 + j \cdot 8411.6) \text{ V}}},$$

$$U_p = \sqrt{18432.7^2 + 8411.6^2} = \underline{\underline{20261.3 \text{ V}}}.$$

5)

Zeigerdiagramm siehe Bild T26.1



**Bild T26.1:** Maßstäbliches Spannungs- und Strom-Zeigerdiagramm für Generatorbetrieb (im Verbraucher-Zählpeilsystem) und *ohm'sche* Belastung ( $I_{sN} = 1237$  A,  $U_{sN} = 12124$  V),  $R_s = 0$

$$U_{sN} = 12124 \text{ V} \Leftrightarrow 4.85\text{cm} , I_{sN} = 1237 \text{ A} \Leftrightarrow 4.95\text{cm} ,$$

$$X_d I_{sN} = 8.5 \cdot 1237 = 10514.5\text{V} \Leftrightarrow 4.2\text{cm} , \varphi_N = 216.87^\circ . \text{ Aus Bild T26.1 liest man ab:}$$

a)  $U_p \Leftrightarrow 8.2\text{cm}, U_p = \underline{20500\text{V}}$ ,

Zeichengenauigkeit:  $\Delta = (20261.3 - 20500) / 20261.3 = \underline{-1.2\%}$

b)  $\vartheta_N = \underline{24^\circ}$ , Zeigerdiagramm siehe Bild T26.1.

6)

$$\Omega_{syn} = 2\pi \cdot n_{syn} = 2\pi \cdot (900/60) = 94.248/\text{s} ,$$

$$M_{p0} = \frac{3 \cdot U_{sN} \cdot U_p}{\Omega_{syn} \cdot X_d} = \frac{3 \cdot 12124 \cdot 20261}{94.248 \cdot 8.5} = \underline{919894 \text{ Nm}} ,$$

a)  $\eta_N = 1: M_N = \frac{P_N / \eta_N}{\Omega_{syn}} = \frac{S_N \cdot \cos \varphi_N}{\Omega_{syn} \cdot \eta_N} = \frac{45 \cdot 10^6 \cdot (-0.8)}{94.248 \cdot 1} = \underline{-381972 \text{ Nm}} .$

Das Drehmoment ist negativ, also im VZS antreibend (Turbinenmoment!).

b)  $\eta_N = 1: M_N = -M_{p0} \cdot \sin \vartheta_N = -919894 \cdot \sin(24^\circ) = \underline{-374155 \text{ Nm}} .$

Zeichengenauigkeit für  $\vartheta_N$  führt auf  $\Delta = (-381972 - (-374155)) / (-381972) = \underline{2\%} .$

7)

$$|M_{p0} / M_N| = 919894 / 381972 = \underline{2.4} .$$

**Aufgabe T27:** Synchrongenerator in einem Pumpspeicherkraftwerk

Ein Synchrongenerator  $S_N = 450$  MVA,  $|\cos \varphi_N| = 0.85$  übererregt,  $U_N = 24$  kV, Y,  $f_N = 50$  Hz mit dem Wirkungsgrad  $\eta_N \approx 1$ ,  $X_d = 1.1 \Omega$  in einem Pumpspeicher-Wasserkraftwerk ist sechspolig ausgeführt.

- 1) Berechnen Sie die Nenndrehzahl  $n_N$  in 1/s und 1/min! Wie groß sind Nennmoment  $M_N$  und Nennstrom  $I_{sN}$ ?
- 2) Wie groß ist  $U_p$  je Strang beim generatorischen Leerlauf?

- 3) Der Generator speist über einen Transformator und eine lange Hochspannungsleitung  $U_L = 380 \text{ kV}$  ein weit entferntes Verbraucherzentrum. Der Transformator ist bei Belastung näherungsweise durch  $X_k = 0.16 \Omega$ , bezogen auf  $24 \text{ kV}$ , beschrieben (Bild T27.1). Seine Verluste werden vernachlässigt! Die Hochspannungsleitung wird vereinfacht je Strang durch das Ersatzschaltbild von Bild T27.1 dargestellt, wobei  $C'_L = 120 \mu\text{F}$  und  $L'_L = 0.4 \text{ mH}$  auf die  $24 \text{ kV}$ -Spannungsebene umgerechnet. Wie groß muss  $U_p$  beziehungsweise  $U_p/U_{sN}$  sein, damit am Freileitungsende  $U_L = U_{LN} = 380/\sqrt{3} \text{ kV} \approx 220 \text{ kV}$  ist, und die Phasenverschiebung bei Nennstrom zwischen  $\underline{I}'_L$  und  $\underline{U}'_L$   $180^\circ$  beträgt, was einer Wirkleistung am Verbraucher entspricht? Setzen Sie  $\underline{U}'_L = U'_L$  reell! Wie groß ist die Spannung  $U_s$  an den Generatorklemmen?
- 4) Die Hochspannungsleitung wird nun vom Verbraucherzentrum getrennt, so dass gilt  $\underline{I}'_L = -\underline{I}'_C$ , und wird über den Generator im „Stand-by“-Modus betrieben. Wie groß wäre  $U_L$ , wenn die Generatorspannung konstant auf  $U_s = U_{sN}$  geregelt wird? Kommentieren Sie das Ergebnis!
- 5) Wie groß ist in diesem Fall  $U_p$  bzw.  $U_p/U_{sN}$ ?
- 6) Zeichnen Sie das Spannungs-Strom-Zeigerdiagramm mit  $\underline{U}_p$ ,  $\underline{U}'_L$  und  $\underline{I}_s$ ,  $\underline{I}'_C$  je Strang (1 cm  $\hat{=} 2300 \text{ V}$ , 1 cm  $\hat{=} 100 \text{ A}$ )

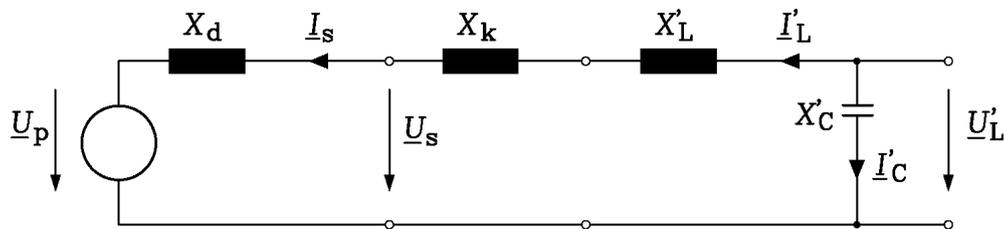


Bild T27.1: Ersatzschaltbild je Strang des Synchrongenerators (links), des Blocktransformators (Mitte) und der Freileitung (rechts), jeweils als verlustfreie Komponenten

**Aufgabe T27 (Lösung):** Synchrongenerator in einem Pumpspeicherkraftwerk

- 1)
 
$$n_N = f_N / p = 50 / 3 = \underline{16.67 / \text{s}} = \underline{1000 / \text{min}} ,$$

$$\eta_N = 1 : M_N = \frac{P_N / \eta_N}{\Omega_{syn}} = \frac{S_N \cdot \cos \varphi_N}{2\pi \cdot n_N \cdot \eta_N} = \frac{450 \cdot 10^6 \cdot (-0.85)}{2\pi \cdot 16.67 \cdot 1} = \underline{-3652606 \text{ Nm}} ,$$

$$I_{sN} = S_N / (\sqrt{3} \cdot U_N) = 450 \cdot 10^6 / (\sqrt{3} \cdot 24000) = \underline{10832 \text{ A}} .$$
- 2)
 
$$I_s = 0 : U_p = U_{s0} = U_N / \sqrt{3} = 24000 / \sqrt{3} = \underline{13856 \text{ V}} .$$
- 3)
 
$$U_L = U_{LN} / \sqrt{3} = 380 / \sqrt{3} = 220 \text{ kV} , U'_L = \ddot{u} \cdot U_L = \frac{24}{380} \cdot 220 \cdot 10^3 = 13856 \text{ V} ,$$

$$X'_L = 2\pi \cdot f_N \cdot L'_L = 2\pi \cdot 50 \cdot 0.4 \cdot 10^{-3} = 0.1257 \Omega ,$$

$$X = X_d + X_k + X'_L = 1.1 + 0.16 + 0.1257 = 1.386 \Omega ,$$

$$\underline{U}'_L \uparrow \downarrow \underline{I}'_L \Rightarrow \underline{U}'_L \uparrow \downarrow \underline{I}'_L , \underline{U}_p + jX_d \cdot \underline{I}_s = \underline{U}'_L , \underline{I}_s = -\underline{I}'_L = -\underline{I}_{sN} ,$$

$$\underline{U}_p = \underline{U}'_L + jX_d \cdot \underline{I}'_L = 13856 + j \cdot 1.386 \cdot 10832 = (13845 + j \cdot 15010) \text{ V} ,$$

$$U_p = |\underline{U}_p| = \sqrt{13845^2 + 15010^2} = \underline{20427 \text{ V}} , U_p / U_{sN} = 20427 / 13856 = \underline{1.47} .$$

$$\underline{U}_s + j \cdot (X_k + X'_L) \cdot \underline{I}_s = \underline{U}'_L, \quad \underline{U}_s = \underline{U}'_L + j \cdot (X_k + X'_L) \cdot \underline{I}'_L,$$

$$U_s = \sqrt{U'_L{}^2 + ((X_k + X'_L) \cdot I'_L)^2} = \sqrt{13856^2 + (0.16 + 0.1257)^2 \cdot 10832^2} = \underline{14197 \text{ V}},$$

$$U_s / U_{sN} = 14197 / 13856 = \underline{1.025}.$$

4)

Netzstrom ist Null:  $\underline{I}'_L = -\underline{I}'_C, \quad X'_C = -\frac{1}{\omega \cdot C'_L} = -\frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 120 \cdot 10^{-6}} = -26.52\Omega,$

$$\underline{U}_s = j \cdot (X_k + X'_L + X'_C) \cdot \underline{I}'_C, \quad \underline{I}'_C = \frac{\underline{U}_s}{j \cdot (X_k + X'_L + X'_C)},$$

$$I'_C = |\underline{I}'_C| = \frac{U_s}{|X_k + X'_L + X'_C|} = \frac{13856}{|0.16 + 0.1257 - 26.52|} = 528.2 \text{ A},$$

$$I'_C / I_{sN} = 528.2 / 10832 = \underline{0.0488} = \underline{4.88\%},$$

$$U'_L = \left| \frac{X'_C \cdot U_s}{X_k + X'_L + X'_C} \right| = \left| \frac{(-26.52) \cdot 13856}{0.16 + 0.1257 - 26.52} \right| = 14007 \text{ V},$$

$$U_L = U'_L / \ddot{u} = \frac{14007}{24/380} = 221775 \text{ V} = \underline{221.76 \text{ kV}}, \quad U'_L / U_{sN} = 14007 / 13856 = \underline{1.0081}.$$

Auf Grund der kapazitiven Belastung nimmt die Spannung am Ende der Freileitung um 0.81% zu (*Ferranti-Effekt*), Bild T27.2!

5)

$$\underline{U}_p = j \cdot (X + X'_C) \cdot \underline{I}'_C = \frac{j \cdot (X + X'_C) \cdot \underline{U}_s}{j \cdot (X_k + X'_L + X'_C)},$$

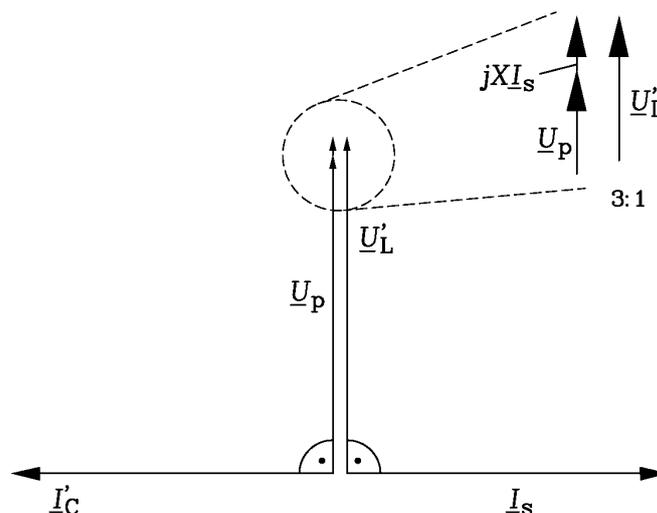
$$U_p = \left| \frac{(X + X'_C) \cdot U_s}{X_k + X'_L + X'_C} \right| = \left| \frac{(1.386 - 26.52) \cdot 13856}{0.16 + 0.1257 - 26.52} \right| = \underline{13275 \text{ V}},$$

$$U_p / U_{sN} = 13275 / 13856 = \underline{0.958}.$$

6)

$$U'_L = 14007 \text{ V} \Leftrightarrow 5.6 \text{ cm}, \quad U_p = 13275 \text{ V} \Leftrightarrow 5.3 \text{ cm}, \quad I'_C = I_s = 528.2 \text{ A} \Leftrightarrow 5.28 \text{ cm},$$

$$X \cdot I_s = 1.386 \cdot 528.2 = 732 \text{ V} \Leftrightarrow 0.3 \text{ cm}.$$



**Bild T27.2:** Maßstäbliches Spannungs- und Strom-Zeigerdiagramm für Generatorbetrieb (im Verbraucher-Zählpeilsystem) und kapazitive Belastung durch die leerlaufende Freileitung ( $I_s = 528.2 \text{ A}, U_p = 13275 \text{ V}$ ), (verlustfreie Komponenten angenommen).

**Aufgabe T28:** Parallel arbeitende Synchrongeneratoren

Zwei baugleiche zweipolige Synchrongeneratoren in den USA mit je  $S_N = 100 \text{ MVA}$ ,  $U_N = 18 \text{ kV}$ , Y,  $f_N = 60 \text{ Hz}$ , speisen in einem thermischen Kraftwerk elektrisch parallel mit  $|\cos\varphi_N| = 0.8$  übererregt in das elektrische Netz. Die Synchroninduktivität je Generator beträgt  $L_d = 20 \text{ mH}$ . Die Generatorverluste werden vernachlässigt!

- 1) Wie groß sind bei Nennlast die Nennspannung je Strang  $U_{sN}$ , der Stator-Strangstrom  $I_{sN}$ , das erforderliche Turbinenmoment  $M_N$  und der Phasenwinkel  $\varphi_N$  (gezählt von  $I_s$  zu  $U_s$  im mathematisch positiven Zählsinn)!
- 2) Berechnen Sie das synchrone Kippmoment  $M_{p0}$ , das bezogene synchrone Kippmoment  $M_{p0}/M_N$  und den Polradwinkel  $\vartheta_N$ !
- 3) Einer der beiden Generatoren fällt durch eine Störung in der antreibenden Gasturbine aus. Welche maximale Wirkleistung  $P$  kann elektrisch noch an das Netz geliefert werden? Wie groß ist das Verhältnis  $P_{p0}/(2P_N)$ ?
- 4) Um wie viel Prozent muss die Polradspannung des verbleibenden Generators erhöht werden, um zumindest kurzzeitig mit  $P_{p0} = 2P_N$  das Netz zu versorgen, vorausgesetzt, die Turbine kann diese Überlast-Leistung kurzfristig zur Verfügung stellen?

**Aufgabe T28 (Lösung):** Parallel arbeitende Synchrongeneratoren

1)

Je Generator:  $I_{sN} = S_N / (\sqrt{3} \cdot U_N) = 100 \cdot 10^6 / (\sqrt{3} \cdot 18 \cdot 10^3) = \underline{3207 \text{ A}}$ ,

$U_{sN} = U_N / \sqrt{3} = 18000 / \sqrt{3} = \underline{10392 \text{ V}}$ ,  $n_N = f_N / p = 60 / 1 = 60 / \text{s} = 3600 / \text{min}$ ,

$|\cos\varphi_N| = 0.8$ :

a) Generatorbetrieb, im Verbraucher-Zählpfeilsystem:  $\cos\varphi_N < 0$ , da die ins Netz gelieferte elektrische Leistung negativ gezählt wird

b) übererregt: Maschine wirkt kapazitiv,  $I_s$  eilt  $U_s$  vor:  $\sin\varphi_N < 0$ .

$\cos\varphi_N = -0.8 \Rightarrow \varphi_N = \underline{216.87^\circ}$ , gezählt vom Strom  $I_s$  zur Spannung  $U_s$  im mathematisch positiven Zählsinn!

Kontrolle:  $\sin\varphi = \pm\sqrt{1 - (\cos\varphi)^2} = \pm\sqrt{1 - (-0.8)^2} = \pm 0.6$ ,  $\sin\varphi_N = -0.6$ ,  $\sin 216.87^\circ = -0.6$

$P_N = S_N \cdot \cos\varphi_N = 100 \cdot (-0.8) = -80 \text{ MW}$ ,

$M_N = P_N / (2\pi \cdot n_N) = -80 \cdot 10^6 / (2\pi \cdot 60) = \underline{-212207 \text{ Nm}}$ ,

$\cos\varphi_N = -0.8 \Rightarrow \varphi_N = \underline{216.87^\circ}$ , gezählt vom Strom  $I_s$  zur Spannung  $U_s$  im mathematisch positiven Zählsinn!

2)

Für die Bestimmung des Kippmoments  $M_{p0}$  muss die Polradspannung  $U_p$  berechnet werden, wobei  $R_s = 0$  ist.

$\underline{U}_p + j \cdot X_d \cdot \underline{I}_{sN} = \underline{U}_{sN}$ ,  $\underline{I}_{sN} = I_{sw} - j \cdot I_{sb} = I_{sN} \cdot (\cos\varphi_N - j \cdot \sin\varphi_N)$

Mit gewähltem reellen  $\underline{U}_{sN} = U_{sN}$  folgt:

$\underline{U}_p = U_{sN} - j \cdot X_d \cdot I_{sN} \cdot (\cos\varphi_N - j \cdot \sin\varphi_N) =$

$= U_{sN} - X_d \cdot I_{sN} \cdot \sin\varphi_N - j \cdot X_d \cdot I_{sN} \cdot \cos\varphi_N$

$X_d = 2\pi \cdot f_N \cdot L_d = 2\pi \cdot 60 \cdot 20 \cdot 10^{-3} = 7.54 \Omega$ ,  $X_d \cdot I_{sN} = 7.54 \cdot 3207 = 24180 \text{ V}$ ,

$\underline{U}_p = 10392 - 24180 \cdot (-0.6) - j \cdot 24180 \cdot (-0.8) = (24900 + j \cdot 19344) \text{ V}$ ,

$$U_p = \sqrt{24900^2 + 19344^2} = 31531 \text{ V},$$

$$R_s = 0: M_{p0} = \frac{3 \cdot U_{sN} \cdot U_p}{\Omega_{syn} \cdot X_d} = \frac{3 \cdot 10392 \cdot 31531}{2\pi \cdot 60 \cdot 7.54} = \underline{\underline{345826 \text{ Nm}}}, \quad \left| \frac{M_{p0}}{M_N} \right| = \left| \frac{345826}{-212207} \right| = \underline{\underline{1.63}}.$$

$$\eta_N = 1: M_N = -M_{p0} \cdot \sin \vartheta_N \Rightarrow \vartheta_N = -\arcsin(-1/1.63) = \underline{\underline{37.85^\circ}}.$$

3)

$$\eta_N = 1: \vartheta_{\max} = 90^\circ, P_{p0} = -M_{p0} \cdot 2\pi \cdot n_{syn} \cdot \sin(\vartheta_{\max}) = -345826 \cdot 2\pi \cdot 60 \cdot 1 = \underline{\underline{-130.37 \text{ MW}}},$$

$$P_{p0}/(2 \cdot P_N) = -130.37/(2 \cdot (-80)) = \underline{\underline{0.815}}.$$

4)

$$\eta_N = 1: \vartheta_{\max} = 90^\circ: P = 2 \cdot P_N = -M_{p0,neu} \cdot 2\pi \cdot n_{syn} \cdot \sin(\vartheta_{\max}) = -M_{p0,neu} \cdot 2\pi \cdot n_{syn},$$

$$M_{p0,neu} = \frac{3 \cdot U_{sN} \cdot U_{p,neu}}{\Omega_{syn} \cdot X_d}, \quad \frac{U_{p,neu}}{U_p} = \frac{M_{p0,neu}}{M_{p0}} = \frac{-2 \cdot P_N}{M_{p0} \cdot 2\pi \cdot n_{syn}} = \frac{-2 \cdot (-80 \cdot 10^6)}{345826 \cdot 2\pi \cdot 60} = \underline{\underline{1.227}}.$$

Es ist eine Erhöhung der Polradspannung um mindestens 22.7% über einen erhöhten Erregerstrom  $I_f$  erforderlich, um mit einem Generator die doppelte Bemessungsleistung zumindest kurzzeitig ins Netz liefern zu können. Natürlich muss die entsprechende Erhöhung der Turbinenleistung möglich sein.

### Aufgabe T29: Synchrongenerator und Blocktransformator

Ein 24-poliger Drehstromgenerator in einem Flusslaufkraftwerk hat die Daten  $U_N = 10 \text{ kV}$ ,  $Y$ ,  $S_N = 45 \text{ MVA}$ ,  $X_d = 2 \Omega$ ,  $f_N = 50 \text{ Hz}$ . Die Verluste im Generator werden vernachlässigt. Der Generator speist über einen Drehstrom-Blocktransformator mit den Daten  $S_N = 45 \text{ MVA}$ ,  $f_N = 50 \text{ Hz}$ ,  $U_{N1}/U_{N2} = 10 \text{ kV}/110 \text{ kV}$ ,  $Dy5$ ,  $u_k = 12 \%$  in das  $110 \text{ kV}$ -Netz ein! Der Magnetisierungsstrom und die Verluste im Transformator werden vernachlässigt.

1) Berechnen Sie die Nenndrehzahl  $n_N$ , den Nennstrom des Generators  $I_{sN}$  und den primären und sekundären Nennstrom des Transformators  $I_{1N}$ ,  $I_{2N}$  und die Reaktanz  $X_k$  je Strang.

2) Der Synchrongenerator wird mit Nennspannung und -strom untererregt mit  $|\cos \varphi_s| = 0.75$  betrieben. Wie groß ist  $\varphi_s$ ? Berechnen Sie die Polradspannung je Strang  $\underline{U}_p$  und  $U_p/U_{sN}$ !

3) Nehmen Sie  $\underline{U}_{sN} = U_N/\sqrt{3}$  reell an. Zeichnen Sie das Spannungs-Strom-Zeigerdiagramm je Strang maßstäblich ( $1 \text{ cm} \hat{=} 1000 \text{ V}$ ,  $1 \text{ cm} \hat{=} 500 \text{ A}$ ), ausgehend von  $U_{sN}$ ,  $I_{sN}$ ,  $X_d$  und  $\varphi_s$ , und ermitteln Sie  $\underline{U}_p$  grafisch. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem von 2). Wie groß ist  $\vartheta_N$ ?

4) Berechnen Sie das Nenndrehmoment  $M_N$ , das synchrone Kippmoment  $M_{p0}$  und daraus  $\vartheta_N$ ! Vergleichen Sie das Ergebnis mit 3). Wie groß ist die Kippreserve  $|M_{p0}/M_N|$ ? Kommentieren Sie das Ergebnis!

5) Wie groß ist die statische Kippleistung  $P_{p0} = -2\pi \cdot n_N \cdot M_{p0}$  ( $\vartheta = 90^\circ$ ) bei konstanter Generatorklemmenspannung  $U_N = 10 \text{ kV}$ ? Bestimmen Sie die verkettete Sekundärspannung des Transformators  $U_{2,verk}$  und  $U_{2,verk}/U_{2N}$  grafisch! Wie groß ist im Kippunkt  $I_s/I_{sN}$ ?

6) Wie groß ist die statische Kippleistung  $P_{p0}$  für dieselbe Polradspannung, wenn durch das „starre“ Netz die Sekundärspannung des Transformators  $U_{2N} = 110 \text{ kV}$  konstant ist? Bestimmen Sie grafisch die Generatorklemmspannung  $U_s/U_{sN}$ ! Wie groß sind  $I_s/I_{sN}$  bzw.  $M_{p0}$ ?

### Aufgabe T29 (Lösung): Synchrongenerator und Blocktransformator

1)

$$I_{sN} = \frac{S_N}{\sqrt{3} \cdot U_N} = \frac{45 \cdot 10^6}{\sqrt{3} \cdot 10 \cdot 10^3} = \underline{\underline{2598 \text{ A}}}, \quad n_N = \frac{f_N}{p} = \frac{50}{12} = \underline{\underline{4.167/\text{s}}} = \underline{\underline{250/\text{min}}}.$$

$$I_{1N} = \frac{S_N}{\sqrt{3} \cdot U_{1N}} = \frac{45 \cdot 10^6}{\sqrt{3} \cdot 10 \cdot 10^3} = \underline{\underline{2598 \text{ A}}}, \quad I_{2N} = \frac{S_N}{\sqrt{3} \cdot U_{2N}} = \frac{45 \cdot 10^6}{\sqrt{3} \cdot 110 \cdot 10^3} = \underline{\underline{236.2 \text{ A}}}.$$

Berechnung der Transformator-Ersatzschaltbildparameter für eine äquivalente Sternschaltung, passend zur Sternschaltung der Generatorwicklung:

$$X_k \cdot I_{1N} = u_k \cdot \frac{U_{1N}}{\sqrt{3}} \Rightarrow X_k \cdot I_{1N} = u_k \cdot \frac{U_{1N}}{\sqrt{3} \cdot I_{1N}} = 0.12 \cdot \frac{10000}{\sqrt{3} \cdot 2598} = \underline{\underline{0.2667 \Omega}}.$$

2)

a) Generatorbetrieb, im Verbraucher-Zählpfeilsystem:  $\cos \varphi_s < 0$ , da die ins Netz gelieferte elektrische Leistung negativ gezählt wird.

b) untererregt: Maschine wirkt induktiv,  $I_s$  eilt  $\underline{U}_s$  nach:  $\sin \varphi_s > 0$ .

$\cos \varphi_s = -0.758 \Rightarrow \varphi_s = \underline{\underline{138.5^\circ}}$ , gezählt vom Strom  $\underline{I}_s$  zur Spannung  $\underline{U}_s$  im mathematisch positiven Zählsinn!

Kontrolle:  $\sin \varphi_s = \sin 138.5^\circ = 0.66 > 0$ ,  $\underline{I}_s = I_{sN} \cdot (\cos \varphi_s - j \cdot \sin \varphi_s)$ ,

$$\underline{U}_p + j \cdot X_d \cdot \underline{I}_{sN} = \underline{U}_{sN} = U_{sN} = U_N / \sqrt{3},$$

$$\underline{U}_p = U_{sN} - X_d \cdot I_{sN} \cdot \sin \varphi_s - j \cdot X_d \cdot I_{sN} \cdot \cos \varphi_s,$$

$$\underline{U}_p = \frac{10000}{\sqrt{3}} - 2 \cdot 2598 \cdot 0.66 - j \cdot 2 \cdot 2598 \cdot (-0.75) = \underline{\underline{(2336.7 + j \cdot 3897) \text{ V}}},$$

$$U_p = \sqrt{2336.7^2 + 3897^2} = \underline{\underline{4543.9 \text{ V}}}, \quad U_p / U_{sN} = 4543.9 / (10000 / \sqrt{3}) = \underline{\underline{0.787}}.$$

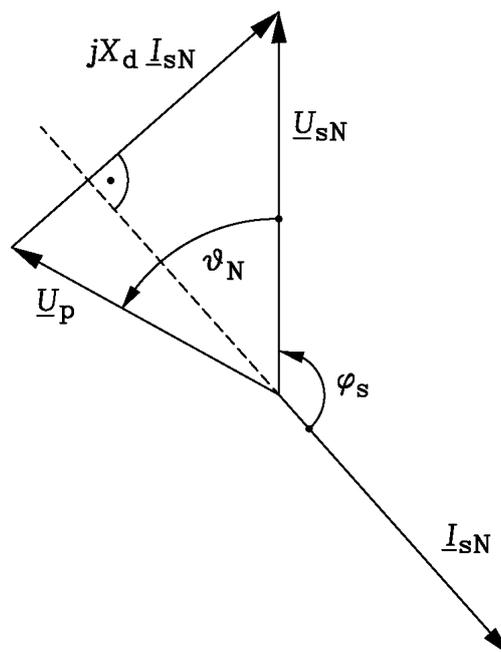
3)

Mit  $U_{sN} = 10000 / \sqrt{3} = 5773.5 \text{ V} \Leftrightarrow 5.77 \text{ cm}$ ,  $X_d I_{sN} = 2 \cdot 2598 = 5196 \text{ V} \Leftrightarrow 5.19 \text{ cm}$ ,

$I_{sN} = 2598 \text{ A} \Leftrightarrow 5.19 \text{ cm}$  und  $\varphi_s = 138.5^\circ$  erhalten wir gemäß Bild T29.1 die

Polradspannung  $U_p = 4500 \text{ V} \Leftrightarrow 4.5 \text{ cm}$  und den Polradwinkel  $\vartheta_N = \underline{\underline{61^\circ}}$ . Es ergibt sich eine

Zeichengenauigkeit  $\Delta = (4543.9 - 4500) / 4543.9 = 0.88\%$ .



**Bild T29.1:** Maßstäbliches Spannungs- und Strom-Zeigerdiagramm für Generatorbetrieb (im Verbraucher-Zählpfeilsystem) und Untererregung ( $I_{sN} = 2598 \text{ A}$ ,  $U_{sN} = 5773.5 \text{ V}$ ).

4)

$$\eta_N = 1 \rightarrow P_N = S_N \cdot \cos \varphi_N = (-45) \cdot 0.75 = -33.75 \text{ MW},$$

$$M_N = \frac{P_N}{2\pi \cdot n_N} = -\frac{33750000}{2\pi \cdot \frac{250}{60}} = -1289155 \text{ Nm},$$

$$M_{p0} = \frac{3 \cdot U_{sN} \cdot U_p}{\Omega_{syn} \cdot X_d} = \frac{3 \cdot (10000/\sqrt{3}) \cdot 4543.9}{2\pi \cdot \frac{250}{60} \cdot 2} = 1503110 \text{ Nm}, \quad \left| \frac{M_{p0}}{M_N} \right| = \frac{1503110}{1289155} = 1.167.$$

Die Drehmomentreserve ist mit 16.7% sehr klein, da die Maschine untererregt, also mit verringertem Polradfeld betrieben wird.

5)

$$M(\vartheta = 90^\circ) = -M_{p0} \cdot \sin(90^\circ) = -M_{p0},$$

$$P_{p0} = \Omega_{syn} \cdot M(\vartheta = 90^\circ) = -2\pi \cdot n_N \cdot M_{p0} = -2\pi \cdot \frac{250}{60} \cdot 1503110 = -39.35 \text{ MW}.$$

Im Kipp-Punkt gilt mit  $U_{sN} = 5773.5 \text{ V} \Leftrightarrow 5.77 \text{ cm}$ ,  $U_p = 4543.9 \text{ V} \Leftrightarrow 4.54 \text{ cm}$  und

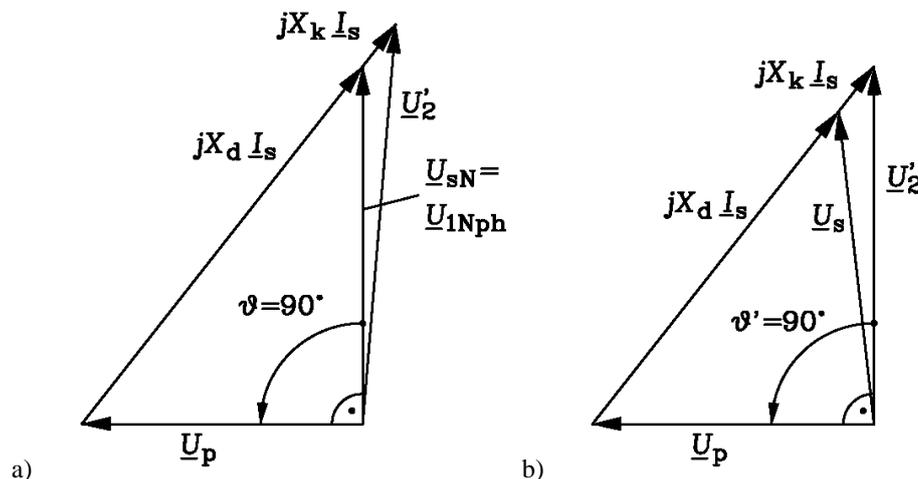
$\vartheta = 90^\circ$  das Spannungszeigerdiagramm Bild T29.2 a).  $X_d I_s = 7300 \text{ V} \Leftrightarrow 7.3 \text{ cm}$ . Daraus folgt:  $X_k I_s = (X_k / X_d) \cdot (X_d I_s) \Leftrightarrow (0.2667 / 2) \cdot 7.3 \text{ cm} = 0.97 \text{ cm}$ . Dies wird in Bild T29.2

a) in Verlängerung von  $jX_d I_s$  eingetragen, und wir lesen ab:  $U'_2 = 6500 \text{ V} \Leftrightarrow 6.5 \text{ cm}$ .

$$U_{2,verk} = (U'_2 / \ddot{u}) \cdot \sqrt{3} = (6500 / (10 / 110)) \cdot \sqrt{3} = 123841 \text{ V},$$

$$U_{2,verk} / U_{2N} = 123841 / 110000 = 1.125, \quad I_s = (X_d I_s) / X_d = 7300 / 2 = 3650 \text{ A},$$

$$I_s / I_{sN} = 3650 / 2598 = 1.4.$$



**Bild T29.2:** Maßstäbliches Spannungs- und Strom-Zeigerdiagramm für untererregten Generatorbetrieb (im Verbraucher-Zählpeilsystem) im Kipp-Punkt: a) Generatorspannung  $U_{sN} = 5773.5 \text{ V}$ , b) Sekundärspannung des Blocktransformators  $U'_2 = 5773.5 \text{ V}$

6)

Wegen  $U'_2 = U'_{2N} = \text{konst.}$  als eingepprägter Spannung ist nun als „neue“ Synchronreaktanz  $X = X_d + X_k$  anstelle von  $X_d$  gültig. Die Synchronmaschine kippt folglich, wenn der „neue“ Polradwinkel  $\vartheta'$  zwischen  $U'_{2N}$  und  $U_p$  den Wert  $90^\circ$  erreicht (Bild T29.2 b)).

$\underline{U}_p + j \cdot (X_d + X_k) \cdot \underline{I}_s = \underline{U}'_{2N} / \sqrt{3}$ ,  $X = X_d + X_k = 2 + 0.2667 = 2.2667 \Omega$ . Mit

$$U'_{2N} / \sqrt{3} = \frac{110 \cdot 10^3}{\sqrt{3}} \cdot \frac{10}{110} = 5773 \text{V} \Leftrightarrow 5.77 \text{cm}, U_p = 4543.9 \text{V} \Leftrightarrow 4.54 \text{cm} \text{ und } \vartheta' = 90^\circ$$

wird das Zeigerdiagramm 29.2b konstruiert.

Wir lesen ab:  $X \cdot I_s \Leftrightarrow 7.3 \text{cm}$   $X \cdot I_s = 7300 \text{V}$ . Daher ist:

$X_d \cdot I_s = (X_d / X) \cdot (X \cdot I_s) \Leftrightarrow (X_d / X) \cdot 7.3 \text{cm} = (2 / 2.2667) \cdot 7.3 = 6.44 \text{cm}$ . Mit diesem

Wert lesen wir aus Bild T29.2 b) ab:  $U_s \Leftrightarrow 5.1 \text{cm}$  und erhalten  $U_s / U_{sN} = 5.1 / 5.77 = \underline{0.88}$ .

$$M(\vartheta') = -M'_{p0} \cdot \sin \vartheta', M'_{p0} = 3 \cdot \frac{U'_2 \cdot U_p}{\Omega_{syn} \cdot X} = 3 \cdot \frac{(10000 / \sqrt{3}) \cdot 4543.9}{2\pi \cdot \frac{250}{60} \cdot 2.2667} = \underline{1326254 \text{Nm}},$$

$M'_{p0} < M_{p0}$  gemäß 4), da  $X > X_d$ !

$$M(\vartheta' = 90^\circ) = -M'_{p0},$$

$$P'_{p0} = 2\pi \cdot n_N \cdot (-M'_{p0}) = -2\pi \cdot \frac{250}{60} \cdot 1326254 = -34721250 \text{ W} = \underline{-34.72 \text{MW}}. \text{ Dieser Wert}$$

ist kleiner als  $P_{p0}$  gemäß 4), da  $M'_{p0} < M_{p0}$ .

$I_s = (X \cdot I_s) / X = 7300 / 2.2667 = 3220 \text{ A}$ ,  $I_s / I_{sN} = 3220 / 2598 = \underline{1.24}$ . Dieser Wert ist kleiner als bei 5), da  $X > X_d$ .

### Aufgabe T30: Einphasen-Transformator-Massen

Die Wechselflussdichte  $B_k$  in einem Transformator-Eisenkern (Bild T30.1) soll die Amplitude  $\hat{B}_k = 1.6 \text{ T}$  nicht überschreiten, um zu hohe Eisensättigung zu vermeiden.

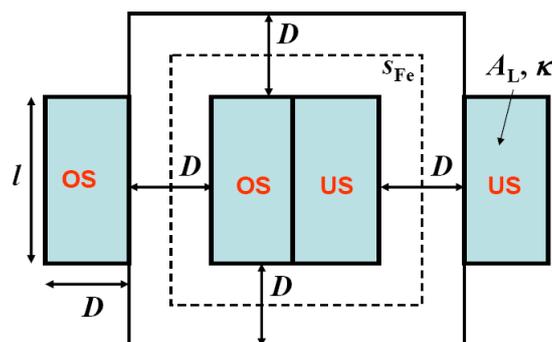


Bild T30.1: Vereinfachter Einphasen-Transformator-Querschnitt ( $A_k = D^2 \pi / 4$ )

1) Berechnen Sie dazu die effektive induzierte Spannung je Windung  $U_i$  bezogen auf die Eisenkern-Querschnittsfläche  $A_k$  bei  $f = 50 \text{ Hz}$ ! Wie viele Windungen  $N$  werden für die Nennspannung  $U_N$  allgemein benötigt, wenn Spannungsfälle durch den Spulenwiderstand und die Streuflussverkettung vernachlässigt werden?

2) Geben Sie den verfügbaren Spulenquerschnitt  $A_L = D \cdot l$  (bei Vernachlässigung der Leiterisolierung) in Abhängigkeit von  $A_k = D^2 \cdot \pi / 4$  unter Beachtung von  $l = 2 \cdot D$  (Bild T30.1) an. Wie groß ist dann (mit dem Leiterquerschnitt  $A_q = A_L / N$  einer Windung)

und der mittleren Spulenwindungslänge  $l_m = D_m \cdot \pi$ ,  $D_m = D + 2 \cdot D/2 = 2D$ , der *ohm'sche* Widerstand  $R$  einer Spule in Abhängigkeit von  $N$ , der Leitfähigkeit  $\kappa$  und der Abmessung  $D$ ?

3) Berechnen Sie allgemein das Leitervolumen  $V_{Cu}$  und das Eisenvolumen  $V_{Fe} \approx A_k \cdot s_{Fe}$  in Abhängigkeit von  $D$  und bestimmen Sie das Verhältnis  $V_{Cu}/V_{Fe}$ !

4) Zeigen Sie, dass die Stromwärmeverluste je Wicklung  $P_{d1}$ ,  $P_{d2}$  (Oberspannung und Unterspannung) mit den hier getroffenen Vereinfachungen und  $U_{N1}/U_{N2} = I_{N2}/I_{N1} = \ddot{u}$  identisch sind! Diese Verluste  $P_{d1}$ ,  $P_{d2}$  sollen, bezogen auf die Transformatorscheinleistung  $S_N = U_{N1} \cdot I_{N1} = U_{N2} \cdot I_{N2}$ , nur den Bruchteil  $\alpha < 1$  betragen. Geben Sie mit 1), 2) eine Dimensionierungsformel für  $D$  in Abhängigkeit von  $S_N$ ,  $\alpha$ ,  $\kappa$ ,  $f$  und  $\hat{B}_k$  an.

5) Geben Sie mit  $D$  aus 4) eine Formel für die Transformator Masse  $m$  (mit den Dichten  $\gamma_{Fe}$ ,  $\gamma_{Cu}$ ) gemäß 3) in Abhängigkeit von  $S_N$ ,  $\alpha$ ,  $\kappa$ ,  $f$  und  $\hat{B}_k$  an!

6) Wie schwer ist (mit  $\kappa_{Cu,80^\circ C} = 46 \text{ MS/m}$ ,  $\gamma_{Cu} = 8.9 \text{ kg/l}$ ,  $\gamma_{Fe} = 7.86 \text{ kg/l}$ ) für 1.5 % resultierende Stromwärmeverluste ( $\alpha = 0.015/2$ !) ein 100 MVA-Einphasen-Transformator bezüglich seiner „Aktivmasse“ aus Wicklungskupfer und Eisenkern bei  $f = 50 \text{ Hz}$ ? Welche weiteren Massen kommen bei einem realen Großtransformator noch hinzu? Wie skaliert die Aktivmasse mit der Nennscheinleistung  $m(S_N)$  allgemein und für die beiden Werte  $S_N = 100 \text{ kVA}$  und  $S_N = 100 \text{ VA}$ ?

7) Um wie viel sind Bahntransformatoren in *Deutschland* ( $f = 16.7 \text{ Hz}$ ) schwerer als vergleichbare Netztransformatoren ( $f = 50 \text{ Hz}$ ) bei gleicher Scheinleistung?

**Aufgabe T30 (Lösung):** Einphasen-Transformator-Massen

1)

$$U_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2\pi \cdot f \cdot A_k \cdot \hat{B}_k \Rightarrow U_i / A_k = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2\pi \cdot f \cdot \hat{B}_k = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot 1.6 = 355.43 \text{ V/m}^2,$$

$$N = \frac{U_N}{U_i} = \frac{\sqrt{2} \cdot U_N}{2\pi \cdot f \cdot A_k \cdot \hat{B}_k} = \frac{U_N}{A_k} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}\pi \cdot f \cdot \hat{B}_k} = \frac{U_N}{A_k} \cdot \frac{1}{355.43 \text{ V/m}^2}$$

2)

$$A_k = D^2 \cdot \pi / 4, A_L = D \cdot l = 2 \cdot D \cdot D = 2 \cdot D^2 = \frac{2 \cdot 4}{\pi} \cdot A_k = \frac{8}{\pi} \cdot A_k = 2.55 \cdot A_k,$$

$$R = \frac{N \cdot l_m}{\kappa \cdot A_q} = \frac{N \cdot D_m \pi}{\kappa \cdot A_L / N} = \frac{N^2 \cdot 2D \cdot \pi}{\kappa \cdot A_L} = \frac{N^2 \cdot 2D \cdot \pi}{\kappa \cdot 2 \cdot D^2} = \frac{N^2 \cdot \pi}{\kappa \cdot D}$$

3)

$$V_{Fe} \approx A_k \cdot s_{Fe} = A_k \cdot 4 \cdot 3 \cdot D = (D^2 \cdot \pi / 4) \cdot 12 \cdot D = 3\pi \cdot D^3,$$

$$V_{Cu} = 2 \cdot l \cdot [(3D)^2 - D^2] \cdot \pi / 4 = 2 \cdot 2D \cdot D^2 \cdot [9 - 1] \cdot \pi / 4 = 8\pi \cdot D^3,$$

$$V_{Cu} / V_{Fe} = (8\pi \cdot D^3) / (3\pi \cdot D^3) = 8/3 = 2.67$$

4)

$$\ddot{u} = N_1 / N_2, P_{d1} = R_1 \cdot I_{N1}^2, R_1 = \ddot{u}^2 \cdot R_2, U_{N1} / U_{N2} = I_{N2} / I_{N1} = \ddot{u},$$

$$P_{d2} = R_2 \cdot I_{N2}^2 = \frac{R_1}{\ddot{u}^2} \cdot \ddot{u}^2 \cdot I_{N1}^2 = R_1 \cdot I_{N1}^2 = P_{d1}, P_{d2} = P_{d1} = \alpha \cdot S_N,$$

$$R_1 = P_{d1} / I_{N1}^2 = \alpha \cdot S_N / I_{N1}^2 = \alpha \cdot U_{N1} \cdot I_{N1} / I_{N1}^2 = \alpha \cdot U_{N1} / I_{N1} = \alpha \cdot U_{N1}^2 / S_N,$$

Aus 2) folgt:  $R_1 = \frac{N_1^2 \cdot \pi}{\kappa \cdot D} = \alpha \cdot \frac{U_{N1}^2}{S_N} \Rightarrow \frac{U_{N1}^2}{N_1^2} = \frac{\pi \cdot S_N}{\alpha \cdot \kappa \cdot D}$ ,

Aus 1) folgt:  $\frac{U_N}{N} = \sqrt{2} \cdot \pi \cdot f \cdot A_k \cdot \hat{B}_k = \sqrt{2} \cdot \pi \cdot f \cdot D^2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \hat{B}_k = \frac{U_{N1}}{N_1} = \frac{U_{N2}}{N_2}$ ,

$$(\sqrt{2} \cdot \pi \cdot f \cdot D^2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \hat{B}_k)^2 = \frac{\pi \cdot S_N}{\alpha \cdot \kappa \cdot D} \Rightarrow D^5 = \frac{8}{\pi^3} \cdot \frac{S_N}{\kappa \cdot \alpha} \cdot \frac{1}{(f \cdot \hat{B}_k)^2},$$

$$D = 0.76 \cdot \left( \frac{S_N}{\kappa \cdot \alpha} \right)^{0.2} \cdot \frac{1}{(f \cdot \hat{B}_k)^{0.4}}$$

5)

$$m = \gamma_{Cu} \cdot V_{Cu} + \gamma_{Fe} \cdot V_{Fe} = 3\pi \cdot D^3 \cdot (\gamma_{Fe} + (8/3) \cdot \gamma_{Cu}),$$

$$m = 3\pi \cdot 0.76^3 \cdot \left( \frac{S_N}{\kappa \cdot \alpha} \right)^{0.6} \cdot \frac{1}{(f \cdot \hat{B}_k)^{1.2}} \cdot (\gamma_{Fe} + (8/3) \cdot \gamma_{Cu}),$$

$$m = 4.14 \cdot \left( \frac{S_N}{\kappa \cdot \alpha} \right)^{0.6} \cdot \frac{1}{(f \cdot \hat{B}_k)^{1.2}} \cdot (\gamma_{Fe} + (8/3) \cdot \gamma_{Cu})$$

6)

$$m = 4.14 \cdot \left( \frac{100 \cdot 10^6}{46 \cdot 10^6 \cdot 0.0075} \right)^{0.6} \cdot \frac{1}{(50 \cdot 1.6)^{1.2}} \cdot (7860 + (8/3) \cdot 8900) = 20427 \text{ kg} = 20.4 \text{ t}$$

Es kommen als „inaktive“ Massen jene des Stahlkessels, der Ölfüllung, der Papierisolation für die Wicklungen, der Durchführungsisolatoren, des Ölausdehnungsgefäßes, der Ölkühler, der Schutzeinrichtungen und des Wicklungsstufenschalters hinzu.

$$m(S_N) \sim S_N^{0.6}$$

$S_N$	100 VA	100 kVA	100 MVA
$m$	5 kg	324 kg	20 427 kg

7)

$$\frac{m_{16.7}}{m_{50}} = \left( \frac{50}{16.7} \right)^{1.2} = 3^{1.2} = 3.73$$

### **Aufgabe T31:** Einphasen-Transformator-Dimensionierung

Ein Einphasentransformator  $S_N = 1 \text{ kVA}$  soll für  $U_{1N} = 230 \text{ V}$ ,  $U_{2N} = 23 \text{ V}$ ,  $f_N = 50 \text{ Hz}$  groß dimensioniert werden, wobei die magnetische Wechselflussdichte  $B_k$  im Transformator-Eisenkern (Bild T31.1) die Amplitude  $\hat{B}_k = 1.4 \text{ T}$  aufweisen soll, um zu hohe Eisensättigung zu vermeiden.

1) Wie groß ist das Übersetzungsverhältnis  $\hat{u}$ ? Bestimmen Sie bei Vernachlässigung der Stromwärmeverluste und der Streuflüsse das Windungszahlverhältnis  $N_1/N_2$ ! Wie groß sind primärer und sekundärer Nennstrom  $I_{1N}$ ,  $I_{2N}$ ? Der Eisenkernquerschnitt  $A_k$  hat eine Kreisform mit dem Durchmesser  $D$ , die Primär- und Sekundärspule als Kupfer-Zylinderspulen gemäß Bild 31.1 den Innen- und Außendurchmesser  $D_i/D_a = D/(3D)$  und die Höhe  $l = 2D$ . Isolationsvolumina werden im Folgenden vernachlässigt, die Leiterstromdichte wird zu  $J = 2.5 \text{ A/mm}^2$  gewählt! Wie groß sind die Leiterquerschnittsflächen  $A_{q1}$ ,  $A_{q2}$  primär und sekundär?

2) Berechnen Sie mit den Annahmen und Ergebnissen von 1) die Windungszahlen  $N_1$  und  $N_2$ ! Verwenden Sie dazu den Begriff der „mittleren Windungslänge“  $l_m = (D_a + D_i) \cdot \pi / 2$  und den verfügbaren Spulenquerschnitt  $A_L = D \cdot l = N_1 \cdot A_{q1} = N_2 \cdot A_{q2}$  (bei Vernachlässigung der Leiterisolierung)! Wie groß ist  $D$ ?

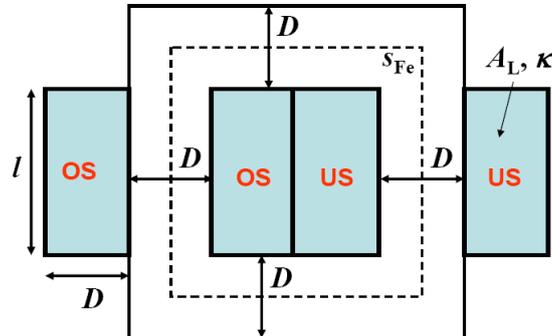


Bild T31.1: Vereinfachter Einphasen-Transformator-Querschnitt ( $A_k = D^2\pi/4$ )

- 3) Geben Sie die gemäß Bild T31.1 aus 2) zu berechnenden Hauptabmessungen (in gerundeten mm-Werten) für Länge, Breite und Höhe  $L, B, H$  und die mittlere Länge  $s_{Fe}$  des Weges im Eisenkern an! Bestimmen Sie damit die Kupfer- und Eisenmasse  $m_{Cu}$  und  $m_{Fe}$  von Wicklungen und Kern (Eisenvolumen  $V_{Fe} \approx A_k \cdot s_{Fe}$ ,  $\gamma_{Cu} = 8.9 \text{ kg/l}$ ,  $\gamma_{Fe} = 7.86 \text{ kg/l}$  )!
- 4) Berechnen Sie  $R_1, R_2$  und die zugehörigen Stromwärmeverluste  $P_{Cu,1+2,N}$  bei Nennbetrieb! Verwenden Sie dazu den Begriff der „mittleren Spulenwindungslänge“  $l_m = D_m \cdot \pi$ ,  $D_m = (D_a + D_i) / 2$  und die el. Leitfähigkeit  $\kappa_{Cu,80^\circ C} = 46 \text{ MS/m}$ !
- 5) Wie groß ist der Transformator-Gesamtwirkungsgrad  $\eta_T$  bei Betrieb mit  $\cos\varphi_2 = 1$  und Nennstrom, wenn die Ummagnetisierungsverluste  $P_{FeN}$  50 % der Stromwärmeverluste betragen?
- 6) Wie verändert sich  $\eta_T$  in Abhängigkeit des Sekundärstroms  $0 \leq I_2 \leq I_{2N}$  bei  $\cos\varphi_2 = 1$  und sekundärer Nennspannung  $U_2 = U_{2N}$  (und daher  $P_{Fe} = \text{konst.} = P_{FeN}$ )? Skizzieren Sie  $\eta_T(x)$  mit  $x = I_2 / I_{2N}$  mit den Stützstellen  $x = 0, 0.2, 0.5, 1$ ! Bei welchem Wert  $x^*$  ist  $\eta_T(x^*)$  maximal und wie groß?

**Aufgabe T31 (Lösung):** Einphasen-Transformator-Dimensionierung

1)

$$\ddot{u} = \frac{U_{1N}}{U_{2N}} = \frac{230}{23} = 10. \text{ Bei Vernachlässigung von } R_1, R_2, L_{1\sigma}, L_{2\sigma} \text{ gilt beim Einphasen-}$$

$$\text{Transformator: } \frac{N_1}{N_2} = \ddot{u} = 10 .$$

$$I_{1N} = S_N / U_{1N} = 1000 / 230 = 4.35 \text{ A}, \quad I_{2N} = S_N / U_{2N} = 1000 / 23 = 43.5 \text{ A},$$

$$J = I_{1N} / A_{q1} = I_{2N} / A_{q2} = 2.5 \text{ A/mm}^2 \Rightarrow A_{q1} = I_{1N} / J = 4.35 / 2.5 = 1.74 \text{ mm}^2,$$

$$A_{q2} = I_{2N} / J = 43.5 / 2.5 = 17.4 \text{ mm}^2.$$

2)

$$(a) A_{q1} = A_L / N_1 = D \cdot 2D / N_1 = 1.74 \text{ mm}^2 \Rightarrow N_1 = 2D^2 / 1.74 \text{ mm}^2,$$

(b) Mit Vernachlässigung von  $R_1, R_2, L_{1\sigma}, L_{2\sigma}$  gilt:

$$N_1 = \frac{U_{1N}}{U_i} = \frac{\sqrt{2} \cdot U_{1N}}{2\pi \cdot f \cdot A_k \cdot \hat{B}_k} = \frac{U_{1N}}{A_k} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}\pi \cdot f \cdot \hat{B}_k} = \frac{230}{A_k} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}\pi \cdot 50 \cdot 1.4} = \frac{0.74 \text{ m}^2}{D^2 \cdot \pi/4}$$

Aus (a) + (b) folgt:  $N_1 = 2D^2 / 1.74 \text{ mm}^2 = \frac{0.74 \text{ m}^2}{D^2 \cdot \pi/4} \Rightarrow D^4 \cdot \frac{\pi}{2} = 0.74 \cdot 1.74 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$ ,

$$D = 30.1 \text{ mm}, N_1 = 2 \cdot 30.1^2 / 1.74 = 1041 \Rightarrow N_2 = N_1 / \ddot{u} = 1041 / 10 = 104.$$

3)

$$L = 2 \cdot D_a = 2 \cdot 3 \cdot D = 180.6 \text{ mm}, B = D_a = 3 \cdot D = 90.3 \text{ mm},$$

$$H = l + 2 \cdot D = 2 \cdot D + 2 \cdot D = 4 \cdot D = 120.4 \text{ mm}, s_{Fe} = 4 \cdot 3 \cdot D = 361.2 \text{ mm},$$

$$m_{Fe} = \gamma_{Fe} \cdot V_{Fe} \approx \gamma_{Fe} \cdot A_k \cdot s_{Fe} = \gamma_{Fe} \cdot D^2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 12 \cdot D = 7860 \cdot (30.1 \cdot 10^{-3})^3 \cdot 3\pi = 2.02 \text{ kg},$$

$$m_{Cu} = \gamma_{Cu} \cdot V_{Cu} = \gamma_{Cu} \cdot 2 \cdot l \cdot (D_a^2 - D_i^2) \cdot \frac{\pi}{4} = \gamma_{Cu} \cdot 2 \cdot 2D \cdot ((3D)^2 - D^2) \cdot \frac{\pi}{4} = \gamma_{Cu} \cdot 8\pi \cdot D^3,$$

$$m_{Cu} = 8900 \cdot 8\pi \cdot (30.1 \cdot 10^{-3})^3 = 6.1 \text{ kg}.$$

4)

Mit der mittleren Windungslänge  $l_m$  folgt:

$$l_m = (D_a + D_i) \cdot \pi / 2 = (3D + D) \cdot \pi / 2 = 2\pi \cdot D,$$

$$R_1 = \frac{N_1 \cdot l_m}{\kappa_{Cu,80} \cdot A_{q1}} = \frac{N_1 \cdot 2\pi \cdot D}{\kappa_{Cu,80} \cdot A_{q1}} = \frac{1041 \cdot 2\pi \cdot 30.1 \cdot 10^{-3}}{46 \cdot 10^6 \cdot 1.74 \cdot 10^{-6}} = 2.46 \Omega,$$

$$R_2 = R_1 / \ddot{u}^2 = 2.46 / 10^2 = 0.0246 \Omega,$$

$$P_{Cu,1+2,N} = I_{1N}^2 \cdot R_1 + I_{2N}^2 \cdot R_2 = 2 \cdot I_{N1}^2 \cdot R_1 = 2 \cdot 4.35^2 \cdot 2.46 = 93.1 \text{ W}.$$

5)

$$P_{FeN} = 0.5 \cdot P_{Cu,1+2,N} = 0.5 \cdot 93.1 = 46.6 \text{ W},$$

$$P_2 = U_{2N} \cdot I_{2N} \cdot \cos \varphi_2 = S_N \cdot \cos \varphi_2 = S_N = 1 \text{ kW} = P_{2N},$$

$$\eta_{TN} = \frac{P_{out,N}}{P_{in,N}} = \frac{P_{2N}}{P_{2N} + P_{Cu,1+2,N} + P_{FeN}} = \frac{1000}{1000 + 93.1 + 46.6} = 87.74 \%$$

6)

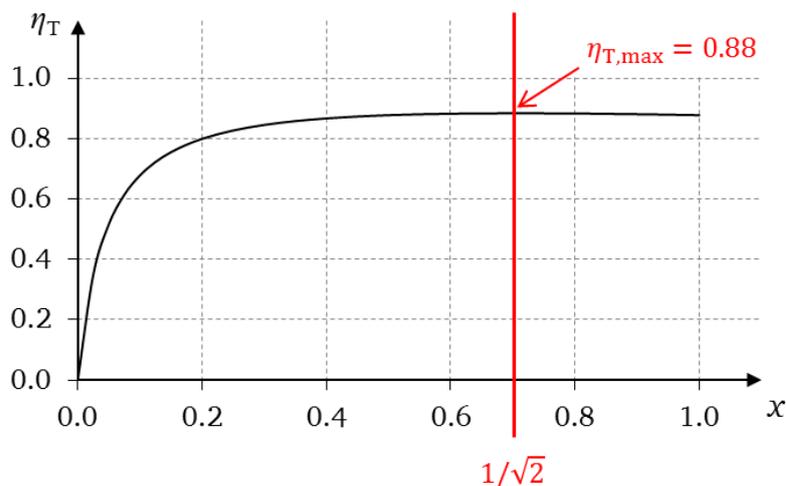


Bild T31.2: Wirkungsgradverlauf des 1000 VA-Einphasen-Transformators bei  $U_2 = U_{2N}$ ,  $\cos \varphi_2 = 1$ , in Abhängigkeit von  $x = I_2/I_{2N}$

$$\eta_T = \frac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}} = \frac{P_2}{P_2 + P_{\text{Cu},1+2} + P_{\text{FeN}}} = \frac{U_{2N} \cdot I_2 \cdot \cos \varphi_2}{U_{2N} \cdot I_{2N} \cdot \cos \varphi_2 + (R_1 + \dot{u}^2 \cdot R_2) \cdot I_2^2 + P_{\text{FeN}}},$$

$$\eta_T = \frac{(U_{2N} \cdot I_{2N}) \cdot (I_2 / I_{2N}) \cdot \cos \varphi_2}{(U_{2N} \cdot I_{2N}) \cdot (I_2 / I_{2N}) \cdot \cos \varphi_2 + (R_1 + \dot{u}^2 \cdot R_2) \cdot I_{2N}^2 \cdot (I_2 / I_{2N})^2 + P_{\text{FeN}}},$$

$$\cos \varphi_2 = 1: \eta_T(x) = \frac{P_{2N} \cdot x}{P_{2N} \cdot x + P_{\text{Cu},1+2,N} \cdot x^2 + P_{\text{FeN}}} = \frac{1000 \cdot x}{1000 \cdot x + 93.1 \cdot x^2 + 46.6}.$$

$x = I_2 / I_{2N}$	0	0.2	0.5	1.0
$\eta_T(x)$ (%)	0	79.89	87.73	87.74

$$\frac{d\eta_T(x)}{dx} = 0: \frac{P_{2N}}{P_{2N} \cdot x + P_{\text{Cu},1+2,N} \cdot x^2 + P_{\text{FeN}}} - \frac{P_{2N} \cdot x \cdot (P_{2N} + 2P_{\text{Cu},1+2,N} \cdot x)}{(P_{2N} \cdot x + P_{\text{Cu},1+2,N} \cdot x^2 + P_{\text{FeN}})^2} = 0,$$

$$P_{2N} \cdot x + P_{\text{Cu},1+2,N} \cdot x^2 + P_{\text{FeN}} - P_{2N} \cdot x - 2P_{\text{Cu},1+2,N} \cdot x^2 = 0 \Rightarrow P_{\text{Cu},1+2,N} \cdot x^2 = P_{\text{FeN}},$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{P_{\text{FeN}}}{P_{\text{Cu},1+2,N}}} \Rightarrow x^* = \sqrt{\frac{P_{\text{FeN}}}{P_{\text{Cu},1+2,N}}}. \text{ Die Lösung } x < 0 \text{ ist unphysikalisch!}$$

$$x^* = \sqrt{0.5} = 1/\sqrt{2} = 0.707 \Rightarrow \eta_T(x^*) = \frac{1000 \cdot 0.707}{1000 \cdot 0.707 + 93.1 \cdot 0.707^2 + 46.6} = 0.8836.$$

**Aufgabe T32:** Einphasen-Mantel-Transformator

Ein (ideal angenommener) Einphasen-Mantel-Transformator (Bild T32.1) für el. Bahnen ( $S_N = 960 \text{ kVA}$ ,  $U_{1N}/U_{2N} = 12 \text{ kV}/ 643 \text{ V}$ ) hat die Eisenpermeabilität  $\mu_{\text{Fe}} \rightarrow \infty$  und wird mit Wechselspannung bei der el. Frequenz 16.7 Hz betrieben. Das Windungszahlverhältnis ist  $N_1 / N_2 = 2800/150$ . Die Streuspaltbreite beträgt  $\Delta = R_{2i} - R_{1a} = 20 \text{ mm}$ , die Spulenbreiten sind  $\Delta' = R_{2a} - R_{2i} = R_{1a} - R_{1i} = 70 \text{ mm}$ . Die weiteren Abmessungen sind  $R = 100 \text{ mm}$ ,  $h = 800 \text{ mm}$ ,  $R_{1a} / R_{1i} = 180 \text{ mm} / 110 \text{ mm}$ ,  $R_{2a} / R_{2i} = 270 \text{ mm} / 200 \text{ mm}$ .

- 1) Welche Beziehung herrscht bei Belastung zwischen der Primärdurchflutung  $\underline{\mathcal{O}}_1 = N_1 I_1$  und der Sekundärdurchflutung  $\underline{\mathcal{O}}_2 = N_2 I_2$ ?
- 2) Geben Sie eine Formel für die Amplitude der magnetischen Streuflussdichte  $\hat{B}_\sigma$  im Streuspalt  $\Delta$  zwischen Ober- und Unterspannungswicklung an!
- 3) Geben Sie im Nennpunkt die Zahlenwerte für  $|\underline{\mathcal{O}}_1|$ ,  $|\underline{\mathcal{O}}_2|$  und  $\hat{B}_\sigma$  an!
- 4) Wie groß ist die Amplitude der Hauptflussdichte  $\hat{B}_{\text{Fe}}$  im Eisenkern bei Vernachlässigung von Streufluss und Stromwärme?
- 5) Berechnen Sie die induzierte Spannung  $U_i$  je Windung (effektiv)! Bestimmen Sie den Scheitelwert der elektrischen Wirbel-Feldstärke  $\hat{E}_{\text{Wi}}$  zufolge der Hauptflussänderung  $d\Phi_h / dt$  beim mittleren Radius  $r^* = (R_{1a} + R_{2i}) / 2$ !
- 6) Berechnen Sie bei diesem Radius  $r^*$  den Poynting-Vektor aus  $\hat{B}_\sigma$  und  $\hat{E}_{\text{Wi}}$ ! In welche Richtung zeigt er? Warum?

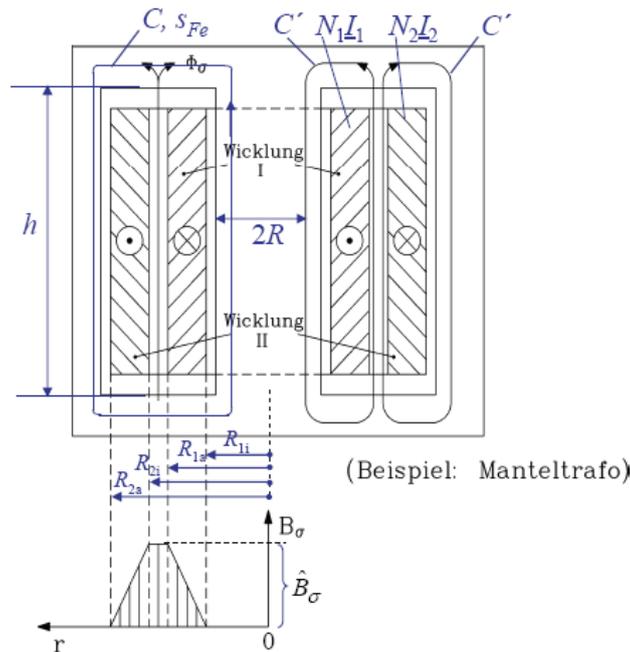


Bild T32.1: Einphasen-Mantel-Transformator

**Aufgabe T32 (Lösung):** Einphasen-Mantel-Transformator

1)

Zeitlich sinusförmiger Vorgang  $\Rightarrow$  komplexe Rechnung:

$$\vec{B}_{Fe} = \mu_{Fe} \cdot \vec{H}_{Fe} \Rightarrow \vec{H}_{Fe} = \vec{B}_{Fe} / \mu_{Fe} = 0 \Rightarrow \oint_C \vec{H}_{Fe} \cdot d\vec{s} = \underline{\mathcal{O}} = \underline{\mathcal{O}}_1 + \underline{\mathcal{O}}_2 = 0,$$

$$\underline{\mathcal{O}}_1 = -\underline{\mathcal{O}}_2 \text{ bzw. } \underline{\mathcal{O}}_1 = N_1 I_1 = -\underline{\mathcal{O}}_2 = N_2 I_2.$$

2)

$$\oint_{C'} \vec{H}_{\sigma} \cdot d\vec{s} = \underline{\mathcal{O}}_1 = -\underline{\mathcal{O}}_2 = \underline{H}_{\sigma} \cdot h, \underline{H}_{\sigma} \cdot h = N_1 I_1 \Rightarrow \underline{H}_{\sigma} = \frac{N_1 I_1}{h} \Rightarrow \underline{B}_{\sigma} = \mu_0 \cdot \frac{N_1 I_1}{h},$$

$$\hat{B}_{\sigma} = \mu_0 \cdot \frac{N_1 I_1 \cdot \sqrt{2}}{h} \text{ bzw. mit } |\underline{\mathcal{O}}_1| = |-\underline{\mathcal{O}}_2| \Rightarrow N_1 I_1 = N_2 I_2 \Rightarrow \hat{B}_{\sigma} = \mu_0 \cdot \frac{N_2 I_2 \cdot \sqrt{2}}{h}.$$

Diese magn. Streuflussdichte tritt homogen verteilt im Streuspalt  $\Delta$  auf und ist vertikal orientiert (in Zylinderkoordinaten  $z$ -Richtung):  $\vec{B}_{\sigma}(t) = \hat{B}_{\sigma} \cdot \cos(\omega t - \varphi_i) \cdot \vec{e}_z$ .

Da  $\vec{B}_{\sigma}(t) \sim N_1 i_1(t)$ , tritt der Stromphasenwinkel  $\varphi_i$  auf.

3)

$$I_{1N} = S_N / U_{1N} = 960 \cdot 10^3 / 12000 = 80 \text{ A}, I_{2N} = S_N / U_{2N} = 960 \cdot 10^3 / 643 = 1493 \text{ A},$$

$$N_1 I_1 = 2800 \cdot 80 = 224 \text{ kA}, N_2 I_2 = 150 \cdot 1493 = 224 \text{ kA},$$

$$\hat{B}_{\sigma} = \mu_0 \cdot \frac{N_1 I_1 \cdot \sqrt{2}}{h} = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 224000 \cdot \sqrt{2} / 0.8 = 0.5 \text{ T}.$$

4)

$$\text{Annahmen: } \hat{B}_{\sigma} \approx 0, R_1 \approx 0, R_2 \approx 0 \Rightarrow U_1 \approx U_h = \sqrt{2} \cdot \pi \cdot f \cdot N_1 \cdot \Phi_h, \Phi_h = R^2 \pi \cdot \hat{B}_{Fe},$$

$$\hat{B}_{Fe} = \frac{U_{1N}}{R^2 \pi \cdot \sqrt{2} \cdot \pi \cdot f \cdot N_1} = \frac{12000}{0.1^2 \pi \cdot \sqrt{2} \cdot \pi \cdot 16.7 \cdot 2800} = 1.84 \text{ T}.$$

5)

Faraday'sches Induktionsgesetz:  $\oint_K \vec{E}_{Wi}(t) \cdot d\vec{s} = u_i(t) = -d\Phi_h / dt$ .

Mit  $u_i(t) = -d\Phi_h / dt \Rightarrow \underline{U}_i = -j \cdot \omega \cdot \underline{\Phi}_h / \sqrt{2}$  und  $|\underline{U}_i| = U_i = \omega \cdot \Phi_h / \sqrt{2}$  je Spulenwindung erhalten wir:  $U_i = \sqrt{2} \cdot \pi \cdot f \cdot R^2 \pi \cdot \hat{B}_{Fe} = \sqrt{2} \cdot \pi \cdot 16.7 \cdot 0.1^2 \pi \cdot 1.84 = 4.29 \text{ V}$ .

Geschlossene Kurve  $K$  im Streuspalt um Spule 1:  $\oint_K \vec{E}_{Wi} \cdot d\vec{s} = \underline{U}_i = \underline{E}_{Wi} \cdot 2\pi \cdot r^*$ ,

$$r^* = (R_{1a} + R_{2i}) / 2 = (180 + 200) / 2 = 190 \text{ mm},$$

$$\hat{E}_{Wi} = \frac{U_i \cdot \sqrt{2}}{2\pi \cdot r^*} = \frac{4.29 \cdot \sqrt{2}}{2\pi \cdot 0.19} = 5.08 \text{ V/m}.$$

Diese el. Feldstärke tritt in der Mitte des Streuspalts  $\Delta$  auf und ist in Umfangsrichtung orientiert (in Zylinderkoordinaten  $\varphi$ -Richtung):  $\vec{E}_{Wi}(t) = \hat{E}_{Wi} \cdot \cos(\omega t - \varphi_u) \cdot \vec{e}_\varphi$ .

Da  $E_{Wi}(t) \sim u_i(t) = u_h(t) / N_1 \approx u_1(t) / N_1$ , tritt der Spannungsphasenwinkel  $\varphi_u$  auf (der meist Null gesetzt wird).

6)

$$\vec{S}_{pg}(t) = \vec{E}_{Wi}(t) \times \vec{H}_\sigma(t) = \vec{E}_{Wi}(t) \times \vec{B}_\sigma(t) / \mu_0 = S_{pg}(t) \cdot \vec{e}_\varphi \times \vec{e}_z = S_{pg}(t) \cdot \vec{e}_r$$

Der Poynting-Vektor ist von Spule 1 (innen) zu Spule 2 (außen) gerichtet ( $r$ -Richtung) und gibt die Richtung des Leistungsflusses von Primär- zu Sekundärspule an.

Anmerkung:

$$S_{pg}(t) = \hat{E}_{Wi} \cdot \cos(\omega t - \varphi_u) \cdot \hat{B}_\sigma \cdot \cos(\omega t - \varphi_i) / \mu_0,$$

$$S_{pg}(t) = \frac{\hat{E}_{Wi} \cdot \hat{B}_\sigma}{2\mu_0} \cdot (\cos(2\omega t - \varphi_u - \varphi_i) + \cos(\varphi_u - \varphi_i)), T = 2\pi / \omega,$$

$$S_{pg,av} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T S_{pg}(t) \cdot dt = \frac{\hat{E}_{Wi} \cdot \hat{B}_\sigma}{2\mu_0 T} \cdot \int_0^T (\cos(2\omega t - \varphi_u - \varphi_i) + \cos(\varphi_u - \varphi_i)) \cdot dt,$$

$$S_{pg,av} = \frac{\hat{E}_{Wi} \cdot \hat{B}_\sigma}{2\mu_0} \cdot \cos(\varphi_u - \varphi_i) = \frac{\hat{E}_{Wi} \cdot \hat{B}_\sigma}{2\mu_0} \cdot \cos \varphi,$$

$$S_{pg,av} = \frac{1}{2\mu_0} \cdot \frac{U_i \cdot \sqrt{2}}{2\pi \cdot r^*} \cdot \mu_0 \cdot \frac{N_1 I_1 \cdot \sqrt{2}}{h} \cdot \cos \varphi = \frac{N_1 U_i \cdot I_1}{2\pi \cdot r^* h} \cdot \cos \varphi = \frac{U_h \cdot I_1}{2\pi \cdot r^* h} \cdot \cos \varphi$$

Durch die Hüllfläche  $A = 2\pi \cdot r^* h$  tritt der Leistungsfluss im Streuspalt von Spule 1 zu Spule 2 hindurch und ist tatsächlich die Transformatorwirkleistung!

$$P = \int_A S_{pg,av} \cdot dA = S_{pg,av} \cdot A = S_{pg,av} \cdot 2\pi \cdot r^* h = U_h \cdot I_1 \cdot \cos \varphi \underset{R_1=0}{=} U_1 \cdot I_1 \cdot \cos \varphi = P_1.$$

**Aufgabe V1:** Unsymmetrische Last, Sternschaltung

Eine wissenschaftliche große Forschungsanlage belastet das speisende 20 kV-Netz (3 x 20 kV, 50 Hz) unsymmetrisch. Im Strang R findet eine rein *ohm*'sche Belastung statt ( $R = 100 \Omega$ ), Strang S wird rein induktiv belastet ( $X_L = \omega \cdot L_L = 100 \Omega$ ) und Strang T rein kapazitiv ( $X_C = -\frac{1}{\omega C} = -100 \Omega$ ).

- 1) Berechnen Sie die Strangströme  $\underline{I}_R, \underline{I}_S, \underline{I}_T$ , wobei das speisende Netz als  $\underline{U}_{RS} = U = 20 \text{ kV}$ ,  $\underline{U}_{ST} = U \cdot e^{-j120^\circ}$ ,  $\underline{U}_{TR} = U \cdot e^{j240^\circ}$  gegeben ist. Die drei Lasten  $R, X_L, X_C$  sind im Stern geschaltet mit isoliertem Sternpunkt! Wie groß sind die Effektivwerte  $I_R, I_S, I_T$ ?
- 2) Wie groß sind die drei Strangspannungen  $\underline{U}_R, \underline{U}_S, \underline{U}_T$  und die Effektivwerte  $U_R, U_S, U_T$ ?
- 3) Zeichnen Sie das Zeigerdiagramm zu 1) und 2) maßstäblich! (Strommaßstab  $20 \text{ A} \triangleq 1 \text{ cm}$ ; Spannungsmaßstab  $2 \text{ kV} \triangleq 1 \text{ cm}$ )
- 4) Zeichnen Sie zu 3) zur Kontrolle die verketteten Spannungen  $\underline{U}_{RS}, \underline{U}_{ST}, \underline{U}_{TR}$  ein!
- 5) Wie groß sind  $P, Q, S$  und der  $\cos\phi$  der gesamten Versuchsanlage?
- 6) Lesen Sie die Verlagerungsspannung  $\Delta U$  grafisch aus 4) ab!

**Aufgabe V1 (Lösung):** Unsymmetrische Last, Sternschaltung

1)

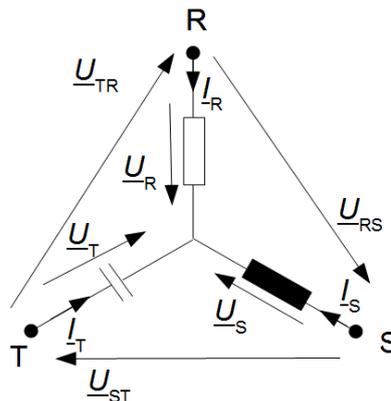


Bild V1.1: Ersatzschaltbild der Schaltung

Gemäß dem Ersatzschaltbild gilt:

$$\underline{U}_{RS} = U = \underline{U}_R - \underline{U}_S = \underline{I}_R \cdot R - j \cdot X_L \cdot \underline{I}_S \quad (1),$$

$$\underline{U}_{ST} = U \cdot e^{-j120^\circ} = \underline{U}_S - \underline{U}_T = j \cdot X_L \cdot \underline{I}_S - j \cdot X_C \cdot \underline{I}_T \quad (2),$$

$$\underline{I}_R + \underline{I}_S + \underline{I}_T = 0 \Rightarrow \underline{I}_R = -\underline{I}_S - \underline{I}_T \rightarrow (1):$$

$$(1) \quad -j \cdot X_L \cdot \underline{I}_S + R \cdot (-\underline{I}_S - \underline{I}_T) = U \Rightarrow \underline{I}_S = -\frac{U + R \cdot \underline{I}_T}{R + j \cdot X_L} \rightarrow (2):$$

$$(2) \quad -j \cdot X_L \cdot \frac{U + R \cdot \underline{I}_T}{R + j \cdot X_L} - j \cdot X_C \cdot \underline{I}_T = U \cdot e^{-j120^\circ}.$$

$$\underline{I}_T = -U \cdot \frac{e^{-j120^\circ} + j \cdot \frac{X_L}{R + j \cdot X_L}}{j \cdot (X_C + \frac{R \cdot X_L}{R + j \cdot X_L})} = j \cdot U \cdot \frac{X_L + (R + j \cdot X_L) \cdot (-\frac{1}{2} - j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2})}{X_C \cdot (R + j \cdot X_L) + R \cdot X_L},$$

$$\underline{I}_T = \frac{U}{2} \cdot \frac{(\sqrt{3} \cdot R - X_L) - j \cdot (R - \sqrt{3} \cdot X_L)}{R \cdot (X_L + X_C) + j \cdot X_L \cdot X_C}.$$

Mit  $X_L = R$ ,  $X_C = -R$ ,  $I = \frac{U}{2R}$  folgt:  $\underline{I}_T = \frac{U}{2 \cdot R} \cdot \frac{\sqrt{3}-1-j \cdot (1-\sqrt{3})}{-j} = I \cdot (-1+j) \cdot (\sqrt{3}-1)$ ,

$$\underline{I}_S = -U \cdot \frac{1 + \frac{R}{U} \cdot \underline{I}_T}{R + j \cdot X_L} = -U \cdot \frac{1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\underline{I}_T}{I}}{R + j \cdot X_L} = -\frac{U}{R} \cdot \frac{1 + \frac{1}{2} \cdot (-1+j) \cdot (\sqrt{3}-1)}{1+j},$$

$$\underline{I}_S = -\frac{U}{2R} \cdot (1-j) \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{3}-1}{2} \cdot (-1+j)\right) = \frac{U}{2R} \cdot (-1+j \cdot (2-\sqrt{3})) = I \cdot (-1+j \cdot (2-\sqrt{3})),$$

$$\underline{I}_R = -\underline{I}_S - \underline{I}_T = I \cdot (1-j \cdot (2-\sqrt{3}) + (1-j) \cdot (\sqrt{3}-1)) = I \cdot (\sqrt{3}-j),$$

$$I = \frac{U}{2R} = \frac{20000 \text{ V}}{2 \cdot 100 \Omega} = 100 \text{ A}.$$

$$\underline{I}_R = 100 \text{ A} \cdot (\sqrt{3}-j), \underline{I}_S = 100 \text{ A} \cdot (-1+j \cdot 0.27), \underline{I}_T = 100 \text{ A} \cdot 0.37 \cdot (-1+j) = 73 \text{ A} \cdot (-1+j),$$

Beachten Sie:  $|\underline{I}_S| = |\underline{I}_T| = 103.53 \text{ A}$ ,  $|\underline{I}_R| = 200 \text{ A}$ .

2)

$$\underline{U}_R = R \cdot \underline{I}_R = R \cdot \frac{U}{2R} \cdot (\sqrt{3}-j) = \frac{U}{2} \cdot (\sqrt{3}-j),$$

$$\underline{U}_S = j \cdot X_L \cdot \underline{I}_S = j \cdot R \cdot \underline{I}_S = j \cdot R \cdot \frac{U}{2R} \cdot (-1+j \cdot (2-\sqrt{3})) = \frac{U}{2} \cdot (-2+\sqrt{3}-j),$$

$$\underline{U}_T = j \cdot X_C \cdot \underline{I}_T = -j \cdot R \cdot \frac{U}{2R} \cdot (\sqrt{3}-j) \cdot (-1+j) = \frac{U}{2} \cdot (\sqrt{3}-1) \cdot (1+j),$$

$$\underline{U}_R = \frac{20000 \text{ V}}{2} \cdot (1.73-j) = 10000 \text{ V} \cdot (1.73-j), \underline{U}_S = 10000 \text{ V} \cdot (-0.27-j),$$

$$\underline{U}_T = 10000 \text{ V} \cdot 0.73 \cdot (1+j) = 7300 \text{ V} \cdot (1+j),$$

$$U_R = 20000 \text{ V}, U_S = 10358 \text{ V}, U_T = U_S.$$

3) + 4)  $\mu_U = 2 \frac{\text{kV}}{\text{cm}}$ ,  $\mu_I = 20 \frac{\text{A}}{\text{cm}}$ ,  $|\Delta \underline{U}| = 4.3 \text{ cm}$ ,  $\mu_U = 8.6 \text{ kV} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 20 \text{ kV} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot U$ .

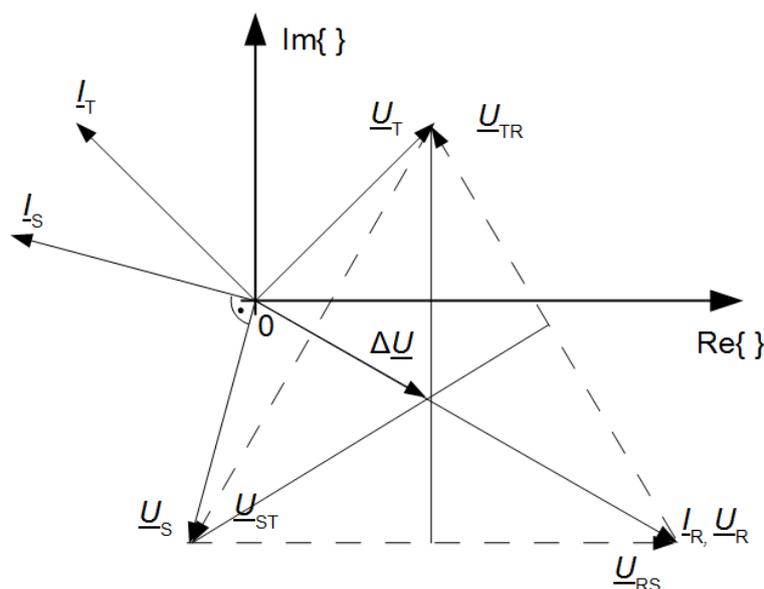


Bild V1.2: Spannungs- und Stromzeiger in der komplexen Ebene

5)

$$P = P_R + P_S + P_T = I_R \cdot U_R + 0 + 0 = R \cdot I_R^2 = 100\Omega \cdot (100A)^2 \cdot (\sqrt{3}^2 + 1^2) = 400 \cdot 10^4 \text{ MW} = 4 \text{ MW},$$

$$S = I_R \cdot U_R + I_S \cdot U_S + I_T \cdot U_T = P_R + Q_S + Q_T = R \cdot I_R^2 + X_L \cdot I_S^2 + X_C \cdot I_T^2,$$

$$S = R \cdot (I_R^2 + I_S^2 - I_T^2) = R \cdot I^2 \cdot \left( \sqrt{3}^2 + 1^2 + 1^2 + (2 - \sqrt{3})^2 - (\sqrt{3} - 1)^2 \cdot (1^2 + 1^2) \right),$$

$$S = R \cdot I^2 \cdot (3 + 1 + 1 + 4 + 3 - 4 \cdot \sqrt{3} - (3 + 1 - 2 \cdot \sqrt{3}) \cdot 2),$$

$$S = R \cdot I^2 \cdot (12 - 4 \cdot \sqrt{3} - 8 + 4 \cdot \sqrt{3}) = 4RI^2 = 4 \cdot 100\Omega \cdot (100A)^2 = 4 \text{ MVA}.$$

Beachten Sie: Wegen  $X_C = -X_L$  und  $I_S = I_T$  heben sich  $Q_L = X_L \cdot I_S^2$  und  $Q_C = X_C \cdot I_T^2 = -Q_L$  auf!  $\Rightarrow S = P$ ,  $Q_C = \sqrt{S^2 - P^2} = 0$ ,  $\cos \varphi = P/S = 1$ .

**Aufgabe V2:** Unsymmetrischer Verbraucher, Dreieckschaltung

Ein unsymmetrischer Verbraucher mit den Impedanzen  $R$  im Strang  $R$ ,  $X_L = \omega \cdot L$  im Strang  $S$  und  $X_C = -\frac{1}{\omega \cdot C}$  im Strang  $T$  wird in Dreieckschaltung an das symmetrische 50 Hz-Netz,

$3 \times 20 \text{ kV}$ , angeschlossen:  $\underline{U}_{RS} = U$ ,  $\underline{U}_{ST} = U \cdot e^{-j120^\circ}$ ,  $\underline{U}_{TR} = U \cdot e^{j240^\circ}$ ,  $U = 20 \text{ kV}$ .

1) Berechnen Sie die drei Strangströme  $\underline{I}_R$ ,  $\underline{I}_S$ ,  $\underline{I}_T$  für  $R = X_L = -X_C = 100 \Omega$  und die Effektivwerte  $I_R$ ,  $I_S$ ,  $I_T$ !

2) Wie groß sind die Netzströme  $\underline{I}_{RN}$ ,  $\underline{I}_{SN}$ ,  $\underline{I}_{TN}$  und ihre Effektivwerte? Ist die Stromsumme der Strangströme und der Netzströme jeweils Null?

3) Zeichnen Sie das Zeigerdiagramm zu 1) und 2)!

(Strommaßstab  $50 \text{ A} \triangleq 1 \text{ cm}$ ; Spannungsmaßstab  $4 \text{ kV} \triangleq 1 \text{ cm}$ )

4) Bestimmen Sie  $P$ ,  $Q$ ,  $S$ ,  $\cos \varphi$  der Anordnung.

**Aufgabe V2 (Lösung):** Unsymmetrischer Verbraucher, Dreieckschaltung

1)

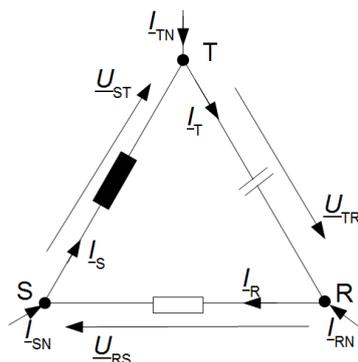


Bild V2.1: Ersatzschaltbild der Schaltung

$$\underline{I}_R = \frac{\underline{U}_{RS}}{R} = \frac{U}{R},$$

$$\underline{I}_S = \frac{\underline{U}_{ST}}{j \cdot X_L} = \frac{U \cdot e^{-j120^\circ}}{j \cdot X_L} = \frac{U}{R} \cdot (-j) \cdot e^{-j120^\circ} = \frac{U}{R} \cdot (-j) \cdot \left( -\frac{1}{2} - j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{U}{R} \cdot \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} + j \frac{1}{2} \right),$$

$$\underline{I}_T = \frac{\underline{U}_{TR}}{j \cdot X_C} = \frac{U \cdot e^{-j \cdot 240^\circ}}{j \cdot X_C} = \frac{U}{R} \cdot j \cdot \left( -\frac{1}{2} + j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{U}{R} \cdot \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} - j \frac{1}{2} \right),$$

$$\frac{U}{R} = \frac{20000 \text{ V}}{100 \Omega} = 200 \text{ A}, \quad \underline{I}_R = 200 \text{ A}, \quad \underline{I}_S = 100 \text{ A} \cdot (-\sqrt{3} + j) = -173.2 \text{ A} + j \cdot 100 \text{ A},$$

$$\underline{I}_T = 100 \text{ A} \cdot (-\sqrt{3} - j) = -173.2 \text{ A} - j \cdot 100 \text{ A},$$

$$\underline{I}_R = 200 \text{ A}, \quad \underline{I}_S = 200 \text{ A}, \quad \underline{I}_T = \underline{I}_S = \underline{I}_R = 200 \text{ A}.$$

2)

$$\left. \begin{aligned} \underline{I}_{RN} &= \underline{I}_R - \underline{I}_T = \frac{U}{R} - \frac{U}{R} \cdot \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} - j \frac{1}{2} \right) = \frac{U}{R} \cdot \left[ \left( 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + j \cdot \frac{1}{2} \right] \\ \underline{I}_{SN} &= \underline{I}_S - \underline{I}_R = \frac{U}{R} \cdot \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} + j \frac{1}{2} \right) - \frac{U}{R} = \frac{U}{R} \cdot \left( -\frac{\sqrt{3}+2}{2} + j \cdot \frac{1}{2} \right) \\ \underline{I}_{TN} &= \underline{I}_T - \underline{I}_S = \frac{U}{R} \cdot \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} - j \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - j \frac{1}{2} \right) = -j \cdot \frac{U}{R} \end{aligned} \right\} +: \underline{I}_{RN} + \underline{I}_{SN} + \underline{I}_{TN} = 0$$

$$\underline{I}_R + \underline{I}_S + \underline{I}_T = \frac{U}{R} \cdot \left( 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + j \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} - j \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{U}{R} \cdot (1 - \sqrt{3}) < 0 !$$

$$\underline{I}_{RN} = 200 \text{ A} \cdot (1.866 + j \cdot 0.5) = (373.2 + j \cdot 100) \text{ A},$$

$$\underline{I}_{SN} = 200 \text{ A} \cdot (-1.866 + j \cdot 0.5) = (-373.2 + j \cdot 100) \text{ A} \rightarrow I_{RN} = 386.4 \text{ A} = I_{SN},$$

$$\underline{I}_{TN} = -j \cdot 200 \text{ A} \rightarrow I_{TN} = 200 \text{ A}.$$

3)

$\mu_U = 4 \text{ kV/cm}$ ,  $\mu_I = 50 \text{ A/cm}$ :

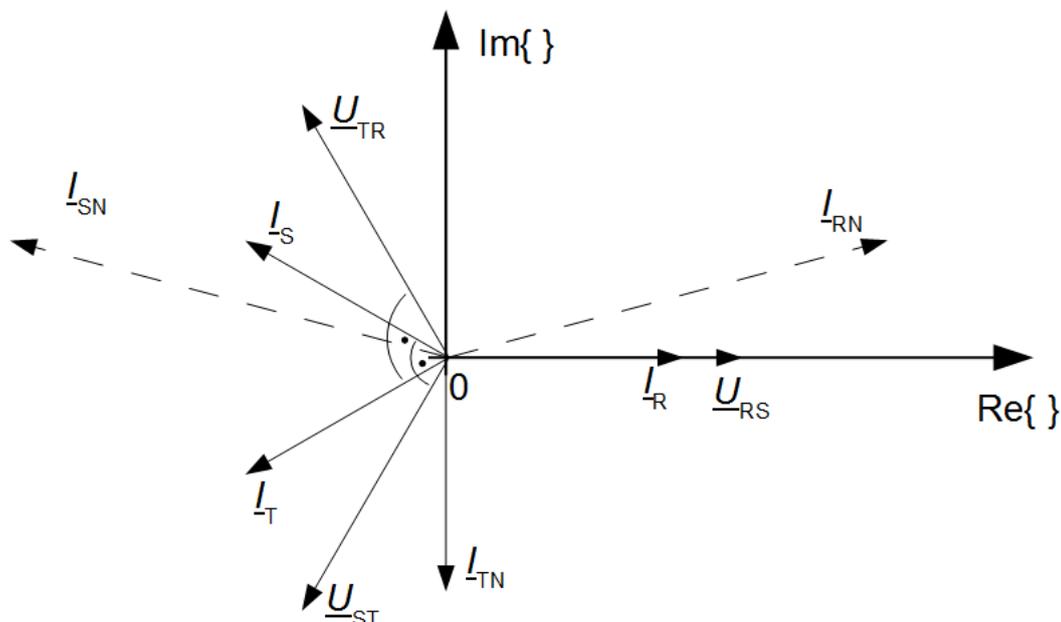


Bild V2.2: Spannungs- und Stromzeiger in der komplexen Ebene

4)

$$P_R = \frac{U_{RS}^2}{R} = \frac{U^2}{R} = I_R^2 \cdot R = \frac{(20000 \text{ V})^2}{100 \Omega} = 4 \text{ MW},$$

$$Q_R = 0, Q_S = \frac{U_{ST}^2}{X_L} = 4 \text{ MVar}, Q_T = \frac{U_{TR}^2}{X_C} = -Q_S = -4 \text{ MVar},$$

$$P_S = P_T = 0, P = P_R + P_S + P_T = P_R, Q = Q_R + Q_S + Q_T = 0, S = \sqrt{P^2 + Q^2} = P_R, \\ P = 4 \text{ MW}, Q = 0, S = 4 \text{ MVA}, \cos \varphi = P/S = 1$$

**Aufgabe V3:** Unsymmetrischer Verbraucher, Sternschaltung

Ein unsymmetrischer Verbraucher mit den Impedanzen  $R$  im Strang  $R$ ,  $X_L = \omega \cdot L$  im Strang  $S$  und  $X_C = -\frac{1}{\omega \cdot C}$  im Strang  $T$  wird in Sternschaltung durch das Drehstrom-Vierleiternetz  $3 \times 20 \text{ kV}$ ,  $50 \text{ Hz}$ , mit angeschlossenem Sternpunkt  $N$  versorgt.

- 1) Bestimmen Sie die Strangströme  $\underline{I}_R, \underline{I}_S, \underline{I}_T$  und ihre Effektivwerte  $I_R, I_S, I_T$  bei eingepägtem Strangspannungssystem  $\underline{U}_R = U_{ph}$ ,  $\underline{U}_S = U_{ph} \cdot e^{-j120^\circ}$ ,  $\underline{U}_T = U_{ph} \cdot e^{-j240^\circ}$ , mit  $U_{ph} = U / \sqrt{3} = 20000 / \sqrt{3} = 11547 \text{ V}$ , wenn  $R = X_L = -X_C = 100 \Omega$  ist. Wie groß ist  $\underline{I}_N$  im Sternpunktleiter und sein Effektivwert  $I_N$ ?
- 2) Zeichnen Sie das Stromzeigerdiagramm zu 1) mit dem Strommaßstab  $\mu_I = 25 \text{ A/cm}$ .
- 3) Wie groß sind  $P, Q, S, \cos \varphi$  des Gesamtsystems.
- 4) Geben Sie den Zeitverlauf der Momentanleistung  $p(t)$  als Formel an! Wie groß ist die Amplitude des mit  $2f$  pendelnden Leistungsanteils im Verhältnis zum Mittelwert?

**Aufgabe V3 (Lösung):** Unsymmetrischer Verbraucher, Sternschaltung

1)

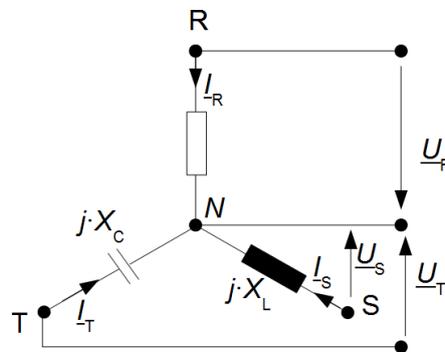


Bild V3.1: Ersatzschaltbild der Schaltung

$$\underline{I}_R = \frac{\underline{U}_R}{R} = \frac{U_{ph}}{R},$$

$$\underline{I}_S = \frac{\underline{U}_S}{j \cdot X_L} = \frac{U_{ph} \cdot e^{-j120^\circ}}{j \cdot R} = \frac{U_{ph}}{R} \cdot (-j) \cdot \left( -\frac{1}{2} - j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{U_{ph}}{R} \cdot \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} + j \frac{1}{2} \right),$$

$$\underline{I}_T = \frac{\underline{U}_T}{j \cdot X_C} = \frac{U_{ph} \cdot e^{-j240^\circ}}{-j \cdot R} = \frac{U_{ph}}{R} \cdot j \cdot \left( -\frac{1}{2} + j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{U_{ph}}{R} \cdot \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} - j \frac{1}{2} \right),$$

$$I_R = \frac{20000 \text{ V}}{\sqrt{3} \cdot 100 \Omega} = \frac{200 \text{ A}}{\sqrt{3}} = 115.5 \text{ A},$$

$$\underline{I}_S = \frac{200 \text{ A}}{\sqrt{3}} \cdot \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} + j \frac{1}{2} \right) = (-173.2 + j \cdot 100) \text{ A} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = (-100 + j \cdot 57.7) \text{ A},$$

$$\underline{I}_T = \frac{200\text{A}}{\sqrt{3}} \cdot \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2} \right) = (-173.2 - j \cdot 100)\text{A} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = (-100 - j \cdot 57.7)\text{A},$$

$$I_R = I_S = I_T = \frac{200\text{A}}{\sqrt{3}} = 115.5\text{A},$$

$$\underline{I}_N = \underline{I}_R + \underline{I}_S + \underline{I}_T = \frac{U_{\text{ph}}}{R} \cdot \left( 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2} \right) = \frac{U_{\text{ph}}}{R} \cdot (1 - \sqrt{3}) = -0.73 \cdot \frac{U_{\text{ph}}}{R} = -84.3\text{A},$$

$$I_N = 84.3\text{A}.$$

2)

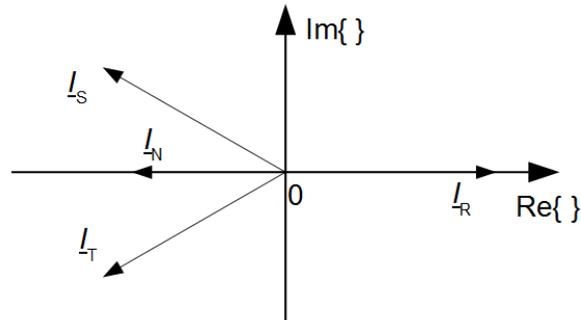


Bild V3.2: Stromzeiger in der komplexen Ebene,  $\mu_l = 25 \text{ A/cm}$

3)

$$P = P_R + P_S + P_T = P_R + 0 + 0 = R \cdot I_R^2 = 100\Omega \cdot \left( \frac{200\text{A}}{\sqrt{3}} \right)^2 = \frac{4}{3} \text{MW} = 1.33 \text{MW},$$

$$Q = Q_R + Q_S + Q_T = 0 + Q_S - Q_S = 0, S = P = 1.33 \text{MVA}, \cos \varphi = P/S = 1.$$

4)

$$p(t) = u_R(t) \cdot i_R(t) + u_S(t) \cdot i_S(t) + u_T(t) \cdot i_T(t), u_R(t) = \hat{U}_{\text{ph}} \cdot \cos(\omega \cdot t),$$

$$p(t) = \hat{U}_{\text{ph}} \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \hat{I}_R \cdot \cos(\omega \cdot t) + \hat{U}_{\text{ph}} \cdot \cos(\omega \cdot t - \frac{2\pi}{3}) \cdot \hat{I}_S \cdot \cos(\omega \cdot t - \varphi_S)$$

$$+ \hat{U}_{\text{ph}} \cdot \cos(\omega \cdot t - \frac{4\pi}{3}) \cdot \hat{I}_T \cdot \cos(\omega \cdot t - \varphi_T)$$

$$\hat{I}_R = \hat{I}_S = \hat{I}_T = \hat{I}_{\text{ph}},$$

$$\varphi_T = \left( 180^\circ - \arctan\left(\frac{1/2}{\sqrt{3}/2}\right) \right) = 150^\circ, \varphi_S = \left( 180^\circ + \arctan\left(\frac{1/2}{\sqrt{3}/2}\right) \right) = 210^\circ.$$

$$\text{Additionstheorem: } \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) = \frac{1}{2} \cdot (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)):$$

$$\cos(\omega \cdot t - 120^\circ) \cdot \cos(\omega \cdot t - 210^\circ) = \frac{1}{2} \cdot [\cos(-90^\circ) + \cos(2\omega t - 330^\circ)] = \frac{1}{2} \cdot \cos(2\omega t - 330^\circ),$$

$$\cos(\omega \cdot t - 240^\circ) \cdot \cos(\omega \cdot t - 150^\circ) = \frac{1}{2} \cdot [\cos(90^\circ) + \cos(2\omega t - 390^\circ)] = \frac{1}{2} \cdot \cos(2\omega t - 30^\circ),$$

$$p(t) = \hat{U}_{\text{ph}} \cdot \hat{I}_{\text{ph}} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot (1 + \cos(2\omega t)) + \frac{1}{2} \cdot (\cos(2\omega t - 330^\circ)) + \frac{1}{2} \cdot (\cos(2\omega t - 30^\circ)) \right],$$

$$p(t) = \frac{\hat{U}_{\text{ph}}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\hat{I}_{\text{ph}}}{\sqrt{2}} \cdot \left[ 1 + \cos(2\omega t) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos(2\omega t) - \frac{1}{2} \cdot \sin(2\omega t) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos(2\omega t) + \frac{1}{2} \cdot \sin(2\omega t) \right],$$

$$p(t) = U_{\text{ph}} \cdot I_{\text{ph}} \cdot (1 + \cos(2\omega t) \cdot (1 + \sqrt{3})) = P \cdot (1 + (1 + \sqrt{3}) \cdot \cos(2\omega t)).$$

$$\frac{P_{\sim}}{P_{av}} = \frac{1 + \sqrt{3}}{1} = 1 + \sqrt{3} = 2.73\text{-fach},$$

$$P_{av} = U_{ph} \cdot I_{ph} = \frac{20kV}{\sqrt{3}} \cdot \frac{200A}{\sqrt{3}} = 1.33\text{ MW}, P_{\sim} = 2.73 \cdot 1.33\text{ MW} = 3.63\text{ MW}.$$

**Aufgabe V4:** Heizlüfter

Ein Einphasenmotor und ein Heizlüfter werden in einer Werkstatt eines Gewerbebetriebs über ein Verlängerungskabel (einfache Länge  $l = 200\text{ m}$ ,  $q_{Cu} = 1.5\text{ mm}^2$ ,  $\kappa_{Cu} = 51\text{ MS/m}$  bei  $50\text{ }^\circ\text{C}$ ) am  $230\text{V}$ -Netz,  $50\text{ Hz}$ , betrieben.

Gerätedaten: Einphasenmotor:  $P_{el,N} = 400\text{ W}$ ,  $n_N = 1400\text{ min}^{-1}$ ,  $U_N = 230\text{V}$ ,  $\cos\varphi_N = 0.51$ ,  
 Heizlüfter:  $I_{H,N} = 5\text{ A}$ ,  $U_N = 230\text{V}$ ,  $\cos\varphi_N = 1$

1) Wie groß ist die Spannung  $U$  an den Geräteklemmen L-N der beiden parallel geschalteten Geräte?

Hinweis: Verwenden Sie für den Motor eine elektrische Ersatzserienschaltung aus  $R_m$  und  $L_m$ . Die Leitung ist rein *ohm*'sch anzunehmen.

2) Wie groß ist die tatsächliche Stromaufnahme des Motors  $I_M$  und des Heizlüfters  $I_H$ ? Um wie viel Prozent sinkt die Wirkleistung in den beiden Geräten gegenüber der jeweiligen Nennleistung?

3) Wie groß sind die Stromdichte  $J$  und die *ohm*'schen Verluste  $P_{Cu,l}$  in der Leitung? Wie groß ist der %-Anteil dieser Verluste an der gesamten Wirkleistungsaufnahme aus dem Netz?

**Aufgabe V4 (Lösung):** Heizlüfter

1)

$$R_H = \frac{U_N}{I_{H,N}} = \frac{230\text{ V}}{5\text{ A}} = 46\ \Omega, I_{m,N} = \frac{S_N}{U_N} = \frac{P_{el,N} / \cos\varphi_N}{U_N} = \frac{400\text{ W}/0.51}{230\text{ V}} = 3.41\text{ A},$$

$$Q_N = \sqrt{S_N^2 - P_N^2} = 674.6\text{ VAr}. \text{ Ersatzschaltung aus } R_m \text{ und } X_m = \omega \cdot L_m:$$

$$P_{el,N} = R_m \cdot I_{m,N}^2 \Rightarrow R_m = \frac{400}{3.41^2} = 34.4\ \Omega, Q_N = X_m \cdot I_{m,N}^2 \Rightarrow X_m = \frac{674.6}{3.41^2} = 58\ \Omega,$$

$$R_l = \frac{1}{\kappa_{Cu}} \cdot \frac{2 \cdot l}{q_{Cu}} = \frac{1}{51 \cdot 10^6} \cdot \frac{2 \cdot 200}{1.5 \cdot 10^{-6}} = 5.23\ \Omega.$$

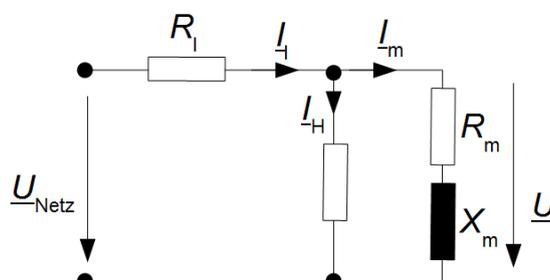


Bild V4.1: Ersatzschaltbild der Schaltung

$$\frac{U}{U_{Netz}} = \frac{|Z|}{|R_l + Z|} = \frac{|28.69 + j \cdot 12.49|}{|5.23 + 28.69 + j \cdot 12.49|} = \frac{31.29}{36.15} = 0.8656,$$

$$\underline{Z} = \frac{R_H \cdot (R_m + j \cdot X_m)}{R_H + R_m + j \cdot X_m} = \frac{46 \cdot (34.4 + j \cdot 58)}{46 + 34.4 + j \cdot 58} = \frac{46 \cdot (34.4 + j \cdot 58) \cdot (80.4 - j \cdot 58)}{80.4^2 + 58^2},$$

$$\underline{Z} = \frac{46}{9828} \cdot (6129.79 + j \cdot 2668) = (28.69 + j \cdot 12.49) \Omega, U = 230 \text{ V} \cdot 0.8656 = 199 \text{ V}.$$

2)

$$I_H = \frac{U}{R_H} = \frac{199}{46} = 4.33 \text{ A}, I_m = \frac{U}{\sqrt{R_m^2 + X_m^2}} = \frac{199}{\sqrt{34.4^2 + 58^2}} = 2.95 \text{ A},$$

$$\frac{P_H}{P_{H,N}} = \left(\frac{4.33}{5.0}\right)^2 = 0.75, \quad \text{Motor: } \frac{P_{el}}{P_{el,N}} = \frac{I_m^2 \cdot R_m}{P_{el}} = \frac{2.95^2 \cdot 34.4}{400} = 0.748,$$

$(1 - 0.75) \cdot 100 = 25\%$ ,  $(1 - 0.748) \cdot 100 = 25.1\%$ : Die Wirkleistung sinkt um 25 % !

3)

$$\underline{I}_m = \frac{U}{R_m + j \cdot X_m} = \frac{U}{R_m^2 + X_m^2} \cdot (R_m - j \cdot X_m), \underline{I}_1 = \underline{I}_H + \underline{I}_m = \underline{I}_H + \frac{U \cdot R_m}{R_m^2 + X_m^2} - j \cdot \frac{U \cdot X_m}{R_m^2 + X_m^2},$$

$$I_1 = |\underline{I}_1| = \sqrt{\left(4.33 + \frac{1.99 \cdot 34.4}{34.4^2 + 58^2}\right)^2 + \left(\frac{1.99 \cdot 58}{34.4^2 + 58^2}\right)^2} = 6.36 \text{ A},$$

$$J = \frac{I_1}{q_{Cu}} = \frac{6.36 \text{ A}}{1.5 \text{ mm}^2} = 4.24 \frac{\text{A}}{\text{mm}^2}, P_{Cu,1} = I_1^2 \cdot R_1 = 6.36^2 \cdot 5.23 = 211.5 \text{ W},$$

$$P_{\text{Netz}} = P_{Cu,1} + P_H + P_m = 211.5 + 4.33^2 \cdot 46 + 2.95^2 \cdot 34.4 = 1373 \text{ W}, \frac{P_{Cu,1}}{P_{\text{Netz}}} = \frac{211.5}{1373} \hat{=} 15.4\%.$$

**Aufgabe V5:** Elektrisches Netz in einer Fabrik

In einer Fabrik werden an das Drehstromnetz 3 x 400 V (verkettet), 50 Hz, mit herausgeführtem Sternpunkt N (Klemmen L<sub>1</sub>, L<sub>2</sub>, L<sub>3</sub>, N) folgende Verbraucher angeschlossen:

a) Ein Drehstrom-Asynchronmotor mit der elektrischen Nennspannung U<sub>N</sub> = 400 V, Y, und mechanischen Nennleistung P<sub>N</sub> = 7.5 kW, dem Wirkungsgrad η<sub>N</sub> = 0.8 und einem induktiven Blindleistungsbedarf gemäß cosφ<sub>N</sub> = 0.85;

b) Je Strang (Phase) 30 Glühlampen elektrisch parallel mit einer Wirkleistungsaufnahme P<sub>L</sub> = 60 W bei U<sub>N,ph</sub> = 230V;

c) ein symmetrischer kapazitiver Verbraucher mit der Nennspannung U<sub>N</sub> = 400 V, Y, P<sub>el,N</sub> = 4 kW, cosφ<sub>c,N</sub> = -0.95.

1) Wie groß sind die Wirk-, Blind- und Scheinleistungsaufnahme P, Q, S aus dem Drehstromnetz sowie der resultierende Leistungsfaktor cosφ<sub>res</sub>?

2) Wie groß sind die Effektivwerte der Netzstrangströme I<sub>a</sub>, I<sub>b</sub>, I<sub>c</sub> von a), b), c) je Strang und der gesamte Netzstrangstrom I am Einspeisepunkt? Ist der Strom I je Strang die Summe aus I<sub>a</sub>, I<sub>b</sub>, I<sub>c</sub>? Begründung!

3) Berechnen Sie die erforderlichen Kapazitätswerte C einer Wechselstromkondensatoranordnung in Dreieckschaltung für U<sub>N</sub> = 400 V, Δ, damit die gesamte Blindleistung Null ist: Q = 0! Wie groß sind P und S? Um wie viel hat sich der Wert I in % verändert?

**Aufgabe V5 (Lösung):** Elektrisches Netz in einer Fabrik

1)

$$a) P_{el,a} = P_N \cdot \frac{1}{\eta_N} = \frac{7500}{0.8} = 9375 \text{ W},$$

$$\left. \begin{aligned} S \cdot \cos \varphi &= P \\ S \cdot \sin \varphi &= Q \end{aligned} \right\} \rightarrow Q = \tan \varphi \cdot P,$$

$$Q_a = P_{el,a} \cdot \tan \varphi_N = P_{el,a} \cdot \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi_N}}{\cos \varphi_N} = 9375 \cdot \frac{\sqrt{1 - 0.85^2}}{0.85} = 5810 \text{ VAr},$$

$$S_a = P_{el,a} / \cos \varphi_N = \frac{9375}{0.85} = 11029 \text{ VA},$$

b)  $P_{el,b} = P_L \cdot 3 \cdot 30 = 3 \cdot 30 \cdot 60 = 5400 \text{ W}$ ,  $Q_b = 0$ ,  $S_b = P_{el,b} = 5400 \text{ VA}$ .

c)  $P_{el,c} = P_{el,N} = 4000 \text{ W}$ ,

$$Q_{el,c} = P_{el,c} \cdot \tan \varphi_{c,N} = P_{el,c} \cdot \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi_{c,N}}}{\cos \varphi_{c,N}} = 4000 \cdot \frac{\sqrt{1 - (-0.95)^2}}{-0.95} = -1315 \text{ VAr},$$

$$S_c = \frac{P_{el,c}}{|\cos \varphi_{c,N}|} = \frac{4000}{|-0.95|} = 4210 \text{ VA},$$

$$P = P_{el,a} + P_{el,b} + P_{el,c} = 9375 + 5400 + 4000 = 18775 \text{ W},$$

$$Q = Q_a + Q_b + Q_c = 5810 + 0 - 1315 = 4495 \text{ VAr} > 0: \text{ induktive Blindleistung!}$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{18775^2 + 4495^2} = 19306 \text{ VA},$$

$$\cos \varphi_{ges} = P / S = 18775 / 19306 = 0.9725.$$

2)

$$S_a = \sqrt{3} \cdot U_N \cdot I_a \rightarrow I_a = \frac{11029}{\sqrt{3} \cdot 400} = 15.92 \text{ A}, I_b = \frac{S_b}{\sqrt{3} \cdot U_{N,ph}} = \frac{P_{el,b}}{3 \cdot U_{N,ph}} = \frac{5400}{3 \cdot 230} = 7.83 \text{ A},$$

$$I_c = \frac{S_c}{\sqrt{3} \cdot U_N} = \frac{4210}{\sqrt{3} \cdot 400} = 6.08 \text{ A}, I = \frac{S}{\sqrt{3} \cdot U_N} = \frac{19306}{3 \cdot 400} = 27.87 \text{ A},$$

$$I < I_a + I_b + I_c, \text{ denn } 27.87 \text{ A} < 15.92 + 7.83 + 6.08 = 29.83 \text{ A}.$$

Die Ströme  $I_a$ ,  $I_b$ ,  $I_c$  haben wegen  $\cos \varphi_a = 0.85$ ,  $\cos \varphi_b = 1$ ,  $\cos \varphi_c = -0.95$  unterschiedliche Phasenlagen zur Strangspannung  $U_{N,ph}$ , sodass deren Zeigersumme als Betrag  $|I_a + I_b + I_c| = I$  kleiner als deren algebraische Summe  $I_a + I_b + I_c$  ist.

3)

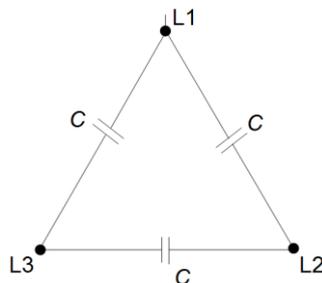


Bild V5.1: Ersatzschaltbild der Kondensatoranordnung

$$|U_{L1-L2}| = |U_{L2-L3}| = |U_{L3-L1}| = 400 \text{ V} = U_N, Q_C < 0 \text{ kapazitive Blindleistung!}$$

$$\cos \varphi_{ges} = 1: Q_C = -Q = -4495 \text{ VAr}, |Q_C| = 3 \cdot U_C \cdot I_C = 3 \cdot \frac{U_C \cdot U_C}{X_C} = 3 \cdot \frac{U_N^2}{\frac{1}{\omega \cdot C}} = 3 \cdot \omega \cdot C \cdot U_N^2,$$

$$C = \frac{|Q_C|}{3 \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot U_N^2} = \frac{4495}{3 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 400^2} = 29.8 \mu\text{F}.$$

**Aufgabe V6:** Industriebetrieb

In einem Industriebetrieb soll eine Klimakammer mit einer elektrischen Heizung ( $P_N = 45 \text{ kW}$ ) aus dem Industrienetz ( $3 \times 690 \text{ V}$ ,  $50 \text{ Hz}$ ) als einphasige Last über eine  $l = 1.5 \text{ km}$  lange Kupfer-Doppelleitung ( $\kappa_{\text{Cu}}(60 \text{ }^\circ\text{C}) = 49 \text{ MS/m}$ ) mit dem Leitungsquerschnitt  $q_{\text{Cu}} = 16 \text{ mm}^2$  versorgt werden. Diese Leitung wird näherungsweise rein *ohm*'sch betrachtet!

- 1) Wie groß ist die erforderliche Spannung  $U$  am Beginn der Leitung?
- 2) Bleibt die elektrische Stromdichte  $J$  unter dem zulässigen Wert  $6 \text{ A/mm}^2$ ?
- 3) Wie groß muss das Übertragungsverhältnis  $\ddot{u}$  eines (ideal angenommenen) Einphasen-Transformators sein, damit die Eingangsspannung  $U$  dem Nennwert  $U_N$  nicht überschreitet? Wie groß sind nun Stromdichte  $J$  und die Leistung  $P$  in der Klimakammer? Wie groß ist der Netzstrom  $I_{\text{Netz}}$ ?

**Aufgabe V6 (Lösung):** Industriebetrieb

1)

$$R_1 = \frac{1}{\kappa_{\text{Cu}}} \cdot \frac{2 \cdot l}{q_{\text{Cu}}} = \frac{1}{49 \cdot 10^6} \cdot \frac{2 \cdot 1500}{16 \cdot 10^{-6}} = 3.83 \Omega, \quad P_N = U_N \cdot I_N \rightarrow I_N = \frac{P_N}{U_N} = \frac{45000}{690} = 65.2 \text{ A},$$

$$U = U_N + I_N \cdot R_1 = 690 + 65.2 \cdot 3.83 = 939.8 \text{ V}.$$

2)

$$J = \frac{I_N}{q_{\text{Cu}}} = \frac{65.2 \text{ A}}{16 \text{ mm}^2} = 4.075 \text{ A/mm}^2 < 6 \text{ A/mm}^2.$$

3)

$$\ddot{u} = ? \quad U_1 = 960 \text{ V}, \quad U_2 = 939.8 \text{ V}, \quad \ddot{u} = \frac{U_1}{U_2} = \frac{690 \text{ V}}{939.8 \text{ V}} = \frac{N_1}{N_2} = 0.734, \quad \text{z. B.: } N_1 \approx 73, N_2 = 100.$$

$$P \text{ und } J \text{ bleiben unverändert: } \frac{I_1}{I_2} = \frac{I_{\text{Netz}}}{I_N} = \frac{1}{\ddot{u}}, \quad I_{\text{Netz}} = \frac{I_N}{\ddot{u}} = \frac{65.2 \text{ A}}{0.734} = 88.8 \text{ A}.$$

**Aufgabe V7:** Freileitungsschaden

Ein Leiterseil (Radius  $R = 10 \text{ mm}$ ) einer  $110 \text{ kV}$ -Hochspannungsfreileitung für  $f = 50 \text{ Hz}$  ist im Sturm gerissen und ein Seilende berührt den Boden, ohne dass der Leitungsschutzschalter die Spannung abgeschaltet hat.

- 1) Geben Sie die näherungsweise halbkugel-symmetrisch sich ausbildende el. Potentialverteilung  $\varphi(r)$  um den Berührungspunkt im Erdreich an! Das Erdreich hat sehr weit weg vom Berührungspunkt ( $r \rightarrow \infty$ ) das Potential Null.
- 2) In welchem Abstand  $r^*$  vom Berührungspunkt ist die effektive Schrittspannung  $U_S$  (Schrittweite  $\Delta_s = 80 \text{ cm}$ ) kleiner als  $60 \text{ V}$ ?
- 3) Wenn das abgerissene Freileitungsseil mit einer Länge  $l = 100 \text{ m}$  am Boden aufliegt, so ist entlang  $l$  das zylindersymmetrische E-Feld des geladenen Linienleiters wirksam. Geben Sie die el. Potentialverteilung  $\varphi(r)$  im Erdreich an! Nehmen Sie dazu an, dass die Zylindersymmetrie wegen der begrenzten Leitungslänge  $l$  nur bis zu einer seitlichen Distanz  $r = l$  vom Seil gültig ist und dass dort  $\varphi(r = l) = 0$  ist.

4) In welchem Abstand  $r^*$  seitlich vom liegenden Seil ist die zu 2) analog zu bestimmende Schrittspannung  $U_S \leq 60 \text{ V}$  ? Ist dieser Abstand größer oder kleiner als bei 2)? Begründung!

**Aufgabe V7 (Lösung) : Freileitungsschaden**

1)

Ansatz gemäß Kapitel „V5 Personenschutz und Netzformen“

$$\varphi(r) = \varphi(R) \cdot R / r, \quad \varphi(r \rightarrow \infty) = \varphi(R) \cdot R / \infty \rightarrow 0, \quad R = 1 \text{ cm}: \varphi(R) = \hat{U} \cdot \cos(2\pi \cdot f \cdot t),$$

$$\hat{U} = \hat{U}_{ph} = \sqrt{2} \cdot U_N / \sqrt{3} = \sqrt{2} \cdot 110 \cdot 10^3 / \sqrt{3} = 89.8 \text{ kV}, \quad \varphi_{eff}(R) = \hat{U} / \sqrt{2} = 63.5 \text{ kV}.$$

2)

$$U_S(r^*) = \varphi_{eff}(r^*) - \varphi_{eff}(r^* + \Delta_S) = \varphi_{eff}(R) \cdot R \cdot \left[ \frac{1}{r^*} - \frac{1}{r^* + \Delta_S} \right] \leq U_{S,zul} = 60 \text{ V}.$$

Abkürzung:  $a = \frac{U_{S,zul}}{\varphi_{eff}(R) \cdot R} = \frac{60}{63.5 \cdot 10^3 \cdot 10^{-2}} = 0.0945 / \text{m},$

$$\frac{1}{r^*} - \frac{1}{r^* + \Delta_S} = \frac{U_{S,zul}}{\varphi_{eff}(R) \cdot R} = a = \frac{\Delta_S}{r^* \cdot (r^* + \Delta_S)} \Rightarrow r^{*2} + r^* \cdot \Delta_S - \frac{\Delta_S}{a} = 0,$$

$$r_{1,2}^* = -\frac{\Delta_S}{2} \pm \sqrt{\frac{\Delta_S^2}{4} + \frac{\Delta_S}{a}} \Rightarrow r_2^* < 0 : \text{Unphysikalische Lösung.}$$

Es verbleibt:  $r_1^* = -\frac{\Delta_S}{2} + \sqrt{\frac{\Delta_S^2}{4} + \frac{\Delta_S}{a}} = -\frac{0.8}{2} + \sqrt{\frac{0.8^2}{4} + \frac{0.8}{0.0945}} = 2.54 \text{ m}.$

Kontrolle:

$$\varphi_{eff}(R) = 63.5 \text{ kV}, \quad \varphi_{eff}(r_1^*) = 63.5 \text{ kV} \cdot 10^{-2} / 2.54 = 250.3 \text{ V},$$

$$\varphi_{eff}(r_1^* + \Delta_S) = 63.5 \text{ kV} \cdot 10^{-2} / (2.54 + 0.8) = 190.1 \text{ V} \Rightarrow U_S = 250.3 - 190.1 = 60.18 \text{ V}$$

3)

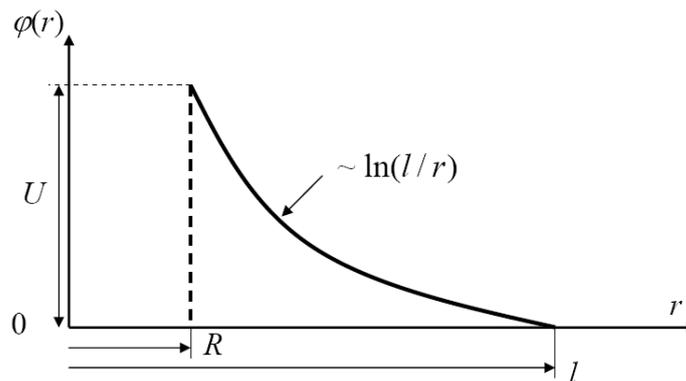


Bild V7.1: Logarithmischer Potentialverlauf (E-Feld zylindersymmetrisch)

$$D = \varepsilon \cdot E \Rightarrow \oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q = D_r \cdot l \cdot 2\pi \cdot r \Rightarrow E_r = \frac{D_r}{\varepsilon} = \frac{Q}{\varepsilon \cdot l \cdot 2\pi \cdot r}, \quad \vec{E} = E_r \cdot \vec{e}_r \quad |\vec{e}_r| = 1,$$

$$\vec{E} = E_r \cdot \vec{e}_r = -\text{grad}\varphi = -\frac{\partial\varphi(r)}{\partial r} \cdot \vec{e}_r \Rightarrow \varphi(r) = -\int E_r \cdot dr = -\frac{Q}{\varepsilon \cdot l \cdot 2\pi} \cdot \ln r + K,$$

$$\varphi(r=l) = 0 = -\frac{Q}{\varepsilon \cdot l \cdot 2\pi} \cdot \ln l + K \Rightarrow K = \frac{Q}{\varepsilon \cdot l \cdot 2\pi} \cdot \ln l.$$

$$\text{Lösung: } \varphi(r) = \frac{Q}{\varepsilon \cdot l \cdot 2\pi} \cdot (\ln l - \ln r) = \frac{Q}{\varepsilon \cdot l \cdot 2\pi} \cdot \ln(l/r) \quad R \leq r \leq l .$$

$$U = \varphi(R) - \varphi(l) = \varphi(R) - 0 = \varphi(R) = \frac{Q}{\varepsilon \cdot l \cdot 2\pi} \cdot \ln(l/R) ,$$

$$\varphi(r) = U \cdot \frac{\ln(l/r)}{\ln(l/R)} \quad R \leq r \leq l \quad (\text{Bild V7.1}).$$

4)

$$U_S(r^*) = \varphi_{\text{eff}}(r^*) - \varphi_{\text{eff}}(r^* + \Delta_S) = \frac{U_{ph}}{\ln(l/R)} \cdot [\ln(l/r^*) - \ln(l/(r^* + \Delta_S))] = \frac{U_{ph}}{\ln(l/R)} \cdot \ln\left(\frac{r^* + \Delta_S}{r^*}\right) ,$$

$$\frac{U_S(r^*)}{U_{ph}} \cdot \ln(l/R) = \ln\left(\frac{r^* + \Delta_S}{r^*}\right) \Rightarrow e^{(\ln(l/R)) \cdot U_S / U_{ph}} = \frac{r^* + \Delta_S}{r^*} = 1 + \frac{\Delta_S}{r^*} ,$$

$$\frac{\Delta_S}{r^*} = e^{(\ln(l/R)) \cdot U_S / U_{ph}} - 1 = \left(e^{\ln(l/R)}\right)^{U_S / U_{ph}} - 1 = \left(\frac{l}{R}\right)^{U_S / U_{ph}} - 1 ,$$

$$U_S / U_{ph} = 60 / 63500 = 9.45 \cdot 10^{-4} , \quad r^* = \frac{\Delta_S}{\left(\frac{l}{R}\right)^{U_S / U_{ph}} - 1} = \frac{0.8}{\left(\frac{100}{0.01}\right)^{9.45 \cdot 10^{-4}} - 1} = 91.5 \text{ m} .$$

Kontrolle:

$$\varphi_{\text{eff}}(r^* = 91.5 \text{ m}) = 612.4 \text{ V} , \quad \varphi_{\text{eff}}(r^* + \Delta_S = 92.3 \text{ m}) = 552.4 \Rightarrow U_S = 612.4 - 552.4 = 60 \text{ V} .$$

Der „sichere“ Abstand zum spannungsführenden Seil ist mit 91.5 m deutlich größer als bei 2) mit 2.54 m, da das el. Potential nur mit  $-\ln(r)$  abnimmt und nicht mit  $1/r$ . Bei liegenden Seilen muss gegenüber 2) ein  $91.5/2.54 = 36$ -facher Sicherheitsabstand eingehalten werden.

### Aufgabe V8: Freileitung

Eine Stadt mit  $z = 100\,000$  Einwohnern hat einen typischen el. Leistungsbedarf 1 kW/Einwohner, wenn der industrielle Strombedarf eingerechnet wird. Diese Stadt soll durch zwei parallele, jeweils  $l = 100$  km lange 110 kV-Drehstrom-Freileitungen ( $f = 50$  Hz) elektrisch von einem Großkraftwerk versorgt werden. Berücksichtigen Sie einen überwiegend induktiven Blindleistungsbedarf  $\cos\varphi_N = 0.8$ !

1) Wie hoch ist der Nennstrom  $I_N$  (Effektivwert) je Freileitungssystem? Wie groß ist der Aluminium-Leiterquerschnitt  $A$  bei einer Nennstromdichte  $J_N = 1 \text{ A/mm}^2$ ? Der Stromtraganteil des Stahlseilkerns wird vernachlässigt.

2) Berechnen Sie für  $I_N$  die gesamten Übertragungsverluste  $P_d$  im MW und in % des Leistungsbedarf der Stadt bei einer Leitertemperatur  $50^\circ\text{C}$ , wenn der Wirkungsgrad der beiden Umspanntransformatoren stadt- und kraftwerksseitig  $\eta_{Tr} = 0.97$  beträgt ( $\kappa_{\text{Alu}, 50^\circ\text{C}} = 30.5 \text{ MS/m}$ )! Die Spannungsfälle auf der Leitung und in den beiden Transformatoren werden durch Spannungsanhebung am Kraftwerksgenerator kompensiert, so dass Nennstrom fließt und im Umspannwerk der Stadt sekundär am Transformator Nennspannung auftritt.

3) Wie groß ist die maximale  $E$ -Feldstärke an der Leiteroberfläche (glatter Zylinderleiter angenommen), wenn der Leitermittenabstand  $\Delta = 4.5$  m näherungsweise zwischen den drei Phasenleitern R, S, T gleich groß ist? Ist dieser Wert kleiner als der zulässige Wert  $25 \text{ kV/cm}$ ?

4) Bestimmen Sie die Betriebskapazität  $C_B$  der beiden Freileitungssysteme und den kapazitiven Ladestrom der leerlaufenden Leitungen je Phase  $I_C$  in A und % von  $I_N$ ! Vernachlässigen Sie für  $I_C$  die Längsinduktivität und Verluste der Leitungen.

**Aufgabe V8 (Lösung):** Freileitung

1)

$$P_{\text{Stadt}} = z \cdot 1 \text{ kW} = 10^5 \cdot 10^3 = 10^8 \text{ W}, \text{ je Leitung: } P_N = P_{\text{Stadt}} / 2 = 5 \cdot 10^7 \text{ W},$$

$$S_N = P_N / \cos \varphi_N = 5 \cdot 10^7 / 0.8 = 62.5 \text{ MVA},$$

$$I_N = S_N / (\sqrt{3} \cdot U_N) = 62.5 \cdot 10^6 / (\sqrt{3} \cdot 110 \cdot 10^3) = 328 \text{ A}, A = I_N / J_N = 328 / 1 = 328 \text{ mm}^2.$$

2)

$$\text{Leitung: Index L: } R_{L,50^\circ\text{C}} = \frac{l}{\kappa_{\text{Alu},50^\circ\text{C}} \cdot A} = \frac{100 \cdot 10^3}{30.5 \cdot 10^6 \cdot 328 \cdot 10^{-6}} = 10 \Omega,$$

Wirkleistung auf beiden Leitungen mit stadtseitigem Transformator:

$$P_L = P_{\text{Stadt}} / \eta_{\text{Tr}} = 2 \cdot P_N / \eta_{\text{Tr}} = 2.06 \cdot P_N, P_{\text{Alu}} = 2 \cdot 3 \cdot R_L \cdot I_N^2 = 2 \cdot 3 \cdot 10 \cdot 328^2 = 6.455 \text{ MW}.$$

Zusätzlich mit kraftwerkseitigem Transformator: Kraftwerksleistung:

$$P_{\text{KW}} = (P_L + P_{\text{Alu}}) / \eta_{\text{Tr}} = (2.06 \cdot 5 \cdot 10^7 + 6.455 \cdot 10^6) / 0.97 = 112.8 \text{ MW},$$

$$P_d = P_{\text{KW}} - P_{\text{Stadt}} = 112.8 \cdot 10^6 - 100 \cdot 10^8 = 12.8 \text{ MW}, P_d / P_{\text{Stadt}} = 12.8 / 100 = 12.8 \%.$$

3)

Ansatz gemäß Kapitel „V5“:

$$A = d^2 \cdot \pi / 4 \rightarrow d = 2R = \sqrt{4 \cdot A / \pi} = \sqrt{4 \cdot 328 / \pi} = 20.4 \text{ mm}, R = 10.2 \text{ mm},$$

Isoliermedium Luft:  $\epsilon_r = 1$ ,

$$\hat{E}_{\text{max}} = \frac{\sqrt{2} \cdot U_{\text{ph}}}{R \cdot \ln(\Delta / R)} = \frac{\sqrt{2} \cdot 110 \cdot 10^3 / \sqrt{3}}{10.2 \cdot 10^{-3} \cdot \ln(4.5 \cdot 10^3 / 10.2)} = 1446003 \text{ V/m} = 14.46 \text{ kV/cm} < 25 \text{ kV/cm}.$$

4)

Ansatz gemäß Kapitel „V5“:

$$C_B = \frac{2\pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot l}{\ln(\Delta / R)} = \frac{2\pi \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 1 \cdot 10^5}{\ln(4.5 \cdot 10^3 / 10.2)} = 0.91 \mu\text{F},$$

$$I_C = \frac{U_{\text{ph}}}{X_C} = 2\pi \cdot f \cdot C_B \cdot U_N / \sqrt{3} = 2\pi \cdot 50 \cdot 0.91 \cdot 10^{-6} \cdot 110 \cdot 10^3 / \sqrt{3} = 18.2 \text{ A},$$

$$\frac{I_C}{I_N} = \frac{18.2}{328} = 0.055 = 5.5\%.$$

**Aufgabe V9:** Wasserkraftwerk und Freileitung

In einem Stausee beträgt die Stauhöhe des gestauten Wasser  $h = 200 \text{ m}$  über dem Unterwasserspiegel nach dem Turbinenauslauf. Pro Sekunde fließen  $\dot{V} = 5 \text{ m}^3/\text{s}$  durch die Wasserturbinen ( $\gamma_{\text{H}_2\text{O}} = 1 \text{ kg/l}$ ).

1) Berechnen Sie die erzeugte elektrische Leistung  $P_{\text{el}}$  bei einem Turbinenwirkungsgrad  $\eta_T = 0.9$ , einem resultierenden Generator- und Transformator-Wirkungsgrad  $\eta_{\text{el}} = 0.95$ , einem hydraulischen Wirkungsgrad (durch Wasserreibung in den Rohrleitungen)  $\eta_R = 0.95$  und 3 % von  $P_{\text{el}}$  als Kraftwerks-Eigenbedarf!

2) Die elektrische Leistung  $P_{\text{el}}$  wird über eine Distanz  $l = 100 \text{ km}$  mit einer Stahl-Aluminium-Drehstrom-Freileitung  $3 \times 110 \text{ kV}$ ,  $50 \text{ Hz}$ , übertragen. Wie groß sind die Stromwärmeverluste  $P_d$  in % von  $P_{\text{el}}$  bei einer Stromdichte  $J = 0.2 \text{ A/mm}^2$  im Aluminium ( $\kappa_{\text{Al}} = 34 \text{ MS/m}$ )? Der Stahldrahtquerschnitt ist näherungsweise stromfrei. Auf Grund des Blindleistungsbedarfs der

Verbraucher ist der  $\cos \varphi = 0.75$  (induktiv)! Um wie viel Grad eilt der Strom  $I_{ph}$  in Phase U der Phasenspannung  $U_U$  und der verketteten Spannung  $U_{UV}$  vor oder nach?

3) Bestimmen Sie mit dem Phasenleiter-Abstand  $\Delta = 4.1$  m den Induktivitäts-, Kapazitäts- und Widerstandsbelag  $L_B/l$ ,  $C_B/l$ ,  $R_B/l$  je km Leitungslänge! Vernachlässigen Sie für den Leiterradius  $R$  den Stahldrahtanteil! Wie groß sind der Wellenwiderstand  $Z_0$  ( $R_B$  vernachlässigt) und die natürliche Leistung  $P_{Nat}$ ? Wird die Leitung unter- oder oberhalb ihrer natürlichen Leistung betrieben?

4) Wie groß ist die Spannung  $U(l)$  je Phase am Ende der Leitung bei offenem Leitungsende, wenn am Eingang verkettet  $U_N = 110$  kV eingespeist werden? Bestimmen Sie  $U(l)/U(0)$  mit  $U(0) = (110/\sqrt{3})$  kV

a) mit dem T-Ersatzschaltbild der Leitung mit  $L_B$ ,  $C_B$  und symmetrisch aufgeteiltem  $R_B$  und

b) mit den Leitungsgleichungen für  $R_B = 0$ !

Wie groß ist der Fehler von Ergebnis b) gegenüber a)?

**Aufgabe V9 (Lösung):** Wasserkraftwerk und Freileitung

1)

$$W_p = m \cdot g \cdot h, P = W_p / t = \dot{m} \cdot g \cdot h = \gamma_{H_2O} \cdot \dot{V} \cdot g \cdot h = 1000 \cdot 5 \cdot 9.81 \cdot 200 = 9810\,000 \text{ W},$$

$$P_{el} = P \cdot \eta_T \cdot \eta_R \cdot \eta_{el} - 0.03 \cdot P_{el} \Rightarrow P_{el} = \frac{P \cdot \eta_T \cdot \eta_R \cdot \eta_{el}}{1 + 0.03} = \frac{9.81 \cdot 10^6 \cdot 0.9 \cdot 0.95 \cdot 0.95}{1.03} = 7.736 \text{ MW}.$$

2)

$$S = P_{el} / \cos \varphi = 7.736 / 0.75 = 10.31 \text{ MVA} = \sqrt{3} \cdot U_N \cdot I_{ph},$$

$$I_{ph} = S / (\sqrt{3} \cdot U_N) = 10.31 \cdot 10^6 / (\sqrt{3} \cdot 110 \cdot 10^3) = 54.11 \text{ A},$$

$$\text{Leiterquerschnitt (Aluminium): } A = I_{ph} / J = 54.11 / 0.2 = 270.55 \text{ mm}^2,$$

$$\text{Leiterwiderstand/Phase: } R_B = l / (\kappa_{Al} \cdot A) = 100 \cdot 10^3 / (34 \cdot 10^6 \cdot 270.55 \cdot 10^{-6}) = 10.87 \, \Omega,$$

$$P_d = 3 \cdot R_B \cdot I_{ph}^2 = 3 \cdot 10.87 \cdot 54.11^2 = 95\,479 \text{ W} \Rightarrow P_d / P_{el} = 95479 / 7736100 = 1.23 \%$$

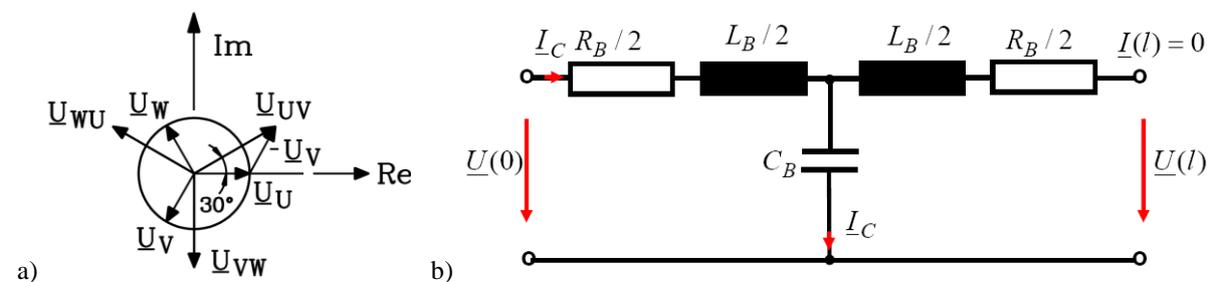
$$\text{Kontrollrechnung: } P_d / V_{Al} = J^2 / \kappa_{Al} = (0.2 \cdot 10^6)^2 / (34 \cdot 10^6) = 1176.5 \text{ W/m}^3,$$

$$V_{Al} = 3 \cdot A \cdot l = 3 \cdot 270.85 \cdot 10^{-6} \cdot 100 \cdot 10^3 = 81.17 \text{ m}^3,$$

$$P_d = V_{Al} \cdot (P_d / V_{Al}) = 81.17 \cdot 1176.5 = 95\,497 \text{ W/m}^3$$

Der Phasenstrom  $I_{ph,U}$  im Leiter U eilt der Phasenspannung  $U_U$  um den Winkel

$$\varphi = \arccos(\cos \varphi) = 41.4^\circ \text{ nach.}$$



**Bild V9.1:** a) Symmetrische Drehspannungs-Phasenspannungen und verkettete Spannungen, b) T-Ersatzschaltbild der Leitung mit symmetrische aufgeteiltem Phasenwiderstand  $R_B$

Mit  $\underline{U}_{UV} = \underline{U}_U - \underline{U}_V$  folgt gemäß Bild V9.1 a), dass  $\underline{U}_{UV}$  der Spannung  $\underline{U}_U$  um  $30^\circ$  voreilt. Daher eilt der Phasenstrom  $\underline{I}_{ph,U}$  im Leiter U der verketteten Spannung  $\underline{U}_{UV}$  um den Winkel  $30^\circ + 41.4^\circ = 71.4^\circ$  nach.

3)

$R_B / l = 10.87 / 100 \approx 0.011 \Omega / \text{km}$ ,  $R = \sqrt{A / \pi} = \sqrt{270.55 / \pi} = 9.3 \text{ mm}$ . Mit den Formeln aus Kap. V folgt:

$$L_B / l = L'_B \cong \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{\Delta}{R}\right) = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{4.1}{9.3 \cdot 10^{-3}}\right) = 1.22 \cdot 10^{-6} \text{ H/m} = 1.22 \text{ mH/km},$$

$$C_B / l = C'_B \cong \frac{2\pi \cdot \epsilon_0}{\ln\left(\frac{\Delta}{R}\right)} = \frac{2\pi \cdot 8.854 \cdot 10^{-12}}{\ln\left(\frac{4.1}{9.3 \cdot 10^{-3}}\right)} = 9.14 \cdot 10^{-12} \text{ F/m} = 9.14 \text{ nF/km},$$

$$R_B = 0: Z_0 = \sqrt{\frac{L'_B}{C'_B}} = \sqrt{\frac{1.22 \cdot 10^{-3}}{9.14 \cdot 10^{-9}}} = 365.3 \Omega,$$

$P_{\text{Nat}} = 3 \cdot \frac{U_{N,ph}^2}{Z_0} = \frac{U_N^2}{Z_0} = \frac{(110 \cdot 10^3)^2}{365.3} = 33.12 \text{ MW} > P_{el} = 7.74 \text{ MW}$ . Die Leitung wird unterhalb ihrer natürlichen Leistung betrieben (niedrige Stromdichte  $0.2 \text{ A/mm}^2 = \text{Schwachlastbetrieb}$ )!

4a)

$$\underline{Z}_L = \frac{R_B}{2} + j \cdot \frac{2\pi f \cdot L_B}{2} = \frac{10.87}{2} + j \cdot \frac{2\pi \cdot 50 \cdot 1.22 \cdot 10^{-3} \cdot 10^2}{2} = (5.43 + j \cdot 19.16) \Omega,$$

$$\underline{X}_C = \frac{1}{j \cdot 2\pi f \cdot C_B} = \frac{1}{j \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot 9.14 \cdot 10^{-9} \cdot 10^2} = -j \cdot 3482.6 \Omega, \quad \frac{\underline{U}(l)}{\underline{U}(0)} = \frac{\underline{X}_C}{\underline{Z}_L + \underline{X}_C},$$

$$\left| \frac{\underline{U}(l)}{\underline{U}(0)} \right| = \left| \frac{\underline{X}_C}{\underline{Z}_L + \underline{X}_C} \right| = \frac{X_C}{|\underline{Z}_L + \underline{X}_C|} = \frac{3482.6}{\sqrt{5.43^2 + (19.16 - 3482.6)^2}} = 1.005531.$$

4b)

$$\text{Verlustlose Leitung: } c = \frac{1}{\sqrt{L'_B \cdot C'_B}} = \frac{1}{\sqrt{1.22 \cdot 10^{-6} \cdot 9.14 \cdot 10^{-12}}} = 2.995 \cdot 10^8 \text{ m/s},$$

$$\beta = 2\pi \cdot f / c = 2\pi \cdot 50 / (2.995 \cdot 10^8) = 104.9 \cdot 10^{-8} / \text{m}, \quad \beta \cdot l = 104.9 \cdot 10^{-8} \cdot 10^5 = 104.9 \cdot 10^{-3},$$

$$R_B = 0: \frac{\underline{U}(l)}{\underline{U}(0)} = \frac{1}{\cos(\beta \cdot l)} = \frac{1}{\cos(104.9 \cdot 10^{-3})} = 1.005528.$$

**Ferranti-Effekt:** 0.55 % Spannungserhöhung am offenen Ende der Leitung!

$$\frac{\underline{U}(l)_b}{\underline{U}(l)_a} = \frac{1.005528}{1.005531} = 0.9945 \approx 1 \Rightarrow F = 1 - 0.9945 = 5.5 \cdot 10^{-3}.$$

Der Fehler  $F$  durch die Vernachlässigung von  $R_B$  ist von der Größenordnung  $10^{-3}$  und damit vernachlässigbar klein!

### **Aufgabe V10:** Planung einer Freileitung

Der elektrische Leistungsbedarf  $S$  im besiedelten ländlichen Großraum wird mit der für Mitteleuropa typischen Annahme von  $P' = 1 \text{ kW el. Leistungsbedarf je Einwohner}$  und einer Bevölkerungsdichte  $B' = 100 \text{ Personen/km}^2$  abgeschätzt.

- 1) Berechnen Sie den elektrischen Leistungsbedarf  $S$  für ein Gebiet mit der Fläche  $l^2 = 100 \times 100 \text{ km}^2$ ! Wie groß ist die flächenbezogene Leistungsdichte  $S/A$ ?
- 2) Eine Drehstrom-Freileitung soll das o.g. Gebiet mit der Leistung  $S$  versorgen. Die Stromwärmeverluste  $P_d$  entlang der Freileitung sollen nur  $\alpha = 3\%$  von  $S$  betragen. Entwickeln Sie eine Formel für den Leitungsquerschnitt  $A$  in Abhängigkeit der Leitungslänge  $l$ , des spezifischen el. Widerstands  $\rho$  des Leitermaterials, der Leistung  $S$  und der Phasenspannung  $U_{ph}$ !
- 3) Bestimmen Sie das erforderliche Leitervolumen  $V = 3 \cdot A \cdot l$  für den Leistungsbedarf  $S = C \cdot l^2$  gemäß 2) in Abhängigkeit von  $l, S, \rho, \alpha$  und  $U_{ph}$ !
- 4) Die Kosten für die Errichtung der Freileitung umfassen die Kosten für das Leitermaterial  $K_L = k \cdot V$  (mit  $k = 500000 \text{ Euro/m}^3$ ) und die Kosten  $K_I$  für die Isolatoren und die Masten. Deren Größe und damit Kosten steigen mit der Leitungslänge  $l$  und dem Spannungsniveau gemäß  $K_I = B \cdot l \cdot U_{ph}$  (mit  $B = 0.01 \text{ Euro}/(\text{m} \cdot \text{V})$ ). Ermitteln Sie die wirtschaftlichste Spannungshöhe  $U_{ph,opt}$  für minimale Kosten  $K = K_L + K_I \rightarrow \min$ . zunächst allgemein als Formel und dann für die o.g. Daten ( $l = 100 \text{ km}, \rho_{Al} = 2.94 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ )!
- 5) Wie groß sind die Errichtungskosten für  $U_N = \sqrt{3} \cdot U_{ph} = 380 \text{ kV}$ ?
- 6) Können Sie mit 4) die Regel bestätigen, dass mit wachsender Leitungslänge  $l$  die kostenoptimale Betriebsspannung  $U_{ph}$  linear zunimmt:  $U_{ph,opt} \sim l$ ?

**Aufgabe V10 (Lösung):** Planung einer Freileitung

1)

$$C = S/l^2 = P \cdot B' = 1 \cdot 100 = 100 \text{ kW/km}^2 = 0.1 \text{ W/m}^2,$$

$$S = C \cdot l^2 = 0.1 \cdot 10^4 \cdot 10^6 = 10^9 \text{ W} = 1 \text{ GW}.$$

2)

$$P_d = 3 \cdot R_B \cdot I_{ph}^2 \Rightarrow \frac{P_d}{S} = \alpha = \frac{3 \cdot R_B \cdot I_{ph}^2}{3 \cdot U_{ph} \cdot I_{ph}} = \frac{R_B \cdot I_{ph}}{U_{ph}} \Rightarrow R_B = \frac{\alpha \cdot U_{ph}}{I_{ph}} = \frac{\alpha \cdot U_{ph}}{S/(3U_{ph})} = \frac{3\alpha \cdot U_{ph}^2}{S},$$

$$R_B = l \cdot \rho / A \Rightarrow A = \frac{\rho \cdot l}{R_B} = \frac{\rho \cdot l \cdot S}{3\alpha \cdot U_{ph}^2}.$$

3)

$$V = 3 \cdot A \cdot l = \frac{\rho \cdot l^2 \cdot S}{\alpha \cdot U_{ph}^2} = \frac{\rho \cdot l^4 \cdot C}{\alpha \cdot U_{ph}^2}.$$

4)

$$K = K_L + K_I = k \cdot \frac{\rho \cdot l^4 \cdot C}{\alpha \cdot U_{ph}^2} + B \cdot l \cdot U_{ph} \rightarrow \min \Rightarrow \frac{dK}{dU_{ph}} = 0 = -2k \cdot \frac{\rho \cdot l^4 \cdot C}{\alpha \cdot U_{ph}^3} + B \cdot l,$$

$$U_{ph,opt} = \sqrt[3]{2k \cdot \frac{\rho \cdot l^3 \cdot C}{\alpha \cdot B}} = l \cdot \sqrt[3]{2k \cdot \frac{\rho \cdot C}{\alpha \cdot B}} = 100 \cdot 10^3 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot 5 \cdot 10^5 \cdot \frac{2.94 \cdot 10^{-8} \cdot 0.1}{0.03 \cdot 0.01}} = 214 \text{ kV}.$$

5)

$$U_N = 380 \text{ kV} \Rightarrow U_{ph,opt} = 380 \text{ 000} / \sqrt{3} = 219 \text{ 393 V},$$

$$K_L = k \cdot \frac{\rho \cdot l^4 \cdot C}{\alpha \cdot U_{ph}^2} = 5 \cdot 10^5 \cdot \frac{2.94 \cdot 10^{-8} \cdot (10^5)^4 \cdot 0.1}{0.03 \cdot 219393^2} = 1.018 \cdot 10^8 = 101.8 \text{ Mio.Euro},$$

$$K_I = B \cdot l \cdot U_{ph} = 0.01 \cdot 10^5 \cdot 219393 = 219.39 \text{ Mio.Euro},$$

$$K = K_L + K_I = 101.8 + 219.39 = 321.19 \text{ Mio.Euro für } S = 1 \text{ GW bei } U_N = 380 \text{ kV.}$$

6)

$$U_{\text{ph,opt}} = l \cdot \sqrt[3]{2k \cdot \frac{\rho \cdot C}{\alpha \cdot B}} \Rightarrow U_{\text{ph,opt}} \sim l \text{ ist gemäß 4) bestätigt!}$$

**Aufgabe V11:** Magnetfeld einer Freileitung

Eine 20 kV-Drehstrom-Freileitung mit der Leiteranordnung gemäß Bild V11.1 überträgt bei 50 Hz die Scheinleistung  $S_N = 10 \text{ MVA}$ .

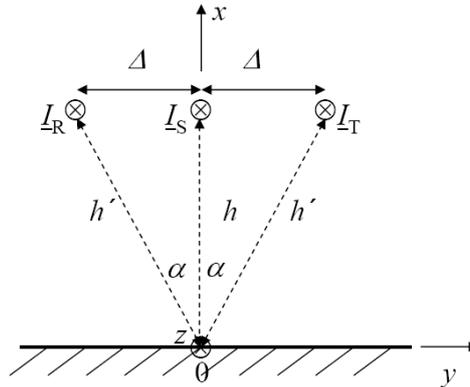


Bild V11.1: Leiteranordnung einer 20 kV-Drehstrom-Freileitung

1) Berechnen Sie

a) den Leiterstrom  $I$  je Phase und

b) am Erdboden direkt unter dem Leiter S im Punkt 0 für Leiterstrom  $I_S$  den vom Leiterstrom erregten  $\vec{H}_0(t) = (H_x(t), H_y(t), H_z(t))$ . Die Leiterachse verläuft parallel zur Bodenoberfläche in  $z$ -Richtung in einer Höhe  $h = 5 \text{ m}$  unter dem Leiter (Bild V11.1). Hat das Feld einen zeitlich konstanten Anteil? Mit welcher Frequenz pulsiert das Feld?

c) Wie groß ist die zur Feldamplitude  $\hat{H}$  zugehörige magnetische Flussdichteamplitude  $\hat{B}$  im Vergleich zum Erdmagnetfeld  $B_E \approx 50 \mu\text{T}$ ?

2) Die drei Phasenleiter sind nebeneinander im Abstand  $\Delta = 2 \text{ m}$  (= Abstand zwischen den Leiterachsen) am Mast angeordnet (Bild V11.1).

a) Berechnen Sie für das Drehstromsystem

$$\underline{I}_R = I, \underline{I}_S = I \cdot e^{-j \cdot 2\pi/3}, \underline{I}_T = I \cdot e^{-j \cdot 4\pi/3}$$

den resultierenden Feldstärke-Vektor  $\vec{H} = (\underline{H}_x, \underline{H}_y, \underline{H}_z)$ , erregt von allen drei Phasenleiterströmen, an der Erdbodenoberfläche unter dem mittleren Phasenleiter als allgemeine Formel!

b) Geben Sie diese Formel als  $\vec{H}(t) = (H_x(t), H_y(t), H_z(t))$  im Zeitbereich an!

c) Bestimmen Sie den Maximalwert  $\hat{H}_{\text{max}}$  des (zeitabhängigen) Betrags  $|\vec{H}(t)|$ ! Geben Sie das Verhältnis  $\hat{H}_{\text{max}} / \hat{H}$  bezüglich des Ergebnisses von 1) und das Verhältnis  $\hat{B}_{\text{max}} / B_E$  an! Wirkt sich das Drehstromsystem gegenüber dem Einzelleiter felderhöhend aus?

3) Verwenden Sie die Formel für  $\hat{H}_{\text{max}}$  von 2) für eine 380 kV-Drehstrom-Freileitung mit  $S_N = 1700 \text{ MVA}$ ,  $h = 9 \text{ m}$ ,  $\Delta = 9 \text{ m}$ , um  $\hat{B}_{\text{max}} / B_E$  zu bestimmen! Stimmt es, dass trotz dieser

hohen Leistung das maximale Magnetfeld auf der Erdoberfläche kleiner als das Erdmagnetfeld ist?

**Aufgabe V11 (Lösung):** Magnetfeld einer Freileitung

1)

a)  $S = \sqrt{3} \cdot U_N \cdot I \Rightarrow I = S / (\sqrt{3} \cdot U_N) = 10 \cdot 10^6 / (\sqrt{3} \cdot 20 \cdot 10^3) = 288.7 \text{ A}.$

b) Die Verschiebungsstromdichte kann wegen der niedrigen Frequenz 50 Hz vernachlässigt werden. Daher gilt der Ampere'sche Durchflutungssatz:  $\oint_C \vec{H}(t) \cdot d\vec{s} = i(t).$  Da die Leiterachse

in z-Richtung orientiert ist, tritt keine  $H_z$ -Komponenten auf:  $\vec{H}(t) = (H_x(t), H_y(t), 0).$  Im Abstand  $r$  um den Leiter ist aus Symmetriegründen  $\vec{H}(t) = H_r(t) \cdot \vec{e}_r$  konstant:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = \underline{H}_r(r) \cdot 2\pi \cdot r = \underline{I}_S \Rightarrow \underline{H}_r(r = h) = \frac{\underline{I}_S}{2\pi \cdot h},$$

Im Punkt 0 ist  $\vec{H}(t)$  in y-Richtung orientiert:  $\vec{H}_0(t) = (0, H_y(t), 0).$

$$i_S(t) = \text{Re} \left\{ \sqrt{2} \cdot \underline{I} \cdot e^{-j \cdot 2\pi/3} \cdot e^{-j \cdot \omega t} \right\} = \sqrt{2} \cdot I \cdot \cos(\omega t - 2\pi/3),$$

$$H_y(t) = \frac{\sqrt{2} \cdot I \cdot \cos(\omega t - 2\pi/3)}{2\pi \cdot h}.$$

Das Feld hat keinen zeitlich konstanten Anteil und pulsiert mit Netzfrequenz.

c) Feldamplitude:  $\hat{H}_y(r = h) = \hat{H} = \frac{\hat{I}}{2\pi \cdot h} = \frac{288.7 \cdot \sqrt{2}}{2\pi \cdot 5} = 13 \frac{\text{A}}{\text{m}},$

$$\hat{B} = \mu_0 \cdot \hat{H} = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 13 = 16.3 \mu\text{T}, \quad \hat{B} / B_E = 16.3 / 50 = 0.33.$$

2)

a) Komplexe Radialfeldstärke im Punkt 0:  $\underline{H}_{Rr} = \frac{\underline{I}_R}{2\pi \cdot h'}, \quad \underline{H}_{Sr} = \frac{\underline{I}_S}{2\pi \cdot h}, \quad \underline{H}_{Tr} = \frac{\underline{I}_T}{2\pi \cdot h'}.$

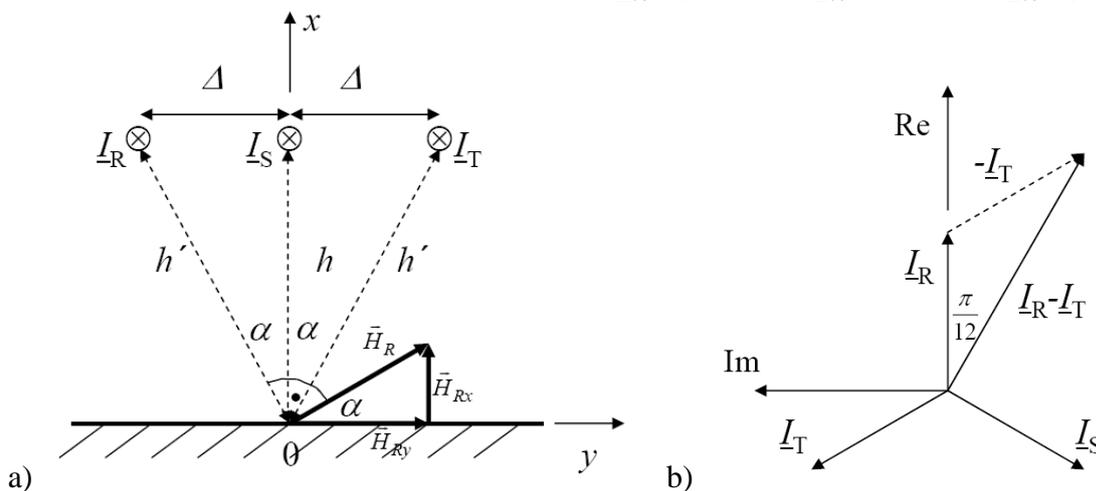


Bild V11.2: a) Magnetische Feldstärke des Leiterstroms R im Punkt 0, b) Stromzeigerdiagramm

Gemäß Bild V11.2 a) ist der komplexe Feldstärkevektor im Punkt 0:

$$\vec{H}_R = (H_{Rx}, H_{Ry}, 0) = (H_{Rr} \cdot \sin \alpha, H_{Rr} \cdot \cos \alpha, 0),$$

$$\underline{H}_S = (0, \underline{H}_{Sr}, 0), \quad \underline{H}_T = (-\underline{H}_{Tr} \cdot \sin \alpha, \underline{H}_{Tr} \cdot \cos \alpha, 0),$$

$$\sin \alpha = \Delta / h', \quad \cos \alpha = h / h', \quad h' = \sqrt{h^2 + \Delta^2}.$$

Resultierender komplexer Vektor:

$$\underline{\vec{H}} = \underline{\vec{H}}_R + \underline{\vec{H}}_S + \underline{\vec{H}}_T = ((\underline{H}_{Rr} - \underline{H}_{Tr}) \cdot \sin \alpha, (\underline{H}_{Rr} + \underline{H}_{Tr}) \cdot \cos \alpha + \underline{H}_{Sr}, 0).$$

Mit Bild V11.2 b) folgt:

$$\underline{\vec{H}} = \left( \frac{\underline{I}_R - \underline{I}_T}{2\pi \cdot h'^2} \cdot \Delta, \frac{\underline{I}_R + \underline{I}_T}{2\pi \cdot h'^2} \cdot h + \frac{\underline{I}_S}{2\pi \cdot h}, 0 \right), \underline{I}_R + \underline{I}_T = -\underline{I}_S, \underline{I}_R - \underline{I}_T = \sqrt{3} \cdot I \cdot e^{-j \cdot \pi/12},$$

$$\underline{\vec{H}} = \frac{1}{2\pi \cdot h'^2} \cdot \left( \sqrt{3} \cdot I \cdot e^{-j \cdot \pi/12} \cdot \Delta, \underline{I}_S \cdot (-h + h/h'^2), 0 \right), \underline{I}_S = I \cdot e^{-j \cdot 2\pi/3}, -h + h/h'^2 = \Delta^2/h,$$

$$\underline{\vec{H}} = \frac{I \cdot \Delta}{2\pi \cdot h'^2} \cdot \left( \sqrt{3} \cdot e^{-j \cdot \pi/12}, (\Delta/h) \cdot e^{-j \cdot 2\pi/3}, 0 \right).$$

b) Resultierender Vektor im Zeitbereich:

$$\vec{H}(t) = \frac{\sqrt{2} \cdot I \cdot \Delta}{2\pi \cdot h'^2} \cdot \left( \sqrt{3} \cdot \cos(\omega t - \pi/12), (\Delta/h) \cdot \cos(\omega t - 2\pi/3), 0 \right).$$

c) Quadrat des Betrags des Vektors:

$$|\vec{H}(t)|^2 = \left( \frac{\sqrt{2} \cdot I \cdot \Delta}{2\pi \cdot h'^2} \right)^2 \cdot \left[ 3 \cdot \cos^2(\omega t - \pi/12) + (\Delta/h)^2 \cdot \cos^2(\omega t - 2\pi/3) \right].$$

Mit  $\cos^2(\varepsilon) = \frac{1 + \cos(2\varepsilon)}{2}$  folgt:

$$|\vec{H}(t)|^2 = \left( \frac{\sqrt{2} \cdot I \cdot \Delta}{2\pi \cdot h'^2} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[ 3 + \cos(2\omega t - \pi/6) + (\Delta/h)^2 + (\Delta/h)^2 \cdot \cos(2\omega t - 4\pi/3) \right].$$

Mit  $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$  folgt:

$$|\vec{H}(t)|^2 = \left( \frac{\sqrt{2} \cdot I \cdot \Delta}{2\pi \cdot h'^2} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot$$

$$\cdot \left[ 3 + \frac{\Delta^2}{h^2} + 3 \cdot \left( \cos 2\omega t \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin 2\omega t \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right) + \frac{\Delta^2}{h^2} \cdot \left( \cos 2\omega t \cdot \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \sin 2\omega t \cdot \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \right) \right]$$

$$|\vec{H}(t)|^2 = \left( \frac{I \cdot \Delta}{2\pi \cdot h'^2} \right)^2 \cdot \left[ 3 + \frac{\Delta^2}{h^2} + 3 \cdot \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos 2\omega t + \frac{1}{2} \cdot \sin 2\omega t \right) + \frac{\Delta^2}{h^2} \cdot \left( -\frac{1}{2} \cdot \cos 2\omega t - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin 2\omega t \right) \right],$$

$$|\vec{H}(t)|^2 = \left( \frac{I \cdot \Delta}{2\pi \cdot h'^2} \right)^2 \cdot \left[ 3 + \frac{\Delta^2}{h^2} + \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{\Delta^2}{2h^2} \right) \cdot \cos 2\omega t + \left( \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}\Delta^2}{2h^2} \right) \cdot \sin 2\omega t \right].$$

Maximalwert des Feldstärkebetrags zum Zeitpunkt  $t^*$  während der Periode  $T = 1/f$ , wobei statt

$d|\vec{H}(t)|/dt = 0$  einfacher mit  $d|\vec{H}(t)|^2/dt = 0$  gerechnet wird:

$$-\left( \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{\Delta^2}{2h^2} \right) \cdot \sin 2\omega t + \left( \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}\Delta^2}{2h^2} \right) \cdot \cos 2\omega t = 0 \Rightarrow \tan 2\omega t^* = \frac{3 - \frac{\sqrt{3} \cdot \Delta^2}{h^2}}{3 \cdot \sqrt{3} - \frac{\Delta^2}{h^2}},$$

$$\tan 2\omega t^* = \frac{3 - \frac{\sqrt{3} \cdot 2^2}{5^2}}{3 \cdot \sqrt{3} - \frac{2^2}{5^2}} = \frac{2.72}{5.036} = 0.5407 \Rightarrow 2\omega t^* = 0.4956, \sin 2\omega t^* = 0.4756, \cos 2\omega t^* = 0.8797,$$

$$\hat{H}_{\max} = |\vec{H}(t^*)| = \frac{I \cdot \Delta}{2\pi \cdot h^2} \cdot \sqrt{3 + \frac{\Delta^2}{h^2} + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{\Delta^2}{2h^2}\right) \cdot \cos 2\omega t^* + \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}\Delta^2}{2h^2}\right) \cdot \sin 2\omega t^*},$$

$$\hat{H}_{\max} = |\vec{H}(t^*)| = \frac{288.7 \cdot 2}{2\pi \cdot (5^2 + 2^2)} \cdot \sqrt{3 + \frac{2^2}{5^2} + \frac{5.036}{2} \cdot 0.8797 + \frac{2.72}{2} \cdot 0.4756} = 7.78 \text{ A/m},$$

$$\hat{H}_{\max} / \hat{H} = 7.78 / 13 = 0.6, \quad \hat{B} = \mu_0 \cdot \hat{H}_{\max} = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 7.78 = 9.8 \mu\text{T}, \quad \hat{B} / B_E = 9.8 / 50 = 0.2.$$

Gegenüber dem Feld eines Leiterstroms SINKT die resultierende Feldamplitude beim Zusammenwirken der Felder aller drei Leiterströme auf Grund deren Phasenverschiebungen zueinander.

3)

$$I = S / (\sqrt{3} \cdot U_N) = 1700 \cdot 10^6 / (\sqrt{3} \cdot 380 \cdot 10^3) = 2582.9 \text{ A},$$

$$\tan 2\omega t^* = \frac{3 - \frac{\sqrt{3} \cdot \Delta^2}{h^2}}{3 \cdot \sqrt{3} - \frac{\Delta^2}{h^2}} = \frac{3 - \frac{\sqrt{3} \cdot 9^2}{9^2}}{3 \cdot \sqrt{3} - \frac{9^2}{9^2}} = \frac{1.268}{4.196} = 0.302,$$

$$2\omega t^* = 0.293, \quad \sin 2\omega t^* = 0.289, \quad \cos 2\omega t^* = 0.957,$$

$$\hat{H}_{\max} = \frac{2582.9 \cdot 2}{2\pi \cdot (9^2 + 9^2)} \cdot \sqrt{3 + \frac{9^2}{9^2} + \frac{4.166}{2} \cdot 0.957 + \frac{1.268}{2} \cdot 0.289} = 12.6 \text{ A/m},$$

$$\hat{B} = \mu_0 \cdot \hat{H}_{\max} = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 12.6 = 15.8 \mu\text{T}, \quad \hat{B} / B_E = 15.8 / 50 = 0.32.$$

Ja, das maximale Magnetfeld auf der Erdoberfläche ist kleiner, nämlich nur ein Drittel des Erdmagnetfelds.

### Aufgabe V12: Freileitung

Eine Drehstrom-Freileitung der Länge  $l = 100 \text{ km}$  für  $f_N = 50 \text{ Hz}$  hat die elektrischen Daten: Nennspannung  $U_N = 380 \text{ kV}$ , Reaktanzbelag  $X'_B = 0.25 \Omega/\text{km}$ , Kapazitätsbelag  $C'_B = 14 \text{ nF/km}$ . Sie wird näherungsweise als verlustfrei angesehen.

1) Berechnen Sie den Induktivitätsbelag  $L'_B$  je Strang in  $\text{mH/km}$ ! Was ist bei gleicher Nennspannungsebene  $U_N$  der wesentliche Unterschied zwischen den elektrischen Daten  $L'_B$ ,  $C'_B$  von Freileitung und Kabel? Welche physikalischen Gründe hat dieser Unterschied?

2) Berechnen Sie den Wellenwiderstand  $Z_0$ , den Phasenkoeffizienten  $\beta$  (in  $^\circ/\text{km}$ ) und die natürliche Leistung  $P_{\text{Nat}}$ !

3) Am Ende der Freileitung wird nun ausschließlich eine Wirkleistung von  $P = 1200 \text{ MW}$  bei Nennspannung  $U_{\text{verk}}(l) = U_N$  abgenommen. Welchen Wert weist der Spannungsbetrag am Anfang der Leitung  $U_{\text{verk}}(0)$  in diesem Fall auf?

4) Welches Verhältnis weisen die Spannungen am Leitungsanfang und -ende  $U_{\text{verk}}(0)/U_{\text{verk}}(l)$  zueinander auf? Erklären Sie das Verhältnis! Welche Rolle spielt die natürliche Leistung in diesem Zusammenhang?

5) Bestimmen Sie den Effektivwert des Betriebsstroms  $I(l)$  je Strang zu 3)!

### Aufgabe V12 (Lösung): Freileitung

1)

$$L'_B = X'_B / (2\pi \cdot f_N) = 0.25 / (2\pi \cdot 50) = 0.796 \text{ mH/km}.$$

Bei gleichem  $U_N$  hat das Kabel einen geringeren Induktivitäts- und einen höheren Kapazitätsbelag als die Freileitung:  $L'_{B,Kabel} \approx L'_{B,Leitung} / 5$ ,  $C'_{B,Kabel} \approx C'_{B,Leitung} \cdot 10$ .

Begründung:

Die Distanz  $\Delta$  zwischen den Phasenleitern ist beim Kabel viel kleiner als bei den luftisolierten Freileitungen, da die Kabel-Isolierstoffe eine deutlich höhere Durchschlagsfeldstärke  $E_D$  als Luft aufweisen. Weiter ist die relative Permittivität dieser Isolierstoffe i. A. größer ( $\epsilon_r > 1$ ) als jene von Luft ( $\epsilon_r = 1$ ). Daher ist  $C'_{B,Kabel} \sim \epsilon_r / \Delta$  größer als  $C'_{B,Leitung}$ .

Da die Distanz  $\Delta$  zwischen den Phasenleitern beim Kabel viel kleiner als bei den luftisolierten Freileitungen ist, ist der magnetische Fluss  $\Phi \sim \Delta$  zwischen diesen Leitern geringer, so dass Selbst- und Gegeninduktivität der Leiter beim Kabel, ausgedrückt durch  $L'_{B,Kabel} \sim \Delta$ , kleiner als bei der Freileitung ist.

2)

$$Z_0 = \sqrt{L'_B / C'_B} = \sqrt{0.796 \cdot 10^{-3} / (14 \cdot 10^{-9})} = 238.4 \Omega,$$

$$c = 1 / \sqrt{L'_B \cdot C'_B} = 1 / \sqrt{0.796 \cdot 10^{-3} \cdot 14 \cdot 10^{-9}} = 2.99 \cdot 10^8 \text{ m/s} \approx c_0 \text{ Vakuumlichtgeschwindigkeit}$$

$$\beta = \omega / c = 2\pi \cdot f_N / c = 2\pi \cdot 50 / (2.99 \cdot 10^8) = 1.0487 \cdot 10^{-6} / \text{m} = 0.06^\circ / \text{km},$$

$$P_{\text{Nat}} = 3 \cdot \frac{(U_N / \sqrt{3})^2}{Z_0} = \frac{U_N^2}{Z_0} = \frac{380000^2}{238.4} = 605.7 \text{ MW}$$

3)

$$\underline{U}(z) = \underline{U}(0) \cdot \frac{\underline{Z}_A \cdot \cos[\beta \cdot (l - z)] + j \cdot Z_0 \cdot \sin[\beta \cdot (l - z)]}{\underline{Z}_A \cdot \cos(\beta \cdot l) + j \cdot Z_0 \cdot \sin(\beta \cdot l)},$$

$$\underline{U}(l) = \underline{U}(0) \cdot \frac{\underline{Z}_A \cdot \cos[\beta \cdot (l - l)] + j \cdot Z_0 \cdot \sin[\beta \cdot (l - l)]}{\underline{Z}_A \cdot \cos(\beta \cdot l) + j \cdot Z_0 \cdot \sin(\beta \cdot l)} = \underline{U}(0) \cdot \frac{\underline{Z}_A}{\underline{Z}_A \cdot \cos(\beta \cdot l) + j \cdot Z_0 \cdot \sin(\beta \cdot l)},$$

$$\text{Phasenspannung am Leitungsbeginn: } \underline{U}(0) = \underline{U}(l) \cdot \left[ \cos(\beta \cdot l) + j \cdot \frac{Z_0}{\underline{Z}_A} \cdot \sin(\beta \cdot l) \right],$$

$$l = 100 \text{ km: } \beta \cdot l = 1.0487 \cdot 10^{-6} \cdot 10^5 = 0.10487 \text{ rad.}$$

Wirkleistung am Leitungsende:  $P = 1200 \text{ MW} = 3 \cdot U^2(l) / Z_A \Rightarrow$  Abschlussimpedanz ist reell:

$$\underline{Z}_A = Z_A. \text{ Mit } U(l) = U_N / \sqrt{3} \text{ folgt } Z_A = U_N^2 / P = 380000^2 / (1200 \cdot 10^6) = 120.3 \Omega.$$

$$U(0) = |\underline{U}(0)| = |\underline{U}(l)| \cdot \left| \cos(\beta \cdot l) + j \cdot \frac{Z_0}{Z_A} \cdot \sin(\beta \cdot l) \right|,$$

$$U(0) = \frac{U_N}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\cos^2(\beta \cdot l) + \left( \frac{Z_0 \cdot P}{U_N^2} \right)^2 \cdot \sin^2(\beta \cdot l)}, \quad U_{\text{verk}}(0) = \sqrt{3} \cdot U(0)$$

$$U_{\text{verk}}(0) = U_N \cdot \sqrt{\cos^2(\beta \cdot l) + \left( \frac{Z_0 \cdot P}{U_N^2} \right)^2 \cdot \sin^2(\beta \cdot l)},$$

$$U_{\text{verk}}(0) = 380 \cdot 10^3 \cdot \sqrt{\cos^2(0.10487) + \left( \frac{238.4 \cdot 1200 \cdot 10^6}{380000^2} \right)^2 \cdot \sin^2(0.10487)} = 386042 \text{ V.}$$

4)

$$U_{\text{verk}}(0) / U_{\text{verk}}(l) = U_{\text{verk}}(0) / U_N = 386045 / 380000 = 1.0159 \cdot U_N.$$

Die Leitung wirkt überwiegend induktiv, denn die Abgabeleistung ist größer als die natürliche Leistung, sodass auf Grund dieses induktiven Längsspannungsfalls die Spannung am Leitungsende etwas kleiner als am Leitungsanfang ist.

$$P / P_{\text{Nat}} = 1200 / 605.7 = 1.98 > 1 .$$

Im Umkehrschluss bedeutet dies eine Abschlussimpedanz  $Z_A$ , deren Betrag kleiner als der Wellenwiderstand  $Z_0$  ist:  $Z_A = 120.3 \Omega < Z_0 = 238.4 \Omega$ .

5)

$$I(l) = \frac{P}{3 \cdot U(l)} = \frac{P}{\sqrt{3} \cdot U_N} = \frac{1200 \cdot 10^6}{\sqrt{3} \cdot 380 \cdot 10^3} = 1823.2 \text{ A} .$$

### Aufgabe V13: Drehstrom-Kabel

Für ein verlustfrei angenommenes Drehstrom-Kabel für  $U_N = 220 \text{ kV}$ ,  $50 \text{ Hz}$  mit  $L'_B = 0.4 \text{ mH/km}$ ,  $C'_B = 200 \text{ nF/km}$ ,  $I_N = 830 \text{ A}$  soll mit Hilfe der Leitungsgleichung die Spannungsanhebung bzw. -absenkung bei Belastung mit einer gegebenen Leistung  $P$  berechnet werden.

1) Bestimmen Sie den Wellenwiderstand  $Z_0$  und den Phasenkoeffizienten  $\beta$ !

2) Berechnen Sie die natürliche Leistung  $P_{\text{Nat}}$  des verlustlosen Kabels bei  $U_m = 245 \text{ kV}$  !

3) Ein Inselnetz soll über eine Entfernung von  $l = 30 \text{ km}$  über ein Kabel dieses Typs angeschlossen werden. Berechnen Sie  $\underline{U}(0)$  und  $\underline{I}(0)$  (effektive Phasenwerte), wenn in dem Inselnetz eine Wirkleistung von  $P = 300 \text{ MW}$  bei  $220 \text{ kV}$  Nennspannung am Kabelende entnommen werden soll! Ist die Spannung  $U(0)$  am Eingang des Kabels größer als jene am Ausgang  $U(l)$ ?

Ist dieser Betrieb dauernd unter Berücksichtigung der thermischen Belastbarkeit des Kabels möglich (Vergleiche den Betriebsstrom  $I(0)$  mit dem Kabelnennstrom!)?

### Aufgabe V13 (Lösung): Drehstrom-Kabel

1)

$$Z_0 = \sqrt{L'_B / C'_B} = \sqrt{0.4 \cdot 10^{-6} / (200 \cdot 10^{-12})} = 44.7 \Omega ,$$

$$c = 1 / \sqrt{L'_B \cdot C'_B} = 1 / \sqrt{0.4 \cdot 10^{-6} \cdot 200 \cdot 10^{-12}} = 1.118 \cdot 10^8 \text{ m/s} \approx 0.37 \cdot c_0 .$$

( $c_0$ : Vakuumlichtgeschwindigkeit)

$$\beta = \omega / c = 2\pi \cdot f_N / c = 2\pi \cdot 50 / (1.118 \cdot 10^8) = 2.81 \cdot 10^{-6} \text{ rad/m} = 0.16^\circ/\text{km} .$$

2)

$$P_{\text{Nat}} = 3 \cdot \frac{(U_m / \sqrt{3})^2}{Z_0} = \frac{U_m^2}{Z_0} = \frac{245000^2}{44.7} = 1342.84 \text{ MW} .$$

3)

$$U_N = \sqrt{3} \cdot U(l) = 220 \text{ kV} , P = 3 \cdot \underline{U}(l) \cdot \underline{I}(l) = 3 \cdot U(l) \cdot I(l) = 300 \text{ MW} = 3 \cdot U^2(l) / Z_A ,$$

$$Z_A = U_N^2 / P = 220000^2 / (300 \cdot 10^6) = 161.3 \Omega , Z_A / Z_0 = 3.61 > 1 \Rightarrow$$

$$P_{\text{Nat}}(U_N) = \frac{U_N^2}{Z_0} = \frac{220000^2}{44.7} = 1082.8 \text{ MW} > P = 300 \text{ MW} : \text{Das Kabel wird unterhalb seiner}$$

natürlichen Leistung betrieben und verhält sich daher kapazitiv, sodass der *Ferranti*-Effekt auftritt.

$$\underline{U}(z) = \underline{U}(0) \cdot \frac{\underline{Z}_A \cdot \cos[\beta \cdot (l - z)] + j \cdot Z_0 \cdot \sin[\beta \cdot (l - z)]}{\underline{Z}_A \cdot \cos(\beta \cdot l) + j \cdot Z_0 \cdot \sin(\beta \cdot l)},$$

$$\underline{I}(z) = \frac{\underline{U}(0)}{Z_0} \cdot \frac{Z_0 \cdot \cos[\beta \cdot (l - z)] + j \cdot \underline{Z}_A \cdot \sin[\beta \cdot (l - z)]}{\underline{Z}_A \cdot \cos(\beta \cdot l) + j \cdot Z_0 \cdot \sin(\beta \cdot l)}. \text{ Mit } \underline{Z}_A = Z_A \text{ folgt bei } z = l:$$

$$\underline{U}(l) = \underline{U}(0) \cdot \frac{\underline{Z}_A}{\underline{Z}_A \cdot \cos(\beta \cdot l) + j \cdot Z_0 \cdot \sin(\beta \cdot l)}, \quad \underline{U}(0) = \underline{U}(l) \cdot \left[ \cos(\beta \cdot l) + j \cdot \frac{Z_0}{Z_A} \cdot \sin(\beta \cdot l) \right],$$

$$\underline{I}(0) = \frac{\underline{U}(0)}{Z_0} \cdot \frac{Z_0 \cdot \cos(\beta \cdot l) + j \cdot Z_A \cdot \sin(\beta \cdot l)}{\underline{Z}_A \cdot \cos(\beta \cdot l) + j \cdot Z_0 \cdot \sin(\beta \cdot l)} = \frac{\underline{U}(0)}{Z_0} \cdot \frac{(Z_0 / Z_A) \cdot \cos(\beta \cdot l) + j \cdot \sin(\beta \cdot l)}{\cos(\beta \cdot l) + j \cdot (Z_0 / Z_A) \cdot \sin(\beta \cdot l)},$$

$$\underline{I}(0) = \frac{\underline{U}(l)}{Z_0} \cdot [(Z_0 / Z_A) \cdot \cos(\beta \cdot l) + j \cdot \sin(\beta \cdot l)],$$

$$l = 30 \text{ km: } \beta \cdot l = 2.81 \cdot 10^{-6} \cdot 30 \cdot 10^3 = 0.0843 \text{ rad},$$

$$U(0) = |\underline{U}(0)| = |\underline{U}(l)| \cdot \left| \cos(\beta \cdot l) + j \cdot \frac{Z_0}{Z_A} \cdot \sin(\beta \cdot l) \right|, \quad U(l) = U_N / \sqrt{3},$$

$$U(0) = \frac{U_N}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\cos^2(\beta \cdot l) + \left( \frac{Z_0}{Z_A} \right)^2 \cdot \sin^2(\beta \cdot l)},$$

$$U(0) = \frac{220 \cdot 10^3}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\cos^2(0.0843) + \left( \frac{44.7}{161.3} \right)^2 \cdot \sin^2(0.0843)} = 126.6 \text{ kV},$$

Ausgangsspannung > Eingangsspannung (*Ferranti*-Effekt):

$$U(0) = 126.6 \text{ kV} < U(l) = \frac{220}{\sqrt{3}} = 127.017 \text{ kV}.$$

$$I(0) = |\underline{I}(0)| = \frac{|\underline{U}(l)|}{Z_0} \cdot |(Z_0 / Z_A) \cdot \cos(\beta \cdot l) + j \cdot \sin(\beta \cdot l)|,$$

$$I(0) = \frac{U(l)}{Z_0} \cdot \sqrt{(Z_0 / Z_A)^2 \cdot \cos^2(\beta \cdot l) + \sin^2(\beta \cdot l)},$$

$$I(0) = \frac{220 \cdot 10^3}{\sqrt{3} \cdot 44.7} \cdot \sqrt{(44.7 / 161.3)^2 \cdot \cos^2(0.0843) + \sin^2(0.0843)} = 820.3 \text{ A},$$

$I(0) = 820.3 \text{ A} < I_N = 830 \text{ A}$ : Es ist thermischer Dauerbetrieb möglich, da der maximale Betriebsstrom (das ist der Eingangsstrom  $I(0)$ ) kleiner als der thermisch dauernd zulässige Nennstrom ist. Beachten Sie, dass der Strom am Kabelausgang

$$I(l) = P / (3 \cdot U(l)) = P / (\sqrt{3} \cdot U_N) = 300 \cdot 10^6 / (\sqrt{3} \cdot 220 \cdot 10^3) = 787.3 \text{ A}$$

kleiner als der Strom  $I(0) = 820.3 \text{ A}$  am Kabeleingang ist, sodass für die thermische Bemessung  $I(0)$  relevant ist.

**Aufgabe V14:** Fehlerstrom-Schutzschalter

Bei dem Verbraucher in Bild V14.1 kommt es zu einem Kurzschluss zwischen Leiter R und Neutralleiter N.

- 1) Wird der Fehlerstrom-Schutzschalter auslösen, also den Fehler erkennen? Begründen Sie Ihre Antwort mit einem Beispiel  $\underline{I}_S = \underline{I}_T = 0$ !
- 2) Löst der Schalter bei einem Kurzschluss zwischen R und PE aus? Begründen Sie Ihre Antwort für das Beispiel  $\underline{I}_S = \underline{I}_T = 0$ !

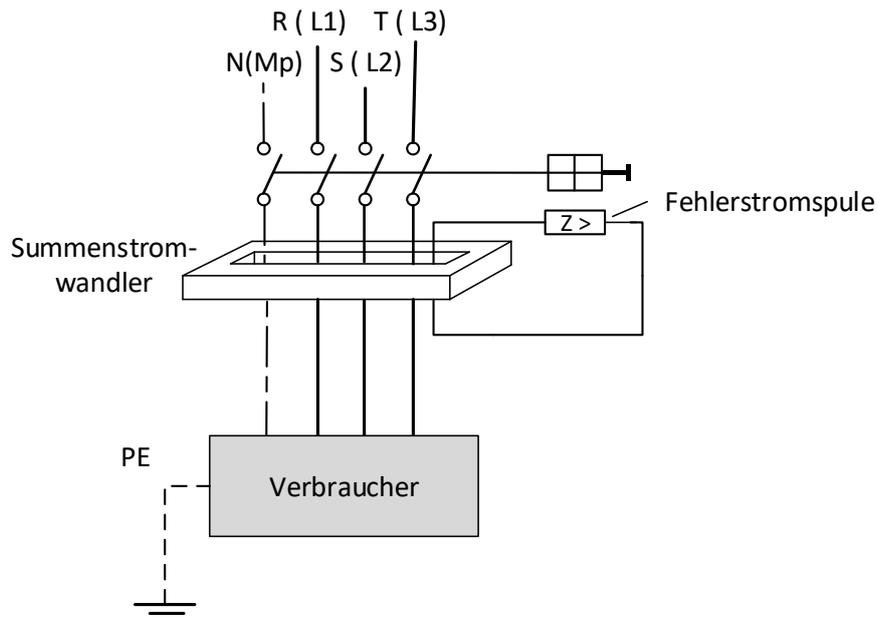


Bild V14.1: Fehlerstromschutzschalter

**Aufgabe V14 (Lösung):** Fehlerstrom-Schutzschalter

- 1)  
Nein, der Schalter löst nicht aus, da der Kurzschlussstrom  $\underline{I}_k$  von R zu N fließt, so dass die Stromsumme  $\underline{I}_R + \underline{I}_S + \underline{I}_T + \underline{I}_N = 0$  weiterhin Null bleibt.  
Beispiel: Alle Strombezugspfeile in Bild V14.1 mögen ZUM Verbraucher gerichtet sein, und es sei  $\underline{I}_S = \underline{I}_T = 0$ . Dann ist  $\underline{I}_R = \underline{I}_k$ ,  $\underline{I}_N = -\underline{I}_k \Rightarrow \underline{I}_R + \underline{I}_S + \underline{I}_T + \underline{I}_N = \underline{I}_k + 0 + 0 - \underline{I}_k = 0$ .
- 2)  
Ein Kurzschlussstrom von R zu PE würde den Schalter auslösen, da dann gilt gemäß dem Beispiel (wieder mit der Annahme  $\underline{I}_S = \underline{I}_T = 0$ ):  $\underline{I}_R = \underline{I}_k$ ,  $\underline{I}_{PE} = -\underline{I}_k$ ,  $\underline{I}_N = 0 \Rightarrow \underline{I}_R + \underline{I}_S + \underline{I}_T + \underline{I}_N = \underline{I}_k + 0 + 0 + 0 \neq 0 \Rightarrow$  der Schalter löst aus!

**Aufgabe V15:** Verbrauchernetz

Schließen Sie einen Wechsel- und einen Drehstromverbraucher an ein TN-S-Netz gemäß Bild 15.1 an! Tragen Sie dazu alle notwendigen Verbindungen in Bild V15.1 ein!

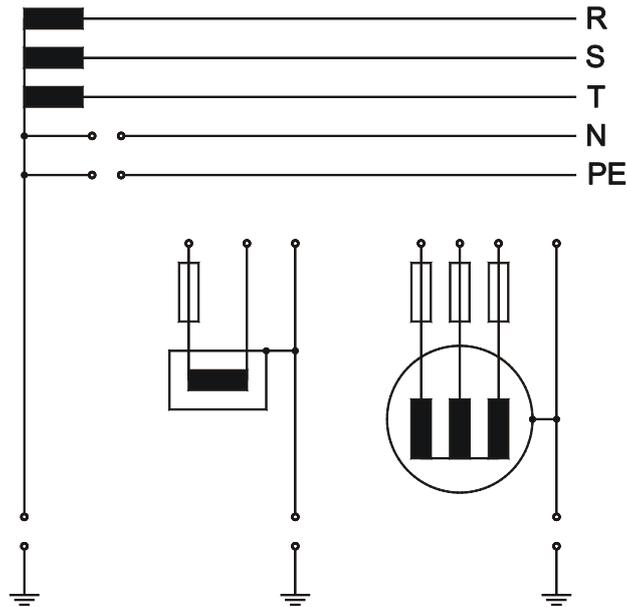


Bild V15.1: Verbrauchernetz ohne Anschlüsse

**Aufgabe V15 (Lösung): Verbrauchernetz**

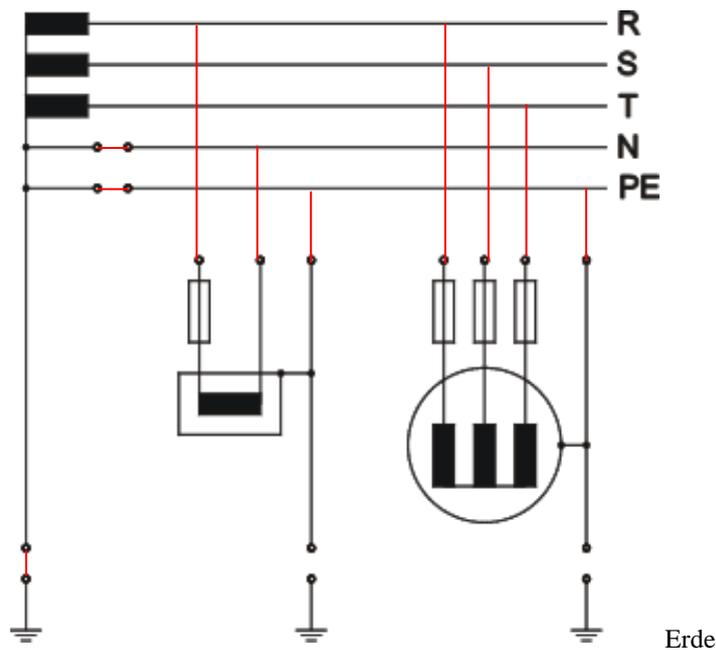


Bild V15.2: Verbrauchernetz mit Anschlüssen

TN-S-Netz:

*T*: Direkte Erdung eines Punktes (hier: Sternpunkt) des speisenden Netzes erforderlich

*N*: Die Körper müssen mit der Betriebserde PE verbunden sein

*S*: Neutral- und Schutzleiter sind getrennt (PE, N separated) und münden daher getrennt zur Erde

**Aufgabe V16:** Berührungsschutz 1

- 1) Kann ein RCD-Schutz (Fehlerstromschutzschalter „FI“) in einem IT-System eingesetzt werden? Begründen Sie Ihre Antwort!
- 2) Geben Sie den Grenzwert der Funktionskleinspannung an!
  - a) des AC-Spannungseffektivwerts (50 Hz-Wechselspannung),
  - b) des DC-Spannungswerts!
- 3) Der *ohm'sche* einphasige Verbraucher  $R_V$  ist im TN-S-System über die Überstrom-Schutzeinrichtung F1 („Sicherung“) im Phasenleiter L1 angeschlossen. Der Stromgrenzwert für die sofortige Auslösung des Überstromschutzes beträgt  $I_a = 64$  A. Der Verbraucher  $R_V$  hat auf Grund eines Isolationsfehlers einen vollständigen Körperschluss (Kontaktwiderstand  $R_k = 0$ ) zwischen Phasenleiter L1 und Gehäuse. Ein Mensch berührt das Gehäuse. Geben Sie in Bild V16.1 die fehlenden elektrischen Verbindungen an!

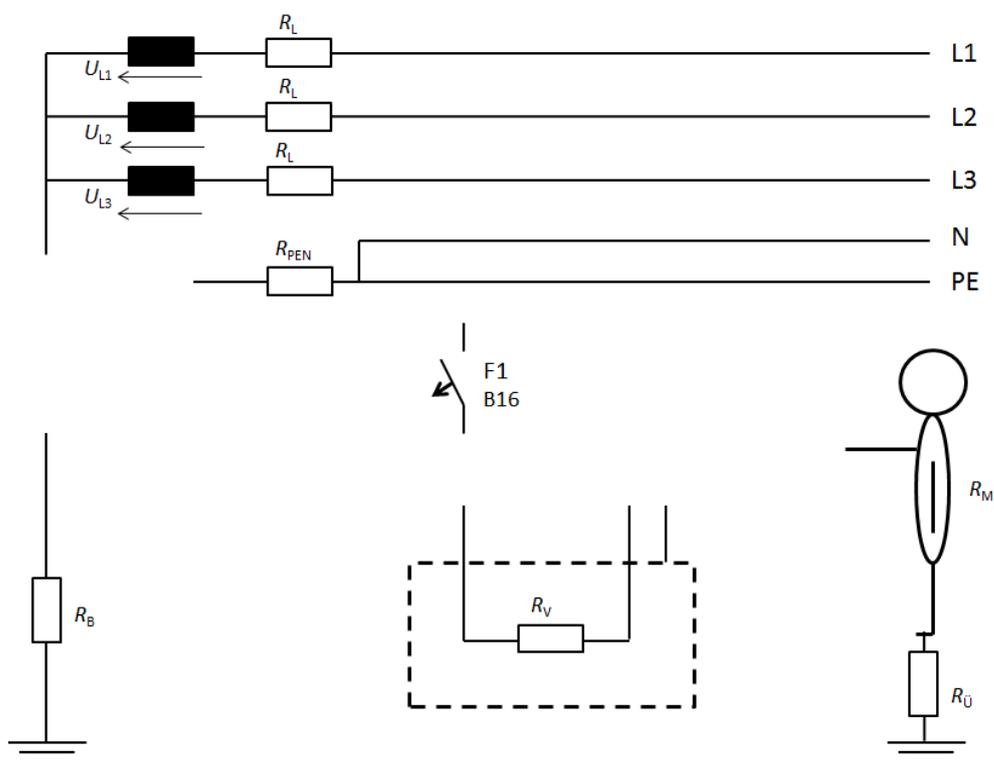


Bild V16.1: Niederspannungsnetz (unvollständig)

- 4) Zeichnen Sie das *ohm'sche* Ersatzschaltbild für den Fehlerfall aus 3). Im Niederspannungsnetz dominieren die *ohm'schen* gegenüber den induktiven Leitungslängswiderständen, so dass diese vernachlässigt werden. Welchen Wert darf  $R_{PEN}$  für die Leiterphasen-Spannungen  $U_{L1} = U_{L2} = U_{L3} = 230$  V, den Leitungswiderstand/Phase  $R_L = 1 \Omega$ , den Erdungswiderstand  $R_B = 1 \Omega$ , den Verbraucher-Widerstand  $R_V = 1.2$  k $\Omega$ , den Körperwiderstand des Menschen  $R_M = 2.4$  k $\Omega$  und für den Übergangswiderstand des Menschen (z. B. Schuhe) zur Erde  $R_{Ü} = 560 \Omega$  höchstens annehmen, damit der Überstromschutz F1 gerade noch auslöst?

**Aufgabe V16 (Lösung):** Berührungsschutz 1

- 1) Ja! Begründung: Das IT-Netz wird ungeerdet betrieben. Es ist kein Neutralleiter vorhanden, nur der Schutzleiter PE. Die Körper sind über den PE mit eigener Erdung (Erdungswiderstand

$R_B$ ) geerdet. Daher erfasst der FI-Schutzschalter nur die Stromsumme der drei Phasenströme, für die im fehlerfreien Fall gilt  $\underline{I}_{L1} + \underline{I}_{L2} + \underline{I}_{L3} = 0$ . Ein Erd-Fehlerstrom  $\underline{I}_F$  fließt über den PE ab, so dass gilt:  $\underline{I}_{L1} + \underline{I}_{L2} + \underline{I}_{L3} = \underline{I}_F \neq 0$  und der FI-Schutzschalter auslöst.

2)

AC: 50 V (effektiv), DC: 120 V

3)

TN-S-Netz:

T: Sternpunkt des Netzes über Erdungswiderstand  $R_B$  geerdet,

N: Körper (Gehäuse) direkt mit Betriebserde PE verbunden,

S: Neutral- und Schutzleiter N und PE getrennt.

Körperschluss zwischen  $R_V$  und Gehäuse: Bild V16.2.

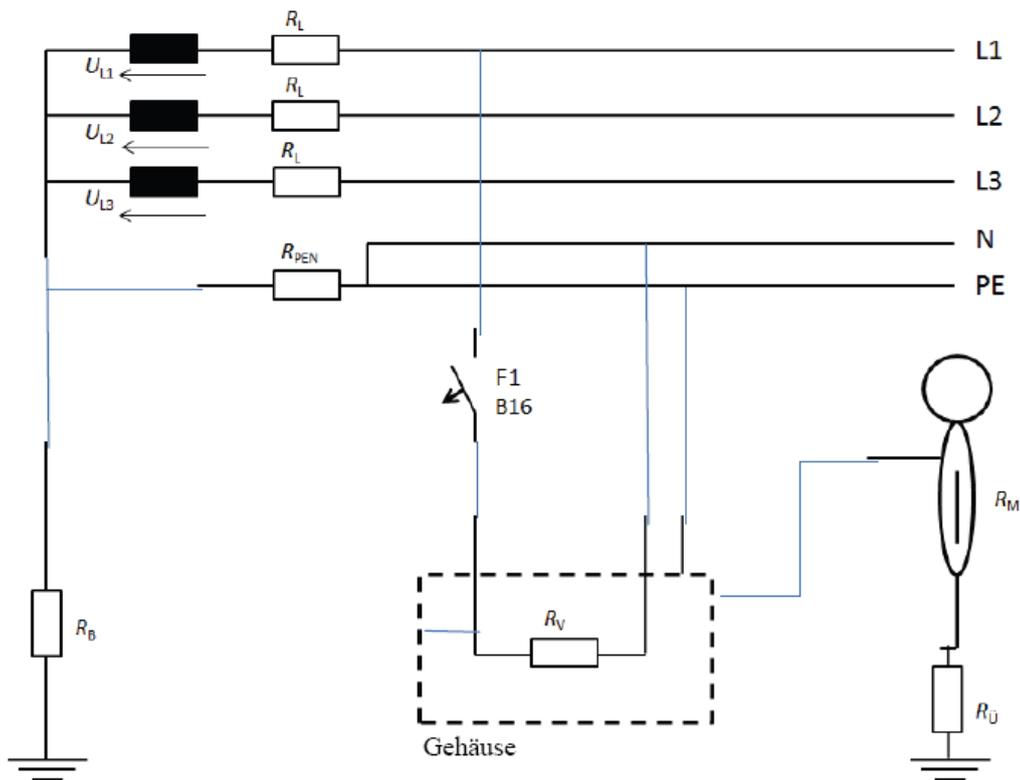


Bild V16.2: Körperschluss im TN-S-System

4)

$R_k = 0$ : Strom  $I_{L1}$  über  $R_L$  (Bild V16.3) soll Auslösestrom  $I_a$  überschreiten!

$$R_1 = R_k + R_{\ddot{U}} + R_M + R_B = 0 + 560 + 1200 + 1 = 1761 \, \Omega, \quad R_2 = \frac{R_1 \cdot R_{PEN}}{R_1 + R_{PEN}},$$

Im Verbraucher-Zählpfeil-System:

$$I_{L1} = U_{L1} / (R_L + R_2) = I_a \Rightarrow R_2 = \frac{R_1 \cdot R_{PEN}}{R_1 + R_{PEN}} = \frac{U_{L1}}{I_a} - R_L = \frac{230}{64} - 1 = 2.5938 \, \Omega,$$

$$R_1 \cdot R_{PEN} = R_2 \cdot (R_1 + R_{PEN}) \Rightarrow R_{PEN} \cdot (R_1 - R_2) = R_1 \cdot R_2,$$

$$R_{PEN} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 - R_2} = \frac{1761 \cdot 2.5938}{1761 - 2.5938} = 2.5976 \, \Omega \approx R_2$$

Der Widerstand  $R_{PEN}$  darf den Wert  $2.5976 \, \Omega$  nicht überschreiten, damit der Auslösestrom überschritten wird.

Hinweis: Der Wert  $R_V$  geht in die Rechnung nicht ein, da der Körperschluss über  $R_k = 0$  erfolgt, sodass der Widerstand  $R_V$  über  $R_k = 0$  „kurzgeschlossen“ ist.

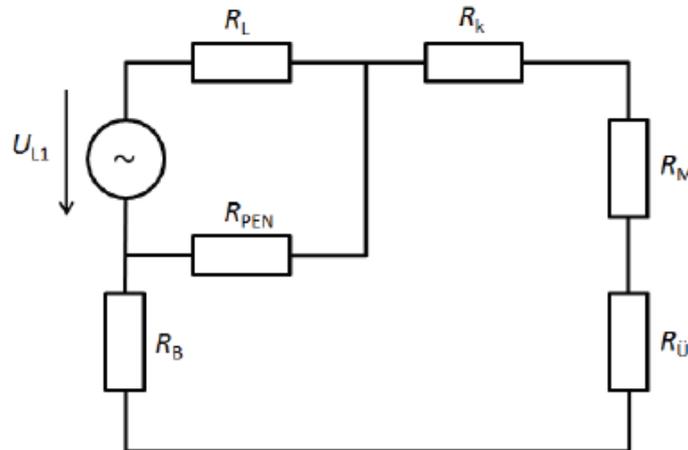


Bild V16.3: Ersatzschaltbild: Körperschluss im TN-S-System

**Aufgabe V17:** Berührungsschutz 2

- 1) Kann ein RCD-Schutz (Fehlerstromschutzschalter „FI“) in einem TN-C-System eingesetzt werden? Begründen Sie Ihre Antwort!
- 2) Geben Sie den Grenzwert
  - a) des AC-Spannungseffektivwerts (50 Hz-Wechselspannung),
  - b) des DC-Spannungswerts der Sicherheitskleinspannung an!

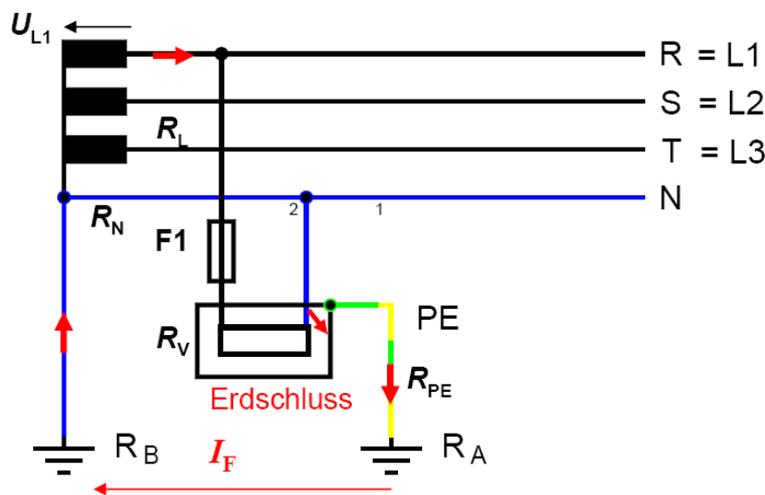


Bild V17.1: TT-System mit Körperschluss des N des Verbrauchers  $R_V$

3) Der *ohm'sche*, einphasige Verbraucher  $R_V$  ist im TT-System (Bild V17.1) über die Überstrom-Schutzeinrichtung F1 („Sicherung“) im Phasenleiter L1 angeschlossen. Der Stromgrenzwert für die „sofortige“ Auslösung des Überstromschutzes beträgt  $I_{a1} = 50$  A, für Dauerstrom beträgt er  $I_{a2} = 16$  A. Es gelten folgende Werte:  $U_{L1} = U_{L2} = U_{L3} = 230$  V, 50 Hz, Leitungswiderstände  $R_{L1} = R_{L2} = R_{L3} = R_L = 1 \Omega$ ,  $R_N = R_{PE} = 1 \Omega$ , Erdungswiderstand  $R_B = 1 \Omega$ , Verbraucher-Widerstand  $R_V = 1.2$  k $\Omega$ .  
 Im Niederspannungsnetz dominieren die *ohm'schen* gegenüber den induktiven Leitungslängswiderständen, so dass diese vernachlässigt werden. Verbraucher 1 erleidet einen

vollständigen Körperschluss (Erdschluss) zwischen Neutralleiter N und Gehäuse (= Kontaktwiderstand ist Null,  $R_k = 0$ ). Zeichnen Sie das Ersatzschaltbild für den Fehlerfall!

4) Wann tritt zu 3) in Abhängigkeit vom Erdungswiderstand des PE, genannt  $R_A$ , der größte, wann der kleinste Fehlerstrom  $I_F$  auf? Wie groß sind die beiden Werte  $I_{F,max}$ ,  $I_{F,min}$ ? Löst der Überstromschutz F1 aus?

5) Alternativ zu 3) erleidet nun der Verbraucher 1 einen vollständigen Körperschluss zwischen dem Phasenleiter L1 und Gehäuse (=Kontaktwiderstand  $R_k = 0$ ). Zeichnen Sie das Ersatzschaltbild für diesen Fehlerfall! Wann tritt in Abhängigkeit des  $R_A$  der größte, wann der kleinste Fehlerstrom  $I_F$  auf? Wie groß sind die beiden Werte  $I_{F,max}$ ,  $I_{F,min}$ ? Löst der Überstromschutz F1 „sofort“ aus? Wie groß darf  $R_A$  maximal sein, damit F1 überhaupt auslöst?

**Aufgabe V17 (Lösung):** Berührungsschutz 2

1)

Nein! Begründung: Im TN-C-Netz (früher: „klassische Nullung“) ist der Sternpunkt des Netzes direkt geerdet, die Körper sind direkt mit Betriebserde verbunden, aber Neutral- und Schutzleiter sind identisch (PEN)! Bei einem „Körperschluss“-Fehler im Gerät fließt der Fehlerstrom  $I_F$  über den PEN zur Spannungsquelle zurück. Der FI-Schutzschalter erfasst die Stromsumme der drei Phasenströme UND des PEN, sodass auch im Fehlerfall stets die Stromsumme Null ist:  $I_{L1} + I_{L2} + I_{L3} + I_{PEN} = I_{L1} + I_{L2} + I_{L3} + I_F = 0$ . Ein Erd-Fehlerstrom  $I_F$  löst daher den FI-Schutzschalter NICHT aus.

2)

AC: 25 V (effektiv), DC: 60 V.

3)

TT-(S)-Netz:

T: Sternpunkt des Netzes über Erdungswiderstand  $R_B$  geerdet,

T: Körper mit eigener Erdung (Erdungswiderstand  $R_A$ ) geerdet; daher: S: Neutral- und Schutzleiter jedenfalls getrennt: PE + N.

4)

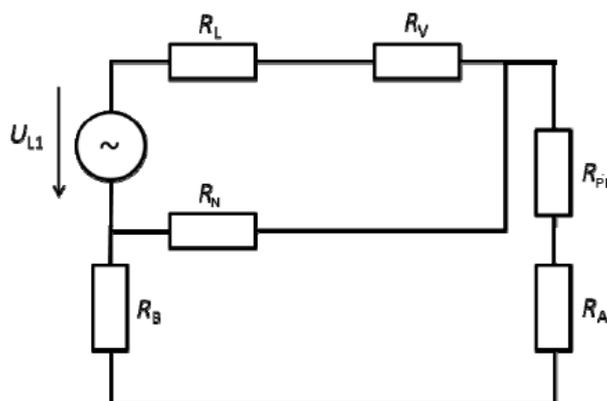


Bild V17.2: Ersatzschaltbild: Körperschluss zwischen N und PE im TT-S-System ( $R_k = 0$ )

$R_k = 0$ : Strom  $I_{L1}$  über  $R_L$  und  $R_V$  (Bild V17.2) ist der Fehlerstrom  $I_F$ !

$$R_1 = R_k + R_{PE} + R_A + R_B, \quad R_2 = \frac{R_1 \cdot R_N}{R_1 + R_N},$$

Im Verbraucher-Zählpfeilsystem gilt:  $I_{L1} = I_F = \frac{U_{L1}}{R_L + R_V + R_2} = \frac{U_{L1}}{R_L + R_V + \frac{R_1 \cdot R_N}{R_1 + R_N}}$

Zwei Grenzfälle: (i)  $R_A = 0$ , (ii)  $R_A \rightarrow \infty$ .

Fall (i):  $R_1 = R_k + R_{PE} + R_B = 0 + 1 + 1 = 2 \Omega$ ,  $R_2 = \frac{R_1 \cdot R_N}{R_1 + R_N} = \frac{2 \cdot 1}{2 + 1} = \frac{2}{3} \Omega$ ,

$$I_F = \frac{U_{L1}}{R_L + R_V + \frac{R_1 \cdot R_N}{R_1 + R_N}} = \frac{230}{1 + 1200 + \frac{2}{3}} = 0.1914 \text{ A} = I_{F,\max}$$

Fall (ii):  $R_1 \rightarrow \infty$ ,  $R_2 = \frac{R_1 \cdot R_N}{R_1 + R_N} \rightarrow R_N = 1 \Omega$ ,

$$I_F = \frac{U_{L1}}{R_L + R_V + \frac{R_1 \cdot R_N}{R_1 + R_N}} = \frac{230}{1 + 1200 + 1} = 0.1913 \text{ A} = I_{F,\min}$$

Da der große Verbraucherwiderstand  $R_V$  in Serie dominiert, ist der Einfluss des  $R_A$  unerheblich! Die Sicherung F1 löst NICHT aus!

5)

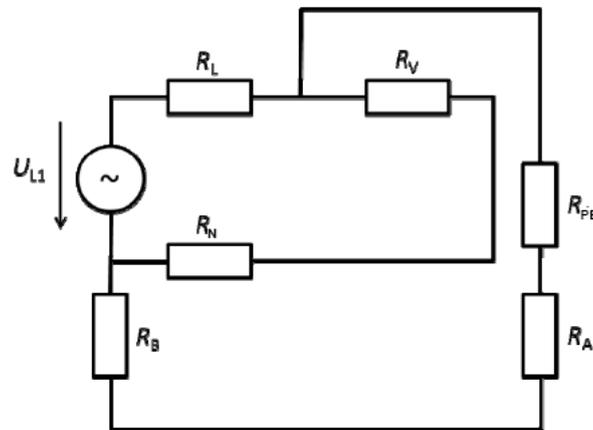


Bild V17.3: Ersatzschaltbild: Körperschluss zwischen L1 und PE im TT-S-System ( $R_k = 0$ )

$$R_k = 0: R_1 = R_k + R_{PE} + R_A + R_B, R_2 = \frac{R_1 \cdot (R_V + R_N)}{R_1 + R_V + R_N}$$

Im Verbraucher-Zählpfeil-System (Bild V17.3):  $I_{L1} = I_F = \frac{U_{L1}}{R_L + R_2} = \frac{U_{L1}}{R_L + \frac{R_1 \cdot (R_V + R_N)}{R_1 + R_V + R_N}}$

Zwei Grenzfälle: (i)  $R_A = 0$ , (ii)  $R_A \rightarrow \infty$ .

Fall (i):  $R_1 = R_k + R_{PE} + R_B = 0 + 1 + 1 = 2 \Omega$ ,  $R_2 = \frac{R_1 \cdot (R_V + R_N)}{R_1 + R_V + R_N} = \frac{2 \cdot (1200 + 1)}{2 + 1200 + 1} = 1.998 \Omega$ ,

$$I_{L1} = I_F = \frac{U_{L1}}{R_L + R_2} = \frac{230}{1 + 1.998} = 76.71 \text{ A} = I_{F,\max}$$

Fall (ii):  $R_1 \rightarrow \infty$ ,  $R_2 = \frac{R_1 \cdot (R_V + R_N)}{R_1 + R_V + R_N} \rightarrow R_V + R_N = 1201 \Omega$ ,

$$I_{L1} = I_F = \frac{U_{L1}}{R_L + R_2} = \frac{230}{1 + 1201} = 0.1913 \text{ A} = I_{F,\min}$$

Die Sicherung F1 löst im Fall (i) „sofort“, im Fall (ii) überhaupt NICHT aus!

Auslöseschwelle  $R_{A,\max}$  für  $I_{a2} = 16 \text{ A}$ :

$$I_F = \frac{U_{L1}}{R_L + R_2} = I_{a2} \Rightarrow R_L + R_2 = \frac{U_{L1}}{I_{a2}} = \frac{230}{16} = 14.375 \Omega \Rightarrow R_2 = 14.375 - 1 = 13.375 \Omega,$$

$$R_2 \cdot (R_1 + R_V + R_N) = R_1 \cdot (R_V + R_N) \Rightarrow R_1 = \frac{R_2 \cdot (R_V + R_N)}{R_V + R_N - R_2} = R_{PE} + R_A + R_B,$$

$$R_{A,max} = \frac{R_2 \cdot (R_V + R_N)}{R_V + R_N - R_2} - R_{PE} - R_B = \frac{13.375 \cdot (1200 + 1)}{1200 + 1 - 13.375} - 1 - 1 = 11.526 \Omega.$$

**Aufgabe V18:** Berührungsschutz 3

1) Beschreiben Sie die Maßnahme „Sichere Trennung“ für den Berührungsschutz! Wie kann sie verwirklicht werden beim AC- und beim DC-Betrieb? Ist ein Spartransformator für diese Schutzmaßnahme einsetzbar? Begründen Sie Ihre Antwort!

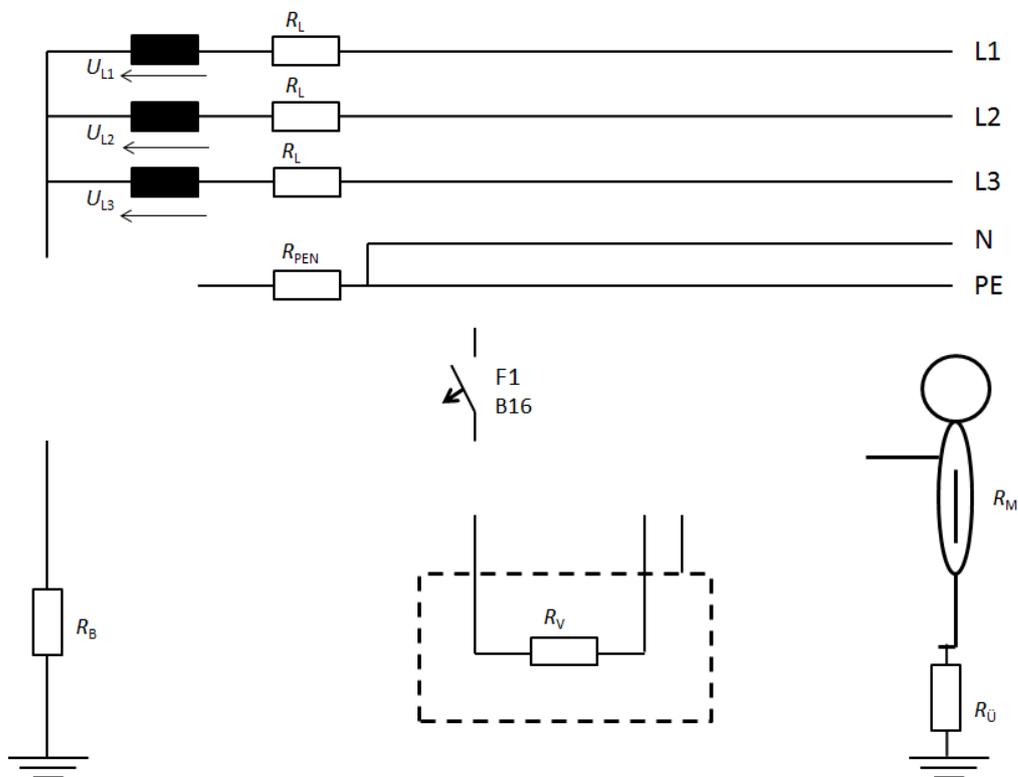


Bild V18.1: Niederspannungsnetz (unvollständig)

2) Der ohm'sche einphasige Verbraucher  $R_V$  ist im TN-S-System über die Überstrom-Schutzeinrichtung F1 („Sicherung“) im Phasenleiter L1 angeschlossen. Der Verbraucher  $R_V$  hat auf Grund eines Isolationsfehlers einen vollständigen Körperschluss (Kontaktwiderstand  $R_k = 0$ ) zwischen Phasenleiter L1 und Gehäuse. Ein Mensch berührt das Gehäuse. Geben Sie in Bild V18.1 die fehlenden elektrischen Verbindungen an! Der Berührstrom  $I_B$  durch den Menschen soll messtechnisch erfasst werden. Fügen Sie daher auch das Strommessgerät ein.

3) Im Niederspannungsnetz dominieren die ohm'schen gegenüber den induktiven Spannungsfällen. Zeichnen Sie das ohm'sche Ersatzschaltbild für den Fehlerfall aus 2)!

4) Berechnen Sie den Berührstrom  $I_B$  und die Berührungsspannung  $U_M$  (als Spannungsfall am  $R_M$ ) am Menschen für  $R_{PEN} = 20 \Omega$ ! Verwenden Sie dazu die Daten für die Phasen-Spannungen  $U_{L1} = U_{L2} = U_{L3} = 230 \text{ V}$ , den Leitungswiderstand/Phase  $R_L = 1 \Omega$ , den Erdungswiderstand  $R_B = 1 \Omega$ , den Verbraucher-Widerstand  $R_V = 1.2 \text{ k}\Omega$ , den

Körperwiderstand des Menschen  $R_M = 2.4 \text{ k}\Omega$  und für den Übergangswiderstand des Menschen (Schuhe, ...) zur Erde  $R_{\ddot{U}} = 560 \text{ }\Omega$ . Ist der Mensch gefährdet? Begründung!

**Aufgabe V18 (Lösung):** Berührungsschutz 3

1)  
 Bei der „sicheren Trennung“ wird der Primärstromkreis (Einspeisung aus dem Netz) vom Sekundärstromkreis durch eine doppelte oder verstärkte Isolierung getrennt, so dass keine elektrische Potentialverbindung (= galvanische Verbindung) besteht.  
 Dies kann verwirklicht werden z. B.  
 bei AC-Betrieb durch Trenntransformator oder eigenen AC-Generator,  
 beim DC-Betrieb durch eigene DC-Quelle (Batterie).  
 Der Spartransformator stellt eine galvanische Verbindung zwischen Sekundär- und Primärstromkreis her und ist daher nicht für „sichere Trennung“ geeignet.

2)  
 Körperschluss zwischen  $R_V$  und Gehäuse: Siehe Bild V18.2.

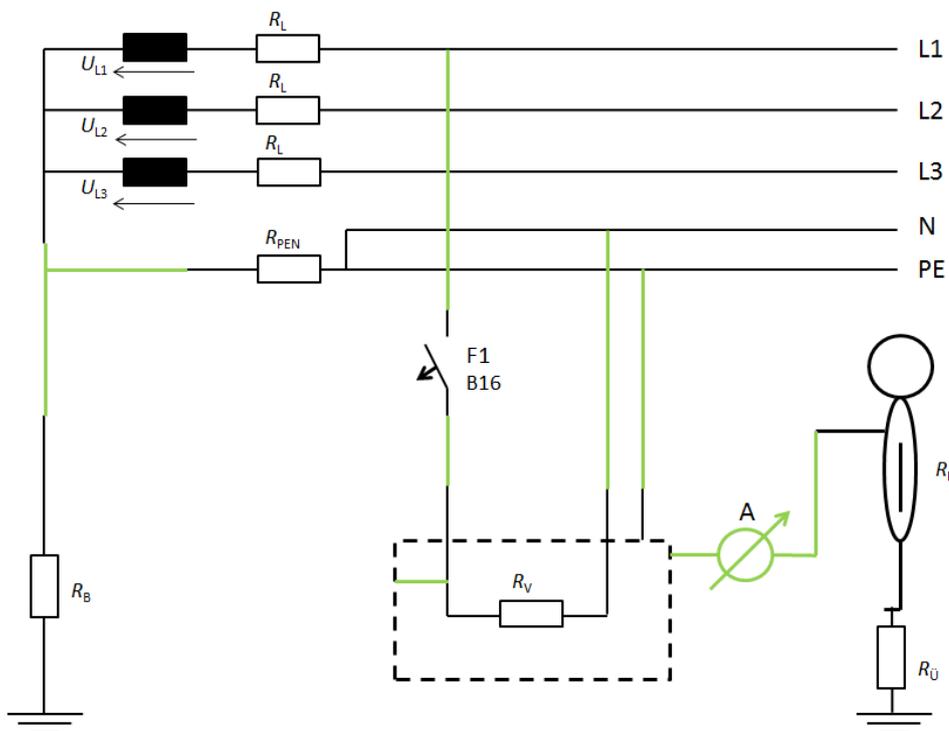


Bild V18.2: Körperschluss im TN-S-System

T: Sternpunkt des Netzes über Erdungswiderstand  $R_B$  geerdet,  
 N: Körper (Gehäuse) direkt mit Betriebserde PE verbunden,  
 S: Neutral- und Schutzleiter N und PE getrennt,

3)  
 Siehe Bild V18.3

4)  
 $R_k = 0: R_k = 0: R_1 = R_k + R_{\ddot{U}} + R_M + R_B = 0 + 560 + 2400 + 1 = 2961 \text{ }\Omega$ ,

$$R_{\text{ges}} = R_L + \frac{R_1 \cdot R_{\text{PEN}}}{R_1 + R_{\text{PEN}}} = 1 + \frac{2961 \cdot 20}{2961 + 20} = 20.866 \text{ }\Omega.$$

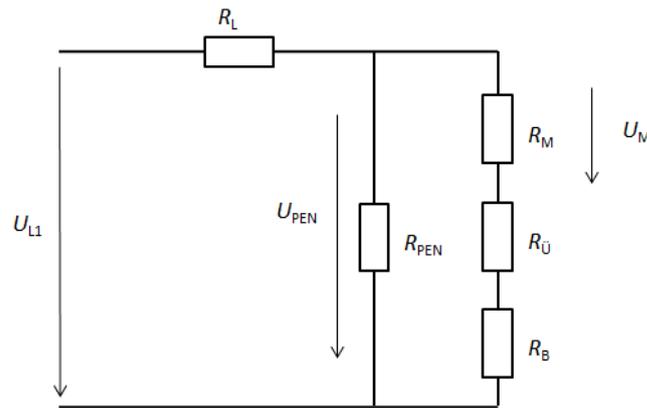


Bild V18.3: Ersatzschaltbild zu Bild V18.2 ( $R_V$  über  $R_k = 0$  „kurzgeschlossen“)

Im Verbraucher-Zählpfeil-System: Strom  $I_{L1}$  über  $R_L$  (Bild V18.3):

$$I_{L1} = U_{L1} / R_{ges} = 230 / 20.866 = 11.02 \text{ A},$$

$$\text{Stromteilerregel: } I_B = I_{L1} \cdot R_{PEN} / (R_L + R_{PEN}) = 11.02 \cdot 20 / (2961 + 20) = 0.074 \text{ A},$$

$$U_M = R_M \cdot I_B = 2400 \cdot 0.074 = 177.5 \text{ V} > 50 \text{ V}.$$

Der Mensch ist gefährdet, da die Funktionskleinspannung 50 V (AC, eff.) überschritten wird. Bei einem Berührstrom 74 mA kann bei 1 s Einwirkungsdauer bereits Herzkammerflimmern auftreten! Die Größe des Verbraucherwiderstands  $R_V$  ist für die Fragestellung ohne Belang, da der Körperschluss VOR dem Widerstand  $R_V$  stattfindet!

**Aufgabe V19:** Berührungsschutz 4

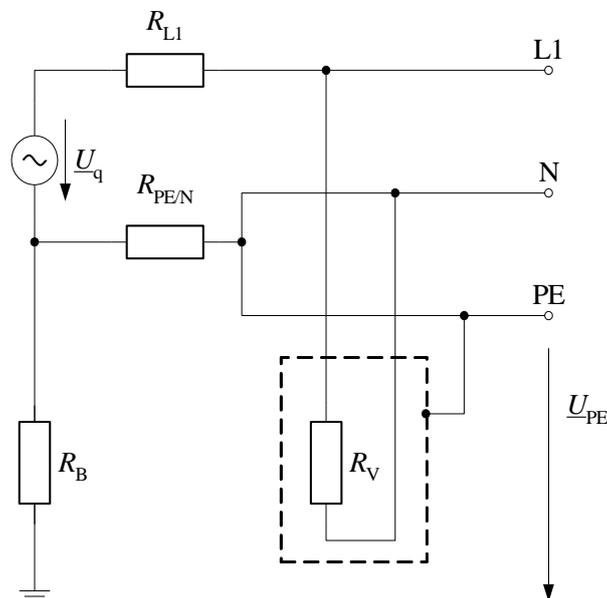


Bild V19.1: TN-System mit einem Verbraucher  $R_V$

- 1) Zählen Sie vier Schutzmaßnahmen gegen „elektrischen Schlag“ in Niederspannungsnetzen auf!
- 2) Erklären Sie die Begriffe „Basisschutz“ (= Schutz gegen direktes Berühren) und „Fehlerschutz“ (=Schutz gegen indirektes Berühren)!
- 3) Welche Schutzeinrichtungen dürfen für den Fehlerschutz in TT-Systemen verwendet werden?

- 4) Auf welchen Spannungswert sind SELV-Systeme begrenzt (AC und DC)?
- 5) Betrachten Sie das TN-System in Bild V19.1! Wie groß darf der Widerstand  $R_{PE/N}$  des PE/N-Leiters sein, so dass keine gefährliche Berührungsspannung  $U_{PE}$  am Körper (= Gehäuse) des Verbrauchers unter normalen Bedingungen (ohne Fehler) anliegt? Verwenden Sie die Daten  $U_q = 230\text{V}$ ,  $R_V = 100\Omega$ ,  $R_{L1} = 10\Omega$ ,  $R_B = 2\Omega$ !
- 6) Welche Verbesserung bewirkt der örtliche Schutzpotentialausgleich für den Fehlerschutz?
- 7) Erklären Sie warum Fehlerstrom- und Differenzstrom-Schutzeinrichtungen (RCD) nicht in TN-C-Systemen anwendbar sind!
- 8) Welchen Vorteil hat ein IT-Netz gegenüber einem TN- Netz? Warum werden Isolationswächter bei einem IT-Netz eingesetzt?

**Aufgabe V19 (Lösung):** Berührungsschutz 4

1)

Schutz durch automatische Abschaltung der Stromversorgung (Überstromauslösung),  
 Schutz durch vollständigen Schutz der Geräte (Isolierung, Umhüllung, Abdeckung),  
 Schutz durch Schutztrennung („sichere Trennung“) für die Versorgung eines Verbrauchers,  
 Schutz durch Kleinspannung mittels Safety Extra Low Voltage (SELV) oder Functional Extra Low Voltage (FELV) bzw. Protected Extra Low Voltage (PELV)

2)

Basisschutz (Schutz gegen direktes Berühren):

Das direkte Berühren spannungsführender Teile wird durch einen vollständigen Schutz (z. B. Isolierung, Umhüllung, Abdeckung des Geräts) oder durch einen teilweisen Schutz (z. B. Errichtung von Hindernissen zum Gerät) verhindert. Im letzteren Fall ist durch absichtliches Überwinden der Hindernisse ein absichtliches Berühren allerdings nicht ausgeschlossen!

Fehlerschutz (Schutz gegen indirektes Berühren):

Erfolgt das Berühren von elektrischen Geräten, die infolge eines Fehlers (Körperschluss) unter Spannung stehen, so ist durch das Auslösen geeigneter Schutzgeräte (z. B.: RCD) ein Schutz gegen elektrischen Schlag gegeben.

3)

Im TT-Netz ist der Sternpunkt des Netzes direkt geerdet (Erdungswiderstand  $R_B$ ), während die Körper mit eigener Erdung (Erdungswiderstand  $R_A$ ) geerdet sind. Daher sind Neutral- und Schutzleiter jedenfalls getrennt.

- a) Folglich kann eine Fehlerstrom/Differenzstrom-Schutzeinrichtung (RCD) verwendet werden.
- b) Überstrom-Schutzeinrichtungen sind mit der Voraussetzung, dass ein geeignet niedriger Wert der Fehlerschleifenimpedanz  $Z_A$  (niedrige Werte für  $R_A$ ) dauerhaft und zuverlässig sichergestellt ist, ebenfalls geeignet.

4)

Begrenzung der Spannung bis zur oberen Grenze AC 50 V eff. oder DC 120 V

5)

Die Spannung am Gehäuse des Verbrauchers  $U_{PE}$  darf die Funktionskleinspannung 50 V (eff.) nicht überschreiten!  $U_{PE} < 50\text{V}$ ,  $R = R_{L1} + R_V = 10 + 100 = 110\Omega$ ,

Verbraucherstrom  $I_V$  (im Verbraucher-Zählpfeilssystem von L1 nach N durch  $R_V$  positiv

gezählt):  $I_V = \frac{U_q}{R + R_{PE/N}} \Rightarrow U_{PE} = I_V \cdot R_{PE/N}$ ,  $|U_{PE}| \leq 50\text{V} = U_{\max}$ ,

$$I_V \cdot R_{PE/N} = \frac{U_q \cdot R_{PE/N}}{R + R_{PE/N}} \leq U_{\max} \Rightarrow U_q \cdot R_{PE/N} \leq U_{\max} \cdot (R + R_{PE/N}),$$

$$(U_q - U_{\max}) \cdot R_{PE/N} \leq U_{\max} \cdot R, R_{PE/N} \leq \frac{U_{\max} \cdot R}{U_q - U_{\max}} = \frac{50 \cdot 110}{230 - 50} = 30.55\Omega.$$

Die Größe des Erdungswiderstands  $R_B$  ist für die Fragestellung ohne Belang, da dort kein Strom fließt!

6)

Durch den örtlichen Schutzpotentialausgleich wird vermieden, dass – im Fall eines Fehlers – eine Person Gegenstände gleichzeitig berühren kann, die unterschiedliches Potential aufweisen.

7)

In TN-C-Systemen sind die Funktionen des Neutral- und Schutzleiters in einen einzigen Leiter kombiniert (PEN-Leiter). Der PEN-Leiter wird formal als Schutzleiter angesehen, somit darf er nicht durch die Messspule der Fehlerstrom-/Differenzstrom-Schutzeinrichtung durchgeführt werden. Wird aber ein unsymmetrischer (z.B. einphasiger) Verbraucher versorgt, so würde die Fehlerstrom-/Differenzstrom-Schutzeinrichtung auch ohne das Auftreten eines Fehlers auslösen. Aus diesem Grund darf in TN-C-Systemen keine solche Schutzeinrichtung verwendet werden.

Andererseits: Würde man den PEN-Leiter durch die Messspule der Fehlerstrom-/Differenzstrom-Schutzeinrichtung leiten, so wäre der Fehlerschutz nicht gegeben, da in diesem Fall immer noch  $\Delta I_F = 0$  A gelten würde, sodass das Schutzgerät nicht auslöst.

8)

Vorteil des IT-Netzes gegenüber dem TN-Netz:

Beim ersten Fehler kann das System weiterbetrieben werden, z. B. zur Versorgung wichtiger Systeme (z.B. in einem Krankenhaus). Deshalb werden Isolationswächter eingesetzt, die durch Messung des Isolationswiderstands bei dessen zu kleinem Wert diesen ersten Fehler erkennen, sodass dieser zeitgerecht (= zeitnah) beseitigt werden kann. Damit wird vermieden, dass ein zweiter Fehler unmittelbar zur automatischen Abschaltung führt, was (s. o. Krankenhaus) ggf. unerwünscht ist.

### Aufgabe V20: Symmetrische Last, Sternschaltung

An einem 400 V-Drehspannungssystem ( $U_N = 400$  V effektive Außenleiterspannung,  $f = 50$  Hz) wird ein Drehstromofen als *ohm*'sch-induktive symmetrische Belastung angeschlossen. Er kann durch eine Sternschaltung von drei *R-L*-Zweigen dargestellt werden ( $R = 4 \Omega$ ,  $L = 5$  mH).

1) Skizzieren Sie die allpolige Schaltung mit den drei Außenleiterspannungen  $\underline{U}_{RS}$ ,  $\underline{U}_{ST}$ ,  $\underline{U}_{TR}$ , den drei Außenleiterströmen  $\underline{I}_R$ ,  $\underline{I}_S$ ,  $\underline{I}_T$  und den drei Phasenspannungen  $\underline{U}_R$ ,  $\underline{U}_S$ ,  $\underline{U}_T$ ! Der Sternpunkt  $N$  ist elektrisch isoliert (kein Sternpunktleiter angeschlossen!).

2) Wie hängen die Phasenspannungen  $\underline{U}_R$ ,  $\underline{U}_S$ ,  $\underline{U}_T$  von den drei Außenleiterspannungen  $\underline{U}_{RS}$ ,  $\underline{U}_{ST}$ ,  $\underline{U}_{TR}$  ab? Geben Sie Formeln für  $\underline{I}_R$ ,  $\underline{I}_S$ ,  $\underline{I}_T$  an!

3) Berechnen Sie aus  $\underline{U}_{RS} = 400$  V,  $\underline{U}_{ST} = 400$  V  $\cdot e^{-j2\pi/3}$ ,  $\underline{U}_{TR} = 400$  V  $\cdot e^{j4\pi/3}$  (Effektivwerte) die drei Phasenspannungen und die drei Phasenströme im komplexer Form und ihre Beträge!

Hinweis: Da  $\underline{U}_{RS} + \underline{U}_{ST} + \underline{U}_{TR} = 0$  ist und die drei Außenleiterspannungen ein symmetrisches „Dreibein“-Zeigerdiagramm ergeben, muss auch das Zeigerdiagramm der Phasenspannungszeiger ein symmetrisches Zeiger-„Dreibein“ ergeben, dessen Summe  $\underline{U}_R + \underline{U}_S + \underline{U}_T = 0$  ist. Nutzen Sie beim Rechnen die Drehsymmetrie der Phasenverschiebung um jeweils  $2\pi/3$  aus, um die Berechnung so einfach wie möglich zu halten!

4) Zeichnen Sie maßstäblich die Zeigerdiagramme der drei Außenleiter- und Phasenspannungen und der Außenleiterströme, wobei  $50$  V  $\hat{=} 1$  cm bzw.  $10$  A  $\hat{=} 1$  cm ist. Wie groß ist die Phasenverschiebung zwischen  $\underline{U}_{RS}$  und  $\underline{U}_R$ ,  $\underline{U}_{ST}$  und  $\underline{U}_S$ ,  $\underline{U}_{TR}$  und  $\underline{U}_T$ ?

Wie groß ist das Verhältnis  $|\underline{U}_{RS}/\underline{U}_R|$ ?

- 5) Wie groß ist die Phasenschiebung  $\varphi$  zwischen  $\underline{U}_R$  und  $\underline{I}_R$  bzw.  $\underline{U}_S$ ,  $\underline{I}_S$  bzw.  $\underline{U}_T$ ,  $\underline{I}_T$ , jeweils positiv gezählt im mathematischen positiven Zählsinn von Strom zur Spannung?  
 6) Wie groß sind die Mittelwerte der Wirkleistung  $P_{ph}$ , Blindleistung  $Q_{ph}$  und Scheinleistung  $S_{ph}$  je Strang? Wie groß ist der  $\cos \varphi$ ?  
 7) Berechnen Sie Wirk-, Blind- und Scheinleistung des Drehstromofens  $P$ ,  $Q$ ,  $S$  a) aus den Strangwerten  $P_{ph}$ ,  $Q_{ph}$ ,  $S_{ph}$  und b) aus den Außenleiterspannungen und -strömen mit Verwendung des  $\cos \varphi$  von 6).

**Aufgabe V20 (Lösung):** Symmetrische Last, Sternschaltung

1)

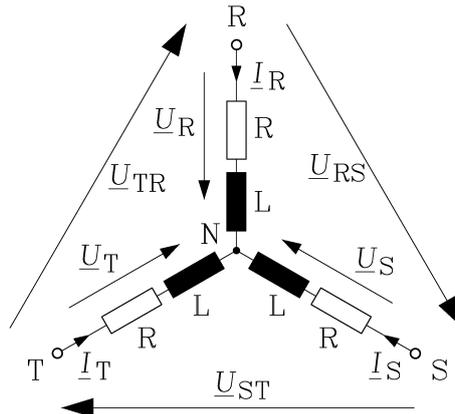


Bild V20.1: Ersatzschaltbild der Schaltung

2)

$$\underline{U}_{RS} = \underline{U}_R - \underline{U}_S, \quad \underline{U}_{ST} = \underline{U}_S - \underline{U}_T, \quad \underline{U}_{TR} = \underline{U}_T - \underline{U}_R$$

$$\underline{Z} = R + j \cdot 2\pi f \cdot L, \quad \underline{I}_R = \underline{U}_R / \underline{Z}, \quad \underline{I}_S = \underline{U}_S / \underline{Z}, \quad \underline{I}_T = \underline{U}_T / \underline{Z}$$

3)

(1)  $\underline{U}_R + \underline{U}_S + \underline{U}_T = 0$ , (2)  $\underline{U}_{RS} = \underline{U}_R - \underline{U}_S$ , ((3)  $\underline{U}_{ST} = \underline{U}_S - \underline{U}_T$ ,

(1) + (2) + (3):  $\underline{U}_R + (\underline{U}_R - \underline{U}_{RS}) + (\underline{U}_R - \underline{U}_{RS} - \underline{U}_{ST}) = 0$ ,

$$3 \cdot \underline{U}_R = 2 \cdot \underline{U}_{RS} + \underline{U}_{ST}, \quad \underline{U}_R = \frac{2}{3} \cdot \underline{U}_{RS} + \frac{1}{3} \cdot \underline{U}_{ST}.$$

In gleicher Weise durch zyklisches Vertauschen  $R \rightarrow S \rightarrow T \rightarrow R$  der Indizes:

$$\underline{U}_S = \frac{2}{3} \cdot \underline{U}_{ST} + \frac{1}{3} \cdot \underline{U}_{TR}, \quad \underline{U}_T = \frac{2}{3} \cdot \underline{U}_{TR} + \frac{1}{3} \cdot \underline{U}_{RS}.$$

$\underline{U}_{RS} = U$  : Die Lage eines Zeigers kann stets reell gewählt werden!

$$\underline{U}_R = \frac{2}{3} \cdot U + \frac{1}{3} \cdot U \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{3}} = \frac{U}{3} \cdot \left( 2 + e^{-j \cdot \frac{2\pi}{3}} \right) = \frac{U}{\sqrt{3}} \cdot \left( \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left( -\frac{1}{2} - j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right),$$

$$\underline{U}_R = \frac{U}{\sqrt{3}} \cdot \left( \frac{4}{2 \cdot \sqrt{3}} - \frac{1}{2 \cdot \sqrt{3}} - j \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{U}{\sqrt{3}} \cdot \left( \frac{3}{2 \cdot \sqrt{3}} - j \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{U}{\sqrt{3}} \cdot \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - j \cdot \frac{1}{2} \right),$$

$$\underline{U}_R = \frac{U}{\sqrt{3}} \cdot (\cos(-30^\circ) + j \cdot \sin(-30^\circ)) = \frac{U}{\sqrt{3}} \cdot e^{-j \cdot 30^\circ}.$$

$$\underline{U}_S = \frac{2}{3} \cdot U \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{3}} + \frac{1}{3} \cdot U \cdot e^{-j \cdot \frac{4\pi}{3}} = \left( \frac{2}{3} \cdot U + \frac{1}{3} \cdot U \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{3}} \right) \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{3}} = \underline{U}_R \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{3}}.$$

$$\underline{U}_T = \frac{2}{3} \cdot U \cdot e^{-j \frac{4\pi}{3}} + \frac{1}{3} \cdot U = \left( \frac{2}{3} \cdot U + \frac{1}{3} \cdot U \cdot e^{-j \frac{2\pi}{3}} \right) \cdot e^{-j \frac{4\pi}{3}} = \underline{U}_R \cdot e^{-j \frac{4\pi}{3}}$$

$$\underline{I}_R = \frac{\underline{U}_R}{R^2 + X^2} \cdot (R - jX) = \frac{\underline{U}_R}{\sqrt{R^2 + X^2}} \cdot e^{-j\varphi} = \frac{\underline{U}_R}{Z} \cdot e^{-j\varphi}, \quad \varphi = \arctan \frac{X}{R},$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}, \quad \underline{I}_S = \frac{\underline{U}_S}{R + jX} = \frac{\underline{U}_R \cdot e^{-j \frac{2\pi}{3}}}{R + jX} = \underline{I}_R \cdot e^{-j \frac{2\pi}{3}}, \quad \underline{I}_T = \underline{I}_R \cdot e^{-j \frac{4\pi}{3}}$$

4)

$$\angle_{U_R}^{U_{RS}} = \angle_{U_S}^{U_{ST}} = \angle_{U_T}^{U_{TR}} = 30^\circ, \quad \left| \frac{U_{RS}}{U_R} \right| = \left| \frac{U}{\frac{U}{\sqrt{3}} \cdot e^{-j \cdot 30^\circ}} \right| = \sqrt{3}, \text{ Zeigerdiagramm Bild V20.2!}$$

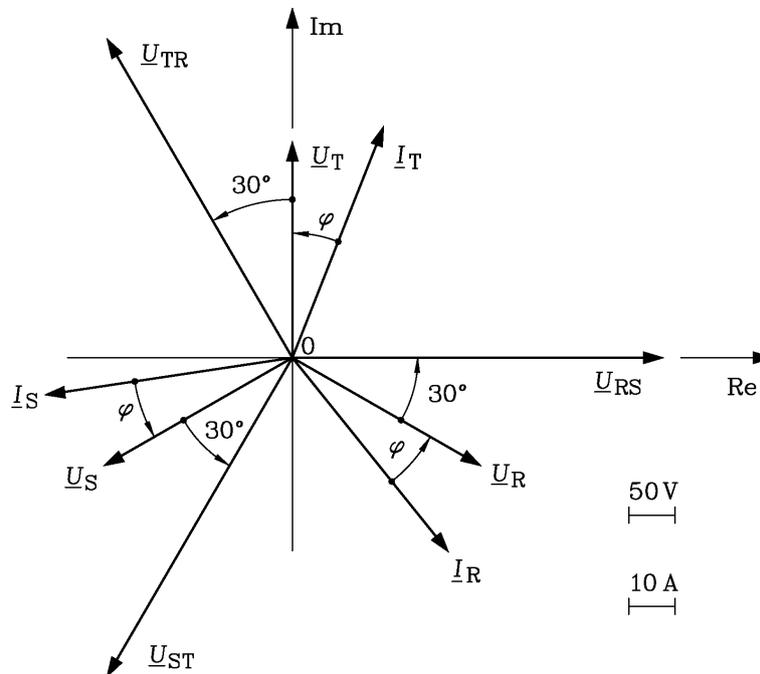


Bild V20.2: Zeigerdiagramm

5)

$$\underline{I}_R = \frac{\underline{U}_R}{R + jX} = \frac{\underline{U}_R}{R^2 + X^2} \cdot (R - jX) = \frac{\underline{U}_R \cdot \sqrt{R^2 + X^2}}{R^2 + X^2} \cdot e^{-j\varphi} = \underline{U}_R \cdot \frac{1}{Z} \cdot e^{-j\varphi},$$

$$\tan \varphi = \frac{X}{R}, \quad \varphi = \arctan \frac{X}{R} = \arctan \frac{1.57}{4} = 0.374 \text{ rad} = 21.4^\circ, \quad \varphi = 21.4^\circ = 0.374 \text{ rad} > 0.$$

6)

$$P_{ph} = R \cdot I_R^2 = R \cdot I_S^2 = R \cdot I_T^2 = 4 \cdot 53.73^2 = 11548 \text{ W},$$

$$Q_{ph} = X \cdot I_R^2 = X \cdot I_S^2 = X \cdot I_T^2 = 1.57 \cdot 53.73^2 = 4535 \text{ VAr} > 0 \quad (\text{induktive Blindleistung}),$$

$$S_{ph} = U_R \cdot I_R = U_S \cdot I_S = U_T \cdot I_T = 230.9 \cdot 53.73 = 12406 \text{ VA}, \quad \cos \varphi = \frac{P_{ph}}{S_{ph}} = \frac{11548}{12406} = 0.9306$$

oder  $\cos \varphi = \cos 21.4^\circ = \cos 0.374 = 0.93 > 0$ , weil induktiv!

7)

$$a) P = 3 \cdot P_{\text{ph}} = 3 \cdot 11548 = 34644 \text{ W}, Q = 3 \cdot Q_{\text{ph}} = 3 \cdot 4535 = 13605 \text{ VAR},$$

$$S = 3 \cdot S_{\text{ph}} = 3 \cdot 12408 = 37224 \text{ VA}.$$

$$b) S = 3 \cdot U_{\text{ph}} \cdot I_{\text{ph}} = \sqrt{3} \cdot U_{\text{LL}} \cdot I_{\text{ph}} = \sqrt{3} \cdot U_{\text{LL}} \cdot I_{\text{L}} = \sqrt{3} \cdot 400 \cdot 53,73 = 37225 \text{ VA}.$$

$$\text{Außenleiterspannung } U_{\text{LL}} = |U_{\text{RS}}| = |U_{\text{ST}}| = |U_{\text{TR}}|,$$

$$\text{Außenleiterstrom } I_{\text{L}} = I_{\text{ph}} \text{ (wegen Sternschaltung) } I_{\text{ph}} = |I_{\text{R}}| = |I_{\text{S}}| = |I_{\text{T}}|,$$

$$P = S \cdot \cos \varphi = 37225 \cdot 0,9306 = 34642 \text{ W},$$

$$Q = S \cdot \sin \varphi = S \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = 37225 \cdot 0,3658 = 13617 \text{ VAR}.$$

Abweichungen zwischen a) und b) durch Rundungsfehler!

### Alternative zu 3)

**Achtung - Hinweis:** Wenn man ungeschickt rechnet, nämlich a) sehr früh Zahlenwerte einsetzt und b) die Drehsymmetrie  $120^\circ/240^\circ$  nicht berücksichtigt, wird die Rechnung zu 3) wesentlich umständlicher, wie im Folgenden gezeigt wird.

$$\underline{U}_{\text{R}} = \frac{2}{3} \cdot 400 + \frac{1}{3} \cdot 400 \cdot e^{-j \frac{2\pi}{3}} = \frac{400}{3} \cdot \left( 2 + \left( -\frac{1}{2} \right) - j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{400}{3} \cdot \left( \frac{3}{2} - j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{200}{\sqrt{3}} \cdot (\sqrt{3} - j)$$

$$\underline{U}_{\text{R}} = 200\text{V} \cdot \left( 1 - j \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \quad e^{-j \frac{2\pi}{3}} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - j \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\underline{U}_{\text{S}} = \left( \frac{2}{3} \cdot 400 \cdot e^{-j \frac{2\pi}{3}} + \frac{1}{3} \cdot 400 \cdot e^{-j \frac{4\pi}{3}} \right) = \left( \frac{2}{3} \cdot 400 + \frac{1}{3} \cdot 400 \cdot e^{-j \frac{2\pi}{3}} \right) \cdot e^{-j \frac{2\pi}{3}},$$

$$= \underline{U}_{\text{R}} \cdot e^{-j \frac{2\pi}{3}} = 200\text{V} \cdot \left( 1 - j \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \cdot \left( -\frac{1}{2} - j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 200\text{V} \cdot \left( -\frac{1}{2} - j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + j \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{3}} - \frac{1}{2} \right)$$

$$= 200\text{V} \cdot \left( -1 - j \cdot \left( \frac{3}{2 \cdot \sqrt{3}} - \frac{1}{2 \cdot \sqrt{3}} \right) \right) = 200\text{V} \cdot \left( -1 - j \cdot \frac{2}{2 \cdot \sqrt{3}} \right) = 200\text{V} \cdot \left( -1 - j \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \right),$$

$$\underline{U}_{\text{T}} = \frac{2}{3} \cdot 400 \cdot e^{-j \frac{4\pi}{3}} + \frac{1}{3} \cdot 400 \cdot e^{-j \frac{6\pi}{3}} = \left( \frac{2}{3} \cdot 400 + \frac{1}{3} \cdot 400 \cdot e^{-j \frac{2\pi}{3}} \right) \cdot e^{-j \frac{4\pi}{3}} = \underline{U}_{\text{R}} \cdot e^{-j \frac{4\pi}{3}},$$

$$= 200\text{V} \cdot \left( 1 - j \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \cdot \left( \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) - j \cdot \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \right) = 200\text{V} \cdot \left( 1 - j \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \cdot \left( -\frac{1}{2} + j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right),$$

$$= 200\text{V} \cdot \left( -\frac{1}{2} + j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + j \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{3}} + \frac{1}{2} \right) = 200\text{V} \cdot \left( j \cdot \left( \frac{3}{2 \cdot \sqrt{3}} + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{3}} \right) \right) = 200\text{V} \cdot j \cdot \frac{4}{2 \cdot \sqrt{3}},$$

$$= j \cdot 200\text{V} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = j \cdot \frac{400\text{V}}{\sqrt{3}},$$

$$|\underline{U}_{\text{R}}| = 200\text{V} \cdot \sqrt{1^2 + \left( -\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2} = 200\text{V} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{3}} = 1,155 \cdot 200\text{V} = 230,9\text{V},$$

$$|\underline{U}_{\text{S}}| = \left| \underline{U}_{\text{R}} \cdot e^{-j \frac{2\pi}{3}} \right| = |\underline{U}_{\text{R}}| \cdot \left| e^{-j \frac{2\pi}{3}} \right| = |\underline{U}_{\text{R}}| \cdot 1 = |\underline{U}_{\text{R}}| \text{ oder}$$

$$|\underline{U}_S| = 200\text{V} \cdot \sqrt{(-1)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = 200\text{V} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{3}} = 230.9\text{V},$$

$$|\underline{U}_T| = \left| \underline{U}_R \cdot e^{-j\frac{4\pi}{3}} \right| = |\underline{U}_R| \cdot \left| e^{-j\frac{4\pi}{3}} \right| = |\underline{U}_R| \cdot 1 = |\underline{U}_R| \text{ oder } |\underline{U}_T| = |j| \cdot \frac{400\text{V}}{\sqrt{3}} = 230.9\text{V}.$$

$$X = \omega L, \quad \omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50 = 314.16/\text{s}, \quad X = 314.16 \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 1.57\Omega,$$

$$\underline{I}_R = \frac{\underline{U}_R}{R + jX} = \frac{200 \cdot \left(1 - j \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{4 + j \cdot 1.57} = \frac{200 \cdot \left(1 - j \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot (4 - j \cdot 1.57)}{4^2 + 1.57^2}$$

$$= \frac{200}{18.47} \cdot \left(4 - j \cdot 1.57 - j \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{1.57}{\sqrt{3}}\right) = 10.828 \cdot (3.094 - j \cdot 3.879) = (33.5 - j \cdot 42.0)\text{A},$$

$$|\underline{I}_R| = \sqrt{33.5^2 + 42.0^2} = 53.73\text{A}, \quad |\underline{Z}| = \sqrt{4^2 + 1.57^2} = 4.297\Omega,$$

$$\underline{I}_S = \frac{\underline{U}_S}{R + jX} = \frac{\underline{U}_R \cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}}}{R + jX} = \underline{I}_R \cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}} = (33.5 - j \cdot 42.0) \cdot \left(-\frac{1}{2} - j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \left(-\frac{33.5}{2} + j \cdot \frac{42.0}{2} - j \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot 33.5}{2} - \frac{42.0 \cdot \sqrt{3}}{2}\right) = (-53.12 - j \cdot 8.01)\text{A},$$

$$|\underline{I}_S| = |\underline{I}_R| \cdot \left| e^{-j\frac{2\pi}{3}} \right| = |\underline{I}_R| \cdot 1 = |\underline{I}_R| = 53.73\text{A} \quad \text{oder} \quad |\underline{I}_S| = \sqrt{(-53.12)^2 + (-8.01)^2} = 53.73\text{A},$$

$$\underline{I}_T = \frac{\underline{U}_T}{R + jX} = \frac{\underline{U}_R \cdot e^{-j\frac{4\pi}{3}}}{R + jX} = \underline{I}_R \cdot e^{-j\frac{4\pi}{3}} = (33.5 - j \cdot 42.0) \cdot \left(-\frac{1}{2} + j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \left(-\frac{33.5}{2} + j \cdot \frac{42.0}{2} + j \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot 33.5}{2} + \frac{42.0 \cdot \sqrt{3}}{2}\right) = (19.62 + j \cdot 50.01)\text{A},$$

$$|\underline{I}_T| = |\underline{I}_R| \cdot \left| e^{-j\frac{4\pi}{3}} \right| = |\underline{I}_R| \cdot 1 = |\underline{I}_R| = 53.73\text{A} \quad \text{oder} \quad |\underline{I}_T| = \sqrt{19.62^2 + 50.01^2} = 53.73\text{A}.$$

### Aufgabe V21: Symmetrische Last, Dreieckschaltung

Ein Drehstromofen mit drei identischen ohmsch-induktiven Zweigen mit der Impedanz  $\underline{Z} = R + j\omega L$ ,  $R = 4\Omega$ ,  $L = 5\text{mH}$  ist in Dreieck geschaltet und wird mit dem symmetrischen 400V-Drehspannungssystem ( $\underline{U}_{RS} = 400\text{V}$ ,  $\underline{U}_{ST} = \underline{U}_{RS} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}}$ ,  $\underline{U}_{TR} = \underline{U}_{RS} \cdot e^{-j\frac{4\pi}{3}}$ ) (Effektivwerte) bei  $f = 50\text{Hz}$  gespeist!

1) Zeichnen Sie die allpolige Schaltung mit Außenleiterspannungen, Außenleiterströmen  $\underline{I}_{LR}$ ,  $\underline{I}_{LS}$ ,  $\underline{I}_{LT}$  und Phasenströmen  $\underline{I}_R$ ,  $\underline{I}_S$ ,  $\underline{I}_T$ !

2) Berechnen Sie die Phasenströme und Außenleiterströme komplex und ihre Effektivwerte als Beträge  $|\underline{I}_R|$ ,  $|\underline{I}_S|$ ,  $|\underline{I}_T|$ ,  $|\underline{I}_{LR}|$ ,  $|\underline{I}_{LS}|$ ,  $|\underline{I}_{LT}|$ ! Nutzen Sie die  $120^\circ$ -Drehsymmetrie beim Rechnen aus! Wie groß ist das Verhältnis  $I_{LR} / I_R$ ?

3) Zeichnen Sie das Zeigerdiagramm der drei Außenleiterspannungen, Außenleiter- und Phasenströme und zeichnen Sie die Phasenverschiebungswinkel  $\varphi$  zwischen  $\underline{U}_{RS}$  und  $\underline{I}_R$ ,

zwischen  $\underline{U}_{RS}$  und  $\underline{I}_{LR}$  sowie den Winkel  $\alpha$  zwischen  $\underline{I}_{RL}$  und  $\underline{I}_R$  ein ( $20 \text{ A} \triangleq 1 \text{ cm}$ ;  $50 \text{ V} \triangleq 1 \text{ cm}$ )! Wie groß ist dieser Winkel  $\alpha$ ?

4) Wie groß ist der Phasenwinkel  $\psi$  zwischen Außenleiterspannung  $\underline{U}_{RS}$  und Außenleiterstrom  $\underline{I}_{LR}$ ?

5) Berechnen Sie die mittlere Einphasen-Wirk-, Blind- und Scheinleistung  $P_{ph}$ ,  $Q_{ph}$ ,  $S_{ph}$  und daraus die Drehstrom-Leistungen  $P$ ,  $Q$ ,  $S$ !

6) Berechnen Sie alternativ zu 5)  $P$ ,  $Q$ ,  $S$  aus den Außenleitergrößen und dem  $\cos\varphi$  von 2).

**Aufgabe V21 (Lösung):** Unsymmetrischer Verbraucher, Dreieckschaltung

1)

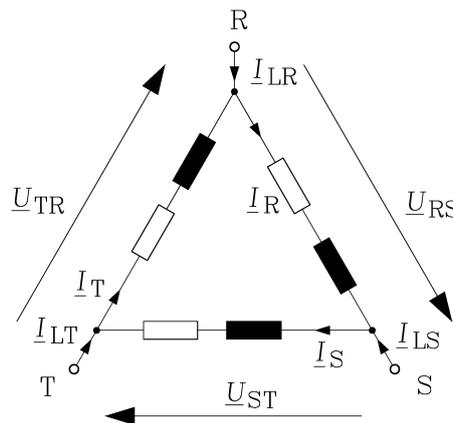


Bild V21.1: Ersatzschaltbild der Schaltung

2)

$\underline{U}_{RS} = U$  : Die Lage eines Zeigers kann stets reell gewählt werden!

$$\underline{I}_R = \frac{\underline{U}_{RS}}{R + jX}, \quad \underline{I}_S = \frac{\underline{U}_{ST}}{R + jX} = \frac{\underline{U}_{RS} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}}}{R + jX} = \underline{I}_R \cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}},$$

$$\underline{I}_R = \frac{U}{R + jX} = \frac{U}{R^2 + X^2} \cdot (R - jX) = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X^2}} \cdot e^{-j\varphi}, \quad \varphi = \arctan\left(\frac{X}{R}\right),$$

$$\underline{I}_T = \frac{\underline{U}_{TR}}{R + jX} = \frac{\underline{U}_{RS} \cdot e^{-j\frac{4\pi}{3}}}{R + jX} = \underline{I}_R \cdot e^{-j\frac{4\pi}{3}},$$

$$\underline{I}_{LR} = \underline{I}_R - \underline{I}_T, \quad \underline{I}_{LS} = \underline{I}_S - \underline{I}_R, \quad \underline{I}_{LT} = \underline{I}_T - \underline{I}_S, \quad R = 4 \Omega,$$

$$X = 2\pi fL = 2\pi \cdot 50 \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 1.57 \Omega,$$

$$\underline{I}_R = \frac{400}{4 + j1.57} = \frac{400}{4^2 + 1.57^2} \cdot (4 - j1.57) = (86.64 - j \cdot 34.0) \text{ A},$$

$$|\underline{I}_R| = \sqrt{86.64^2 + 34.0^2} = 93.08 \text{ A},$$

$$|\underline{I}_S| = |\underline{I}_T| = |\underline{I}_R| = 93.08 \text{ A}, \quad \text{da } \left| e^{-j\frac{2\pi}{3}} \right| = \left| e^{-j\frac{4\pi}{3}} \right| = 1,$$

$$\underline{I}_R = 93.08 \text{ A} \cdot e^{-j0.374}, \quad \underline{I}_S = 93.08 \text{ A} \cdot e^{-j\left(0.374 + \frac{2\pi}{3}\right)} = 93.08 \text{ A} \cdot e^{-j2.468},$$

$$\underline{I}_T = 93.08 \text{ A} \cdot e^{-j\left(0.374 + \frac{4\pi}{3}\right)} = 93.08 \text{ A} \cdot e^{-j4.562} ,$$

$$\varphi = \arctan \frac{34.0}{86.64} = 0.374 = 21.4^\circ ,$$

$\varphi = 21.4^\circ$  vom Strom zur Spannung im mathematisch positiven Zählsinn.

$$\underline{I}_{LR} = \underline{I}_R - \underline{I}_T = \underline{I}_R - \underline{I}_R \cdot e^{-j\frac{4\pi}{3}} = \underline{I}_R \cdot \left(1 - e^{-j\frac{4\pi}{3}}\right) = \underline{I}_R \cdot \left(1 - \left(-\frac{1}{2} + j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) ,$$

$$\underline{I}_{LR} = \underline{I}_R \cdot \left(\frac{3}{2} - j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3} \cdot \underline{I}_R \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - j \cdot \frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} \cdot \underline{I}_R \cdot (\cos(-30^\circ) + j \cdot \sin(-30^\circ)) ,$$

$$\underline{I}_{LR} = \sqrt{3} \cdot \underline{I}_R \cdot e^{-j30^\circ} = \sqrt{3} \cdot \underline{I}_R \cdot e^{-j\frac{2\pi}{12}} .$$

$$\underline{I}_{LS} = \underline{I}_S - \underline{I}_R = \underline{I}_R \cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}} - \underline{I}_R = \underline{I}_R \cdot \left(e^{-j\frac{2\pi}{3}} - 1\right) = \underline{I}_R \cdot \left(1 - e^{-j\frac{4\pi}{3}}\right) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}} ,$$

$$\underline{I}_{LS} = \underline{I}_{LR} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}} = \sqrt{3} \cdot \underline{I}_R \cdot e^{-j\frac{2\pi}{12}} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}} = \sqrt{3} \cdot \underline{I}_R \cdot e^{-j\frac{5\pi}{6}} ,$$

$$\underline{I}_{LT} = \underline{I}_T - \underline{I}_S = \underline{I}_R \cdot e^{-j\frac{4\pi}{3}} - \underline{I}_R \cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}} = \underline{I}_R \cdot \left(e^{-j\frac{4\pi}{3}} - e^{-j\frac{2\pi}{3}}\right) = \underline{I}_R \cdot \left(1 - e^{-j\frac{4\pi}{3}}\right) \cdot e^{-j\frac{4\pi}{3}} ,$$

$$\underline{I}_{LT} = \underline{I}_{LR} \cdot e^{-j\frac{4\pi}{3}} , \quad |\underline{I}_{LR}| = |\underline{I}_{LS}| = |\underline{I}_{LT}| = \sqrt{3} \cdot I_R = \sqrt{3} \cdot 93.08 = 161.2 \text{ A} ,$$

$$\frac{I_{LR}}{I_R} = \frac{\sqrt{3} \cdot I_R}{I_R} = \sqrt{3} .$$

3)

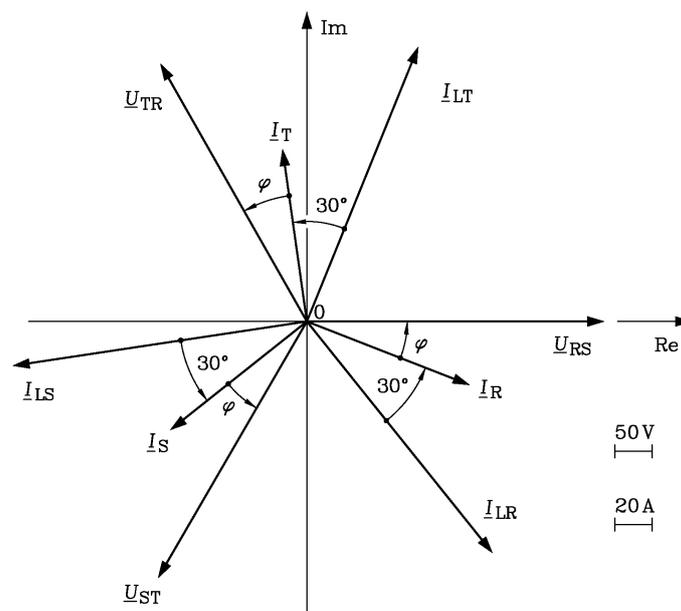


Bild V21.2: Zeigerdiagramm:  $\alpha = 30^\circ$

4)

$$\angle_{I_{LR}}^{U_{RS}} \quad \psi = \alpha + \varphi = 30^\circ + \varphi = 30^\circ + 21.4^\circ = 51.4^\circ$$

5)

$$P_{ph} = R \cdot I_R^2 = 4 \cdot 93.08^2 = 34656 \text{ W}, \quad Q_{ph} = X \cdot I_R^2 = 1.57 \cdot 93.08^2 = 13602 \text{ VAr},$$

$$S_{ph} = U_{RS} \cdot I_R = 400 \cdot 93.08 = 37232 \text{ VA},$$

$$P = 3 \cdot P_{ph} = 3 \cdot 34656 = 103968 \text{ W}, \quad Q = 3 \cdot Q_{ph} = 3 \cdot 13602 = 40806 \text{ VAr},$$

$$S = 3 \cdot S_{ph} = 3 \cdot 37232 = 111696 \text{ VA} .$$

6)

$$S = \sqrt{3} \cdot U_{RS} \cdot I_{LR} = \sqrt{3} \cdot 400 \cdot 161.22 = 111696 \text{ VA}, \quad \cos \varphi = 0.9309,$$

$$P = S \cdot \cos \varphi = 111696 \cdot \cos 21.42^\circ = 103981 \text{ W}, \quad Q = \sqrt{S^2 - P^2} = 40792 \text{ VAr}.$$

Differenzen zwischen 5) und 6) sind durch Rundungsfehler bedingt.

**Aufgabe V22:** Parallelbetrieb von Freileitungen

Es soll die in Offshore-Windparks in der Ostsee erzeugte elektrische Wirkleistung  $P_1 = 2 \text{ GW}$  über zwei gleiche parallel geschaltete, jeweils  $l = 250 \text{ km}$  lange symmetrische Drehstrom-Freileitungen A und B ( $U_N = 380 \text{ kV}$ ,  $f = 50 \text{ Hz}$ ) nach Süden in das Landesinnere übertragen werden (Daten je Leitung:  $S_N = 1700 \text{ MVA}$ ,  $R'_B = 31.15 \mu\Omega/\text{m}$ ,  $L'_B = 0.81 \mu\text{H}/\text{m}$ ,  $C'_B = 14 \text{ pF}/\text{m}$ ). Vernachlässigen Sie den kapazitiven Strom ( $C'_B = 0$ ) und den Korona-Ableitstrom!

- 1) Sind die Leitungen als „elektrisch kurz“ zu bezeichnen?  
Darf man sie durch ein vereinfachtes  $R$ - $L$ -Seriensatzschaltbild beschreiben?  
Wie groß ist der Bemessungsstrom  $I_N$ ?
- 2) Im Umspannwerk an der Einspeisestelle wird die verkettete Spannung durch die Regelwicklung der Transformatoren konstant auf dem Betriebsspannungswert  $U_b = 400 \text{ kV}$  gehalten. Parallel zu den beiden Freileitungen A, B verläuft eine dritte gleichartige Freileitung C im östlichen Nachbarland, die auf Grund des Verbundnetzes der UCTE elektrisch parallel geschaltet ist.  
Wie groß ist der (unerwünschte) Strom- und Wirkleistungsfluss in dieser Freileitung?  
Wie hoch ist prozentual der Strom in Bezug auf den Bemessungsstrom  $I_N$ ?
- 3) Wie groß ist die verkettete Spannung  $U_{LL,2}$  am Endpunkt der Freileitungen?
- 4) In der dritten Freileitung wird über einen speziellen „Querregel“-Transformator die Serienzusatzspannung  $\underline{U}_z = -j \cdot k \cdot \underline{U}_1$ ,  $0 \leq k \leq 1$  (Bild 1) in jede der drei Phasen eingespeist, um den ungewollten Leitungsstrom  $\underline{I}_C$  zu verringern.  
Wie groß ist  $k$ , damit  $I_C$  minimal wird?

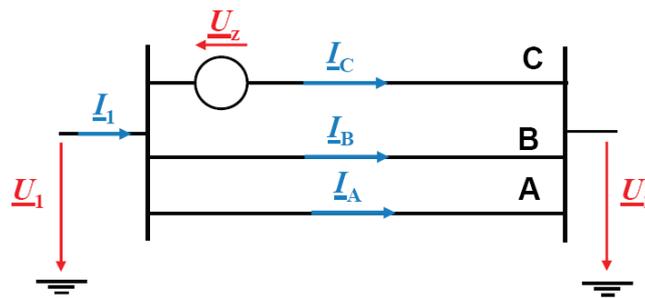


Bild V22.1: Einspeisung einer Serien-Zusatzspannung  $\underline{U}_z$  in Freileitung C

- 5) Berechnen Sie zu 4) die Ströme  $\underline{I}_A$ ,  $\underline{I}_B$ ,  $\underline{I}_C$  und ihre Beträge und vergleichen Sie dies mit dem Ergebnis von 2)!  
Wie groß sind die Wirkverluste im Vergleich zu 2) und die Spannung  $U_{LL,2}$ ?
- 6) Veranschaulichen Sie die Stromverringerng in Leitung C gemäß 5) für den verlustfreien Fall ( $R'_B = 0$ ) durch ein Zeigerdiagramm der Spannungen  $U_1$ ,  $\underline{U}_z$  und der Ströme  $\underline{I}_A$ ,  $\underline{I}_B$ ,  $\underline{I}_C$ !

**V22 (Lösung):** Parallelbetrieb von Freileitungen

1)

Wellenlänge:  $\lambda = c_0 / f = 3 \cdot 10^8 / 50 = 6000 \text{ km}$ ,

$\beta \cdot l = (2\pi / \lambda) \cdot l = (2\pi / 6 \cdot 10^6) \cdot 250 \cdot 10^3 = 0.26 < 1$ : Die Leitungen sind „elektrisch kurz“. Es darf daher das  $R$ - $L$ -Serienersatzschaltbild verwendet werden.

$$I_N = S_N / (\sqrt{3} \cdot U_N) = \frac{1.7 \cdot 10^9}{\sqrt{3} \cdot 380 \cdot 10^3} = 2582.9 \text{ A} \quad \text{ Bemessungsstrom je Leitung.}$$

2)

Phasenspannung  $U_1$  an der Einspeisestelle:  $U_1 = U_b / \sqrt{3} = 400 \text{ kV} / \sqrt{3}$ ,

$$\text{Wirkstrom an der Einspeisestelle: } I_1 = P / (3 \cdot U_1) = \frac{P_1}{3 \cdot U_b / \sqrt{3}} = \frac{2 \cdot 10^9}{\sqrt{3} \cdot 400 \cdot 10^3} = 2886.75 \text{ A},$$

Die el. parallelen Leitungen A, B, C haben gleiche Serienimpedanzen  $Z_L = R_L + j \cdot X_L$ ,

$R_L = R'_B \cdot l$ ,  $X_L = 2\pi f \cdot L'_B \cdot l$ , daher führen sie denselben Strom:

$$I = I_1 / 3 = 2886.75 / 3 = 962.3 \text{ A} \text{ und die Leistung } P = P_1 / 3 = 2 \text{ GW} / 3 = 666.67 \text{ MVA}$$

$$I / I_N = 962.3 / 2582.9 \text{ A} = 0.3726 : \text{ Auslastung: } 37.26\%!$$

3)

$$R_L = R'_B \cdot l = 31.15 \cdot 10^{-6} \cdot 250 \cdot 10^3 = 7.79 \Omega,$$

$$X_L = 2\pi f \cdot L'_B \cdot l = 2\pi \cdot 50 \cdot 0.81 \cdot 10^{-6} \cdot 250 \cdot 10^3 = 63.62 \Omega.$$

$U_1$  wird reell gewählt; daher ist auch wegen der Wirkleistungs-Einspeisung  $I_1$  reell!

$$\underline{U}_2 = U_1 - (Z_L / 3) \cdot I_1 = U_1 - (R + j \cdot X) \cdot I_1,$$

$$R = R_L / 3 = 7.79 / 3 = 2.6 \Omega, \quad X = X_L / 3 = 63.62 / 3 = 21.21 \Omega,$$

$$\underline{U}_{LL,2} = \sqrt{3} \cdot U_1 - \sqrt{3} \cdot (R + j \cdot X) \cdot I_1 = U_b - \sqrt{3} \cdot (R + j \cdot X) \cdot I_1,$$

$$\underline{U}_{LL,2} = 400 \cdot 10^3 - \sqrt{3} \cdot (2.6 + j \cdot 21.21) \cdot 2886.75 = (400 - 13 - j \cdot 106.05) \cdot 10^3 = (387 - j \cdot 106.05) \text{ kV}$$

$$U_{LL,2} = |\underline{U}_{LL,2}| = \sqrt{387^2 + 106.05^2} = 401.27 \text{ kV}$$

4)

Impedanz der beiden parallelen Leitungen A, B:  $Z_{AB} = Z_L / 2$ ,

Strom auf den Leitungen A, B:  $I_A = I_B = (\underline{U}_1 - \underline{U}_2) / Z_L$ ;  $I_{AB} = I_A + I_B = 2I_A = 2I_B$

Kirchhoff'sche Maschengleichung für Leitung C:  $\underline{U}_z + Z_{AB} \cdot I_{AB} = Z_L \cdot I_C$ ,

Kirchhoff'sche Knotengleichung:  $I_1 = I_{AB} + I_C = I_1$ .

$$\underline{U}_z + Z_{AB} \cdot (I_1 - I_C) - Z_L \cdot I_C = 0, \quad I_C = \frac{\underline{U}_z + Z_{AB} \cdot I_1}{Z_{AB} + Z_L} = \frac{-j \cdot k \cdot U_1 + Z_L / 2 \cdot I_1}{(3/2) \cdot Z_L},$$

$$I_C = \frac{-j \cdot k \cdot U_1 + (R_L + j \cdot X_L) \cdot I_1 / 2}{(3/2) \cdot (R_L + j \cdot X_L)} = \frac{((R_L I_1 / 2) - j \cdot (k \cdot U_1 - X_L \cdot (I_1 / 2)))}{(3/2) \cdot (R_L + j \cdot X_L)}$$

Über  $k$  kann nur der Imaginärteil des Zählers beeinflusst werden. Wenn dieser verschwindet, ist der Betrag  $I_C$  minimal:  $k \cdot U_1 - X_L \cdot (I_1 / 2) = 0$ ,  $k = X_L \cdot (I_1 / 2) / U_1$ ,

$$k = 63.62 \cdot (2886.75 / 2) / (400 \cdot 10^3 / \sqrt{3}) = 0.398$$

5)

$$I_C = \frac{R_L I_1 / 2}{(3/2) \cdot (R_L + j \cdot X_L)} = \frac{R_L \cdot (R_L - j \cdot X_L)}{3 \cdot (R_L^2 + X_L^2)} \cdot I_1 = \frac{7.79 \cdot (7.79 - j \cdot 63.62)}{3 \cdot (7.79^2 + 63.62^2)} \cdot 2886.75 \text{ A},$$

$$I_C = (14.2 - j \cdot 116.1) \text{ A}, \quad I_C = \sqrt{14.2^2 + 116.1^2} = 116.95 \text{ A},$$

$$\underline{I}_{AB} = I_1 - I_C = 2886.75 - 14.2 + j \cdot 116.1 = (2872.55 + j \cdot 116.1) \text{ A},$$

$$\underline{I}_A = \underline{I}_B = \underline{I}_{AB} / 2 = ((2872.55 + j \cdot 116.1) / 2) \text{ A} = (1436.28 + j \cdot 58.05) \text{ A},$$

$$I_A = I_B = \sqrt{1436.28^2 + 58.05^2} = 1437.45 \text{ A}$$

Vergleich zu 2):  $\frac{I_{A,5})}{I_{A,2})} = \frac{I_{B,5})}{I_{B,2})} = \frac{1437.45}{962.3} = 1.494, \quad \frac{I_{C,5})}{I_{C,2})} = \frac{116.95}{962.3} = 0.122$

Die Leitung C ist durch den „Querregel“-Transformator deutlich entlastet:

$$\frac{I_{A,5})}{I_N} = \frac{I_{B,5})}{I_N} = \frac{1437.45}{2582.9} = 0.557, \quad \frac{I_{C,5})}{I_N} = \frac{116.95}{2582.9} = 0.045$$

Wirkverluste in den Leitungen A, B, C zu 2) je Leitung:

$$P_{Cu,2}) = 3 \cdot R_L \cdot I^2 = 3 \cdot 7.79 \cdot 962.3^2 = 21.64 \text{ MW}$$

Gesamte Wirkverluste, bezogen auf  $P_1$ :  $3P_{Cu,2}) / P_1 = 3 \cdot 21.64 / 2000 = 0.0325$ .

Wirkverluste in den Leitungen A, B zu 5) je Leitung:

$$P_{Cu,5}) = 3 \cdot R_L \cdot I_{A,5})^2 = 3 \cdot 7.79 \cdot 1437.45^2 = 48.29 \text{ MW},$$

Wirkverluste in Leitungen C:  $P_{Cu,C,5}) = 3 \cdot R_L \cdot I_{C,5})^2 = 3 \cdot 7.79 \cdot 116.95^2 = 0.32 \text{ MW}$

Gesamte Wirkverluste, bezogen auf  $P_1$ :

$$(2P_{Cu,5}) + P_{Cu,C,5}) / P_1 = (2 \cdot 48.29 + 0.32) / 2000 = 0.0485.$$

Durch die 50 % höhere Belastung der Leitungen A, B steigen die Gesamtverluste um  $0.0485 / 0.0325 = 1.49$  an!

6)

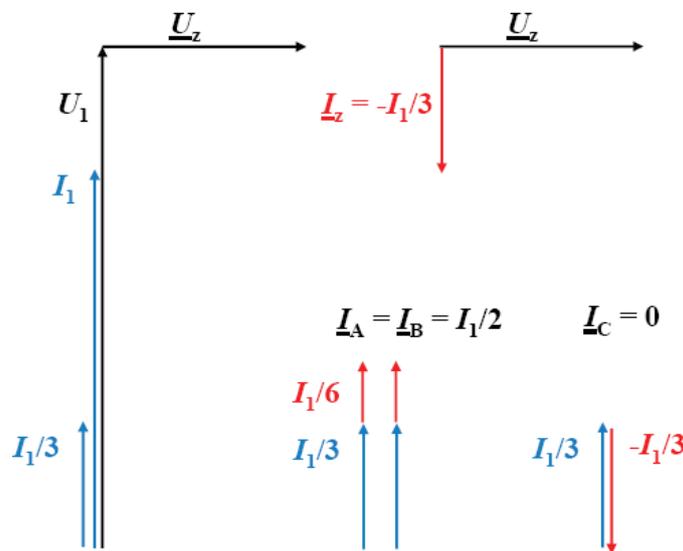


Bild V22.2: Spannungs- und Stromzeigerdiagramm für die Ströme der drei verlustlosen parallelen Freileitungen A, B, C und der Zusatzstrom  $I_z$  auf Grund der Serien-Zusatzspannung  $U_z$  in Freileitung C

$U_z$  speist den Zusatzstrom  $I_z$  ein:

$$R'_B = 0 \Rightarrow \underline{Z}_L = jX_L : \underline{I}_z = \frac{\underline{U}_z}{\frac{3}{2} \cdot jX_L} = \frac{-j \cdot k \cdot U_1}{\frac{3}{2} \cdot jX_L} = \frac{-j \cdot X_L \cdot \frac{I_1}{2} \cdot \frac{U_1}{U_1}}{\frac{3}{2} \cdot jX_L} = -\frac{I_1}{3},$$

$$\underline{I}_C = \frac{I_1}{3} + \underline{I}_z = \frac{I_1}{3} - \frac{I_1}{3} = 0, \quad \underline{I}_A = \frac{I_1}{3} - \frac{\underline{I}_z}{2} = \frac{I_1}{3} + \frac{I_1}{6} = \frac{I_1}{2} = \underline{I}_B,$$

Abschätzung der Verlustzunahme:

$$\frac{P_{\text{Cu},5)}{P_{\text{Cu},2)} = \frac{\left(\frac{I_A}{I_1/3}\right)^2 + \left(\frac{I_B}{I_1/3}\right)^2 + \left(\frac{I_C}{I_1/3}\right)^2}{3} = (1.5^2 + 1.5^2 + 0)/3 = 1.5!$$

**Aufgabe V23:** Ohm'sche Belastung einer Freileitung

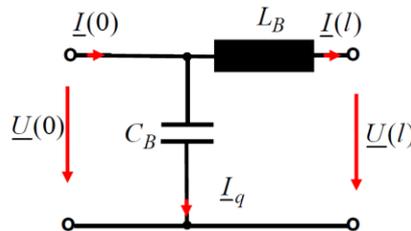


Bild V23.1:  $\Gamma$ -Ersatzschaltbild einer verlustlosen Freileitung je Phase

- 1) Darf eine näherungsweise verlustlos angenommene 110 kV-Drehstrom-Freileitung, 50 Hz, Leiterradius  $R = 11 \text{ mm}$ , Leiterstromdichte  $J = 1.7 \text{ A/mm}^2$ , Länge 300 km, mittlerer Leiterabstand  $\Delta = 4 \text{ m}$ , als „elektrisch kurze“ Leitung mit dem Ersatzschaltbild Bild V23.1 (näherungsweise) beschrieben werden? Warum?
- 2) Wie groß sind am Einspeisepunkt  $z = 0$  Nennstrom, Nennphasenspannung und Nennscheinleistung?
- 3) Berechnen Sie  $L_B$  und  $C_B$  sowie die zugehörigen Impedanz-Beträge  $Z_l$  und  $Z_q$  des Ersatzschaltbilds V23.1, den Ladestrom der leerlaufenden Leitung sowohl komplex als auch den Betrag (Effektivwert) in A und in % des Nennstroms!
- 4) Die Leitung wird je Phase mit dem ohm'schen Widerstand  $Z_A = R$  abgeschlossen. Geben Sie allgemeine Ausdrücke für Wirk- und Blindleistung  $P$  und  $Q$  am Einspeisepunkt  $z = 0$  in Abhängigkeit von  $Z_A, L_B, C_B$  an, wenn die Spannung am Einspeisepunkt  $\underline{U}(0) = U(0) = U_1$  konstant ist!
- 5) Im verlustlosen Leitungswellenmodell tritt bei  $Z_A = Z_0$  (Wellenwiderstand) die „natürliche“ Leistung  $P_{\text{Nat}}$  auf, und die Blindleistung ist  $Q = 0$ . Das Ersatzschaltbild V23.1 gilt nur näherungsweise. Berechnen Sie damit jenes  $Z_A$ , bei dem  $Q = 0$  ist. Gilt dann auch  $Z_A = Z_0$ ? Oder wenigstens näherungsweise?
- 6) Bestimmen Sie zu  $Q = 0$  die „natürliche“ Leistung  $P_{\text{Nat}}$  mit dem Ersatzschaltbild V23.1!
- 7) Wie groß ist die maximal übertragbare Wirkleistung  $P_{\text{max}}$  und bei welchem  $Z_A = Z_{\text{Am}}$  tritt sie auf? Wie groß ist dabei  $Q(Z_{\text{Am}})$ ?
- 8) Bestimmen Sie  $P_k$  und  $Q_k$  bei Leitungskurzschluss!
- 9) Skizzieren Sie  $Q(P)$  als  $q(p)$  ( $q: Q/(2P_{\text{max}}), p: P/(2P_{\text{max}})$ ) wobei Sie zunächst allgemein  $p^2(q)$  bestimmen und daraus als  $q(p)$  mit den Zahlenwerten von 5) ... 8) auftragen!

**V23 (Lösung):** Ohm'sche Belastung einer Freileitung

1)

Ja, denn: Wellenlänge:  $\lambda = c_0 / f = 3 \cdot 10^8 / 50 = 6000 \text{ km}$ ,

$\beta \cdot l = (2\pi / \lambda) \cdot l = (2\pi / 6 \cdot 10^6) \cdot 300 \cdot 10^3 = 0.314 < 1$ : Die Leitung ist „elektrisch kurz“. Es darf daher das  $\Gamma$ -Seriensersatzschaltbild verwendet werden.

2)

$U(0) = 110/\sqrt{3} = 63.5 \text{ kV}$  je Phase,  $I(0) = J \cdot R^2 \pi = 646 \text{ A} = I_N$ ,

$S(0) = 3 \cdot U(0) \cdot I(0) = 123 \text{ MVA}$ .

3)

$$L'_B \approx \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{\Delta}{R}\right) = 1.179 \mu\text{H/m}, \quad C'_B \approx \frac{2\pi \cdot \epsilon_0}{\ln(\Delta/R)} = 9.44 \text{ pF/m},$$

$$L'_B = 1.179 \mu\text{H/m} \Rightarrow L_B = L'_B \cdot l = 1.179 \cdot 10^{-6} \cdot 300 \cdot 10^3 = 0.354 \text{ H},$$

$$C'_B = 9.44 \text{ pF/m} \Rightarrow C_B = C'_B \cdot l = 9.44 \cdot 10^{-12} \cdot 300 \cdot 10^3 = 2.83 \mu\text{F},$$

$$Z_l = X_l = \omega \cdot L_B = 2\pi \cdot 50 \cdot 0.354 = 111.2 \Omega,$$

$$Z_q = X_q = 1/(\omega \cdot C_B) = 1/(2\pi \cdot 50 \cdot 2.83 \cdot 10^{-6}) = 1124.8 \Omega.$$

z. B.:  $\underline{U}(0) = U(0)$ :

$$\underline{I}(0) = \underline{I}_q = \underline{I}_C = j \cdot \underline{U}(0) \cdot \omega C_B = j \cdot U(0) / X_q = j \cdot 63.5 \cdot 10^3 / 1124.8 = j \cdot 56.5 \text{ A},$$

Der Ladestrom eilt der Spannung um  $90^\circ$  vor:  $I_C = 56.5 \text{ A} = 0.087 \cdot I_N$ , und beträgt 8.7% des Nennstroms.

4)

Komplexer Strom:

$$\underline{I}(0) = \underline{I}_q + \underline{I}(l) = U_1 \cdot j \cdot \omega C_B + \frac{U_1}{Z_A + j \cdot \omega L_B} = U_1 \cdot \left\{ j \cdot \omega C_B + \frac{Z_A - j \cdot \omega L_B}{Z_A^2 + (\omega L_B)^2} \right\},$$

$$\text{Konjugiert komplexer Strom: } (\underline{I}(0))^* = U_1 \cdot \left\{ -j \cdot \omega C_B + \frac{Z_A + j \cdot \omega L_B}{Z_A^2 + (\omega L_B)^2} \right\},$$

$$\text{Komplexe Scheinleistung: } \underline{S}(0) = 3 \cdot U(0) \cdot (\underline{I}(0))^* = 3 \cdot (P + j \cdot Q),$$

$$\underline{S}(0) = 3 \cdot U_1^2 \cdot \left\{ -j \cdot \omega C_B + \frac{Z_A + j \cdot \omega L_B}{Z_A^2 + (\omega L_B)^2} \right\},$$

$$P = \frac{3 \cdot U_1^2 \cdot Z_A}{Z_A^2 + (\omega L_B)^2}, \quad Q = 3 \cdot U_1^2 \cdot \omega C_B \left\{ \frac{L_B / C_B}{Z_A^2 + (\omega L_B)^2} - 1 \right\}.$$

5)

$$Q = 0 \Rightarrow L_B / C_B = Z_A^2 + (\omega L_B)^2 \Rightarrow Z_A = Z_{A0} = \sqrt{\frac{L_B}{C_B} - (\omega L_B)^2} = \sqrt{\frac{L_B}{C_B}} \cdot \sqrt{1 - \omega^2 L_B C_B}. \text{ Mit 3)}$$

folgt  $\omega \cdot L_B \cdot \omega \cdot C_B = 111.2 \Omega / 1124.8 \Omega = 0.099 \ll 1$ , daher:  $Z_A \approx \sqrt{\frac{L_B}{C_B}} = Z_0$ . Es tritt auch bei

diesem Ersatzschaltbild die natürliche Leistung näherungsweise bei  $Z_A = Z_0$  auf.

6)

$$P(Q=0) = \frac{3 \cdot U_1^2 \cdot Z_{A0}}{Z_{A0}^2 + (\omega L_B)^2} = \frac{3 \cdot U_1^2 \cdot \sqrt{\frac{L_B}{C_B}} \cdot \sqrt{1 - \omega^2 L_B C_B}}{\frac{L_B}{C_B} - (\omega L_B)^2 + (\omega L_B)^2} \approx \frac{3 \cdot U_1^2}{\sqrt{\frac{L_B}{C_B}}} = \frac{3 \cdot U_1^2}{Z_0} = P_{Nat},$$

$$Z_0 = \sqrt{L_B / C_B} = \sqrt{0.354 / (2.83 \cdot 10^{-6})} = 353.7 \Omega, \quad P_{Nat} = \frac{3 \cdot 63500^2}{353.7} = 34.2 \text{ MW}.$$

7)

$$P(Z_A) = \frac{3 \cdot U_1^2 \cdot Z_A}{Z_A^2 + (\omega L_B)^2} = \max? \Rightarrow \frac{dP}{dZ_A} = 0 \Rightarrow Z_A^2 = (\omega L_B)^2 \Rightarrow Z_A = Z_{Am} = \omega L_B = 111.2 \Omega!$$

$$P_{\max} = P(Z_{Am}) = \frac{3 \cdot U_1^2}{2\omega L_B} = \frac{3 \cdot 63500^2}{2 \cdot 111.2} = 54.4 \text{ MW} . \text{ Die zugehörige Blindleistung ist induktiv:}$$

$$Q(Z_{Am}) = 3 \cdot U_1^2 \cdot \omega C_B \left\{ \frac{L_B / C_B}{2(\omega L_B)^2} - 1 \right\} = 3 \cdot \frac{63500^2}{1124.8} \cdot \left\{ \frac{353.7^2}{2 \cdot 111.2^2} - 1 \right\} = 43.65 \text{ MVar} .$$

8)

$$\text{Kurzschluss: } Z_A = 0 \Rightarrow P_k = P(Z_A = 0) = 0 ,$$

$$Q_k = Q(Z_A = 0) = 3 \cdot U_1^2 \cdot \left\{ \frac{1}{\omega L_B} - \omega C_B \right\} = 3 \cdot 63500^2 \cdot \left\{ \frac{1}{111.2} - \frac{1}{1124.8} \right\} = 98.0 \text{ MVar} .$$

9)

$$\frac{P}{3 \cdot U_1^2} = p = \frac{(Z_A / \omega L_B)}{(Z_A / \omega L_B)^2 + 1} = \frac{\xi}{\xi^2 + 1} , \quad \frac{Q}{3 \cdot U_1^2} = q = \frac{1}{(Z_A / \omega L_B)^2 + 1} - \omega^2 L_B C_B = \frac{1}{\xi^2 + 1} - q_B ,$$

$$p^2 = (q + q_B) \cdot (1 - q - q_B) , \quad p = \sqrt{(q + q_B) \cdot (1 - q - q_B)} , \quad \frac{P}{3 \cdot U_1^2} = p = \frac{P}{2P_{\max}}$$

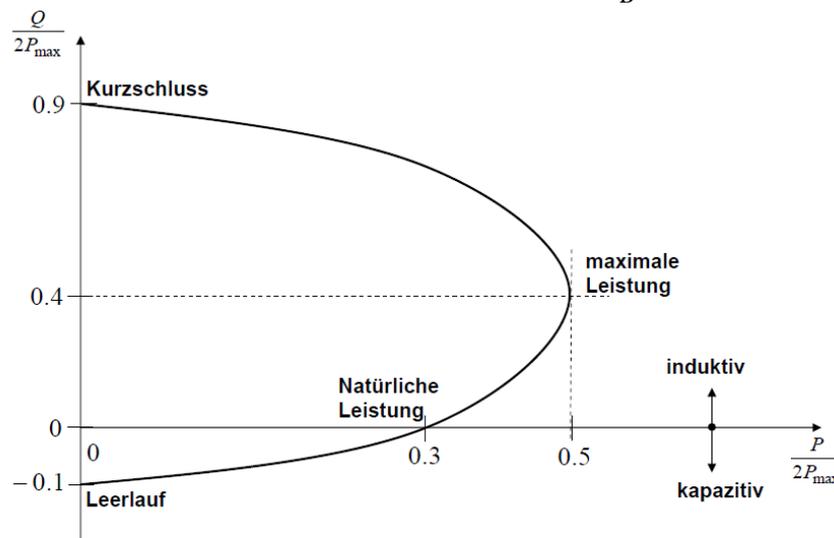


Bild V23.2: Blindleistung in Abhängigkeit der Wirkleistung mit dem Ersatzschaltbild Bild V23.1 einer verlustlosen Freileitung bei veränderlicher *ohm*'scher Belastung

**Aufgabe S1:** Magnetspule als Energiespeicher

- 1) Eine Magnetspule als Energiespeicher mit dem Inhalt  $W = 10$  MJ wird während einer Minute zu 75% entleert. Für welche Wirkleistung  $P$  ist der angeschlossene leistungselektronische Energiewandler zu bemessen?
- 2) Der Energiewandler erzeugt für die zu übertragende Wirkleistung  $P$  ein dreiphasiges Wechselstromsystem mit der verketteten Spannung  $U = 400$  V bei 50 Hz. Wie groß ist der Phasenstrom-Effektivwert  $I$ ? Wie groß ist bei einer zulässigen Stromdichte von kurzzeitig  $J = 40$  A/mm<sup>2</sup> der benötigte Kabelquerschnitt  $q_{Cu}$ ?
- 3) Wenn der Energiewandler durch Phasenverschiebung eine zusätzliche Blindleistung  $Q$  von 25% der Wirkleistung erzeugt, wie groß sind dann Phasenstrom und Kabelquerschnitt?

**Aufgabe S1 (Lösung):** Magnetspule als Energiespeicher

1)

$$P = 0.75 \cdot W / t = 0.75 \cdot 10^7 / 60 = 125000 \text{ W.}$$

2)

$$P = S = \sqrt{3} \cdot U \cdot I \Rightarrow I = 125000 / (\sqrt{3} \cdot 400) = 180.422 \text{ A,}$$

$$J = I / q_{Cu} \Rightarrow q_{Cu} = I / J = 180.422 / 40 = 4.51 \text{ mm}^2.$$

3)

$$S = \sqrt{3} \cdot U \cdot I = \sqrt{P^2 + Q^2} = P \cdot \sqrt{1 + (Q/P)^2} = 125000 \cdot \sqrt{1 + 0.25^2} = 128847.051 \text{ W,}$$

$$I = 128847.051 / (\sqrt{3} \cdot 400) = 185.975 \text{ A,}$$

$$J = I / q_{Cu} \Rightarrow q_{Cu} = I / J = 185.975 / 40 = 4.649 \text{ mm}^2.$$

Der Kabelquerschnitt kann näherungsweise unverändert wie bei 2) beibehalten werden.

**Aufgabe S2:** Schwungmassenspeicher

Ein Schwungmassenspeicher (rotierender Drehzylinder, Radius  $R$ , Länge  $L$ , Dichte  $\gamma$ ) soll allgemein eine bestimmte kinetische Energie  $W_k$  bei einer Drehzahl  $n$  speichern. Wegen der enormen Fliehkraftbeanspruchung soll die Umfangsgeschwindigkeit des Zylinders den Wert  $v_{\max}$  (z. B. Stahlzylinder: 250 m/s) nicht übersteigen. Die zugehörige maximale mechanische Spannung tritt nämlich dabei in der Zylinderachse auf und ist in Radialrichtung und

Tangentialrichtung gleich groß mit  $\sigma_{\max} = \gamma \cdot \frac{3+\mu}{8} \cdot (\omega \cdot R)^2 = \gamma \cdot \frac{3+\mu}{8} \cdot v_{\max}^2$ . Dabei ist  $\mu$  die

Poisson'sche Querkontraktionszahl (Stahl:  $\mu = 0.3$ ).

1) Geben Sie eine Dimensionierungsgleichung für  $R^2 \cdot L$  an!

2) Für einen Energieinhalt von  $W_k = 1$  kWh soll ein Stahl-Schwungrad dimensioniert werden ( $\gamma_{\text{Stahl}} = 7850$  kg/m<sup>3</sup>). Geben Sie die Abmessungen  $R$ ,  $L$  für eine Betriebsdrehzahl a) 10000/min, b) 20000/min an!

3) Bei welcher Betriebsdrehzahl erfüllen die Abmessungen  $R = 2L$  die Bedingung  $W_k = 1$  kWh?

**Aufgabe S2 (Lösung):** Schwungmassenspeicher

1)

$$\text{Trägheitsmoment: } J = M \cdot R^2 / 2 = R^2 \pi \cdot L \cdot \gamma \cdot R^2 / 2 = \pi \cdot L \cdot \gamma \cdot R^4 / 2,$$

$$W_k = J \cdot (2\pi n)^2 / 2 = \pi \cdot L \cdot \gamma \cdot R^4 \cdot (2\pi n)^2 / 4, \quad \sigma_{\max} = \gamma \cdot \frac{3+\mu}{8} \cdot (2\pi n \cdot R)^2,$$

$$W_k = \pi \cdot L \cdot \gamma \cdot R^2 \cdot (2\pi n R)^2 / 4 = \pi \cdot L \cdot \gamma \cdot R^2 \cdot \frac{8\sigma_{\max}}{\gamma \cdot (3+\mu) \cdot 4} = L \cdot R^2 \cdot \frac{2\pi \cdot \sigma_{\max}}{3+\mu}.$$

Dimensionierungsgleichung:  $L \cdot R^2 = W_k \cdot \frac{3+\mu}{2\pi \cdot \sigma_{\max}}.$

2)

$$\sigma_{\max} = \gamma_{\text{Stahl}} \cdot \frac{3+\mu}{8} \cdot (2\pi n \cdot R)^2 = \gamma_{\text{Stahl}} \cdot \frac{3+\mu}{8} \cdot v_{\max}^2 = 7850 \cdot \frac{3.3}{8} \cdot 250^2 = 202.4 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2,$$

$$L \cdot R^2 = W_k \cdot \frac{3+\mu}{2\pi \cdot \sigma_{\max}} = 10^3 \cdot 3600 \cdot \frac{3.3}{2\pi \cdot 202.4 \cdot 10^6} = 9.34 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3.$$

a)  $n = 10000/\text{min}$ :

$$R = v_{\max} / (2\pi \cdot n) = 250 / (2\pi \cdot 10000 / 60) = 239 \text{ mm}, \quad L = 9.34 \cdot 10^{-3} / 0.239^2 = 164 \text{ mm}.$$

Kontrolle:  $J = \pi \cdot L \cdot \gamma_{\text{Stahl}} \cdot R^4 / 2 = \pi \cdot 0.164 \cdot 7850 \cdot 0.239^4 / 2 = 6.595 \text{ kg} \cdot \text{m}^2,$

$$W_k = J \cdot (2\pi n)^2 / 2 = 6.595 \cdot (2\pi \cdot 10000 / 60)^2 / 2 = 1 \text{ kWh}.$$

b)  $n = 20000/\text{min}$ :

$$R = v_{\max} / (2\pi \cdot n) = 250 / (2\pi \cdot 20000 / 60) = 119 \text{ mm}, \quad L = 9.34 \cdot 10^{-3} / 0.119^2 = 655 \text{ mm},$$

Kontrolle:  $J = \pi \cdot L \cdot \gamma_{\text{Stahl}} \cdot R^4 / 2 = \pi \cdot 0.655 \cdot 7850 \cdot 0.119^4 / 2 = 1.621 \text{ kg} \cdot \text{m}^2,$

$$W_k = J \cdot (2\pi n)^2 / 2 = 1.621 \cdot (2\pi \cdot 20000 / 60)^2 / 2 \cong 1 \text{ kWh}.$$

3)

$$(R/2) \cdot R^2 = W_k \cdot \frac{3+\mu}{2\pi \cdot \sigma_{\max}} \Rightarrow R = \sqrt[3]{W_k \cdot \frac{3+\mu}{\pi \cdot \sigma_{\max}}} = \sqrt[3]{3.6 \cdot 10^6 \cdot \frac{3.3}{\pi \cdot 202.4 \cdot 10^6}} = 0.2653 \text{ m},$$

$$n = v_{\max} / (2\pi \cdot R) = 250 / (2\pi \cdot 0.2653) = 149.95 / \text{s} = 8997 / \text{min}.$$

Kontrolle:  $J = \pi \cdot L \cdot \gamma_{\text{Stahl}} \cdot R^4 / 2 = \pi \cdot 0.2653 \cdot 7850 \cdot 0.2653^4 / 4 = 8.1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2,$

$$W_k = J \cdot (2\pi n)^2 / 2 = 8.1 \cdot (2\pi \cdot 149.95)^2 / 2 \cong 1 \text{ kWh}.$$

**Aufgabe S3:** Energiespeicher-Vergleich

1) Berechnen Sie die in einer mit der Drehzahl  $n$  rotierenden zylindrischen Scheibe (Radius  $R$ , Massedichte  $\gamma$ ) gespeicherte kinetische Energie  $W_k$  pro Masse  $m$  und pro Volumen  $V$  allgemein, wenn die maximal zulässige mechanische Spannung (Zerreißfestigkeit!)

$$\sigma_{\max} = \gamma \cdot \frac{3+\mu}{8} \cdot (2\pi \cdot n \cdot R)^2 \quad \text{nicht \u00fcberschritten werden soll (Poisson'sche$$

Querkontraktionszahl  $\mu \approx 0.3$ )!

2) Hat eine Scheibe aus Kohlefaser-Harz-Komposit (CFK,  $\sigma_{\max} = 1100 \text{ N/mm}^2$ ,  $\gamma = 1600 \text{ kg/m}^3$ ) eine h\u00f6here massenbezogene und volumenbezogene gespeicherte Energie als eine Stahlscheibe  $\sigma_{\max} = 450 \text{ N/mm}^2$ ,  $\gamma = 7850 \text{ kg/m}^3$ ?

3) Eine große 22 kWh-Bleibatterie ist als Stromspeicher f\u00fcr eine Photovoltaikanlage (Spitzenleistung 10 kW) mit den Abmessungen 830 mm x 400 mm x 900 mm und  $m = 740 \text{ kg}$  f\u00fcr 48 V und 2500 Zyklen bei 50% Entladetiefe ausgelegt. Wie groß ist die Ladeleistung  $P$  bei  $I = 160 \text{ A}$  Ladestrom? Wie groß ist die Ah-Zahl? Vergleichen Sie massenbezogene und

volumenbezogene gespeicherte Energie mit den Werten von 2), wobei Sie beim Schwungrad für das erforderliche Gehäuse Volumen und Masse verdoppeln!

4) Eine Blei-Autobatterie ist als Massenprodukt für hohe Startströme, geringes Gewicht, aber geringe Zyklenzahl (ca. 500) ausgelegt. Vergleichen Sie massenbezogene und volumenbezogene gespeicherte Energie für die Daten einer 12 V-Starterbatterie, 80 Ah, 310 mm × 180 mm × 180 mm,  $m = 18.8$  kg, Starterstrom 740 A mit den Daten aus 3).

5) Lithium-Ionen-Akkumulatoren für die Elektroautomobile haben Energiedichten von ca. 150 Wh/kg. Schlagen sie damit CFK-Schwungräder?

### Aufgabe S3 (Lösung): Energiespeicher

1)

Polares Trägheitsmoment um die Drehachse der zylindrischen Scheibe:  $J = m \cdot R^2 / 2$ ,

$$\text{Kinetische Energie: } W_k = J \cdot (2\pi \cdot n)^2 / 2 = \frac{J}{\gamma \cdot R^2} \cdot \frac{4\sigma_{\max}}{3 + \mu} = \frac{2m \cdot \sigma_{\max}}{\gamma \cdot (3 + \mu)},$$

$$\text{Energie/Masse: } W_k / m = \frac{2 \cdot \sigma_{\max}}{\gamma \cdot (3 + \mu)}, \text{ Energie/Volumen: } W_k / V = \frac{2 \cdot \sigma_{\max}}{3 + \mu},$$

2)

$$\text{CFK: } \frac{W_k}{m} = \frac{2 \cdot 1100 \cdot 10^6}{1600 \cdot 3.3} = 416.7 \text{ kJ/kg}, \text{ Stahl: } \frac{W_k}{m} = \frac{2 \cdot 450 \cdot 10^6}{7850 \cdot 3.3} = 34.7 \text{ kJ/kg},$$

$$\text{CFK/Stahl: } 416.7 / 34.7 = 12,$$

$$\text{CFK: } \frac{W_k}{V} = \frac{2 \cdot 1100 \cdot 10^6}{3.3} = 666.7 \text{ MJ/m}^3, \text{ Stahl: } \frac{W_k}{V} = \frac{2 \cdot 450 \cdot 10^6}{3.3} = 272.4 \text{ MJ/m}^3,$$

$$\text{CFK/Stahl: } 666.7 / 272.4 = 2.45.$$

3)

$$P = U \cdot I = 48 \cdot 160 = 7680 \text{ W} < 10 \text{ kW}, 22 \text{ kWh} / 48 \text{ V} = 458 \text{ Ah},$$

$$\frac{W}{m} = \frac{22000 \cdot 3600}{740} = 107 \text{ kJ/kg},$$

$$V = 0.83 \cdot 0.4 \cdot 0.9 \text{ m}^3 = 0.2988 \text{ m}^3, \frac{W}{V} = \frac{22000 \cdot 3600}{0.2988} = 265 \text{ MJ/m}^3.$$

Die Pb-Batterie hat nur etwa 50% der Energie je Masse des CFK-Schwungrads, aber 600% des Stahlschwungrads. Die Pb-Batterie hat nur etwa 80% der Energie je Volumen des CFK-Schwungrads, aber 200% des Stahlschwungrads.

4)

$$W = 12 \text{ V} \cdot 80 \text{ Ah} = 960 \text{ Wh} = 3.456 \cdot 10^6 \text{ J}, \frac{W}{m} = \frac{3.456 \cdot 10^6}{18.8} = 184 \text{ kJ/kg},$$

$$V = 0.31 \cdot 0.18 \cdot 0.18 \text{ m}^3 = 0.01 \text{ m}^3, \frac{W}{V} = \frac{3.456 \cdot 10^6}{0.01} = 344 \text{ MJ/m}^3.$$

Die Pb-Autobatterie ist bei gleichem Energieinhalt um 40% leichter als die stationäre Batterie und hat um 25% geringeres Volumen, ist aber für Langzeitspeicherung (hohe Zyklenzahl!) weniger geeignet.

5)

$$\frac{W}{m} = 150 \cdot 3600 = 540 \text{ kJ/kg} > 0.5 \cdot 416.7 \text{ kJ/kg}. \text{ Lithium-Ionen-Akkumulatoren haben etwa für}$$

die Elektroautomobile haben etwa 2.6-fach höhere Energiedichten als CFK-Schwungräder, aber eine begrenzte Zyklenzahl von typisch max. 3000. Sie sind um ca. 2/3 leichter als vergleichbare Pb-Autobatterien.

**Aufgabe S4:** Kinetische Energie einer rotierenden Masse

Wie groß ist die kinetische Energie in einem mit der Drehzahl  $n = 10000/\text{min}$  rotierenden Stahlzylinder mit dem Radius  $R = 0.1 \text{ m}$  und der Länge  $L = 0.2 \text{ m}$ ? Die Dichte von Stahl beträgt etwa  $\gamma = 7850 \text{ kg/m}^3$ . Wegen der enormen Fliehkraftbeanspruchung soll die Umfangsgeschwindigkeit des Stahlzylinders  $250 \text{ m/s}$  nicht übersteigen. Ist diese Bedingung erfüllt?

**Aufgabe S4 (Lösung):** Kinetische Energie einer rotierenden Masse

$$M = R^2 \pi \cdot L \cdot \gamma = 0.1^2 \cdot \pi \cdot 0.2 \cdot 7850 = 49.3 \text{ kg}, \quad J = M \cdot R^2 / 2 = 49.3 \cdot 0.1^2 / 2 = 0.247 \text{ kg} \cdot \text{m}^2,$$

$$\omega = 2\pi \cdot n = 2\pi \cdot (10000/60) = 1047.2 \text{ rad/s} = 1047.2/\text{s},$$

$$W_k = 0.247 \cdot 1047.2^2 / 2 = 135433 \text{ J} = 0.0376 \text{ kWh},$$

$$v = 2r\pi \cdot n = 2\pi \cdot 0.1 \cdot (10000/60) = 104.7 \text{ m/s} < 250 \text{ m/s}.$$

Die Festigkeitsbedingung für den Stahlzylinder ist erfüllt.

**Aufgabe S5:** Magnetostatischer Energiespeicher

Ein magnetostatischer Energiespeicher ist aus  $Z = 360$  supraleitenden Ringspulen (mittlerer Radius  $R = 13 \text{ m}$ ), die ringförmig im Kreis zu einem Torus (mittlerer Torusradius  $R_T = 260 \text{ m}$ ) aufgestellt sind, aufgebaut! Die Windungszahl je Spule beträgt  $N = 196$ .

Der Supraleiter aus  $\text{Nb}_3\text{Sn}$ -Filamenten in einer „Kupfermatrix“ hat die Querschnittsabmessungen  $b_L \times h_L = 100 \times 50 \text{ mm}^2$  und leitet den Spulenstrom verlustfrei. Isolation und Kühlkanäle vergrößern den effektiven Leiterquerschnitt auf  $b \times h = 120 \times 70 \text{ mm}^2$ .

- 1) Wie groß sind Spulenbreite  $b_c$  und Spulenhöhe  $h_c$  bei 14 Leitern nebeneinander?
- 2) Wie groß ist der minimale Abstand  $\Delta$  zwischen den Spulen für den Kryostatbehälter (Siedebadkühlung mit flüssigem Helium,  $4.2 \text{ K}$ ) und die Stahl-Stützkonstruktion?
- 3) Wie groß sind Spulengleichstrom  $I$  und Leiterstromdichte  $J$ , damit an der Spulenoberfläche eine maximal zulässige Flussdichte  $B = 9 \text{ T}$  nicht überschritten werden darf? Wird der für den Supraleiter kritischen Stromdichtewert von  $60 \text{ A/mm}^2$  dabei nicht überschritten?
- 4) Wie groß ist die mittlere Flussdichte  $B_{av}$  bei  $r = R_T$ ? Bestimmen Sie mit ihr und dem Torusvolumen  $V_T = R_i^2 \cdot \pi \cdot 2R_T \cdot \pi$  ( $R_i =$  Spulinnenradius) die gespeicherte magnetische Energie  $W_m$  in Wh! Wie viele 3-Personen-Haushalte (elektrischer Energiebedarf  $3500 \text{ kWh/a}$ ) könnten ein Jahr lang versorgt werden?
- 5) Wie groß wären die Stromwärmeverluste (Leistung  $P_{Cu}$ ) einer konventionellen Kupferspulenordnung bei  $4.2 \text{ K}$ ? Verwenden Sie den Radius  $R$  zur Berechnung des ohm'schen Widerstands  $R_{Cu}$ ! ( $\kappa_{Cu}(4.2 \text{ K}) = 20 \text{ GS/m}$ ). In welcher Zeit  $t$  wäre der gesamte Energieinhalt durch die Verlustleistung der Spulen aufgebracht?
- 6) Wie groß müsste das Fassungsvermögen  $V$  eines kreisförmigen Speichersees (Radius  $R_s$ ) für Wasser bei einer mittleren Fallhöhe  $h = 100 \text{ m}$  und sein Radius  $R_s$  bei einer Seetiefe  $h_s = 30 \text{ m}$  sein, um dieselbe Energiemenge  $W_m$  als potentielle Energie des Wassers zu speichern?

**Aufgabe S5 (Lösung):** Magnetostatischer Energiespeicher

1)

$$b_c = 14 \cdot b = 14 \cdot 120 = 1680 \text{ mm}, \quad N = 196 = 14 \cdot 14 \rightarrow h_c = 14 \cdot h = 14 \cdot 70 = 980 \text{ mm}$$

2)

$$\text{Spulenaußenradius } R_a = R + (h_c/2) = 13 + (0.98/2) = 13.49 \text{ mm},$$

Innerer Torus-Radius:  $R_{Ti} = R_T - R_a = 260 - 13.49 = 246.51 \text{ m}$ ,

$$\Delta = \frac{R_{Ti} \cdot 2\pi - Z \cdot b_c}{Z} = \frac{246.51 \cdot 2\pi - 360 \cdot 1.680}{360} = 2.62 \text{ m}.$$

3)

$$B(R_T) = \frac{\mu_0 \cdot Z \cdot I \cdot N}{2R_T \cdot \pi} \rightarrow B_{\max} \text{ an der Spulenoberfläche auf der inneren Torusseite: } B_{\max} \text{ bei}$$

$$R_T^* = R_T - R_i !$$

Spulinnenradius  $R_i = R - \frac{h_c}{2} = 13 - 0.98/2 = 12.51 \text{ m}$ ,  $R_T^* = 260 - 12.51 = 247.49 \text{ m}$ ,

$$I = B_{\max} \cdot 2\pi \cdot R_T \cdot \frac{1}{\mu_0 \cdot Z \cdot N} = \frac{9 \cdot 2\pi \cdot 247.49}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 360 \cdot 196} = 157838 \text{ A},$$

$$J = \frac{I}{b_L h_L} = \frac{157838}{100 \cdot 50} = 31.56 \frac{\text{A}}{\text{mm}^2}, J < J_c ? : J = 31.25 \frac{\text{A}}{\text{mm}^2} < J_c = 60 \frac{\text{A}}{\text{mm}^2}.$$

4)

$$B_{\text{av}} = \frac{\mu_0 \cdot Z \cdot I \cdot N}{2R_T \cdot \pi} = \frac{R_T^*}{R_T} \cdot B_{\max} = \frac{247.49}{260} \cdot 9 = 8.57, w_m = \frac{B_{\text{av}}^2}{2\mu_0} = 29.2 \text{ MJ/m}^3,$$

$$V_T = 12.51^2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 260\pi = 803189 \text{ m}^3,$$

$$W_m = 803189 \text{ m}^3 \cdot 29.2 \cdot 10^6 = 23.47 \cdot 10^{12} \text{ J} = 6520 \text{ MWh},$$

$$n = \frac{6520 \cdot 10^3 \text{ kWh}}{3500 \text{ kWh}} = 1863 \text{ Haushalte könnten ein Jahr lang versorgt werden!}$$

5)

Mittlere Spulenwindungslänge:  $2\pi \cdot R = l_m = 2\pi \cdot 13 = 81.68 \text{ m}$ ,

Gesamte Leiterlänge:  $L = N \cdot l_m \cdot Z = 196 \cdot 81.68 \cdot 360 = 5763440 \text{ m} = 5763 \text{ km}$ ,

$$R_{\text{cu}} = \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{L}{b_L h_L} = \frac{1}{20 \cdot 10^9} \cdot \frac{5763440}{100 \cdot 50 \cdot 10^{-6}} = 57.63 \text{ m}\Omega,$$

$$P_{\text{cu}} = R_{\text{cu}} \cdot I^2 = 0.05763 \cdot 157838^2 = 1435836308 \text{ W},$$

$$t = \frac{W_m}{P_{\text{cu}}} = \frac{23.47 \cdot 10^{12}}{1.435 \cdot 10^9} = 16334 \text{ s} = 4.54 \text{ h}. \text{ Dies ist ein hypothetischer Wert, denn das}$$

Kühlsystem wäre für die hohe Kühlleistung zur Abfuhr von  $P_{\text{cu}}$  völlig überfordert. Die Spulen würden sofort schmelzen!

6)

$$W_m = m \cdot g \cdot h = V \cdot \gamma_{\text{H}_2\text{O}} \cdot g \cdot h, V = \frac{W_m}{\gamma_{\text{H}_2\text{O}} \cdot g \cdot h} = \frac{23.47 \cdot 10^{12}}{1000 \cdot 9.81 \cdot 100} = 23.9 \cdot 10^6 \text{ m}^3,$$

$$V = R_s^2 \cdot \pi \cdot h_s \rightarrow R_s = \sqrt{\frac{V}{\pi \cdot h_s}} = 503.65 \text{ m} \approx 0.5 \text{ km}.$$

### Aufgabe S6: Bleibatterie

Eine  $l = 200 \text{ m}$  lange Kupfer-Zweidrahtleitung soll in einem öffentlichen Gebäude von einer Blei-Notstrombatterie elektrischen Strom zur Beleuchtung von  $z = 100$  am Ende der Leitung

elektrisch parallel geschalteten Glühlampen zu je 40 W bei  $U_N = 230$  V DC leiten. Die Zellen-Leerlaufspannung der Batterie (= stromlos!) beträgt  $U_{Z0} = 2.0$  V, der Innenwiderstand je Zelle beim Zellenennstrom  $I_{BN} = 20$  A beträgt  $R_{iZ} = 4$  m $\Omega$ .

1) Berechnen Sie die elektrische Nennleistung  $P_N$ , so dass an den Lampen die anliegende Spannung exakt  $U_N$  ist! Bestimmen Sie den Nennstrom  $I_{NL}$  je Lampe und in der Leitung  $I_N$ ! Die Notbeleuchtung soll bei Ausfall des öffentlichen Netzes 10 Stunden leuchten: Wie groß müssen die Ampere-Stunden  $Q$  (Ah) der Batterie sein?

2) Die Leitung soll bei einer Leitertemperatur  $\vartheta = 50$  °C nur 5 % der Nennspannung als Spannungsfall  $\Delta U$  aufweisen ( $\kappa_{Cu,20^\circ C} = 57$  MS/m,  $\alpha_{Cu} = 1/255$  K<sup>-1</sup>). Wie groß müssen Sie den Leiterquerschnitt  $A$  dimensionieren? Verwenden Sie für  $A$  einen genormten Wert aus der folgenden Zahlenfolge (mm<sup>2</sup>) 1.5, 2.5, 4, 6, 10, 16, 25, 35! Wie groß ist dann  $\Delta U/U_N$  tatsächlich? Bestimmen Sie die Leiterstromdichte  $J$ , die Leitungsverluste  $P_d$ , die Verlustdichte je Leitervolumen  $P_d/V$ , die Kupfermasse  $m$  ( $\gamma_{Cu} = 8900$  kg/m<sup>3</sup>) sowie die Materialkosten  $K$  bei einem Großhandelspreis für die isolierte Cu-PVC-Leitung mit 20 Euro/kg (bezogen auf  $m$ )!

3) Wie viele Zellen  $z_B$  (bei  $I_{BN} = 20$  A) benötigt man in Reihe für den o.g. Notstrombetrieb? Wie groß sind (in kW) die Stromwärmeverluste  $P_{dB}$  in der Batterie? Berechnen Sie den Gesamtwirkungsgrad  $\eta_{res} = P_N / (P_N + P_d + P_{dB})$ ? Wie schwer ist die Batterie  $m_B$  bei einem Leistungsgewicht 40 Wh/kg (bei 50 % Pb, 50 % H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub>)?

4) Wie groß ist die der Batterie kurzfristig über einen direkt an den Batterieklemmen angeschlossenen externen Lastwiderstand  $R_a$  maximal entnehmbare Leistung  $P_{max}$ ? Wie groß sind der zugehörige Strom  $I^*$  und der Wirkungsgrad  $\eta^*$ ? Wie lange ( $t^*$ ) könnte diese Leistung der Batterie entnommen werden, bis diese völlig entladen ist (ohne die ggf. unzulässig hohe Erwärmung zu beachten)? Berechnen Sie das Verhältnis von  $R_a$  zum Batterie-Innenwiderstand  $R_i$ !

5) Berechnen Sie die Kapazität  $C_L$  der am Ende offenen Kupfer-Zweidrahtleitung! Der Leitermittenabstand  $\Delta$  der beiden Kupferdrähte beträgt näherungsweise den dreifachen Kupferdrahtradius  $R$ ! Beide Drähte sind vollständig von PVC umhüllt ( $\epsilon_{r,PVC} = 5$ ). Nach etwa 5 Zeitkonstanten  $\tau = (R_i + R_L) \cdot C_L$  ist die leerlaufende Leitung beim Zuschalten auf die Batterie vollständig aufgeladen. Bestimmen Sie damit die Zeit  $t_L$ , nach welcher am Leitungsende nach dem Zuschalten die Batterieerlaufspannung auftritt! Wie groß ist die im elektrischen Feld der Leitung gespeicherte elektrische Energie  $W_e$ ?

**Aufgabe S6 (Lösung):** Bleibatterie

1)

$$P_N = z \cdot U_N \cdot I_{NL} = z \cdot P_L = 100 \cdot 40 = 4000 = 4 \text{ kW} ,$$

$$I_{NL} = P_L / U_N = 40 / 230 = 0.174 \text{ A je Lampe, } I_N = z \cdot I_{NL} = 100 \cdot 0.174 = 17.4 \text{ A} ,$$

$$T = 10 \text{ h} : Q = I_N \cdot T = 17.4 \cdot 10 = 174 \text{ Ah} .$$

2)

$$\Delta U / U_N = 0.05 \Rightarrow \Delta U = 0.05 \cdot 230 = 11.5 \text{ V} , \Delta \vartheta = \vartheta - 20^\circ C = 50 - 20 = 30 \text{ K} ,$$

$$\kappa_{Cu,50} = \kappa_{Cu,20} / (1 + \alpha_{Cu} \cdot \Delta \vartheta) = 57 \cdot 10^6 / (1 + 30 / 255) = 51 \text{ MS/m} ,$$

$$\Delta U = \frac{2 \cdot l \cdot I_N}{\kappa_{Cu,50} \cdot A} \Rightarrow A = \frac{2 \cdot l \cdot I_N}{\kappa_{Cu,50} \cdot \Delta U} = \frac{2 \cdot 200 \cdot 17.4}{51 \cdot 10^6 \cdot 11.5} = 11.87 \text{ mm}^2 \Rightarrow A_{Cu} = 10 \text{ mm}^2 ,$$

$$J = \frac{I_N}{A_{Cu}} = \frac{17.4}{10} = 1.74 \text{ A/mm}^2 , R_L = \frac{2 \cdot l}{\kappa_{Cu,50} \cdot A_{Cu}} = \frac{2 \cdot 200}{51 \cdot 10^6 \cdot 10 \cdot 10^{-6}} = 0.78 \Omega ,$$

$$P_d = R_L \cdot I_N^2 = 0.78 \cdot 17.4^2 = 236.2 \text{ W} , P_d / P_N = 236.2 / 4000 = 0.059 \Leftrightarrow 5.9 \% \text{ statt } 5 \% \text{ wegen der Wahl eines genormten Leiterquerschnitts!}$$

$$V = 2 \cdot l \cdot A = 2 \cdot 200 \cdot 10 \cdot 10^{-6} = 0.004 \text{ m}^3, P_d / V = 236.2 / 0.004 = 59.25 \text{ kW/m}^3,$$

$$\text{Kontrollrechnung: } P_d / V = J^2 / \kappa_{\text{Cu},50} = (1.74 \cdot 10^6)^2 / (51 \cdot 10^6) = 59.36 \text{ kW/m}^3,$$

$$m = V \cdot \gamma_{\text{Cu}} = 0.004 \cdot 8900 = 35.6 \text{ kg}, K = 20 \text{ Euro/kg} \cdot m = 20 \cdot 35.6 = 712 \text{ Euro}.$$

3)

$$U_{Z0} \cdot z_B - (z_B \cdot R_{iZ} + R_L) \cdot I_N = U_N \Rightarrow z_B = \frac{U_N + R_L \cdot I_N}{U_{Z0} - R_{iZ} \cdot I_N} = \frac{230 + 0.78 \cdot 17.4}{2.0 - 4 \cdot 10^{-3} \cdot 17.4} = 126.2 \approx 126.$$

$$P_{dB} = z_B \cdot R_{iZ} \cdot I_N^2 = 126 \cdot 4 \cdot 10^{-3} \cdot 17.4^2 = 152.6 \text{ W},$$

$$\eta_{\text{res}} = \frac{P_N}{P_N + P_d + P_{dB}} = \frac{4000}{4000 + 236.2 + 152.6} = 0.911 = 91.1 \%,$$

$$P_B = \frac{P_N}{\eta_{\text{res}}} = \frac{4000}{0.911} = 4391 \text{ W} \Rightarrow W = P_B \cdot T = 4391 \cdot 10 = 43910 \text{ Wh},$$

$$m_B = \frac{P_N}{\eta_{\text{res}}} = \frac{W}{40 \text{ Wh/kg}} = \frac{43910}{40} = 1098 \text{ kg} \approx 1.1 \text{ Tonnen}.$$

4)

$$U_0 = U_{Z0} \cdot z_B = 2 \cdot 126 = 252 \text{ V}, R_i = R_{iZ} \cdot z_B = 4 \cdot 10^{-3} \cdot 126 = 0.504 \Omega,$$

$$U_0 = (R_i + R_a) \cdot I \Rightarrow P = R_a \cdot I^2 = \frac{R_a \cdot U_0^2}{(R_i + R_a)^2} \Rightarrow \frac{dP}{dR_a} = 0 = \frac{U_0^2}{(R_i + R_a)^2} - \frac{2R_a \cdot U_0^2}{(R_i + R_a)^3},$$

$$R_i - R_a = 0 \Rightarrow R_a^* = R_i = 0.504 \Omega, R_a^* / R_i = 1, I^* = \frac{U_0}{R_i + R_a^*} = \frac{252}{2 \cdot 0.504} = 250 \text{ A},$$

$$P_{\text{max}} = R_a^* \cdot (I^*)^2 = 0.504 \cdot 250^2 = 31.5 \text{ kW},$$

$$\eta^* = \frac{P_{\text{max}}}{P_{\text{max}} + P_{dB}} = \frac{R_a^* \cdot (I^*)^2}{R_a^* \cdot (I^*)^2 + R_i \cdot (I^*)^2} = \frac{R_a^*}{R_a^* + R_i} = \frac{1}{1+1} = 0.5,$$

$$Q = I^* \cdot t^* = 174 \text{ Ah} = 250 \text{ A} \cdot t^* \Rightarrow t^* = \frac{174}{250} = 0.696 \text{ h} = 42 \text{ min}.$$

5)

$$\text{Drahtradius: } R = \sqrt{A_{\text{Cu}} / \pi} = \sqrt{10 / \pi} = 1.78 \text{ mm}, \Delta = 3 \cdot R = 5.34 \text{ mm},$$

$$\text{Aus Kapitel V: } C_L = \frac{\pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot l}{\ln(\Delta / R)} = \frac{\pi \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 5 \cdot 200}{\ln(3)} = 25.3 \text{ nF},$$

$$t_L = 5 \cdot \tau = 5 \cdot (R_i + R_L) \cdot C_L = 5 \cdot (0.504 + 0.78) \cdot 25.3 \cdot 10^{-9} = 0.162 \mu\text{s},$$

$$W_e = C \cdot U_0^2 / 2 = 25.3 \cdot 10^{-9} \cdot 252^2 / 2 = 0.80 \text{ mJ}.$$

### Aufgabe S7: Energiespeicherung

In deutschen Pumpspeicherwerken können ca.  $W = 40 \text{ GWh}$  elektrische Energie als potentielle Energie des Wassers gespeichert werden.

1) Wie groß ist die gesamte Stauseeoberfläche  $A$  der Oberbecken aller Pumpspeicherkraftwerke, wenn der mittlere Höhenunterschied zwischen Oberbecken und Unterbecken  $h = 300 \text{ m}$  beträgt? Die mittlere Tiefe der Oberbecken wird mit  $t = 25 \text{ m}$  angenommen ( $\gamma_{\text{H}_2\text{O}} = 1000 \text{ kg/m}^3$ ). Der *Bodensee* hat eine Wasseroberfläche  $A_B = 536 \text{ km}^2$ . Bestimmen Sie das Verhältnis  $A/A_B$ !

2) Der *Bodensee* hat eine mittlere Wassertiefe  $t_B = 90$  m. Um welche Höhe  $\Delta h$  müsste man die Wassermassen des *Bodensees* anheben, um dieselbe Energie zu speichern wie in allen deutschen Pumpspeicherkraftwerken zusammen?

3) Der jährliche Umsatz an elektrischer Energie in *Deutschland* (letztlich zumeist in Wärme), genannt „Stromverbrauch“, beträgt ca.  $W_a = 610$  TWh. Auf welche Höhe  $h'$  müssten die Wassermassen des *Bodensees* angehoben werden, damit die dann gespeicherte potentielle Energie dem Wert  $W_a$  entspricht?

4) Berechnen Sie mit den Daten folgender fossiler Brennstoffe deren entsprechendes Volumen  $V$ , dargestellt als Würfel mit der Kantenlänge  $l$ , so dass deren Heizwert der in den deutschen Pumpspeicherwerken gespeicherten Energie  $W$  entspricht!

a) Steinkohle: Dichte:  $1.4 \text{ kg/dm}^3$ ,  $H_i = 29.3 \text{ MJ/kg}$

b) Dieseldieselkraftstoff: Dichte:  $0.84 \text{ kg/l}$ ,  $H_i = 43 \text{ MJ/kg}$ ,

c) Erdgas bei 1 bar,  $20 \text{ }^\circ\text{C}$ :  $35 \text{ MJ/m}^3$  und bei 100 bar.

5) Bei einer möglichen künftigen „Wasserstoff“-Energiewirtschaft wird Wasserstoff anstelle fossiler Brennstoffe als Energieträger eingesetzt. Berechnen Sie analog zu 4)  $V$  und  $l$  für

a) gasförmigen Wasserstoff bei 1 bar,  $25 \text{ }^\circ\text{C}$  (Dichte:  $0.09 \text{ kg/m}^3$ ,  $H_i = 120 \text{ MJ/kg}$ ) und 100 bar sowie für

b) durch starke Abkühlung verflüssigten Wasserstoff bei 1 bar,  $-253.15 \text{ }^\circ\text{C}$  (Dichte:  $70.9 \text{ kg/dm}^3$ )!

Fertigen Sie zu 4) und 5) eine Übersichtstabelle für  $V$  und  $l$  an!

### Aufgabe S7 (Lösung): Energiespeicherung

1)

$$W = 40 \text{ GWh} = 40 \cdot 10^9 \cdot 3600 = 144 \cdot 10^{12} \text{ J}, \quad W = m \cdot g \cdot h = A \cdot t \cdot \gamma_{\text{H}_2\text{O}} \cdot g \cdot h,$$

$$A = \frac{W}{t \cdot \gamma_{\text{H}_2\text{O}} \cdot g \cdot h} = \frac{144 \cdot 10^{12}}{25 \cdot 1000 \cdot 9.81 \cdot 300} = 1.96 \cdot 10^6 \text{ m}^2 = 1.96 \text{ km}^2,$$

$$A / A_B = \frac{1.96}{536} = 0.0037 = 0.37 \text{ } \%$$

2)

$$W = A_B \cdot t_B \cdot \gamma_{\text{H}_2\text{O}} \cdot g \cdot \Delta h \Rightarrow \Delta h = \frac{W}{A_B \cdot t_B \cdot \gamma_{\text{H}_2\text{O}} \cdot g} = \frac{144 \cdot 10^{12}}{536 \cdot 10^6 \cdot 90 \cdot 10^3 \cdot 9.81} = 0.3 \text{ m}.$$

3)

$$W_a = 610 \text{ TWh} = 610 \cdot 10^{12} \cdot 3600 = 2196 \cdot 10^{15} \text{ J},$$

$$h' = \frac{W_a}{A_B \cdot t_B \cdot \gamma_{\text{H}_2\text{O}} \cdot g} = \frac{2196 \cdot 10^{15}}{536 \cdot 10^6 \cdot 90 \cdot 10^3 \cdot 9.81} = 4640 \text{ m}.$$

Zum Vergleich: Höchster Berg *Europas*: *Mont Blanc*: 4810 m.

4)

$$\text{a) Heizwert/Volumen: } H_{iV} = 29.3 \frac{\text{MJ}}{\text{kg}} \cdot 1.4 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} = 41020 \frac{\text{MJ}}{\text{m}^3},$$

$$V = l^3 = \frac{W}{H_{iV}} = \frac{144 \cdot 10^{12}}{41020 \cdot 10^6} = 3510.5 \text{ m}^3 \Rightarrow l = \sqrt[3]{3510.5} = 15.2 \text{ m}.$$

$$\text{b) Heizwert/Volumen: } H_{iV} = 43 \frac{\text{MJ}}{\text{kg}} \cdot 0.84 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} = 36120 \frac{\text{MJ}}{\text{m}^3},$$

$$V = l^3 = \frac{W}{H_{iV}} = \frac{144 \cdot 10^{12}}{36120 \cdot 10^6} = 3986.7 \text{ m}^3 \Rightarrow l = \sqrt[3]{3986.7} = 15.9 \text{ m}.$$

c) 1 bar: Heizwert/Volumen:  $H_{iV} = 35 \frac{\text{MJ}}{\text{m}^3}$ ,

$$V = l^3 = \frac{W}{H_{iV}} = \frac{144 \cdot 10^{12}}{35 \cdot 10^6} = 4114286 \text{ m}^3 \Rightarrow l = \sqrt[3]{4114286} = 160.2 \text{ m}.$$

Bei 100 bar: Ideale Gas-Gleichung bei  $T = \text{konst.}$  (Boyle-Mariotte):  $p_1 V_1 = p_2 V_2$ ,

$$p_2 / p_1 = 100 = V_1 / V_2 \Rightarrow V_2 = V_1 / 100 = 4114286 / 100 = 41143 \text{ m}^3$$

$$\Rightarrow l = \sqrt[3]{41143} = 34.5 \text{ m}$$

5)

Tabelle S7.1: Energiespeicherinhalt aller deutscher Pumpspeicherwerke (40 GWh), gespeichert im Volumen  $V$  (Würfel mit Kantenlänge  $l$ ) für unterschiedliche Energieträger

Stoff		Volumen $V / \text{m}^3$	Würfel-Kantenlänge $l / \text{m}$
Steinkohle		3510.5	15.2
Dieselmkraftstoff		3986.7	15.9
Erdgas	1 bar	4114286	160.2
	100 bar	41143	34.5
Wasserstoff	1 bar	13333333	237.1
	100 bar	133333	51.1
	flüssig	16925	25.7

a) 1 bar: Heizwert/Volumen:  $H_{iV} = 120 \frac{\text{MJ}}{\text{kg}} \cdot 0.09 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 10.8 \frac{\text{MJ}}{\text{m}^3}$ ,

$$V = l^3 = \frac{W}{H_{iV}} = \frac{144 \cdot 10^{12}}{10.8 \cdot 10^6} = 13.33 \cdot 10^6 \text{ m}^3 \Rightarrow l = \sqrt[3]{13.33 \cdot 10^6} = 237.1 \text{ m},$$

Bei 100 bar: Ideale Gas-Gleichung bei  $T = \text{konst.}$  (Boyle-Mariotte):  $p_1 V_1 = p_2 V_2$ ,

$$p_2 / p_1 = 100 = V_1 / V_2 \Rightarrow V_2 = V_1 / 100 = 13.33 \cdot 10^6 / 100 = 13.33 \cdot 10^4 \text{ m}^3$$

$$\Rightarrow l = \sqrt[3]{13.33 \cdot 10^4} = 51.1 \text{ m}$$

b) 1 bar: Heizwert/Volumen:  $H_{iV} = 120 \frac{\text{MJ}}{\text{kg}} \cdot 70.9 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 8508 \frac{\text{MJ}}{\text{m}^3}$ ,

$$V = l^3 = \frac{W}{H_{iV}} = \frac{144 \cdot 10^{12}}{8508 \cdot 10^6} = 16.93 \cdot 10^3 \text{ m}^3 \Rightarrow l = \sqrt[3]{16.93 \cdot 10^3} = 25.7 \text{ m}.$$

**Aufgabe S8:** Erdgasspeicher

In der Rhein-Ebene zwischen *Crumstadt* und *Stockstadt* befindet sich ein Erdgasspeicher mit einem Inhalt von 250 Mio.  $\text{m}^3$  Erdgas ( $32 \text{ MJ}/\text{m}^3$ ). Das Erdgas ist in einer unterirdischen, porösen Sandsteinschicht, unterhalb einer gasundurchlässigen Tonschicht, gespeichert. Davon sind 50% als „Kissengas“ zur Druckhaltung erforderlich, während die anderen 50% energetisch genutzt werden können.

1) Wie groß ist die nutzbare Energiemenge  $W$  in PJ und in TWh?

- 2) Wie lange kann das Gasturbinenkraftwerk in *Darmstadt* ( $P_N = 2 \times 47.3$  MW elektrisch, Volllast-Wirkungsgrad  $\eta = 41\%$ ) mit dem nutzbaren Speicherinhalt bei Volllast betrieben werden (Zeitangabe  $T$  in h und d)?
- 3) Ein wärmegeämmtes Zwei-Familienhaus mit je  $A = 75 \text{ m}^2$  Wohnfläche (3 Personen/Wohneinheit) hat einen Heizungsenergiebedarf von  $p/a = 100 \text{ kWh}/(\text{m}^2 \cdot \text{a})$  inklusive Warmwasserbereitung. Ein Brennwertkessel mit dem Wirkungsgrad  $\eta \approx 1$  wird mit Erdgas befeuert. Wie viele  $z$  Zwei-Familienhäuser können in einem Jahr mit dem gespeicherten Erdgas versorgt werden? Wie viele Personen  $z_P$  sind damit versorgt?
- 4) Wie groß ist der monetäre Wert  $M$  des gespeicherten Erdgases bei einem Arbeitspreis von 3.6 ct./kWh?

**Aufgabe S8: (Lösung):** Erdgasspeicher

1)

$$W = 32 \cdot 10^6 \cdot 125 \cdot 10^6 = 4 \cdot 10^{15} \text{ J} = 4 \text{ PJ}, \quad W = 4 \cdot 10^{15} / 3600 = 1.11 \cdot 10^{12} = 1.11 \text{ TWh}.$$

2)

$$W = P_N \cdot T / \eta_N \Rightarrow T = W \cdot \eta_N / P_N = 4 \cdot 10^{15} \cdot 0.41 / (2 \cdot 47.3 \cdot 10^6) = 17.33 \cdot 10^6 \text{ s},$$

$$T = 17.33 \cdot 10^6 / 3600 = 4815.6 \text{ h} = 220.6 \text{ d}.$$

3)

$$W_{\text{Haus}} / a = p \cdot 2A / \eta = 100 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 75 / 1 = 15000 \text{ kWh/a},$$

$$z = W / W_{\text{Haus}} = 1.11 \cdot 10^{12} / (15 \cdot 10^6) = 74074, \quad z_P = 6 \cdot 74074 = 444444 \text{ Personen}.$$

4)

$$M = 0.036 \cdot 1.11 \cdot 10^9 = 4 \cdot 10^7 = 40 \text{ Mio. Euro}.$$