

Elektromechanische Systeme

Teil von Prof. Binder:

„Mathematische Analyse von Wandlern & Aktoren“



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

1. Einführung
2. Grundlagen
3. Formale Behandlung elektromechanischer diskreter Systeme
4. Methode der *Lagrange*-Gleichungen
5. Elektromechanische Grundsysteme
6. Dynamische Untersuchung des Wandlerverhaltens
7. Analyse ausgewählter elektromechanischer Wandler





7. Analyse ausgewählter elektromechanischer Wandler

- Magnetischer Wandler „Typ 1“
- Magnetischer Wandler „Typ 2“
- Kapazitiver Wandler „Typ 3“
- Kapazitiver Wandler „Typ 4“



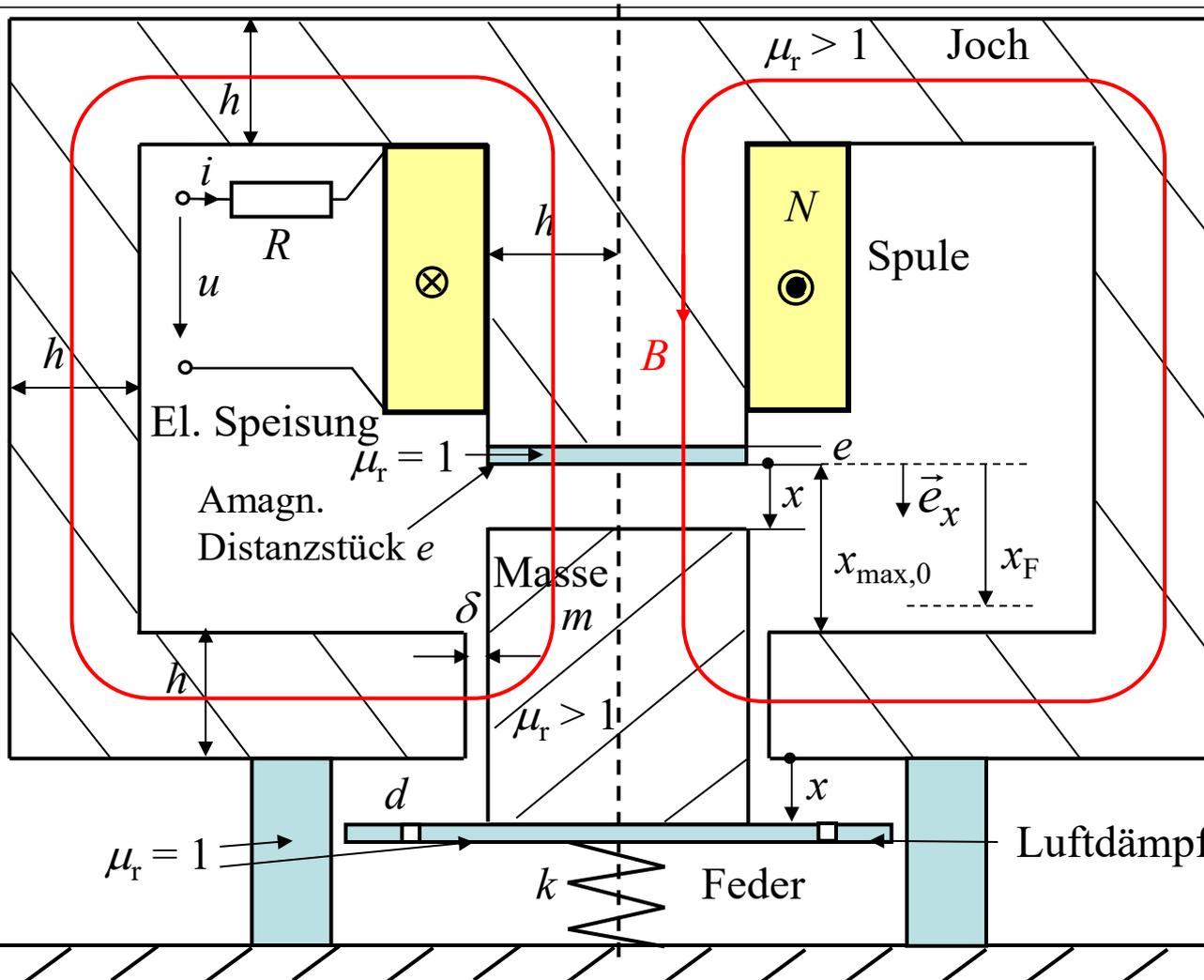


- Magnetischer Wandler „Typ 1“
- Magnetischer Wandler „Typ 2“
- Kapazitiver Wandler „Typ 3“
- Kapazitiver Wandler „Typ 4“



Magnetischer Wandler „Typ 1“

Beschreibung: „Elektromagnetischer Wandler“



- Vertikale gedämpfte Schwingbewegung $x(t)$ der Masse m
- Distanzstück e und Spalt δ gegen „magnetischen Kurzschluss“, bei dem allfällige Eisenremanenz verstärkt wirken würde
- R : Resultierender Widerstand der Spule und Vorwiderstand

Magnetischer Wandler „Typ 1“

Erregung eines Magnetfelds

- Geometrie mit gleichen flussführenden Querschnitten $h \cdot l$, so dass Flussdichte B im Eisen und in Luft identisch: $B_{Fe} = B_{\delta} = B \Rightarrow H_{\delta} = B/\mu_0, H_{Fe} = B/\mu_{Fe}, \mu_{Fe} = \mu_0 \cdot \mu_r$

- **Annahmen: Homogenes Feld $B = \text{konst.}$** in allen Flussabschnitten & $\mu_{Fe} = \text{konst.}$

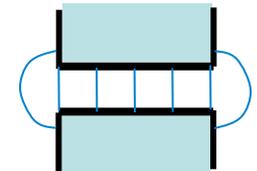
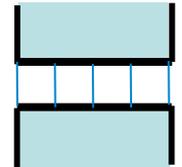
- Durchflutungssatz entlang Feldlinie: Flussweg im Eisen (Joch u. Masse m): l_{Fe}

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = N \cdot i = H_{Fe} \cdot l_{Fe} + H_{\delta} \cdot (x + e + \delta)$$

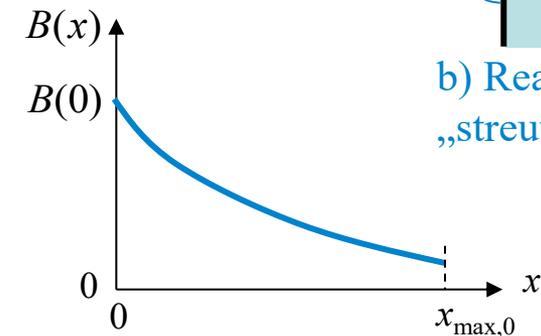
$$N \cdot i = (B / \mu_{Fe}) \cdot l_{Fe} + (B / \mu_0) \cdot (x + e + \delta) \Rightarrow B(x) = \frac{N \cdot i}{(l_{Fe} / \mu_{Fe}) + ((x + e + \delta) / \mu_0)}$$

$$B(0) = \frac{N \cdot i}{(l_{Fe} / \mu_{Fe}) + ((e + \delta) / \mu_0)}$$

Strefelder vernachlässigt: a) Annahme



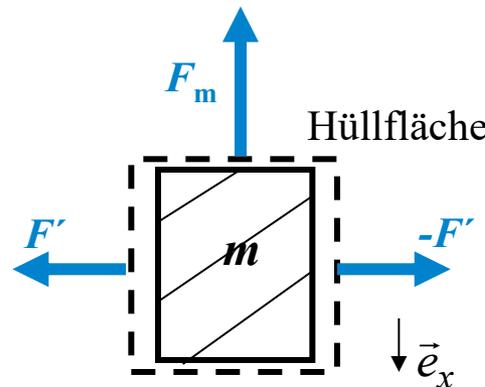
b) Real: Feld „stret“ seitlich



- **Magnetkraft F_m** auf Masse m
 - zieht nach oben,
 - nimmt mit steigendem x ab

$$\vec{F}_m = -\frac{B^2(x)}{2\mu_0} \cdot 2h \cdot l \cdot \vec{e}_x = -F_m \cdot \vec{e}_x$$

$$F - F' = 0$$



Magnetischer Wandler „Typ 1“

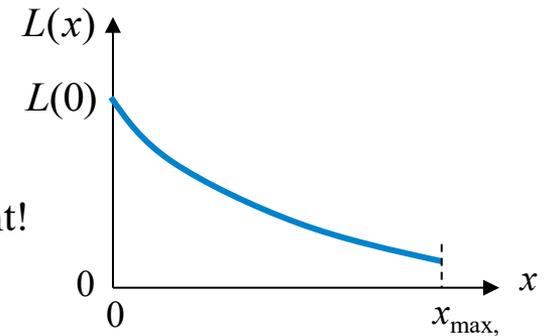
Spuleninduktivität $L(x)$

- Annahmen: Homogenes Feld $B = \text{konst.}$ in allen Flussabschnitten & $\mu_{Fe} = \text{konst.}$

$$L(x) = \frac{\Psi(x)}{i} = N \cdot \frac{\Phi(x)}{i} = N \cdot \frac{B(x) \cdot 2h \cdot l}{i} = \mu_0 \cdot N^2 \cdot \frac{2h \cdot l}{x + e + \delta + l_{Fe} \cdot (\mu_0 / \mu_{Fe})}$$

$$L(0) = \mu_0 \cdot N^2 \cdot \frac{2h \cdot l}{e + \delta + l_{Fe} \cdot (\mu_0 / \mu_{Fe})}$$

μ_{Fe} verändert sich mit x nicht!



- Magnetische Ko-Energie: $W_m^* = L(x) \cdot i^2 / 2 = W_m = \Psi^2(x) / (2L(x))$

- Identisch mit: $W_m = W_{m, \text{Luft}} + W_{m, \text{Fe}}$

$$W_{m, \text{Luft}} = 2h \cdot l \cdot (x + e + \delta) \cdot B^2(x) / (2\mu_0) \quad \text{in Luft}$$

$$W_{m, \text{Fe}} = 2h \cdot l \cdot l_{Fe} \cdot B^2(x) / (2\mu_{Fe}) \quad \text{im Eisen}$$

$$V_{\text{Luft}} = 2h \cdot l \cdot (x + e + \delta) \quad \text{Luftspalt-Volumen}$$

$$V_{\text{Fe}} = 2 \cdot h \cdot l \cdot l_{Fe} \quad \text{Eisen-Volumen}$$

- Beweis:

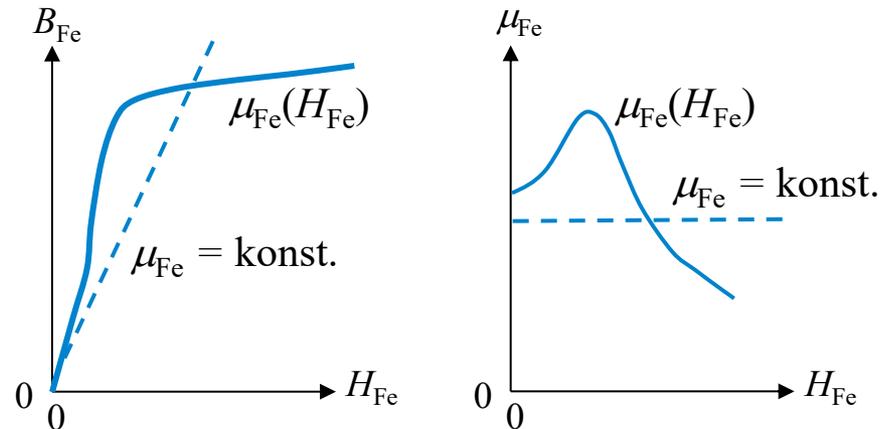
$$W_m = \frac{L(x) \cdot i^2}{2} = \frac{N \cdot B(x) \cdot 2h \cdot l \cdot i^2}{2 \cdot i} = W_{m, \text{Luft}} + W_{m, \text{Fe}} = \frac{2h \cdot l}{2} \cdot B^2(x) \cdot \left(\frac{x + e + \delta}{\mu_0} + \frac{l_{Fe}}{\mu_{Fe}} \right) = \frac{N \cdot B(x) \cdot 2h \cdot l \cdot i}{2}$$

$$B(x) = \frac{N \cdot i}{\frac{x + e + \delta}{\mu_0} + \frac{l_{Fe}}{\mu_{Fe}}}$$

Magnetischer Wandler „Typ 1“

Veränderliche Eisensättigung $\mu_{\text{Fe}}(H_{\text{Fe}})$

Kennlinie des Eisen- oder Dynamoblechs (Fe-Si-Legierung):



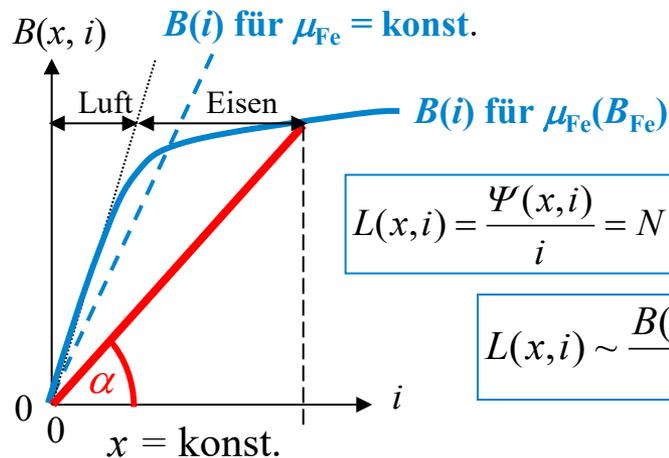
Magnetischer Wandler „Typ 1“

Einfluss veränderlicher Eisensättigung $\mu_{Fe}(B_{Fe})$

- Kennlinie des Magnetkreises (Eisen- und Luftspaltbereich):

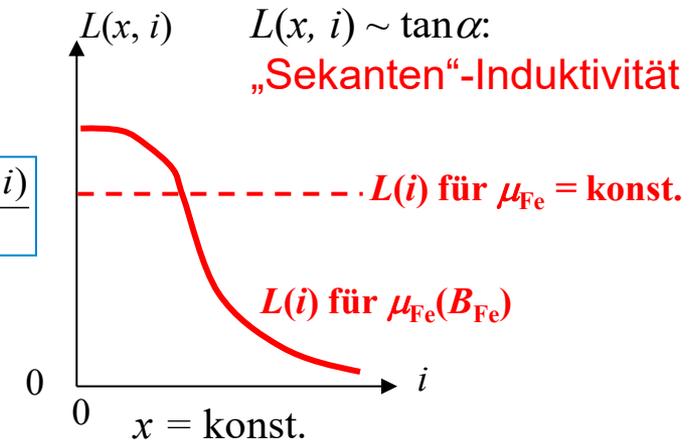
$$B(x,i) = \frac{N \cdot i}{\frac{x + e + \delta}{\mu_0} + \frac{l_{Fe}}{\mu_{Fe}(B(x,i))}}$$

$$L(x,i) = \mu_0 \cdot N^2 \cdot \frac{2h \cdot l}{x + e + \delta + l_{Fe} \cdot \frac{\mu_0}{\mu_{Fe}(B(x,i))}}$$



$$L(x,i) = \frac{\Psi(x,i)}{i} = N \cdot \frac{B(x,i) \cdot 2h \cdot l}{i} \sim \frac{B(x,i)}{i}$$

$$L(x,i) \sim \frac{B(x,i)}{i} = \tan \alpha$$



$$\Psi(i(t)) = \Psi(i_0 + \Delta i(t)) \approx \Psi(i_0) + \underbrace{\frac{d\Psi}{di} \Big|_{i_0}}_{\Delta \Psi(t)} \cdot \Delta i(t) = L(i_0) \cdot i_0 + L_{\text{diff}}(i_0) \cdot \Delta i(t)$$

Magnetischer Wandler „Typ 1“

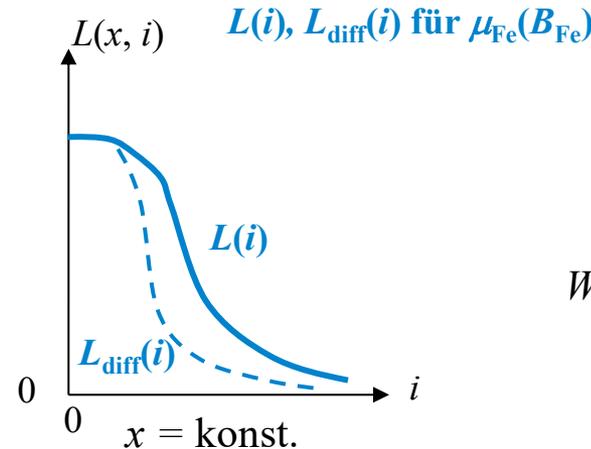
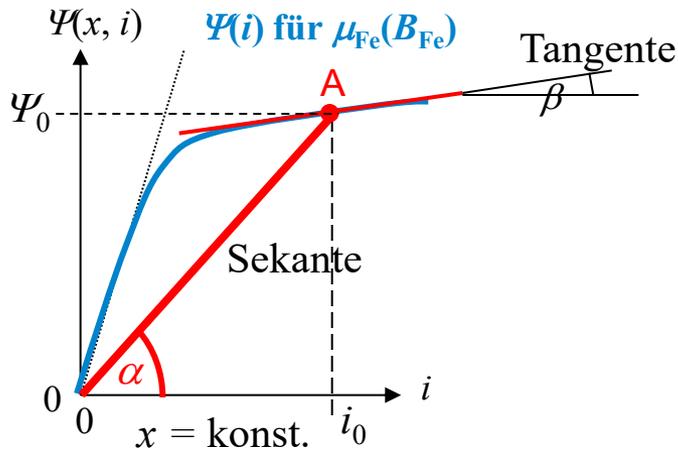
Sekanteninduktivität vs. differentielle Induktivität

$$L(i_0) = \Psi(i_0) / i_0$$

$$L_{diff}(i_0) = d\Psi / di|_{i_0}$$

• $L(x, i) \sim \tan \alpha$: „Sekanten“-Induktivität

$L_{diff}(x, i) \sim \tan \beta$: „differentielle“ Induktivität



$$L(i) \geq L_{diff}(i)$$

$$W_m = \frac{L \cdot i^2}{2} \geq \frac{L_{diff} \cdot i^2}{2}$$

- Im Magnetkreis mit veränderlicher Sättigung wird im magnetischen Arbeitspunkt A (Ψ_0, i_0) unterschieden zwischen
 - a) der **Sekanten-Induktivität L** für „große“ Signale als nichtlineares Element und
 - b) der „differentiellen“ Induktivität L_{diff} für „kleine“ Änderungen $\Delta \Psi$ und Δi vom Arbeitspunkt (Ψ_0, i_0).
- Bei $\mu_{Fe} = \text{konst}$: $L = L_{diff}$!

Magnetischer Wandler „Typ 1“

„Ideal“ magnetisierbares Eisen: $\mu_{Fe} \rightarrow \infty$

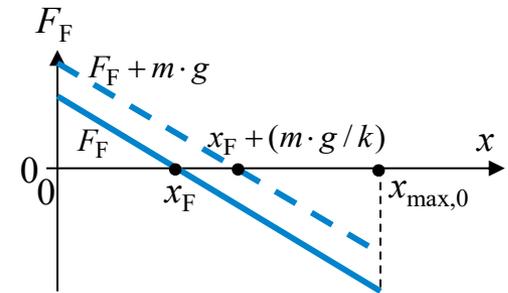


$$\mu_{Fe} \rightarrow \infty : L(x) = L_{diff}(x) = \mu_0 \cdot N^2 \cdot \frac{2h \cdot l}{x + e + \delta}$$

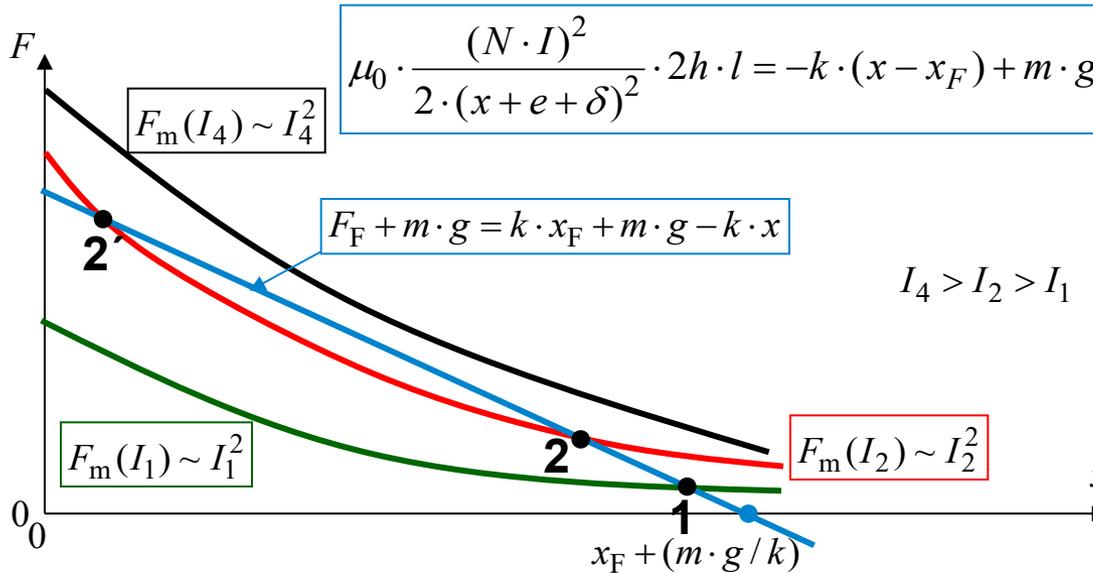
$$B(x, i) = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot i}{x + e + \delta}$$

$$\vec{F}_m = -\mu_0 \cdot \frac{(N \cdot i)^2}{2 \cdot (x + e + \delta)^2} \cdot 2h \cdot l \cdot \vec{e}_x = -F_m \cdot \vec{e}_x \quad \vec{F}_F = F_F \cdot \vec{e}_x$$

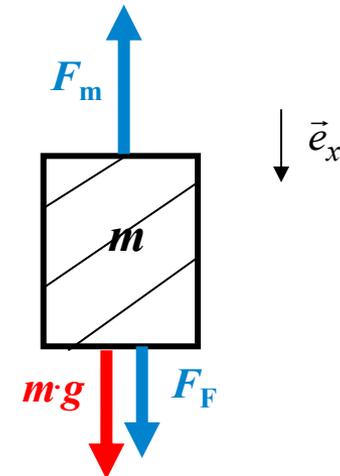
- Statischer Wandlerzustand: $d./dt = 0$: $i = I$ (Gleichstrom)
- Kräftegleichgewicht an der Masse m : $\vec{F}_m + \vec{F}_F + m \cdot g \cdot \vec{e}_x = 0$
- Feder entspannt bei x_F ($0 < x_F < x_{max}$): $F_F = -k \cdot (x - x_F)$



Schwerkraft bewirkt Federvorspannung

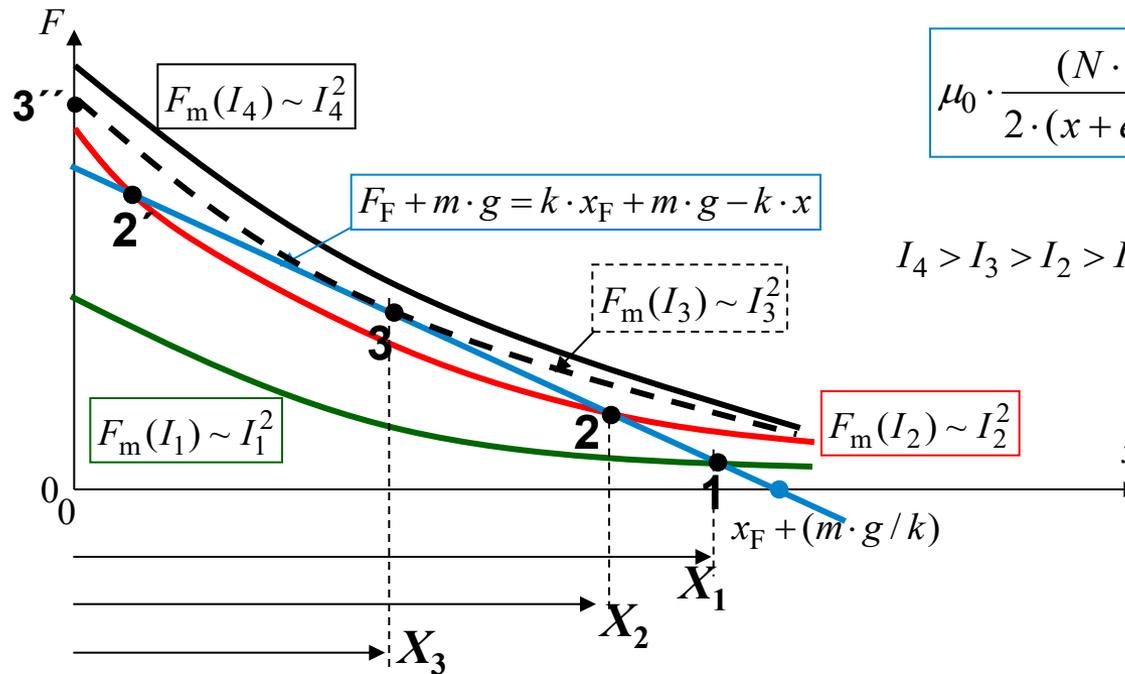


$$I_4 > I_2 > I_1$$



Magnetischer Wandler „Typ 1“

Stabilität der Gleichgewichtslagen $x = X$



$$\mu_0 \cdot \frac{(N \cdot I)^2}{2 \cdot (x + e + \delta)^2} \cdot 2h \cdot l = -k \cdot (x - x_F) + m \cdot g$$

- Für große Ströme $I > I_3$:
KEIN Schnittpunkt der
beiden Kraftkurven \Rightarrow KEIN
Gleichgewicht: $F_m > F_F + m \cdot g$
Kraft nach oben überwiegt:
Masse schnappt zum Joch $x = 0$

Magnetischer Wandler „Typ 1“

Stabilität der Gleichgewichtslagen $x = X$

- Kleiner Erregerstrom I_1 : **Ein** stabiler Arbeitspunkt 1 bei „großem“ X_1
- Vergrößerter Erregerstrom I_2 : **Ein** stabiler Arbeitspunkt 2 bei „verkleinertem“ $X_2 < X_1$
(Arbeitspunkt 2' ist INSTABIL)
- Noch größerer Erregerstrom I_3 : **Ein** grenzstabiler Arbeitspunkt 3 bei „Minimalwert“ X_3
- Für $0 \leq x \leq X_3$ KEIN stabiles Gleichgewicht: **Masse schnappt zum Joch $x = 0$**

Magnetischer Wandler „Typ 1“

Statische Stabilität (1) = OHNE Dämpfung



- **Statische Stabilität:** Bewegungsgleichung ungedämpft: $m \cdot \ddot{x} = F_F + m \cdot g - F_m$
- Störung der Gleichgewichtslage X durch kleine Auslenkungen x_1 , $|x_1 / X| \ll 1$
 \Rightarrow Linearisierung der nichtlinearen Differentialgleichung

$$x(t) = X + x_1(t) \Rightarrow m \cdot \ddot{x} = m \cdot \ddot{x}_1 = -k \cdot (X + x_1 - x_F) + m \cdot g - F_m(X + x_1)$$

$$\xi \ll 1: \frac{1}{(1+\xi)^2} = \frac{1}{1+2\xi+\xi^2} \approx \frac{1}{1+2\xi} \approx 1-2\xi \Leftrightarrow f(\xi) = \frac{1}{(1+\xi)^2} \Big|_{|\xi| \ll 1} \approx 1 + \frac{df}{d\xi} \Big|_{\xi=0} \cdot \xi \Leftrightarrow \frac{df}{d\xi} \Big|_{\xi=0} = \frac{-2}{(1+\xi)^3} \Big|_{\xi=0} = -2$$

$$e + \delta = e': F_m(X + x_1) = \frac{\mu_0 \cdot (N \cdot I)^2 \cdot h \cdot l}{(X + x_1 + e')^2} = \frac{\mu_0 \cdot (N \cdot I)^2 \cdot h \cdot l}{(X + e')^2 \cdot \underbrace{(1 + x_1 / (X + e'))^2}_{\xi}} \approx \frac{\mu_0 \cdot (N \cdot I)^2 \cdot h \cdot l}{(X + e')^2} \cdot (1 - 2x_1 / (X + e'))$$

- Gleichgewichtslage X ($x_1 = 0$): $\frac{\mu_0 \cdot (N \cdot I)^2 \cdot h \cdot l}{(X + e')^2} = -k \cdot (X - x_F) + m \cdot g$

- **Linearisierte Diff.gleichung:** $m \cdot \ddot{x}_1 + \left(k - \frac{2\mu_0 \cdot (N \cdot I)^2 \cdot h \cdot l}{(X + e')^3} \right) \cdot x_1 = T \cdot \ddot{x}_1 + K \cdot x_1 = 0$

- **Stabile** Lösungen für $K = k - \underbrace{\frac{2\mu_0 \cdot (N \cdot I)^2 \cdot h \cdot l}{(X + e')^3}}_{k_m} > 0$

$$K = -\frac{d(F_F(x) + m \cdot g)}{dx} + \frac{dF_m(x, I)}{dx} > 0$$

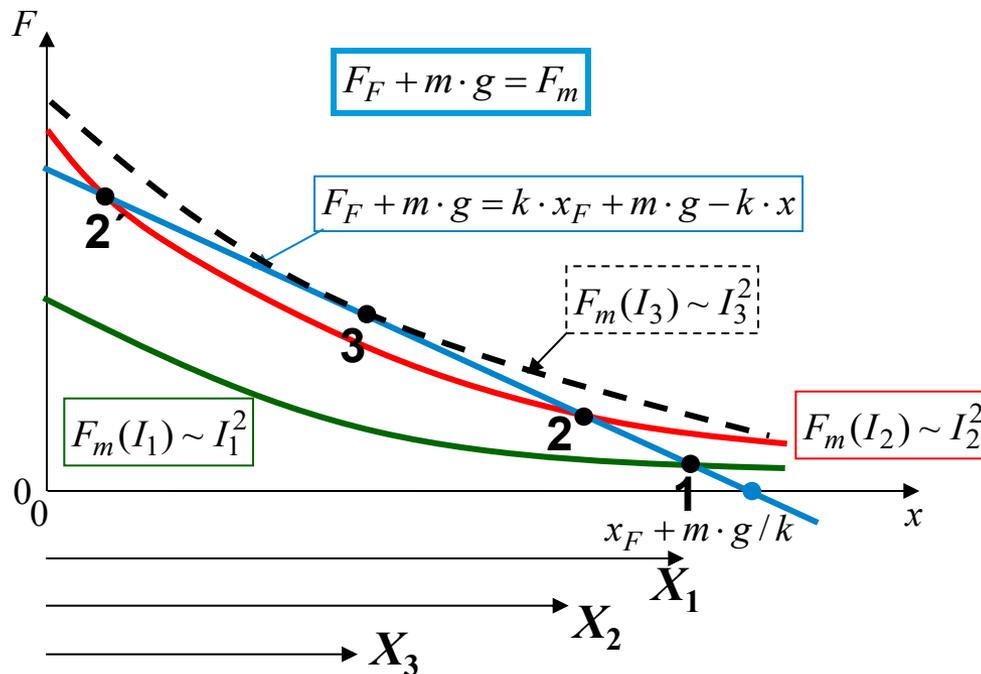


Magnetischer Wandler „Typ 1“

Statische Stabilität (2)

$$K = \frac{dF_m(x, I)}{dx} - \frac{d(F_F(x) + m \cdot g)}{dx} > 0 \quad \Rightarrow K = \frac{dF_m(x, I)}{dx} + k > 0 \quad \Rightarrow K = k - k_m > 0 \quad \text{STABIL}$$

$$k_m \cdot \vec{e}_x = d\vec{F}_m / dx = (-dF_m / dx) \cdot \vec{e}_x \Rightarrow k_m = -dF_m / dx = \frac{2\mu_0 \cdot (N \cdot I)^2 \cdot h \cdot l}{(X + e')^3}$$



- Arbeitspunkte 1, 2 : **STABIL**

$$K(X_1) = \frac{dF_m(x, I_1)}{dx} + k > 0$$

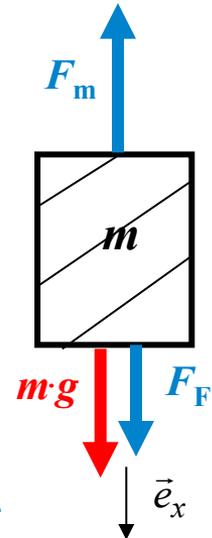
$$K(X_2) = \frac{dF_m(x, I_2)}{dx} + k > 0$$

- Arbeitspunkt 3: **STABILITÄTSGRENZE**

$$K(X_3) = \frac{dF_m(x, I_3)}{dx} + k = 0$$

- Arbeitspunkt 2': **INSTABIL**

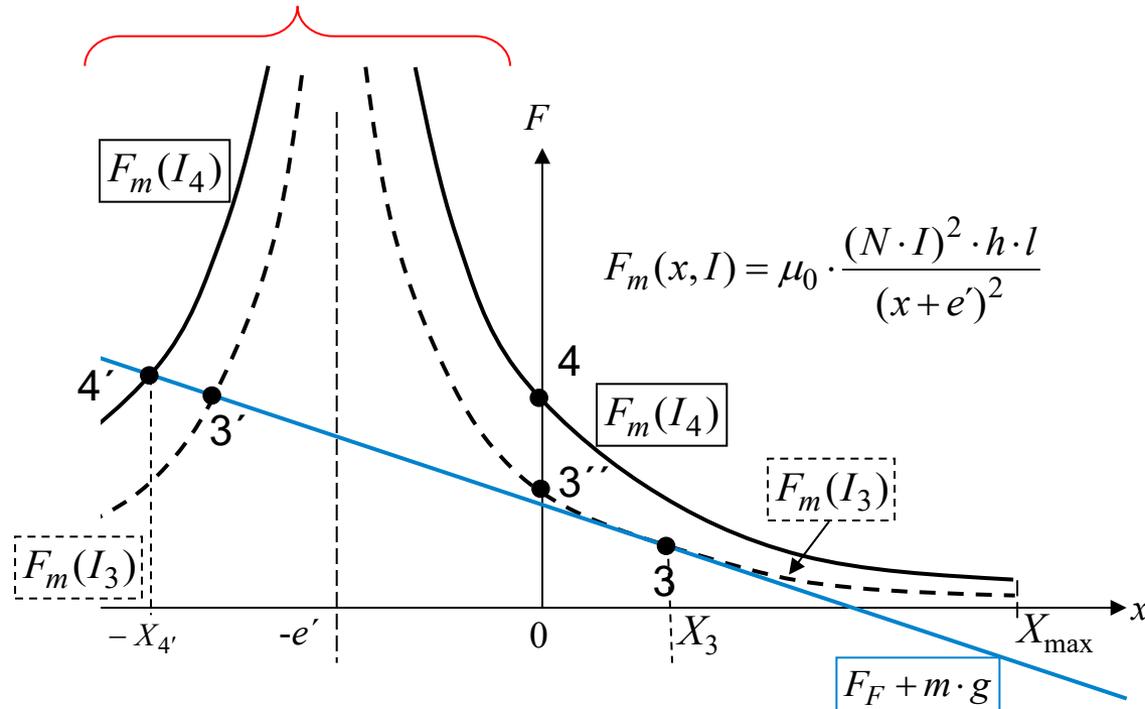
$$K(X_{2'}) = \frac{dF_m(x, I_2)}{dx} + k < 0$$



Magnetischer Wandler „Typ 1“

Statische Stabilität (3)

$x < 0$: Unphysikalischer Bereich



- 3: Für große Ströme $I > I_3$: KEIN Schnittpunkt der beiden Kraftkurven, da $F_m > F_F + m \cdot g$
ab $X_3 > x > 0$: $m \cdot \ddot{x} = F_F + m \cdot g - F_m < 0$
- Beschleunigung von m auf $x = 0$. Bei $x = 0$ „magn. Kleben“, da $F_m > F_F + m \cdot g$
- Hinweis: F_m ist mathematisch auch im **unphysikalischen Bereich** $x < 0$ definiert $\Rightarrow I_4 > I_3$:
Unphysikalischer Arbeitspunkt 4'.

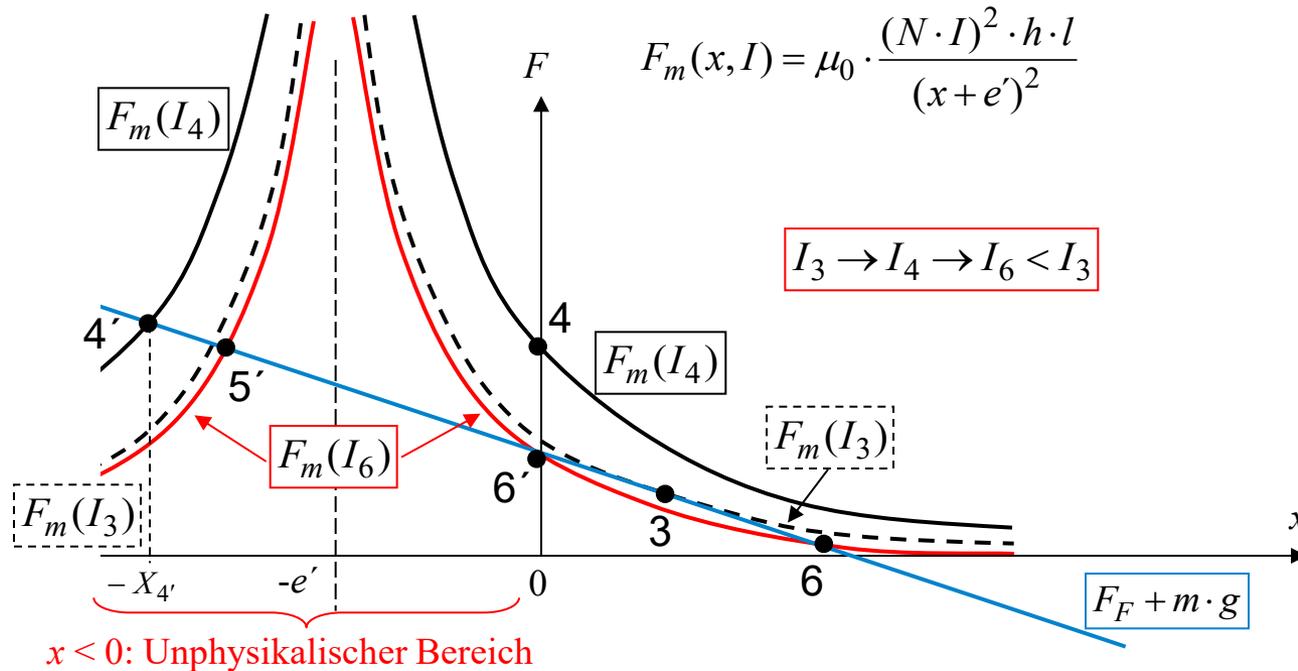
$$K(-X_{4'}) = \frac{dF_m(x, I_4)}{dx} + k > 0$$

- Anstelle des unphysikal. Punkts 4' bleibt die Masse bei $x = 0$ mit der nach oben gerichteten „Klebe“-Kraft $F(x = 0, I_4)$ „kleben“ = **Masse „schnappt“ zum Joch $x = 0$** („Pull-in“)

$$F(x = 0, I_4) = F_m(x = 0, I_4) - F_F(x = 0) - m \cdot g = \frac{\mu_0 \cdot (N \cdot I_4)^2 \cdot h \cdot l}{e'^2} - k \cdot x_F - m \cdot g > 0$$

Magnetischer Wandler „Typ 1“

Statische Stabilität (4)

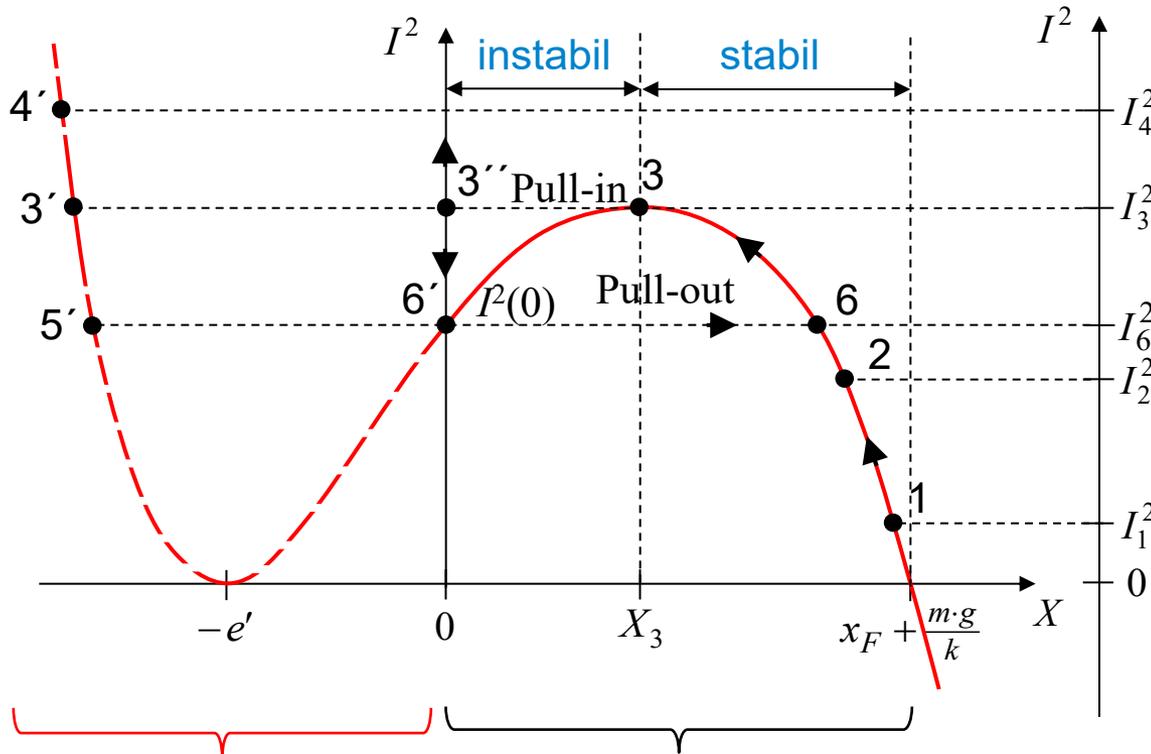


- Bei Absenkung $I_6 < I < I_4$ ist immer noch $F_m > F_F + m \cdot g =$ „Kleben“ \Rightarrow Masse „klebt“ bei $x = 0$
- Bei $I_6 < I_3$ wird die Klebekraft Null: $F(6') = F_m(x=0, I_6) - F_F(0) - m \cdot g = 0$, aber instabiles Gleichgewicht $\Rightarrow m$ „schnappt“ zum nächsten stabilen Gleichgewichtspunkt $F_m = F_F + m \cdot g$ (6) das heißt: $F(6') = 0 \Rightarrow$ Masse m fällt vom instabilen Arbeitspunkt $6'$ in stabilen Arbeitspunkt 6: Wechsel des AP von $6'$ (instabil) \Rightarrow 6 (stabil) („Pull-out“)

Magnetischer Wandler „Typ 1“

Gleichgewichtslagen X

Gleichgewichtslage X :
$$\frac{\mu_0 \cdot (N \cdot I)^2 \cdot h \cdot l}{(X + e')^2} = -k \cdot (X - x_F) + m \cdot g \Rightarrow I^2 = \frac{(X + e')^2}{\mu_0 \cdot N^2 \cdot h \cdot l} \cdot (-k \cdot X + m \cdot g + k \cdot x_F)$$



$$I(0) = \frac{e'}{N} \cdot \sqrt{\frac{m \cdot g + k \cdot x_F}{\mu_0 \cdot h \cdot l}} = I_6$$

$$X_3 = \frac{2}{3} \cdot \left(x_F + \frac{m \cdot g}{k} - \frac{e'}{2} \right)$$

„Schalthysterese“ $I^2(X)$
für Arbeitspunkte:
 $6 \rightarrow 3 \rightarrow 3'' \rightarrow 6' \rightarrow 6$

$x < 0$:
Unphysikalischer Bereich

realer verfügbarer Bereich

Magnetischer Wandler „Typ 1“

Berechnung der Pull-in-Lage X_3

Bedingung: Bei X_3 ist I maximal! $\frac{dI(X)}{dX} = 0 \Rightarrow \frac{dI^2(X)}{dX} = 0$

$$\frac{dI^2}{dX} = \frac{d}{dX} \left\{ \frac{(X+e')^2}{\mu_0 \cdot N^2 \cdot h \cdot l} \cdot (-k \cdot X + m \cdot g + k \cdot x_F) \right\} = 0$$

$$2 \cdot (X+e') \cdot (-k \cdot X + m \cdot g + k \cdot x_F) + (X+e')^2 \cdot (-k) = 0$$

$$(X+e') \cdot \{-2k \cdot X + 2m \cdot g + 2k \cdot x_F - (X+e') \cdot k\} = 0$$

„Unphysikalische“ Lösung: $X = -e'$

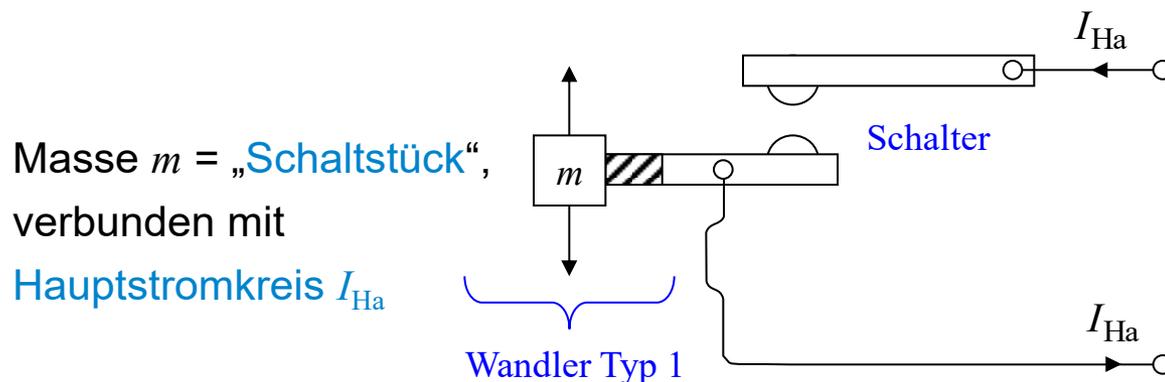
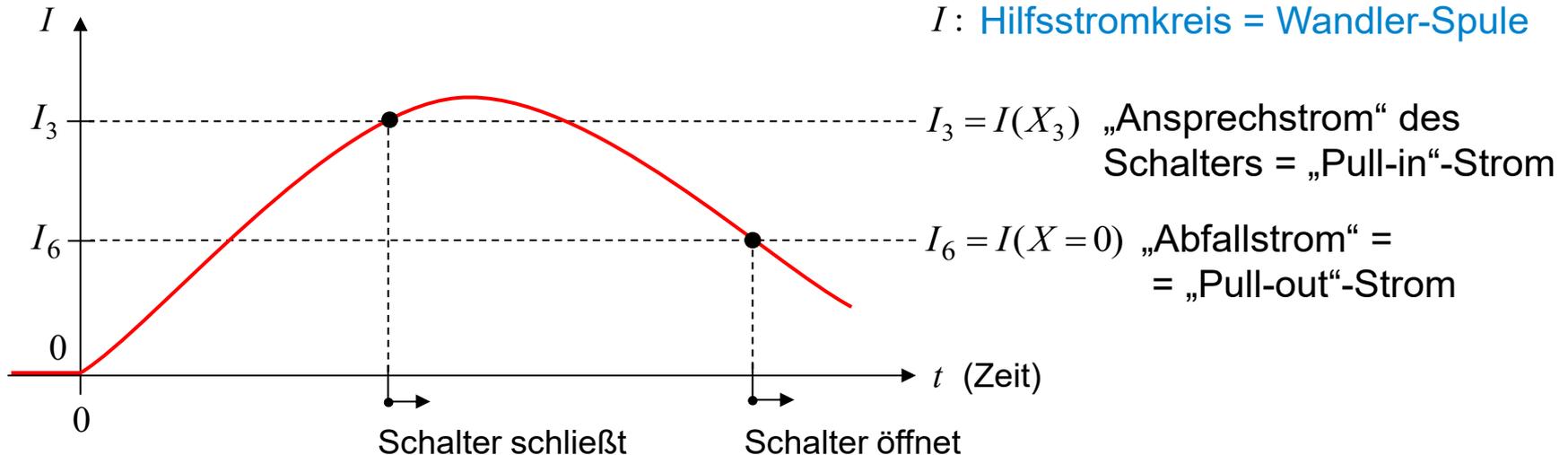
Lösung: $-2 \cdot X + 2m \cdot (g/k) + 2 \cdot x_F - X - e' = 0 \Rightarrow X = X_3 = \frac{2}{3} \cdot \left(x_F + \frac{m \cdot g}{k} - \frac{e'}{2} \right)$

„Pull-in“-Strom: $I_3^2 = \frac{(X_3+e')^2}{\mu_0 \cdot N^2 \cdot h \cdot l} \cdot (-k \cdot X_3 + m \cdot g + k \cdot x_F)$ $X_3 + e' = \frac{2}{3} \cdot (x_F + e' + m \cdot g/k)$

$$I_3 = \pm \frac{2 \cdot (x_F + e' + m \cdot g/k)}{3N} \cdot \sqrt{\frac{(x_F + e') \cdot k + m \cdot g}{3\mu_0 \cdot h \cdot l}}$$
 $X_3 - x_F = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{m \cdot g}{k} - \frac{x_F + e'}{2} \right)$

Magnetischer Wandler „Typ 1“

Anwendung: Schalter im Hauptstromkreis I_{Ha}



Magnetischer Wandler „Typ 1“

Dynamische Gleichungen nichtlinear, gedämpft



a) Mech. Gleichung: Kräftegleichgewicht: $m \cdot \ddot{x} = F_F + m \cdot g - F_D - F_m$

• Dämpfungskraft geschwindigkeitsproportional: $F_D = d \cdot \dot{x}$ bremst die Masse m !

• Nichtlineare Differentialgleichung: $m \cdot \ddot{x} + d \cdot \dot{x} + k \cdot x + \mu_0 \cdot \frac{(N \cdot i)^2 \cdot h \cdot l}{(x + e')^2} = k \cdot x_F + m \cdot g$

b) Elektrische Gleichung:

$$u = R \cdot i + \frac{d\psi}{dt} = R \cdot i + \frac{d(L(x) \cdot i)}{dt} = R \cdot i + L \cdot \dot{i} + i \cdot L'(x) \cdot \dot{x} = R \cdot i + \frac{d}{dt} \left(\frac{\mu_0 \cdot N^2 \cdot i}{x + e'} \cdot 2h \cdot l \right)$$

$$u = R \cdot i + \underbrace{\frac{\mu_0 \cdot N^2 \cdot 2h \cdot l}{x + e'}}_{L(x)} \cdot \frac{di}{dt} - \underbrace{\frac{\mu_0 \cdot N^2 \cdot i \cdot 2h \cdot l}{(x + e')^2}}_{i \cdot L'(x)} \cdot \frac{dx}{dt}$$

c) Gleichungssystem:

$$m \cdot \ddot{x} + d \cdot \dot{x} + k \cdot x + \mu_0 N^2 \cdot \frac{i^2 \cdot h \cdot l}{(x + e')^2} = k \cdot x_F + m \cdot g$$

$$L(x) \cdot \dot{i} + R \cdot i - \mu_0 \cdot N^2 \cdot 2h \cdot l \cdot \frac{i}{(x + e')^2} \cdot \dot{x} = u(t)$$

Ruh-Induktion durch Stromänderung Induktion durch m-Bewegung = Bewegungsinduktion



Magnetischer Wandler „Typ 1“

Dynamische Gleichungen linearisiert (1)



- **Linearisierung im Arbeitspunkt** (I, X) : $i(t) = I + i_1(t)$, $|i_1/I| \ll 1$
 $u(t) = U + u_1(t)$, $|u_1/U| \ll 1$,
 $x(t) = X + x_1(t)$, $|x_1/X| \ll 1$

$$\bullet \frac{i}{x+e'} = \frac{I+i_1}{X+x_1+e'} = \frac{I}{X+e'} \cdot \frac{1+\frac{i_1}{I}}{1+\frac{x_1}{X+e'}} \quad X' = X+e': \quad \frac{i}{x+e'} \approx \frac{I}{X'} \cdot \left(1+\frac{i_1}{I}\right) \cdot \left(1-\frac{x_1}{X'}\right) \approx \frac{I}{X'} \cdot \left(1+\frac{i_1}{I}-\frac{x_1}{X'}\right)$$

$$\bullet \left(\frac{i}{x+e'}\right)^2 \approx \left(\frac{I}{X'}\right)^2 \cdot \left(1+\frac{i_1}{I}-\frac{x_1}{X'}\right)^2 \approx \left(\frac{I}{X'}\right)^2 \cdot \left(1+2\frac{i_1}{I}-2\frac{x_1}{X'}\right) = \left(\frac{I}{X'}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{I}{X'}\right)^2 \cdot \left(\frac{i_1}{I}-\frac{x_1}{X'}\right)$$

- **Linearisierte Differentialgleichungen:** $\ddot{x} = \ddot{x}_1$, $\dot{x} = \dot{x}_1$, $i = i_1$

$$m \cdot \ddot{x}_1 + d \cdot \dot{x}_1 + k \cdot x_1 + 2\mu_0 N^2 \cdot \left(\frac{I}{X'}\right)^2 \cdot h \cdot l \cdot \left(\frac{i_1}{I} - \frac{x_1}{X'}\right) \cong \underbrace{k \cdot x_F + m \cdot g - k \cdot X - \mu_0 N^2 \cdot \left(\frac{I}{X'}\right)^2 \cdot h \cdot l}_{\text{Gleichgewichtslage}} = 0$$

$$U + u_1 = R \cdot (I + i_1) + \frac{d}{dt} \left(\mu_0 N^2 \cdot 2h \cdot l \cdot \frac{I}{X'} \cdot \left(1 + \frac{i_1}{I} - \frac{x_1}{X'}\right) \right)$$

$$\underbrace{U = R \cdot I}_{\text{Gleichgewichtslage}} \Rightarrow u_1 \cong R \cdot i_1 + \mu_0 N^2 \cdot 2h \cdot l \cdot \frac{I}{X'} \cdot \left(\frac{\dot{i}_1}{I} - \frac{\dot{x}_1}{X'}\right)$$

Gleichgewichtslage



Magnetischer Wandler „Typ 1“

Dynamische Gleichungen linearisiert (2)



$$m \cdot \ddot{x}_1 + d \cdot \dot{x}_1 + \left(k - \overbrace{2\mu_0 \frac{(N \cdot I)^2}{(X + e')^3} \cdot h \cdot l}^{k_m} \right) \cdot x_1 + \underbrace{\mu_0 \cdot \left(\frac{N}{X + e'} \right)^2 \cdot 2h \cdot l \cdot I \cdot i_1}_{K_0} = 0 \quad (1)$$

$$\underbrace{\mu_0 \cdot \frac{N^2}{X + e'} \cdot 2h \cdot l \cdot \dot{i}_1}_{L(X)} + R \cdot i_1 - \underbrace{\mu_0 \cdot \frac{N^2}{(X + e')^2} \cdot 2h \cdot l \cdot I \cdot \dot{x}_1}_{K_0} = u_1 \quad (2)$$

$L(X)$ im Arbeitspunkt $x = X$

Kopplungsterm K_0 zwischen (1) und (2)

Kopplungsterm: $K_0 = \mu_0 \cdot \left(\frac{N}{X + e'} \right)^2 \cdot 2h \cdot l \cdot I$

$$K = k_{res} = k - k_m$$

$$m \cdot \ddot{x}_1 + d \cdot \dot{x}_1 + \left(-\frac{dF_F}{dx} + \frac{dF_m}{dx} \right) \Big|_{x=X} \cdot x_1 = -K_0 \cdot i_1 \quad (1)$$

$$L(X) \cdot \dot{i}_1 + R \cdot i_1 = u_1 + K_0 \cdot \dot{x}_1 \quad (2)$$



Magnetischer Wandler „Typ 1“

Dynamische Stabilität bei $i = I = U/R = \text{konst.}$

- Dynamische Stabilitäts-Betrachtung für **eingepprägten Strom**: $i = I = U/R = \text{konst.} \Rightarrow u_1, i_1 = 0$
 \Rightarrow Nur noch (1) = eine (mech.) Differentialgleichung 2. Ordnung (linearisiert):

$$m \cdot \ddot{x}_1 + d \cdot \dot{x}_1 + \underbrace{\left(-\frac{dF_F}{dx} + \frac{dF_m}{dx} \right)}_{k_{res} = k - k_m} \Big|_{x=X} \cdot x_1 = 0$$

$$k = -\frac{dF_F}{dx} > 0 \quad \text{mech. Federkonstante}$$

$$k_m = -\frac{dF_m}{dx} > 0 \quad \text{magn. Federkonstante}$$

$K = k_{res}$: Steifigkeit = „**Resultierende Federkonstante**“

Hier F_m GEGEN die x -Richtung positiv, daher $k_m = -dF_m/dx$!

- $T \cdot \ddot{x}_1 + D \cdot \dot{x}_1 + K \cdot x_1 = 0$ $T = m, \quad D = d, \quad K = k - k_m$
 - **Statische Stabilität**: $K > 0 \Rightarrow k > k_m \Rightarrow \left(\frac{dF_m}{dx} - \frac{dF_F}{dx} \right) \Big|_{x=X} > 0$ bzw.
- $$\left(\frac{dF_m}{dx} - \frac{d(F_F + m \cdot g)}{dx} \right) \Big|_{x=X} > 0$$

- **Dynamische Stabilität**: $K \geq 0$ und $D > 0$: Ist erfüllt, wenn stat. Stabilität erfüllt ist, da $D = d > 0$
 \Rightarrow Wegen positiver Dämpfung: Statisch stabile Arbeitspunkte sind auch dynamisch stabil!

Magnetischer Wandler „Typ 1“

Dynamische Stabilität bei eingprägter Spannung $u(t)$



- Mech. und el. Diff.-gleichungen (1) + (2) durch Eliminieren von i_1 : $u(t) = U + u_1(t)$

$$m \cdot \ddot{x}_1 + \left(d + \frac{R}{L} \cdot m \right) \cdot \dot{x}_1 + \left(k_{\text{res}} + \frac{K_0^2}{L} + \frac{R}{L} \cdot d \right) \cdot x_1 + \frac{R}{L} \cdot k_{\text{res}} \cdot x_1 = -\frac{K_0}{L} \cdot u_1(t)$$

- **Drei gekoppelte Energiespeicher:** Feder k , Masse m , Induktivität $L \rightarrow$ System 3. Ordnung \Rightarrow

\Rightarrow linearisierte Differentialgleichung 3. Ordnung

- **Statische Stabilität:** $k_{\text{res}} > 0 \Rightarrow b_3 \cdot \ddot{x}_1 + b_2 \cdot \dot{x}_1 + b_1 \cdot x_1 + b_0 \cdot x_1 = -\frac{K_0}{L} \cdot u_1(t)$

$$b_3 = m > 0, \quad b_2 = d + \frac{R}{L} \cdot m > 0; \quad \text{wegen } k_{\text{res}} > 0 \Rightarrow b_1 = k_{\text{res}} + \frac{K_0^2}{L} + \frac{R}{L} \cdot d > 0, \quad b_0 = \frac{R}{L} \cdot k_{\text{res}} > 0$$

- **HURWITZ-Kriterium:** $D_1 = b_1 > 0, \quad D_2 = b_1 \cdot b_2 - b_0 \cdot b_3 > 0$

$$D_3 = b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 + 0 + 0 - 0 - 0 - b_3^2 \cdot b_0 > 0$$

$$\text{denn: } D_2 = \left(k_{\text{res}} + \frac{K_0^2}{L} + \frac{R \cdot d}{L} \right) \cdot \left(d + \frac{R}{L} \cdot m \right) - k_{\text{res}} \cdot \frac{R}{L} \cdot m = \left(k_{\text{res}} + \frac{K_0^2}{L} + \frac{R \cdot d}{L} \right) \cdot d + \frac{K_0^2 + R \cdot d}{L^2} \cdot R \cdot m > 0$$

$$D_3 = b_3 \cdot (b_1 \cdot b_2 - b_0 \cdot b_3) = b_3 \cdot D_2 > 0$$

\Rightarrow Auch bei Spannungspeisung sind alle statisch stabilen Arbeitspunkte auch dynamisch stabil !



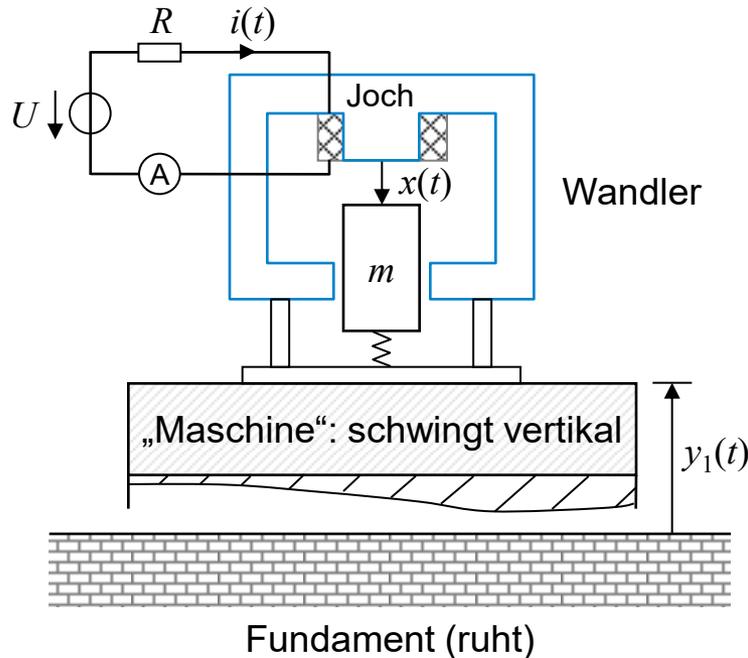
Magnetischer Wandler „Typ 1“

Anwendung: Schwingungsmesser

Übung



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT



- y_1 : Schwingungselongation der Maschinenoberfläche
- U : Gleichspannung zur Einstellung des Arbeitspunkts (I_0, X_0)
 $I = U/R \Rightarrow i(t) = I + i_1(t)$
- X : Gleichgewichtslage der Masse m relativ zum Joch
 $x(t) = X + x_1(t)$
- $x_1(t)$: Verschiebung von m relativ zum Joch zufolge der Anregung $y_1(t)$
- $i_1(t)$: Stromänderung zufolge der m -Bewegung $x_1(t)$

- **Messkette:** y_1 (Messgröße) \rightarrow bewirkt $x_1(t) \rightarrow i_1(t)$:
Über Ampere-Meter \textcircled{A} wird über i_1 die Schwingungsgröße y_1 erfasst!
- Nur **kleine Werte** y_1 messen, denn nur dann sind x_1/X und i_1/I klein \Rightarrow
 \Rightarrow Wandler ist **annähernd linear!** $\Rightarrow y_1 \sim i_1$



Magnetischer Wandler „Typ 1“

Schwingungsmesser: Aufgabenstellung

Übung



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

- Herleiten der Beziehung zwischen i_1 und y_1 im Frequenzbereich
- Bestimmen des Amplituden-Frequenzgangs $i_1(y_1)$ im Arbeitspunkt jeweils für kleinen und großen Gleichstrom!
- In welchem Frequenzbereich ist das Stromsignal proportional zur Schwingungs-Amplitude, -Geschwindigkeit, -Beschleunigung?
- In welchem Frequenzbereich ist das Stromsignal nicht brauchbar für eine Schwingungsmessung?
- Diskussion des Frequenzgangs:
 - a) Resonanzverhalten ω_{res} ,
speziell für kleine mechanische Dämpfung $\omega_d = d/m \ll \omega_{\text{res}}$!
 - b) Einfluss einer kleinen und großen elektrischen Dämpfung $\omega_L = R/L$!
(„klein“ u. „groß“ bezüglich ω_{res} !)



Magnetischer Wandler „Typ 1“

Mechanische u. elektrische Dämpfung

Übung



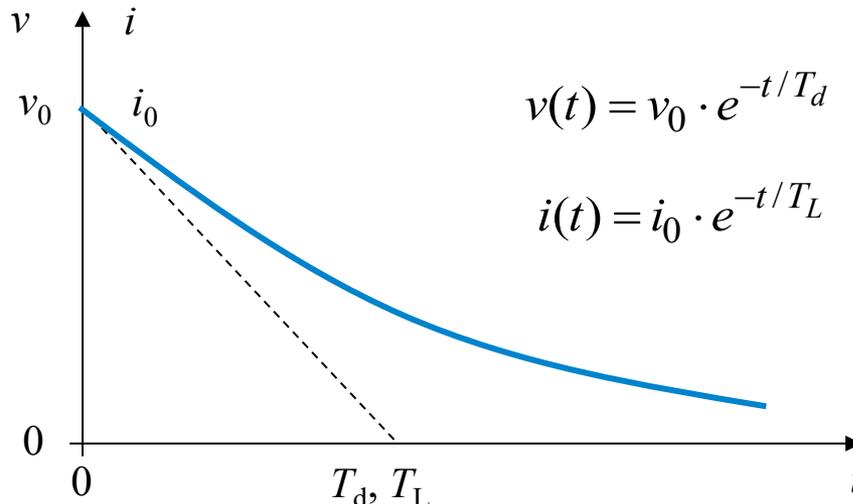
TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

- Physikalische Bedeutung von $\omega_d = d/m$ und $\omega_L = R/L$:

$$m \cdot \dot{v} + d \cdot v = 0, \quad v(0) = v_0, \quad v(t) = v_0 \cdot e^{-t/T_d}, \quad T_d = 1/\omega_d = m/d.$$

$$L \cdot \dot{i} + R \cdot i = 0, \quad i(0) = i_0, \quad i(t) = i_0 \cdot e^{-t/T_L}, \quad T_L = 1/\omega_L = L/R.$$

- $\omega_d = d/m$ und $\omega_L = R/L$ sind die inversen Zeitkonstanten des Abklingens einer Geschwindigkeit oder eines el. Stroms auf Grund konstanter „Dämpfung“ durch Reibung bzw. el. Widerstand!



Beispiel:

$d = 0.1 \text{ N}\cdot\text{s/m}$, $m = 50 \text{ g}$:

$T_d = 0.5 \text{ s}$

$R = 1 \Omega$, $L = 500 \text{ mH}$:

$T_L = 0.5 \text{ s}$



Magnetischer Wandler „Typ 1“

Schwingungsmesser: Differentialgleichung

Übung



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

- Masse m bewegt sich gegenüber Fundament mit Weg $x_1(t) - y_1(t)$
- Elektrischer Kreis $u(t) = U + u_1(t)$ aus idealer Spannungsquelle $u = U$ versorgt $\Rightarrow u_1 = 0$
- Luft im geschlossenen Wandler mitbewegt, so dass nur $x_1(t)$ dämpfend wirkt.

$$m \cdot (\ddot{x}_1 - \ddot{y}_1) + d \cdot \dot{x}_1 + \left(-\frac{dF_F}{dx} + \frac{dF_m}{dx} \right) \Big|_{x=X} \cdot x_1 = -K_0 \cdot i_1 \quad (1)$$

$$L(X) \cdot \dot{i}_1 + R \cdot i_1 = K_0 \cdot \dot{x}_1 \quad (2)$$

Linearisiertes
Differentialgleichungssystem

- Schwingweg $y_1(t) = \hat{Y}_1 \cdot \cos \omega t = \text{Re} \{ \hat{\underline{Y}}_1 \cdot e^{j\omega t} \}$, $\hat{\underline{Y}}_1 = \hat{Y}_1$
- Komplexe Rechnung für eingeschwungenen Zustand (Schwingfrequenz $f = \frac{\omega}{2\pi}$):

$$m \cdot \ddot{x}_1 + d \cdot \dot{x}_1 + k_{\text{res}} \cdot x_1 = -K_0 \cdot i_1 + m \cdot \ddot{y}_1 \quad \text{und} \quad L \cdot \dot{i}_1 + R \cdot i_1 = K_0 \cdot \dot{x}_1$$

$$\text{mit } x_1(t) = \text{Re} \{ \hat{\underline{X}}_1 \cdot e^{j\omega t} \}, \quad i_1(t) = \text{Re} \{ \hat{\underline{I}}_1 \cdot e^{j\omega t} \}$$

$$\Rightarrow -m \cdot \omega^2 \hat{\underline{X}}_1 + j d \cdot \omega \hat{\underline{X}}_1 + k_{\text{res}} \cdot \hat{\underline{X}}_1 = -K_0 \cdot \hat{\underline{I}}_1 - m \cdot \omega^2 \cdot \hat{\underline{Y}}_1, \quad j \omega L \cdot \hat{\underline{I}}_1 + R \cdot \hat{\underline{I}}_1 = K_0 \cdot j \omega \cdot \hat{\underline{X}}_1$$



Magnetischer Wandler „Typ 1“

Lösung für eingeschwungenen Zustand

Übung



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

• Gesucht ist die Funktion der Abhängigkeit $\hat{I}_1(\hat{Y}_1) \Rightarrow \hat{X}_1$ wird eliminiert:

$$\hat{X}_1 = \frac{R + j\omega L}{j\omega \cdot K_0} \cdot \hat{I}_1 \Rightarrow (-\omega^2 \cdot m + j\omega \cdot d + k_{\text{res}}) \cdot \frac{R + j\omega L}{j\omega \cdot K_0} \cdot \hat{I}_1 = -K_0 \cdot \hat{I}_1 - \omega^2 \cdot m \cdot \hat{Y}_1$$

$$\hat{I}_1 = \frac{-\omega^2 \cdot m \cdot \hat{Y}_1}{K_0 + \frac{R + j\omega L}{j\omega \cdot K_0} \cdot (-\omega^2 \cdot m + j\omega \cdot d + k_{\text{res}})}$$

$$\frac{\hat{I}_1}{\hat{Y}_1} = \frac{-\omega^2}{\frac{K_0}{m} + \frac{R + j\omega L}{j\omega \cdot K_0} \cdot \left(-\omega^2 + j\omega \cdot \frac{d}{m} + \underbrace{\frac{k}{m} - \frac{\mu_0 N^2 2h l^2}{m \cdot (X + e')^3}}_a \right)}$$

$$\frac{\hat{I}_1}{\hat{Y}_1} = \frac{-\omega^2}{\frac{L}{K_0} \cdot \frac{K_0^2}{m \cdot L} + \frac{L}{K_0} \cdot \left(\frac{R}{j\omega L} + 1 \right) \cdot \left(-\omega^2 + j\omega \cdot \frac{d}{m} + a \right)}$$

$$\frac{\hat{I}_1}{\hat{Y}_1} = -\frac{I}{\underbrace{X + e'}_{\frac{K_0}{L}}} \cdot \frac{\omega^2}{\frac{1}{m} \cdot \frac{\mu_0 N^2 2h l^2}{(X + e')^3} + \left(1 + \frac{R}{j\omega L} \right) \cdot \left(-\omega^2 + j\omega \cdot \frac{d}{m} + a \right)}$$

$$\frac{K_0^2 \cdot L}{m} = \frac{2k}{m} \cdot \frac{(x_{\text{max}} - X)}{X + e'}$$

$$a = \frac{3k}{m \cdot (X + e')} \cdot (X - X_3)$$

- $K_0 = \frac{L \cdot I}{X + e'} = \frac{\mu_0 N^2 \cdot 2h \cdot l}{(X + e')^2} \cdot I$
- $k_{\text{res}} = k - L \cdot \frac{I^2}{(X + e')^2} = k - \frac{\mu_0 N^2 \cdot 2h \cdot l}{(X + e')^3} \cdot I^2$
- $L = \frac{\mu_0 N^2 \cdot 2h \cdot l}{X + e'}$
- $I^2 = \frac{(X + e')^2}{\mu_0 N^2 \cdot h \cdot l} (-k \cdot X + m \cdot g + k \cdot x_F)$
- $X_3 = \frac{2}{3} \cdot \left(x_F + \frac{m \cdot g}{k} - \frac{e'}{2} \right)$
- $x_{\text{max}} = x_F + \frac{m \cdot g}{k}$



Magnetischer Wandler „Typ 1“

Arbeitspunktauswahl für Frequenzgang

Übung



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

$$\frac{\hat{I}_1}{\hat{Y}_1} = -\frac{I}{X+e'} \cdot \frac{\omega^2}{\frac{2k}{m} \cdot \frac{x_{\max} - X}{X+e'} + \left(1 + \frac{R}{j\omega L}\right) \cdot \left(-\omega^2 + j\omega \cdot \frac{d}{m} + \frac{3k \cdot (X - X_3)}{m \cdot (X+e')}\right)}$$

• Frequenzgang im Arbeitspunkt (I, X) , $X_3 \leq X \leq x_{\max}$

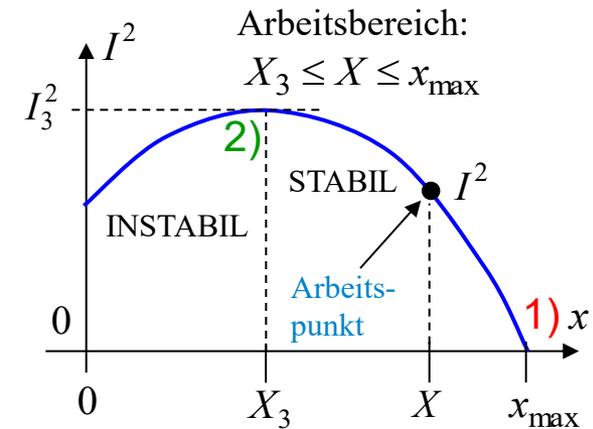
• Abkürzungen: $\omega_1^2 := \frac{3k}{m} \cdot \frac{X - X_3}{X + e'}$ $\omega_2^2 := \frac{2k}{m} \cdot \frac{x_{\max} - X}{X + e'}$

1) Arbeitspunkt bei $(I, X) = (0, x_{\max}) \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{k/m}$, $\omega_2 = 0$

2) Arbeitspunkt bei $(I, X) = (I_3, X_3) \Rightarrow \omega_1 = 0$, $\omega_2 = \sqrt{k/m}$

$$\omega_1^2(x_{\max}) = \frac{3k}{m} \cdot \frac{x_{\max} - X_3}{x_{\max} + e'} = \frac{3k}{m} \cdot \frac{x_F + \frac{m \cdot g}{k} - \frac{2}{3} \cdot \left(x_F + \frac{m \cdot g}{k} - \frac{e'}{2}\right)}{x_F + \frac{m \cdot g}{k} + e'} = \frac{k}{m}$$

$$\omega_2^2(X_3) = \frac{2k}{m} \cdot \frac{x_{\max} - X_3}{X_3 + e'} = \frac{2k}{m} \cdot \frac{x_F + \frac{m \cdot g}{k} - \frac{2}{3} \cdot \left(x_F + \frac{m \cdot g}{k} - \frac{e'}{2}\right)}{\frac{2}{3} \cdot \left(x_F + \frac{m \cdot g}{k} - \frac{e'}{2}\right)} = \frac{k}{m}$$

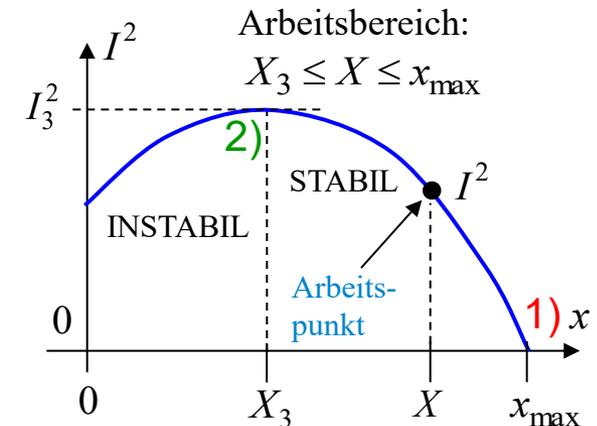


Magnetischer Wandler „Typ 1“ Frequenzgang allgemein

$$\frac{\hat{I}_1}{\hat{Y}_1} = -\frac{I}{X+e'} \cdot \frac{\omega^2}{\frac{2k}{m} \cdot \frac{x_{\max} - X}{X+e'} + \left(1 + \frac{R}{j\omega L}\right) \cdot \left(-\omega^2 + j\omega \cdot \frac{d}{m} + \frac{3k \cdot (X - X_3)}{m \cdot (X+e')}\right)}$$



$$\frac{\hat{I}_1}{\hat{Y}_1} = -\frac{I}{X+e'} \cdot \frac{\omega^2}{\omega_2^2 + \left(1 + \frac{R}{j\omega L}\right) \cdot \left(\omega_1^2 - \omega^2 + j\omega \frac{d}{m}\right)}$$



- Frequenzgang des Betrags $\left| \frac{\hat{I}_1}{\hat{Y}_1} \right|$
 - bei kleinem $I \approx 0 \Rightarrow$ Bei 1)
 - bei großem $I \approx I_3 \Rightarrow$ Bei 2)

- Frequenzgang der Phasenverschiebung zwischen $i_1(t)$ und $y_1(t)$ wird hier nicht untersucht!

Magnetischer Wandler „Typ 1“

Amplituden-Frequenzgang bei „kleinem I “ (1)

Übung



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

1) Amplituden-Frequenzgang $\left| \frac{\hat{I}_1}{\hat{Y}_1} \right|(\omega)$ für kleines $I \approx 0 \Leftrightarrow \omega_2 \approx 0, \omega_1 \approx \sqrt{k/m}$

$$\frac{\hat{I}_1/I}{\hat{Y}_1/(X+e')} = \frac{\omega^3 \cdot (R/L)}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2\right] \cdot \left[(\omega_1^2 - \omega^2)^2 + \left(\omega \cdot \frac{d}{m}\right)^2 \right]}} \Rightarrow \text{Resonanz, wenn Amplitude maximal, also Nenner minimal}$$

$$N(\omega^2) = (\omega_1^2 - \omega^2)^2 + \left(\omega \cdot \frac{d}{m}\right)^2 = \text{Min.} \Rightarrow \frac{dN(\omega^2)}{d\omega^2} = \frac{dN(\xi)}{d\xi} = \left[(\omega_1^2 - \xi)^2 + \xi \cdot \left(\frac{d}{m}\right)^2 \right]' = 0$$

$$-2 \cdot (\omega_1^2 - \xi) + \left(\frac{d}{m}\right)^2 = 0 \Rightarrow \xi = \omega^2 = \omega_1^2 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{d}{m}\right)^2$$

$$\text{Resonanzbedingung: } \omega = \omega_{\text{Res}} = \sqrt{\omega_1^2 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{d}{m}\right)^2}$$

$$\text{Resonanzfrequenz bei schwacher mech. Dämpfung: } \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{d}{m} \ll \omega_1 \approx \sqrt{k/m}$$

$$\omega_{\text{Res}} \cong \omega_1 = \sqrt{\frac{3k}{m} \cdot \frac{X - X_3}{X + e'}} \approx \sqrt{\frac{3k}{m} \cdot \frac{x_{\text{max}} - X_3}{x_{\text{max}} + e'}} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$



Magnetischer Wandler „Typ 1“

Amplituden-Frequenzgang bei „kleinem I “ (2)

Übung



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

- **Leistung im Messkreis** am Amperemeter (Innenwiderstand R_i): $\hat{I}_1^2 \cdot R_i / 2 = P$

$$\Rightarrow \text{Ordinate: } \eta = 10 \cdot \lg \left(\frac{P}{P_{\text{Bezug}}} \right) = 20 \cdot \lg \left(\frac{\hat{I}_1}{\hat{I}_{\text{Bezug}}} \right)$$

\hat{I}_{Bezug} : frei wählbar, z. B.:

$$\Rightarrow \eta = 20 \cdot \lg \left(\frac{\hat{I}_1(\omega)}{\hat{Y}_{\text{Bezug}} \cdot \frac{I}{X+e'}} \right)$$

$$\hat{I}_{\text{Bezug}} = \hat{Y}_{\text{Bezug}} \cdot \frac{I}{X+e'}, \quad \hat{Y}_{\text{Bezug}} = 1 \mu\text{m}$$

$$\Rightarrow \text{Abszisse: } \xi = 10 \cdot \lg \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right), \quad \omega_1: \text{Bezugskreisfrequenz}$$

- Bei Resonanz $\omega \cong \omega_1$:
$$\frac{\hat{I}_1/I}{\hat{Y}_1/(X+e')} = \frac{\omega_1^3 \cdot (L/R)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_1 L}{R}\right)^2} \cdot \omega_1 \cdot \frac{d}{m}} = \frac{\omega_1^3 / \omega_L}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_1}{\omega_L}\right)^2} \cdot \omega_1 \cdot \frac{d}{m}}$$

- (i) **Kleine** el. Dämpfung: R „klein“: $\omega_L := R/L$ (i) $\omega_1 \gg \omega_L = \frac{R}{L}$:

- (ii) **Große** el. Dämpfung: R „groß“: (ii) $\omega_1 \ll \omega_L = \frac{R}{L}$:



Magnetischer Wandler „Typ 1“

Amplituden-Frequenzgang bei „kleinem I “ (3)

Übung



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

$$\ddot{u} = \frac{\hat{I}_1/I}{\hat{Y}_1/(X+e')} = \frac{\omega^3 \cdot (R/L)}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2\right] \cdot \left[(\omega_1^2 - \omega^2)^2 + \left(\omega \cdot \frac{d}{m}\right)^2\right]}} = \frac{\omega^3 \cdot \omega_L}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_L}\right)^2\right] \cdot \left[(\omega_1^2 - \omega^2)^2 + (\omega \cdot \omega_d)^2\right]}}$$

• **Resonanz** $\omega \cong \omega_1$: $\frac{\hat{I}_1/I}{\hat{Y}_1/(X+e')} = \frac{\omega_1^3 / \omega_L}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_1}{\omega_L}\right)^2} \cdot \omega_1 \cdot \frac{d}{m}}$ $\omega_L := R/L$ $\omega_d := d/m$

• **\ddot{u} -Werte bei Resonanz:**

(i) $\omega_1 \gg \omega_L = \frac{R}{L}$: $\frac{\omega_1^3 / \omega_L}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_1}{\omega_L}\right)^2} \cdot \omega_1 \cdot \frac{d}{m}} \approx \frac{\omega_1^3 / \omega_L}{\sqrt{\left(\frac{\omega_1}{\omega_L}\right)^2} \cdot \omega_1 \cdot \frac{d}{m}} = \frac{\omega_1^3 / \omega_L}{\frac{\omega_1}{\omega_L} \cdot \omega_1 \cdot \frac{d}{m}} = \frac{\omega_1^2}{\omega_1 \cdot \frac{d}{m}} = \frac{\omega_1}{\frac{d}{m}} = \frac{\omega_1}{\omega_d}$

(ii) $\omega_1 \ll \omega_L = \frac{R}{L}$: $\frac{\omega_1^3 / \omega_L}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_1}{\omega_L}\right)^2} \cdot \omega_1 \cdot \frac{d}{m}} \approx \frac{\omega_1^3 / \omega_L}{\omega_1 \cdot \frac{d}{m}} = \frac{\omega_1^2 / \omega_L}{\frac{d}{m}} = \frac{\omega_1^2}{\frac{R}{L} \cdot \frac{d}{m}} = \frac{\omega_1^2}{\omega_L \cdot \omega_d}$



Magnetischer Wandler „Typ 1“

Amplituden-Frequenzgang bei „kleinem I “ (4)

Übung



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

- Resonanz $\omega \cong \omega_1$: (i) $\omega_1 \gg \omega_L = \frac{R}{L} \Rightarrow \frac{\hat{I}_1/I}{\hat{Y}_1/(X+e')} \cong \omega_1 \cdot \frac{m}{d} = \frac{\omega_1}{\omega_d} \quad \omega_d := \frac{d}{m}$
- (ii) $\omega_1 \ll \omega_L = \frac{R}{L} \Rightarrow \frac{\hat{I}_1/I}{\hat{Y}_1/(X+e')} \cong \omega_1^2 \cdot \frac{m \cdot L}{d \cdot R} = \frac{\omega_1}{\omega_d} \cdot \frac{\omega_1}{\omega_L}$

- Amplituden-Frequenzgang für schwache mech. u. el. Dämpfung: Fall (i): $\frac{d}{m} = \omega_d \ll \omega_L = \frac{R}{L} \ll \omega_1$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccccccc}
 & | & & | & & | & \rightarrow \omega \\
 0 & \omega_d & & \omega_L & & \omega_1 & \\
 \end{array} \\
 \ddot{u} = \frac{\hat{I}_1/I}{\hat{Y}_1/(X+e')} \approx \frac{\omega^3/\omega_L}{\sqrt{1+(\omega/\omega_L)^2} \cdot \sqrt{(\omega_1^2 - \omega^2)^2}} = \frac{\omega^3/\omega_L}{\sqrt{1+(\omega/\omega_L)^2} \cdot |\omega_1^2 - \omega^2|}
 \end{array}$$

$$(1) \quad 0 < \omega < \omega_L : \ddot{u} \approx \frac{\omega^3/\omega_L}{\omega_1^2 - \omega^2} \approx \frac{\omega^3}{\omega_L \omega_1^2} \sim \omega^3$$

$$(2) \quad \omega_L < \omega < \omega_1 : \ddot{u} \approx \frac{\omega^3/\omega_L}{(\omega/\omega_L) \cdot (\omega_1^2 - \omega^2)} = \frac{\omega^2}{\omega_1^2 - \omega^2} \approx \frac{\omega^2}{\omega_1^2} \sim \omega^2$$

$$(3) \quad \omega_1 < \omega : \ddot{u} \approx \frac{\omega^3/\omega_L}{(\omega/\omega_L) \cdot (\omega^2 - \omega_1^2)} = \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_1^2} \approx \frac{\omega^2}{\omega^2} = 1$$



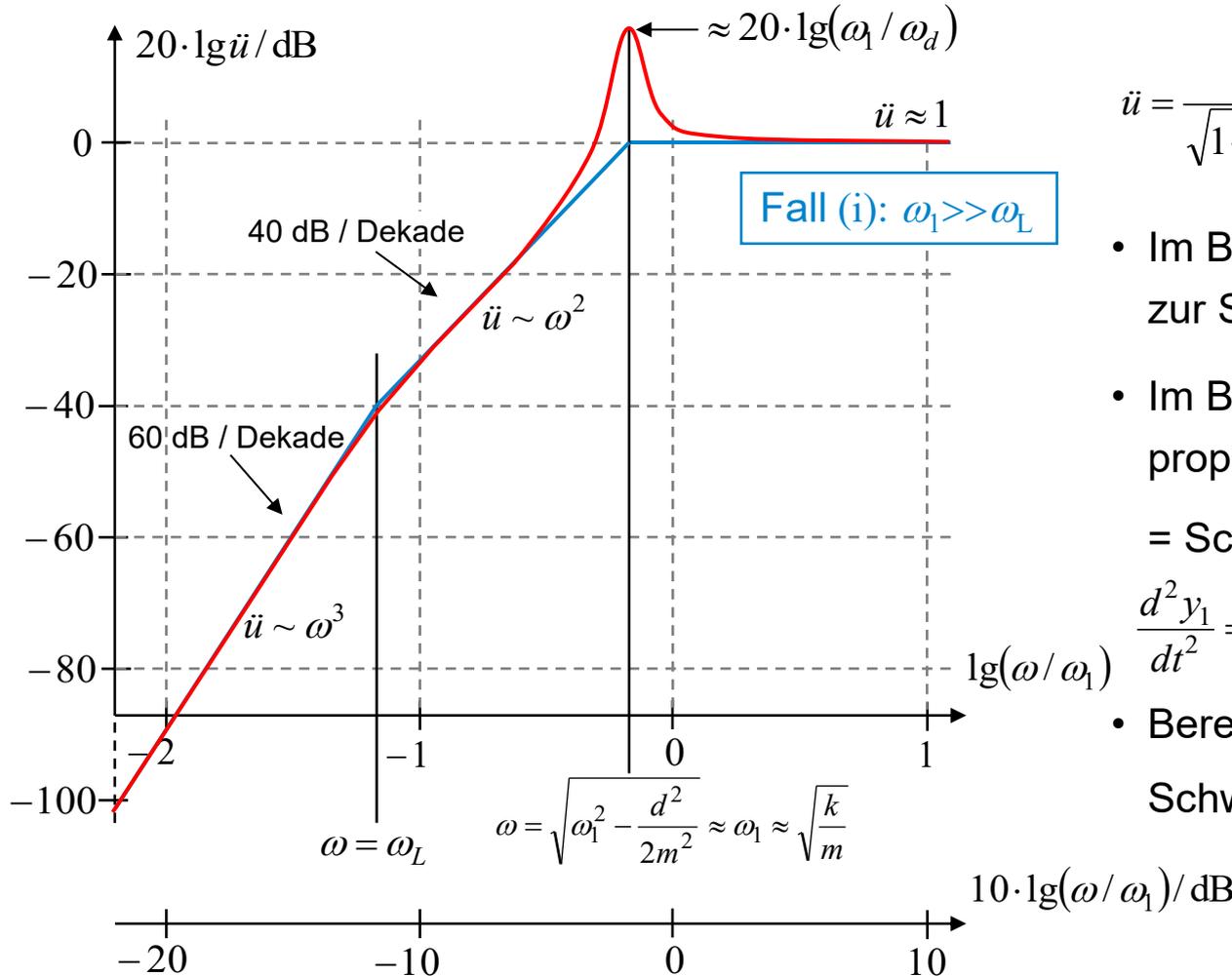
Magnetischer Wandler „Typ 1“

Amplituden-Frequenzgang bei „kleinem I “ und $\omega_1 \gg \omega_L$ Schwache mech. & schwache el. Dämpfung

Übung



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT



$$\ddot{u} = \frac{\omega^3 / \omega_L}{\sqrt{1 + (\omega / \omega_L)^2} \cdot \sqrt{(\omega_1^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \cdot \omega_d^2}}$$

- Im Bereich $\omega > \omega_1$ ist \hat{I}_1 proportional zur Schwingamplitude \hat{Y}_1

- Im Bereich $\omega_L < \omega < \omega_1$ ist \hat{I}_1 proportional zu $\omega^2 \cdot \hat{Y}_1 =$

= Schwingbeschleunigung \ddot{y}_1 :

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} \text{Re} \left\{ \hat{Y}_1 \cdot e^{j\omega t} \right\} = \text{Re} \left\{ -\omega^2 \cdot \hat{Y}_1 \cdot e^{j\omega t} \right\}$$

- Bereich $0 < \omega < \omega_L$ für

Schwingungsmessung unbrauchbar



Magnetischer Wandler „Typ 1“

Übung

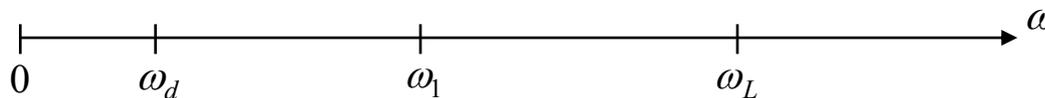


TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Amplituden-Frequenzgang bei „kleinem I “ und $\omega_1 \ll \omega_L$ (1)

- Amplituden-Frequenzgang für schwache mech. Dämpfung $\frac{d}{m} = \omega_d \ll \omega_1$
große el. Dämpfung: Fall (ii): $\omega_1 \ll \omega_L$
- Schwache mech. Dämpfung $\omega_d \ll \omega_1 \ll \omega_L$:

$$\ddot{u} = \frac{\omega^3 \cdot \omega_L}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_L}\right)^2\right] \cdot \left[\left(\omega_1^2 - \omega^2\right)^2 + (\omega \cdot \omega_d)^2\right]}} \approx \frac{\omega^3 \cdot \omega_L}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_L}\right)^2\right] \cdot \left(\omega_1^2 - \omega^2\right)^2}} = \frac{\omega^3 \cdot \omega_L}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_L}\right)^2\right] \cdot \left|\omega_1^2 - \omega^2\right|}}$$



$$(1) \quad 0 < \omega < \omega_1 : \ddot{u} \approx \frac{\omega^3 / \omega_L}{1 \cdot \omega_1^2} \approx \frac{\omega^3}{\omega_L \omega_1^2} \sim \omega^3$$

$$(2) \quad \omega_1 < \omega < \omega_L : \ddot{u} \approx \frac{\omega^3 / \omega_L}{1 \cdot \omega^2} = \frac{\omega}{\omega_L} \sim \omega$$

$$(3) \quad \omega_L < \omega : \ddot{u} \approx \frac{\omega^3 / \omega_L}{(\omega / \omega_L) \cdot \omega^2} = 1$$

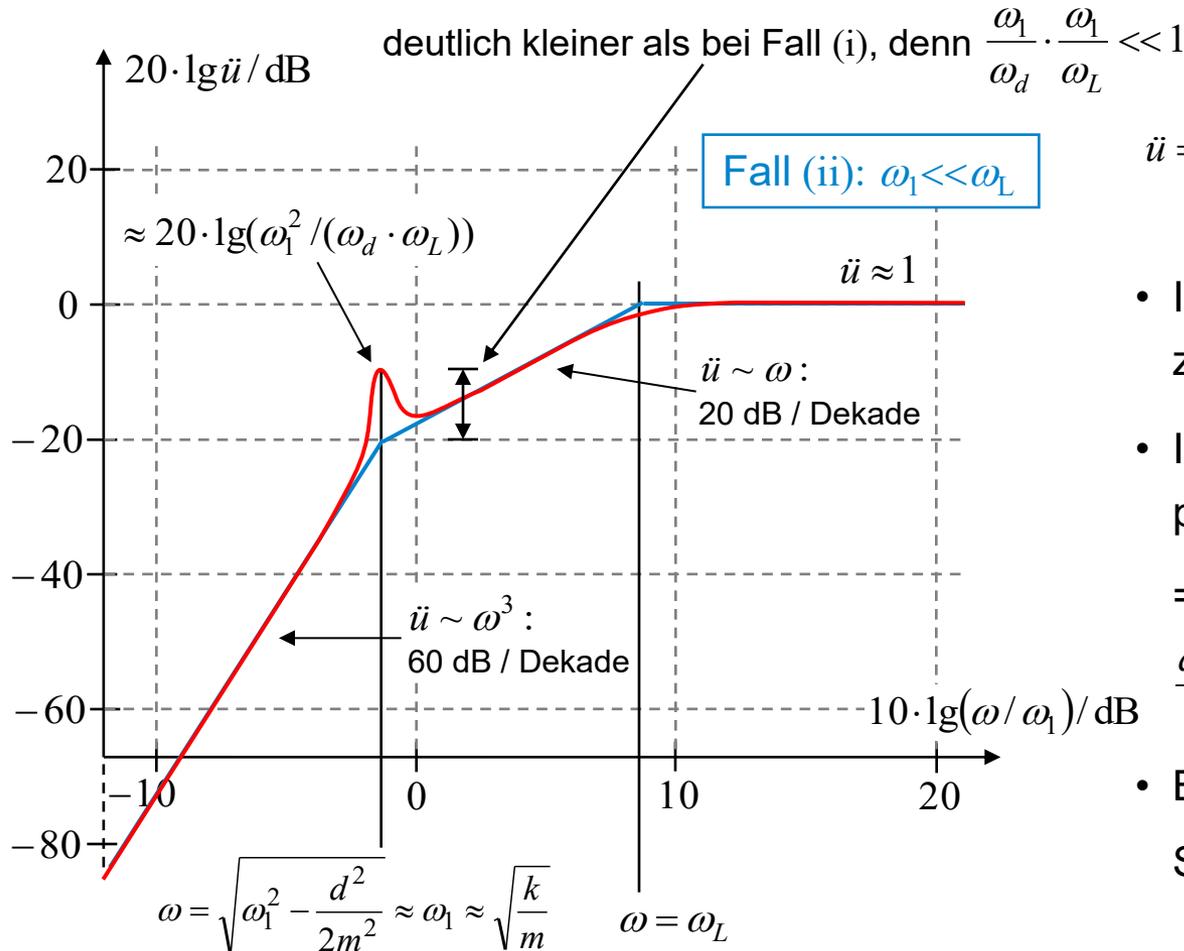


Magnetischer Wandler „Typ 1“

Übung



Amplituden-Frequenzgang bei „kleinem I “ und $\omega_1 \ll \omega_L$ (2) Schwache mech. & starke el. Dämpfung



$$\ddot{u} = \frac{\omega^3 / \omega_L}{\sqrt{1 + (\omega / \omega_L)^2} \cdot \sqrt{(\omega_1^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \cdot \omega_d^2}}$$

- Im Bereich $\omega > \omega_L$ ist \hat{I}_1 proportional zur Schwingamplitude \hat{Y}_1

- Im Bereich $\omega_1 < \omega < \omega_L$ ist \hat{I}_1 proportional zu $\omega \cdot \hat{Y}_1 =$

= Schwinggeschwindigkeit \dot{y}_1 :

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{d}{dt} \text{Re} \left\{ \hat{Y}_1 \cdot e^{j\omega t} \right\} = \text{Re} \left\{ j\omega \cdot \hat{Y}_1 \cdot e^{j\omega t} \right\}$$

- Bereich $0 < \omega < \omega_1$ für

Schwingungsmessung unbrauchbar



Magnetischer Wandler „Typ 1“

Amplituden-Frequenzgang bei „großem I “

Übung



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

2) Amplitudenfrequenzgang $\left| \frac{\hat{I}_1}{\hat{Y}_1} \right|(\omega)$ für großes $I \approx I_3 \Leftrightarrow X \approx X_3 \Leftrightarrow \omega_1 \approx 0, \omega_2 \approx \sqrt{k/m}$

$$\frac{\hat{I}_1}{\hat{Y}_1} = -\frac{I}{X + e'} \cdot \frac{\omega^2}{\omega_2^2 + \left(1 + \frac{R}{j\omega L}\right) \cdot \left(\omega_1^2 - \omega^2 + j\omega \frac{d}{m}\right)} \approx -\frac{I}{X + e'} \cdot \frac{\omega^2}{\omega_2^2 + \left(1 + \frac{R}{j\omega L}\right) \cdot \left(-\omega^2 + j\omega \frac{d}{m}\right)}$$

$$\ddot{u} = \frac{\hat{I}_1/I}{\hat{Y}_1/(X + e')} = \frac{\omega^2}{\omega_2^2 + \left(1 + \frac{R}{j\omega L}\right) \cdot \left(-\omega^2 + j\omega \cdot \frac{d}{m}\right)} = \frac{\omega^2 \cdot L/R}{\omega_2^2 \cdot \frac{L}{R} + \frac{d}{m} - \omega^2 \cdot \frac{L}{R} + j\omega \cdot \left(1 + \frac{L}{R} \cdot \frac{d}{m}\right)} \quad \begin{array}{l} \omega_L := R/L \\ \omega_d := \frac{d}{m} \end{array}$$

$$= \frac{\omega^2 \cdot L/R}{\sqrt{\left[\left(\omega_2^2 - \omega^2\right) \cdot \frac{L}{R} + \frac{d}{m}\right]^2 + \omega^2 \cdot \left(1 + \frac{L}{R} \cdot \frac{d}{m}\right)^2}} = \frac{(\omega/\omega_L)^2}{\sqrt{\left[\left(\frac{\omega_2}{\omega_L}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{\omega_L}\right)^2 + \frac{\omega_d}{\omega_L}\right]^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_L}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{\omega_d}{\omega_L}\right)^2}}$$

• Schwache mech. Dämpfung: $\frac{\omega_d}{\omega_L} \ll 1$

Kleine el. Dämpfung:

(i) $\omega_2 \gg \omega_L$

Große el. Dämpfung:

(ii) $\omega_2 \ll \omega_L$



Magnetischer Wandler „Typ 1“

Übung



Resonanz bei „großem I “, Fall (i): $\omega_2 \gg \omega_L$

- Berechnung der Resonanzfrequenz → Nenner der Funktion \ddot{u} wird **minimal** bei Resonanz-Kreisfrequenz ω_{res} :

$$\ddot{u} = \frac{(\omega / \omega_L)^2}{\sqrt{\left[\left(\frac{\omega_2}{\omega_L}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{\omega_L}\right)^2 + \frac{\omega_d}{\omega_L}\right]^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_L}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{\omega_d}{\omega_L}\right)^2}} = \frac{\omega^2}{\sqrt{\left[\omega_2^2 - \omega^2 + \omega_d \omega_L\right]^2 + \omega^2 \cdot (\omega_d + \omega_L)^2}}$$

$$(i) \quad \omega_2 \gg \omega_L : \ddot{u} \approx \frac{\omega^2}{\sqrt{\left[\omega_2^2 - \omega^2\right]^2 + \omega^2 \cdot (\omega_d + \omega_L)^2}}$$

$$N(\omega^2) = \left[\omega_2^2 - \omega^2\right]^2 + \omega^2 \cdot (\omega_d + \omega_L)^2 = \text{Min.} \Rightarrow \frac{dN(\omega^2)}{d\omega^2} = \frac{dN(\xi)}{d\xi} = \left[2(\omega_2^2 - \xi) + \xi \cdot (\omega_d + \omega_L)^2\right] = 0$$

$$-2 \cdot (\omega_2^2 - \xi) + (\omega_d + \omega_L)^2 = 0 \Rightarrow \xi = \omega^2 = \omega_2^2 - (\omega_d + \omega_L)^2 / 2$$

Resonanz-Kreisfrequenz ω_{Res} für schwache mech. u. el. Dämpfung:

$$\omega_{\text{Res}} = \sqrt{\omega_2^2 - (\omega_L + \omega_d)^2 / 2} \underset{\omega_d \rightarrow 0}{\approx} \sqrt{\omega_2^2 - (\omega_L^2 / 2)}$$

Gültig für $\omega_2 > \omega_L / \sqrt{2} = 0.707 \cdot \omega_L$



Magnetischer Wandler „Typ 1“

Resonanz bei „großem I“, Fall (i): $\omega_2 \gg \omega_L$

Übung



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

(i) $\omega_2 \gg \omega_L : \omega_{res} = \sqrt{\omega_2^2 - (\omega_L^2 + \omega_d^2)/2} \underset{\omega_d \rightarrow 0}{\approx} \sqrt{\omega_2^2 - \omega_L^2/2}$, gültig für $\omega_2 > \omega_L / \sqrt{2} = 0.707 \cdot \omega_L$

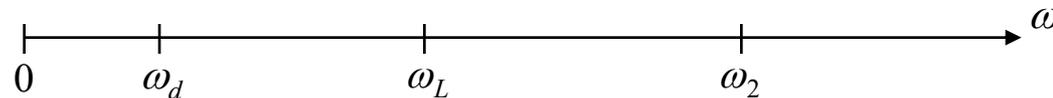
$$\ddot{u}(\omega) = \frac{\omega^2}{\sqrt{[\omega_2^2 - \omega^2 + \omega_d \omega_L]^2 + \omega^2 \cdot (\omega_d + \omega_L)^2}}$$

$$\ddot{u}(\omega)|_{\omega_d \rightarrow 0} = \frac{(\omega/\omega_L)^2}{\sqrt{((\omega_2/\omega_L)^2 - (\omega/\omega_L)^2)^2 + (\omega/\omega_L)^2}}$$

(mech. ungedämpft)

$$\ddot{u}(\omega_{Res}) \underset{\omega_d \rightarrow 0}{\approx} \frac{(\omega_2/\omega_L)^2 - \frac{1 + (\omega_d/\omega_L)^2}{2}}{(1 + (\omega_d/\omega_L)) \cdot \sqrt{(\omega_2/\omega_L)^2 - \frac{1 + (\omega_d/\omega_L)^2}{4}}} \underset{\omega_2 \gg \omega_L}{\approx} \frac{(\omega_2/\omega_L)^2 - \frac{1}{2}}{\sqrt{(\omega_2/\omega_L)^2 - \frac{1}{4}}} \underset{\omega_2 \gg \omega_L}{\approx} \frac{\omega_2}{\omega_L}$$

- Für schwache Dämpfung $\omega_d \ll \omega_L \ll \omega_2$:



(i) : (1) $0 < \omega < \omega_L : \ddot{u}|_{\omega_d \rightarrow 0} \approx (\omega/\omega_2)^2 \sim \omega^2$

(2) $\omega_L < \omega < \omega_2 : \ddot{u} \approx (\omega/\omega_2)^2 \sim \omega^2$

(3) $\omega_2 < \omega : \ddot{u} \approx \frac{(\omega/\omega_L)^2}{\sqrt{(-(\omega/\omega_L)^2)^2 + (\omega/\omega_L)^2}} \approx \frac{(\omega/\omega_L)^2}{(\omega/\omega_L)^2} = 1$



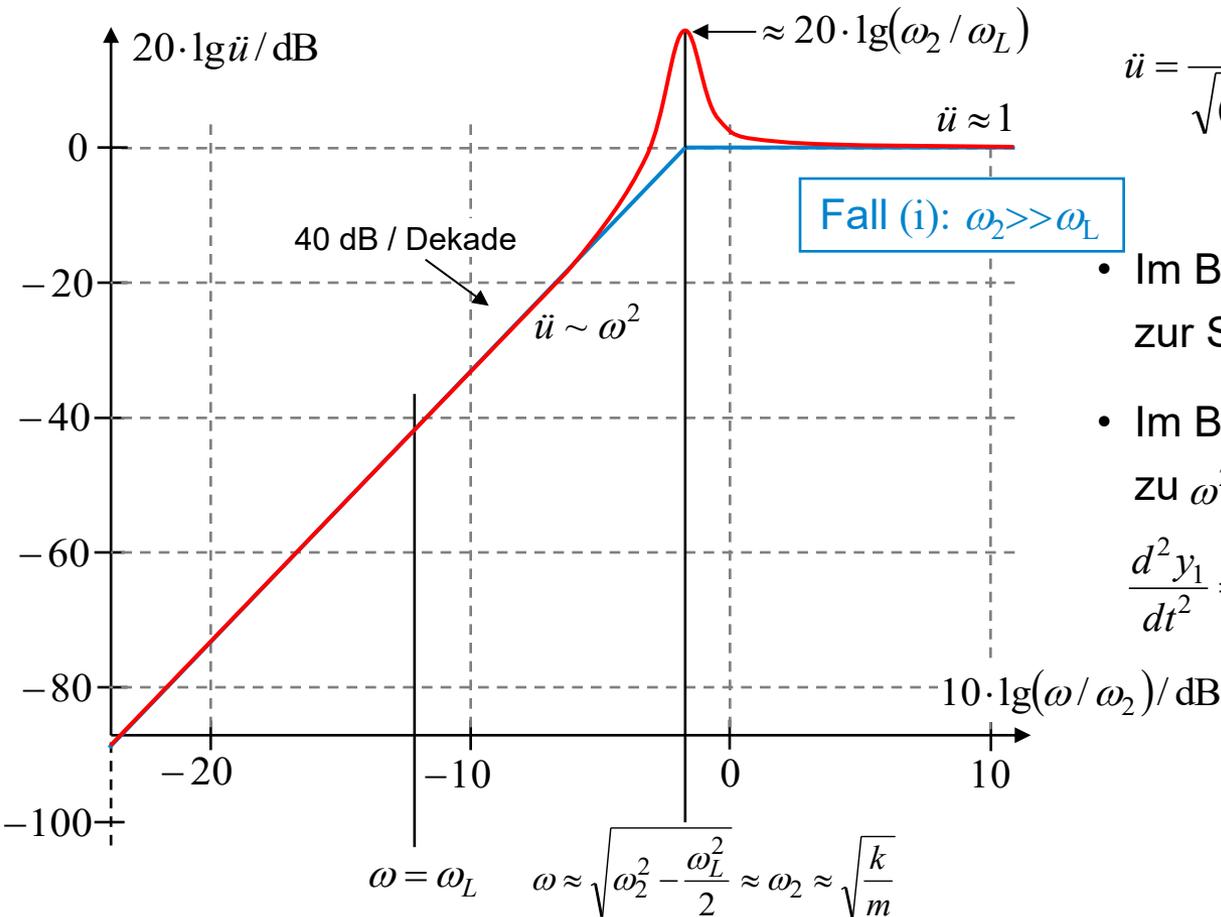
Magnetischer Wandler „Typ 1“

Amplituden-Frequenzgang bei „großem I “ und $\omega_2 \gg \omega_L$ Schwache mech. & schwache el. Dämpfung

Übung



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT



$$\ddot{u} = \frac{\omega^2}{\sqrt{(\omega_2^2 - \omega^2 + \omega_d \cdot \omega_L)^2 + \omega^2 \cdot (\omega_L^2 + \omega_d^2)}}$$

Fall (i): $\omega_2 \gg \omega_L$

- Im Bereich $\omega > \omega_2$ ist \hat{I}_1 proportional zur Schwingamplitude \hat{Y}_1
- Im Bereich $\omega < \omega_2$ ist \hat{I}_1 proportional zu $\omega^2 \cdot \hat{Y}_1$ (Schwingbeschleunigung):

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} \text{Re}\{\hat{Y}_1 \cdot e^{j\omega t}\} = \text{Re}\{-\omega^2 \cdot \hat{Y}_1 \cdot e^{j\omega t}\}$$



Magnetischer Wandler „Typ 1“

Resonanz bei „großem I “, Fall (ii): $\omega_2 \ll \omega_L$

Übung



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

$$\ddot{u} = \frac{\omega^2}{\sqrt{[\omega_2^2 - \omega^2 + \omega_d \omega_L]^2 + \omega^2 \cdot (\omega_d + \omega_L)^2}}$$

(ii) $\omega_2 \ll \omega_L$ (große el. Dämpfung): $\ddot{u} \cong \frac{\omega^2}{\sqrt{[-\omega^2 + \omega_d \omega_L]^2 + \omega^2 \cdot (\omega_d + \omega_L)^2}}$

- Nenner der Funktion \ddot{u} wird **minimal** bei Resonanz-Kreisfrequenz ω_{Res} :

$$N(\omega^2) = [-\omega^2 + \omega_d \omega_L]^2 + \omega^2 \cdot (\omega_d + \omega_L)^2 = \omega^4 + \omega^2 \cdot \underbrace{(-2\omega_2^2 + \omega_d^2 + \omega_L^2)}_{p > 0 \text{ für } \omega_2 < \sqrt{(\omega_L^2 + \omega_d^2)}/2} + \underbrace{\omega_2^4 + \omega_d^2 \omega_L^2 + 2\omega_2^2 \omega_d \omega_L}_{q > 0}$$

$$\frac{dN(\omega^2)}{d\omega^2} = \frac{dN}{d\omega^2} (\omega^4 + \omega^2 \cdot p + q) = \frac{dN}{d\xi} (\xi^2 + \xi \cdot \underbrace{p}_{>0} + q) = 0 \Rightarrow 2\xi + p = 0 \Rightarrow \omega^2 = -p/2 < 0$$

Für $\omega_2 < \sqrt{(\omega_L^2 + \omega_d^2)}/2$ tritt wegen der großen el. Dämpfung **kein Resonanzereignis** und damit **keine** Resonanzfrequenz auf!



Magnetischer Wandler „Typ 1“

Resonanz bei „großem I “, Fall (ii): $\omega_2 \ll \omega_L$

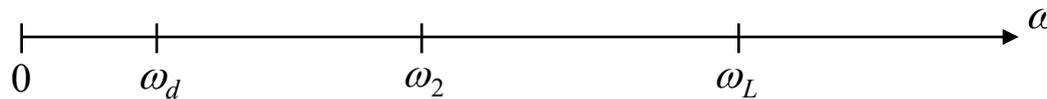
Übung



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

- Für schwache mech. und große el. Dämpfung $\omega_d \ll \omega_2$:

$$\ddot{u}(\omega)\big|_{\omega_d \rightarrow 0} = \frac{\omega^2}{\sqrt{(\omega_2^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \cdot \omega_L^2}}$$



(ii) : (1) $0 < \omega < \omega_2 : \ddot{u} \approx (\omega / \omega_2)^2 \sim \omega^2$

(2) $\omega_2 < \omega < \omega_L : \ddot{u} \approx \frac{\omega^2}{\sqrt{\omega^4 + \omega^2 \cdot \omega_L^2}} = \frac{\omega^2}{\omega \cdot \sqrt{\omega^2 + \omega_L^2}} \approx \frac{\omega^2}{\omega \cdot \omega_L} = \frac{\omega}{\omega_L} \sim \omega$

(3) $\omega_L < \omega : \ddot{u} \approx \frac{\omega^2}{\sqrt{(-\omega^2)^2}} = \frac{\omega^2}{\omega^2} = 1$



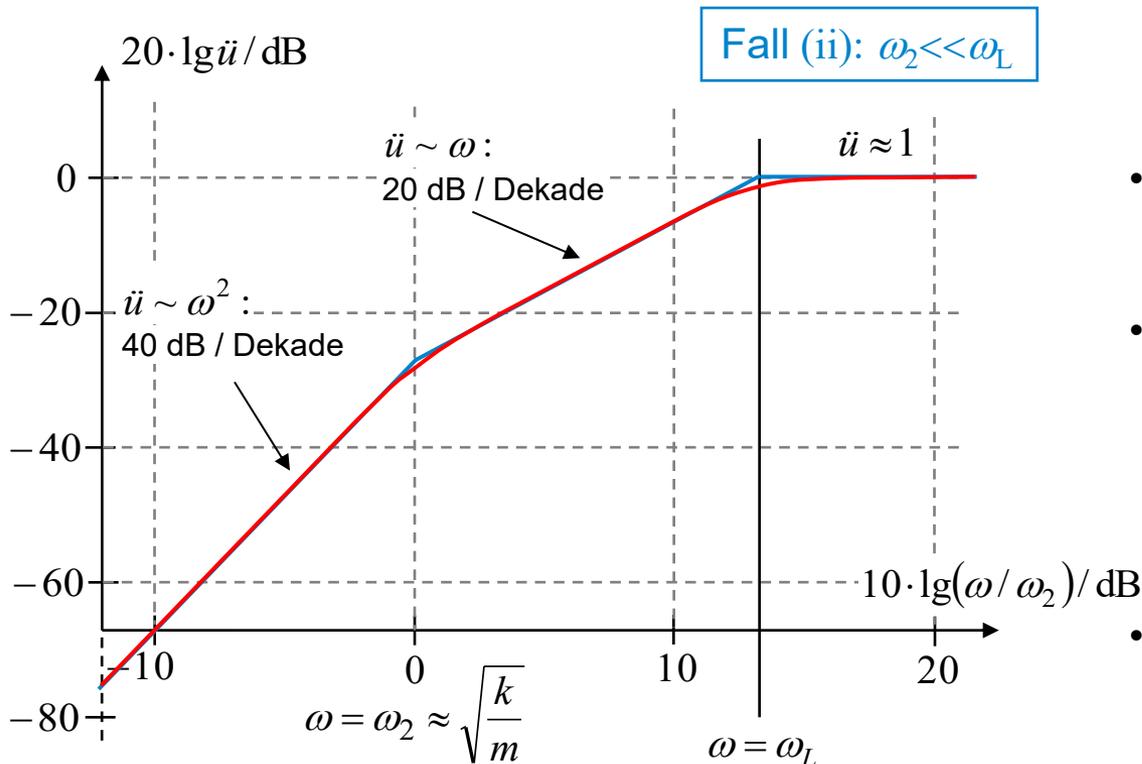
Magnetischer Wandler „Typ 1“

Amplituden-Frequenzgang bei „großem I “ und $\omega_2 \ll \omega_L$ Schwache mech. & starke el. Dämpfung

Übung



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT



kein Resonanzereignis!

$$\ddot{u} = \frac{\omega^2}{\sqrt{(\omega_2^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \cdot \omega_L^2}}$$

- Im Bereich $\omega > \omega_L$ ist \hat{I}_1 proportional zur Schwingamplitude \hat{Y}_1
- Im Bereich $\omega_2 < \omega < \omega_L$ ist \hat{I}_1 proportional zu $\omega \cdot \hat{Y}_1 =$
= Schwinggeschwindigkeit \dot{y}_1 :
$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{d}{dt} \text{Re}\{\hat{Y}_1 \cdot e^{j\omega t}\} = \text{Re}\{j\omega \cdot \hat{Y}_1 \cdot e^{j\omega t}\}$$
- Im Bereich $\omega < \omega_2$ ist \hat{I}_1 proportional zu $\omega^2 \cdot \hat{Y}_1 =$
= Schwingbeschleunigung \ddot{y}_1 :

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} \text{Re}\{\hat{Y}_1 \cdot e^{j\omega t}\} = \text{Re}\{-\omega^2 \cdot \hat{Y}_1 \cdot e^{j\omega t}\}$$



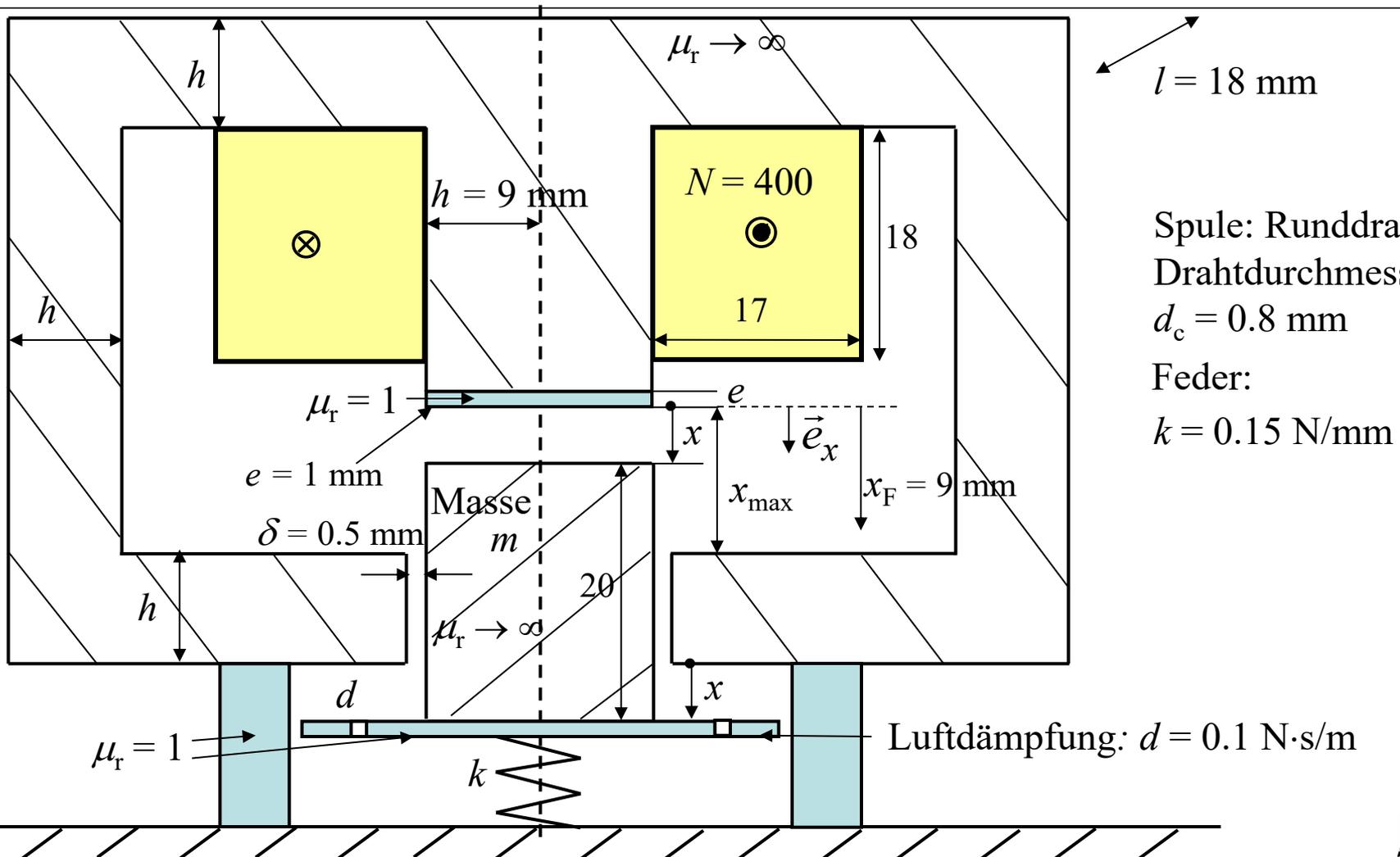
Magnetischer Wandler „Typ 1“

Zahlenbeispiel: Schwingungsmesser

Übung



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT



Magnetischer Wandler „Typ 1“

Spulenauslegung

Übung



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

$$\text{Spule: } q_c = d_c^2 \pi / 4 = 0.8^2 \pi / 4 = 0.5 \text{ mm}^2$$

$$\text{Spulen-Füllfaktor: } k_F = N \cdot q_c / A_{\text{coil}} = 400 \cdot 0.5 / (18 \cdot 17) = 0.65$$

$$\text{Ankermasse: } m = \gamma_{\text{Fe}} \cdot V = 7850 \cdot 18 \cdot 18 \cdot 20 \cdot 10^{-9} = 50.87 \text{ g} \approx 50 \text{ g}$$

$$x_{\text{max}} = x_F + \frac{m \cdot g}{k} = 9 \cdot 10^{-3} + \frac{50 \cdot 10^{-3} \cdot 9.81}{\underbrace{0.15 \cdot 10^3}_{3.27 \text{ mm}}} = 12.27 \cdot 10^{-3} = 12.27 \text{ mm}$$

$$X_3 = \frac{2}{3} \cdot \left(x_{\text{max}} - \frac{e + \delta}{2} \right) = \frac{2}{3} \cdot \left(12.27 - \frac{1 + 0.5}{2} \right) = 7.68 \text{ mm}$$

Dauernd thermisch zulässig!

$$\text{Max. Spulenstrom: } I_{\text{max}} = I_3 = \sqrt{1.78 \text{ A}^2} = 1.33 \text{ A} \Rightarrow J_{\text{max}} = I_3 / q_c = 1.33 / 0.5 = 2.67 \text{ A/mm}^2 < 3 \text{ A/mm}^2$$

$$I_3^2 = \frac{(X_3 + e + \delta)^2}{\mu_0 N^2 \cdot h \cdot l} \cdot k \cdot (x_{\text{max}} - X_3) = \frac{(7.68 + 1.5)^2}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 400^2 \cdot 9 \cdot 18} \cdot 0.15 \cdot 10^3 \cdot \frac{12.27 - 7.68}{10^3} = 1.78 \text{ A}^2$$

$$\text{Mittlere Windungslänge: } l_m = 4 \cdot (17 + 18) = 140 \text{ mm}$$

Spulenwiderstand bei 80 °C:

$$R_c = \frac{1 + \alpha_{\rho, \text{Cu}} \cdot \Delta \vartheta}{\kappa_{\text{Cu}, 20}} \cdot \frac{N \cdot l_m}{q_c} = \frac{1 + 0.0039 \cdot (80 - 20)}{57 \cdot 10^6} \cdot \frac{400 \cdot 0.14}{0.5 \cdot 10^{-6}} = 2.43 \Omega$$



Magnetischer Wandler „Typ 1“

Amplituden-Frequenzgang bei „kleinem I “

Übung



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Arbeitspunkt 1): $(I, X) = (0, x_{\max}) \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{k/m}, \omega_2 = 0$

Schwache mech. Dämpfung, denn:

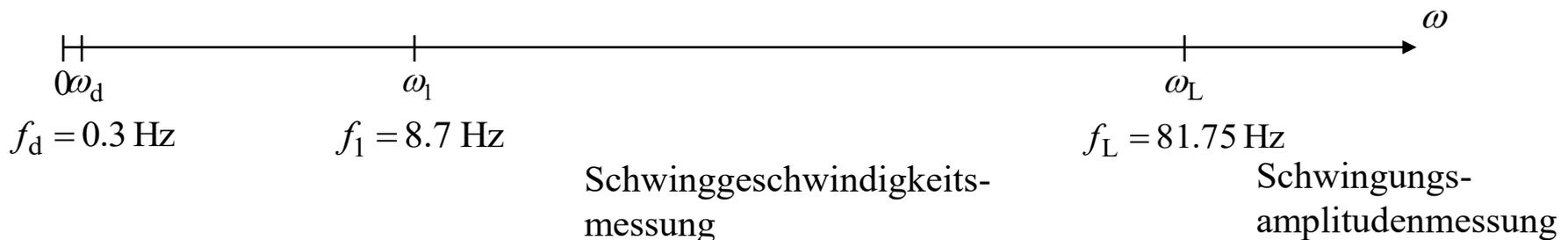
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{d}{m} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{0.1}{0.05} = \sqrt{2} = 1.41 \ll \omega_1 \approx \sqrt{k/m} = \sqrt{150/0.05} = 54.8/\text{s} \Rightarrow f_1 = 8.7 \text{ Hz}$$

$$\omega_d = d/m = 0.1/0.05 = 2/\text{s} \Rightarrow f_d = 0.3 \text{ Hz}$$

$$\text{Spuleninduktivität bei } x_{\max}: L(x_{\max}) = \frac{\mu_0 N^2 \cdot 2h \cdot l}{x_{\max} + e'} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 400^2 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 18 \cdot 10^{-6}}{(12.27 + 1.5) \cdot 10^{-3}} = 4.73 \text{ mH}$$

$$\text{El. Zeitkonstante bei } x_{\max}: T_L = L(x_{\max})/R_c = 0.00473/2.43 = 1.95 \text{ ms} \Rightarrow \omega_L = 1/T_L = 513.65/\text{s}$$

$$\text{Fall (ii): Starke el. Dämpfung: (ii) } \omega_1 = 54.8/\text{s} \ll \omega_L = \frac{R_c}{L} = \frac{R}{L} = 513.65/\text{s} \Rightarrow f_L = 81.75 \text{ Hz}$$



Magnetischer Wandler „Typ 1“

Amplituden-Frequenzgang bei „großem I “

Übung



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Arbeitspunkt 2): $(I, X) = (I_3, X_3) \Rightarrow \omega_1 = 0, \omega_2 = \sqrt{k/m}$

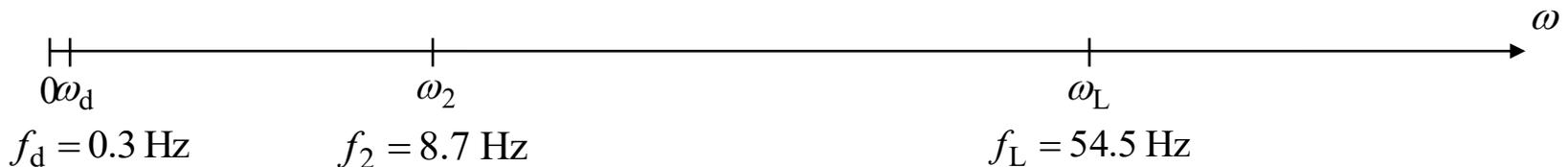
Schwache mech. Dämpfung, denn:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{d}{m} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{0.1}{0.05} = \sqrt{2} = 1.41 \ll \omega_2 \approx \sqrt{k/m} = \sqrt{150/0.05} = 54.8/\text{s} \Rightarrow f_2 = 8.7 \text{ Hz}$$

$$\text{Spuleninduktivität bei } X_3: L(X_3) = \frac{\mu_0 N^2 \cdot 2h \cdot l}{X_3 + e'} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 400^2 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 18 \cdot 10^{-6}}{(7.68 + 1.5) \cdot 10^{-3}} = 7.1 \text{ mH}$$

$$\text{El. Zeitkonstante bei } X_3: T_L = L(X_3) / R_c = 0.0071 / 2.43 = 2.92 \text{ ms} \Rightarrow \omega_L = 1/T_L = 342.5/\text{s}$$

Fall (ii): Starke el. Dämpfung: (ii) $\omega_2 = 54.8/\text{s} \ll \omega_L = \frac{R_c}{L} = \frac{R}{L} = 342.5/\text{s} \Rightarrow f_L = 54.5 \text{ Hz}$



Schwingbeschleunigungs-
messung

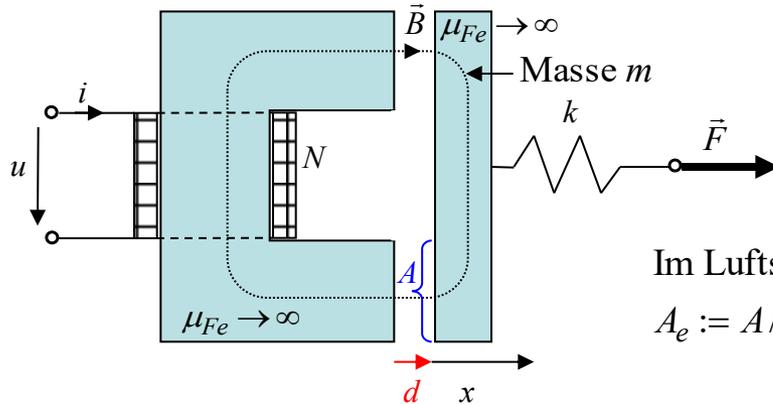
Schwinggeschwindigkeits-
messung

Schwingungs-
amplitudenmessung



Magnetischer Wandler „Typ 1“

Grundtyp – Linearisierung: Vierpoldarstellung (1)



• Feder bei $x = x_F > d$ entspannt

• Linearisierung: $x(t) = x_0 + x_1(t) \quad |x_1 / x_0| \ll 1$

$$F(t) = F_0 + F_1(t) \quad |F_1 / F_0| \ll 1$$

$$u(t) = U_0 + u_1(t) \quad |u_1 / U_0| \ll 1$$

$$i(t) = I_0 + i_1(t) \quad |i_1 / I_0| \ll 1$$

$$\psi(t) = \Psi_0 + \psi_1(t) \quad |\psi_1 / \Psi_0| \ll 1$$

Im Luftspalt : $B = \mu_0 \cdot H$

$$A_e := A/2$$

Werte im Arbeitspunkt: $x_0, F_0, U_0, I_0, \Psi_0$!

$$\psi = N \cdot B \cdot A = N \cdot \mu_0 \cdot \frac{N \cdot i}{2 \cdot (d + x)} \cdot A = N \cdot \mu_0 \cdot \frac{N \cdot I_0 \cdot (1 + i_1 / I_0)}{2 \cdot (d + x_0) \cdot \left(1 + \frac{x_1}{d + x_0}\right)} \cdot A \approx \frac{\mu_0 \cdot N^2 \cdot A_e \cdot I_0}{d + x_0} \cdot \left(1 + \frac{i_1}{I_0} - \frac{x_1}{d + x_0}\right)$$

$$L_0 = \frac{\mu_0 \cdot N^2 \cdot A_e}{d + x_0} \quad \Psi_0 = L_0 \cdot I_0 \quad \psi = \Psi_0 + \psi_1 \approx L_0 \cdot I_0 + L_0 \cdot i_1 - \frac{L_0 \cdot I_0}{d + x_0} \cdot x_1 \quad \psi_1 \approx L_0 \cdot i_1 - \frac{\Psi_0}{d + x_0} \cdot x_1$$

$$i_1 \approx \frac{1}{L_0} \cdot \psi_1 + \frac{1}{L_0} \cdot \frac{\Psi_0}{d + x_0} \cdot x_1$$

Achtung: Es ist hier d die minimale Luftspaltweite (z. B. durch ein amagnetisches Distanzstück), nicht der Dämpfungsbeiwert! Dämpfung wird hier nicht betrachtet!

Magnetischer Wandler „Typ 1“

Grundtyp – Linearisierung: Vierpoldarstellung (2)

$$F = \frac{B^2}{2\mu_0} \cdot 2 \cdot A + k \cdot (x - x_F) = \frac{A}{\mu_0} \cdot \left(\frac{\mu_0 \cdot N \cdot i}{2 \cdot (d + x)} \right)^2 + k \cdot (x - x_F) = \frac{A_e}{2\mu_0} \cdot \left(\frac{\mu_0 \cdot N \cdot I_0}{d + x_0} \right)^2 \cdot \left(\frac{1 + i_1 / I_0}{1 + x_1 / (d + x_0)} \right)^2 + k \cdot (x_0 + x_1 - x_F)$$

$$F = F_0 + F_1 \approx \frac{A_e}{2\mu_0} \cdot \left(\frac{\mu_0 \cdot N \cdot I_0}{d + x_0} \right)^2 \cdot \left(1 + \frac{2i_1}{I_0} - \frac{2x_1}{d + x_0} \right) + k \cdot (x_0 - x_F) + k \cdot x_1 \quad F_0 = \frac{A_e}{2\mu_0} \cdot \left(\frac{\mu_0 \cdot N \cdot I_0}{d + x_0} \right)^2 + k \cdot (x_0 - x_F)$$

$$\frac{A_e}{2\mu_0} \cdot \left(\frac{\mu_0 \cdot N \cdot I_0}{d + x_0} \right)^2 = \frac{L_0 \cdot I_0^2}{2 \cdot (d + x_0)} \quad F_1 \approx \frac{L_0 \cdot I_0}{d + x_0} \cdot i_1 + \left(-\frac{L_0 \cdot I_0^2}{(d + x_0)^2} + k \right) \cdot x_1$$

$$F_1 \approx \frac{L_0 \cdot I_0}{d + x_0} \cdot \underbrace{\left(\frac{\psi_1}{L_0} + \frac{L_0 \cdot I_0 \cdot x_1}{(d + x_0) \cdot L_0} \right)}_{i_1} + \left(-\frac{L_0 \cdot I_0^2}{(d + x_0)^2} + k \right) \cdot x_1 = \frac{\Psi_0}{d + x_0} \cdot \frac{\psi_1}{L_0} + k \cdot x_1 \quad \psi_1 \approx (F_1 - k \cdot x_1) \cdot \frac{L_0 \cdot (d + x_0)}{\Psi_0}$$

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{L_0} & \frac{\Psi_0}{(d + x_0) \cdot L_0} \\ \frac{\Psi_0}{(d + x_0) \cdot L_0} & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \psi_1 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{I}_1 \\ \hat{F}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{L_0} & \frac{\Psi_0}{(d + x_0) \cdot L_0} \\ \frac{\Psi_0}{(d + x_0) \cdot L_0} & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{\Psi}_1 \\ \hat{X}_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{I}_1 \\ \hat{F}_1 \end{pmatrix} = (B) \cdot \begin{pmatrix} \hat{\Psi}_1 \\ \hat{X}_1 \end{pmatrix}$$

Kopplungsterm zw.
el. u. mech. System: $K_0 = \frac{\Psi_0 / L_0}{d + x_0}$

Für kleine sinusförmige Änderungen um den Arbeitspunkt:

$$i_1(t) = \operatorname{Re}\{\hat{I}_1 \cdot e^{j\omega t}\} \quad u_1(t) = \operatorname{Re}\{\hat{U}_1 \cdot e^{j\omega t}\} \quad \psi_1(t) = \operatorname{Re}\{\hat{\Psi}_1 \cdot e^{j\omega t}\} \quad v_1(t) = dx_1 / dt$$

Bei $K_0 = 0$: $F_1 = k \cdot x_1, i_1 = \psi_1 / L_0$

$$x_1(t) = \operatorname{Re}\{\hat{X}_1 \cdot e^{j\omega t}\} \quad F_1(t) = \operatorname{Re}\{\hat{F}_1 \cdot e^{j\omega t}\} \quad v_1(t) = \operatorname{Re}\{\hat{V}_1 \cdot e^{j\omega t}\}$$

Magnetischer Wandler „Typ 1“

Grundtyp – Linearisierung: Vierpoldarstellung (3)



$$i_1 \approx \frac{1}{L_0} \cdot \underbrace{(F_1 - k \cdot x_1)}_{\psi_1} \cdot \frac{(d + x_0) \cdot L_0}{\Psi_0} + \frac{\Psi_0}{(d + x_0) \cdot L_0} \cdot x_1 = \frac{d + x_0}{\Psi_0} \cdot F_1 - \frac{d + x_0}{\Psi_0} \cdot \left(k - \frac{\Psi_0^2}{(d + x_0)^2 \cdot L_0} \right) \cdot x_1$$

$$u_1 = \frac{d\psi_1}{dt} = L_0 \cdot \frac{di_1}{dt} - \frac{\Psi_0}{d + x_0} \cdot \frac{dx_1}{dt} = L_0 \cdot \frac{d + x_0}{\Psi_0} \cdot \frac{dF_1}{dt} - L_0 \cdot \frac{d + x_0}{\Psi_0} \cdot \left(k - \frac{\Psi_0^2}{(d + x_0)^2 \cdot L_0} \right) \cdot \frac{dx_1}{dt} - \frac{\Psi_0}{d + x_0} \cdot \frac{dx_1}{dt}$$

$$u_1 = L_0 \cdot \frac{d + x_0}{\Psi_0} \cdot \frac{dF_1}{dt} - L_0 \cdot \frac{d + x_0}{\Psi_0} \cdot k \cdot \frac{dx_1}{dt}$$

$$v_1 = \frac{dx_1}{dt} \rightarrow \hat{V}_{-1} = j \cdot \omega \cdot \hat{X}_1$$

- Für kleine sinusförmige Änderungen um den Arbeitspunkt:

$$\begin{pmatrix} \hat{I}_1 \\ \hat{U}_{-1} \end{pmatrix} = \frac{d + x_0}{\Psi_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{j \cdot \omega} \cdot \left(k - \frac{\Psi_0^2}{(d + x_0)^2 \cdot L_0} \right) \\ j \cdot \omega \cdot L_0 & -L_0 \cdot k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{F}_1 \\ \hat{V}_{-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{I}_1 \\ \hat{U}_{-1} \end{pmatrix} = (\underline{T}) \cdot \begin{pmatrix} \hat{F}_1 \\ \hat{V}_{-1} \end{pmatrix}$$

• ACHTUNG:

In der Publikation „Equivalent circuit representation of electromechanical transducers: Part I. Lumped parameter systems“, Harrie A C Tilmans 1996 *J. Micromech. Microeng.* **6** 157:

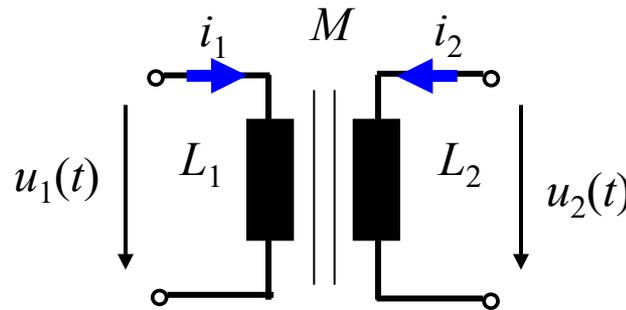
Andere (englische) Notation: Statt $u(t) \rightarrow v(t)$, $\psi(t) \rightarrow \lambda(t)$, $v(t) \rightarrow u(t)$, $\Psi_0 \rightarrow \lambda_0$, $I_0 \rightarrow i_0$, $\Psi = \lambda_0 / (d + x_0)$



Magnetischer Wandler „Typ 1“

Kopplungsfaktor κ

- Der **Kopplungsfaktor** κ ist für magnetische gekoppelte Kreise definiert:



$$\left. \begin{aligned} u_1 &= L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} + M \cdot \frac{di_2}{dt} \\ u_2 &= L_2 \cdot \frac{di_2}{dt} + M \cdot \frac{di_1}{dt} \end{aligned} \right\} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} di_1 / dt \\ di_2 / dt \end{pmatrix}$$

$$\kappa = \frac{M}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}}$$

- Analog dazu wurde der **Kopplungsfaktor** κ (hier: „Kappa“, sonst Verwechslung mit Federkonstante k) zwischen mechanischem und elektromagnetischem System definiert, z. B. für Wandler 1:

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{L_0} & \frac{\Psi_0}{(d+x_0) \cdot L_0} \\ \frac{\Psi_0}{(d+x_0) \cdot L_0} & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \psi_1 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

$$\kappa = \frac{\frac{\Psi_0}{(d+x_0) \cdot L_0}}{\sqrt{\frac{1}{L_0} \cdot k}} = \frac{\Psi_0}{(d+x_0) \cdot \sqrt{L_0 \cdot k}}$$

- Der **Kopplungsterm** $K_0 = \frac{\Psi_0 / L_0}{d+x_0}$ entspricht dabei analog der Gegeninduktivität M !
- Bei $\kappa = 0$ sind el. und mech. System entkoppelt!

Magnetischer Wandler „Typ 1“

Kopplungsfaktor κ und statische Stabilität



$$\begin{pmatrix} i_1 \\ F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{L_0} & \frac{\Psi_0}{(d+x_0) \cdot L_0} \\ \frac{\Psi_0}{(d+x_0) \cdot L_0} & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \psi_1 \\ x_1 \end{pmatrix} \quad \Psi_0 = L_0 I_0 : F_1 = \frac{L_0 \cdot I_0}{d+x_0} \cdot i_1 + \left(-\frac{L_0 \cdot I_0^2}{(d+x_0)^2} + k \right) \cdot x_1$$

- Mechanische dynamische Gleichung im Arbeitspunkt x_0 :

$$m \cdot \ddot{x}_1 + F_1 = 0 \Rightarrow m \cdot \ddot{x}_1 + \left(-\frac{L_0 \cdot I_0^2}{(d+x_0)^2} + k \right) \cdot x_1 = -\frac{L_0 \cdot I_0}{d+x_0} \cdot i_1 = \underbrace{\frac{m}{T > 0} \cdot \ddot{x}_1 + \left(-\frac{\Psi_0^2}{(d+x_0)^2 L_0} + k \right) \cdot x_1}_{K}$$

- Statische Stabilität im Arbeitspunkt x_0 :

$$K > 0: -\frac{\Psi_0^2}{(d+x_0)^2 \cdot L_0} + k > 0 \Rightarrow k > \frac{\Psi_0^2}{(d+x_0)^2 \cdot L_0} \Rightarrow \frac{1}{k} < \frac{(d+x_0)^2 \cdot L_0}{\Psi_0^2} \Rightarrow \frac{\Psi_0^2}{(d+x_0)^2 \cdot L_0 \cdot k} = \kappa^2 < 1$$

- **Resultat:** Wandler Typ 1 **statisch stabil** im Arbeitspunkt $\pm I_0, x_0$,
wenn **Kopplungsfaktor** $0 < \kappa < 1$
- Pull-in-Effekt bei $\kappa = 1$ bzw. $K = 0$!



Magnetischer Wandler „Typ 1“

Pull-in-Lage und Pull-in-Strom: IDENTISCH mit früherem Ergebnis!



- Pull-in-Effekt bei $\kappa = 1$ bzw. $K = 0$! Dies tritt bei folgendem x_0 :

a) Gleichgewicht der statischen Magnet- u. Federkraft:

$$F_0 = \frac{L_0 I_0^2}{2(d+x_0)} + k \cdot (x_0 - x_F) = 0$$

$$\frac{L_0 k \cdot (d+x_0)^2}{L_0 \cdot 2 \cdot (d+x_0)} + k \cdot (x_0 - x_F) = 0 \Rightarrow (d+x_0)/2 = x_F - x_0 \Rightarrow x_0 = \frac{2}{3} \cdot \left(x_F - \frac{d}{2} \right) \quad \text{„Pull-in“-Lage}$$

b) Stabilitätsgrenze $\kappa = 1$:

$$\kappa = \frac{(\pm L_0 I_0)}{(d+x_0) \cdot \sqrt{L_0 \cdot k}} = 1$$

$$\kappa = \frac{\pm L_0 I_0}{(d+x_0) \cdot \sqrt{L_0 \cdot k}} = 1 \Rightarrow I_0|_{x_0, \text{pull-in}} = \pm \frac{(d+x_0) \cdot \sqrt{k}}{\sqrt{L_0}} = \pm \frac{2}{3} \cdot \frac{(d+x_F) \cdot \sqrt{k}}{\sqrt{L_0}} = I_{0, \text{pull-in}} \quad \text{„Pull-in“-Strom}$$

- Vergleich die Pull-in-Ergebnisse vom detaillierten Wandler 1:

hier für $m \cdot g = 0$, e' entspricht hier d !

$$X = X_3 = \frac{2}{3} \cdot \left(x_F + \frac{m \cdot g}{k} - \frac{e'}{2} \right) = \frac{2}{3} \cdot \left(x_F - \frac{d}{2} \right)$$

„Pull-in“-Strom: $I_3 = \pm \frac{2 \cdot (x_F + e' + m \cdot g/k)}{3N} \cdot \sqrt{\frac{(x_F + e') \cdot k + m \cdot g}{3\mu_0 \cdot h \cdot l}}$

$$I_3 = \pm \frac{2 \cdot (x_F + d)}{3N} \cdot \sqrt{\frac{(x_F + d) \cdot k}{3\mu_0 \cdot h \cdot l}} = \pm \frac{2 \cdot (x_F + d)}{3} \cdot \sqrt{\frac{k}{L_0}}$$

$$L_0 = \frac{\mu_0 N^2 A_e}{x_0 + d} = \frac{\mu_0 N^2 2hl}{\frac{2}{3} \cdot (x_F - \frac{d}{2}) + d} = \frac{\mu_0 N^2 2hl}{\frac{2}{3} \cdot (x_F + d)} = \frac{\mu_0 N^2 3hl}{x_F + d} = \frac{\mu_0 N^2 3hl}{x_F + e'}$$





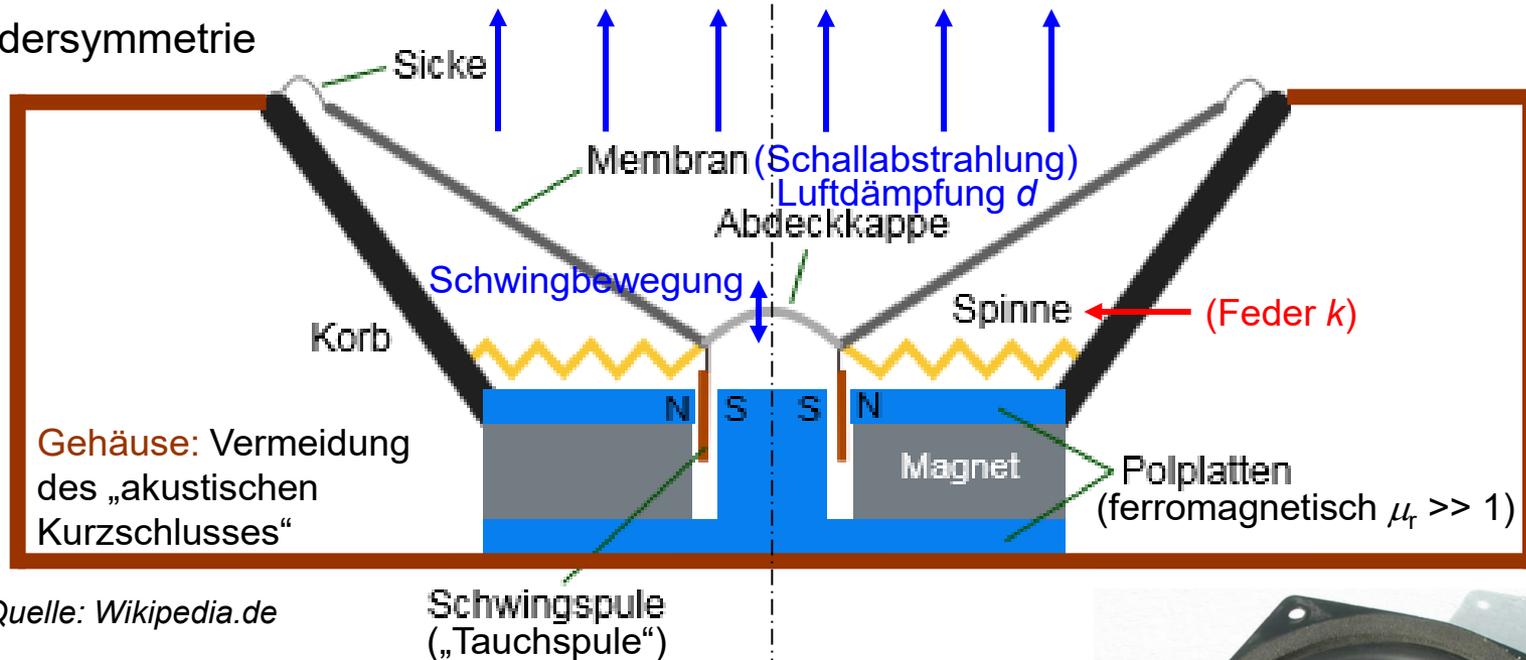
- Magnetischer Wandler „Typ 1“
- Magnetischer Wandler „Typ 2“
- Kapazitiver Wandler „Typ 3“
- Kapazitiver Wandler „Typ 4“



Magnetischer Wandler „Typ 2“

Tauchspulen-Wandler: Beispiel: Lautsprecher

Zylindersymmetrie



Quelle: Wikipedia.de

Konus-Lautsprecher schematisch, seitlicher Schnitt
(„Abdeckkappe“ = Staubschutzkalotte)

Dynamischer Lautsprecher
(Tauchspulenprinzip) mit Papier-
Konusmembran und Gummi-Sicke



Magnetischer Wandler „Typ 2“

Lautsprecherkorb mit entfernter Membran



Quelle: [Wikipedia.de](https://www.wikipedia.de)
Patrick.Nordmann, CC BY-SA 4.0

Lautsprecherkorb mit entfernter Membran

Magnetischer Wandler „Typ 2“

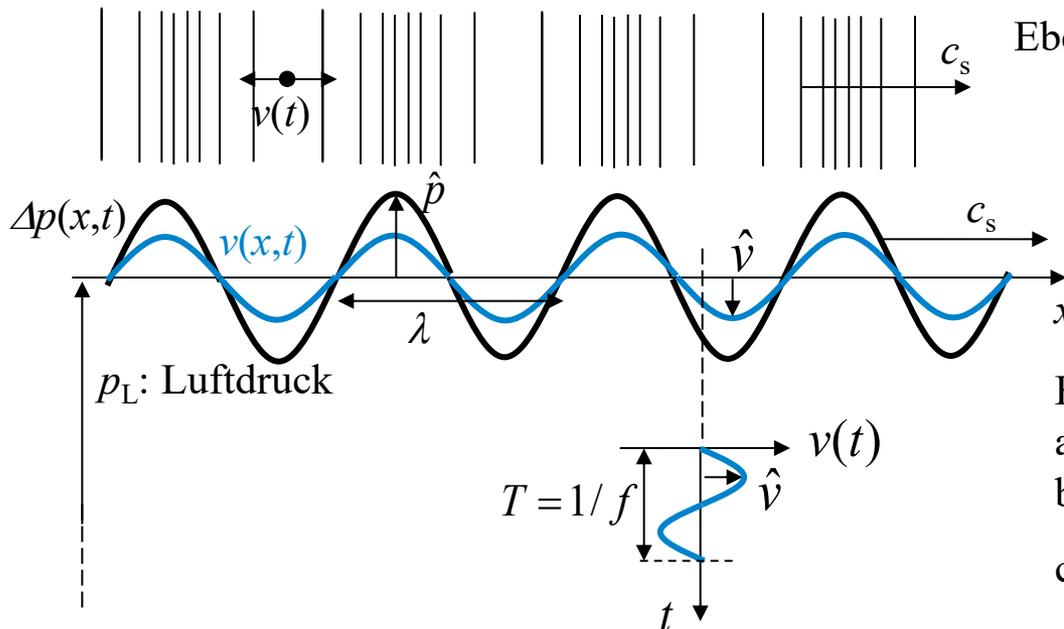
Schallwellen

Wiederholung



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

- **Schallwelle:** Longitudinale (Luft-)Dichtewelle: Luftmoleküle schwingen mit **Schwingungsgeschwindigkeit $v(t)$** („Schallschnelle“) in Wellenausbreitungsrichtung mit Frequenz $f \Rightarrow$ Druckschwankung Δp („Schalldruck“) mit Frequenz f
- **Schallgeschwindigkeit:** $c_s = \lambda \cdot f$ (f : Frequenz, λ : Wellenlänge)



Ebene Schallwelle

$$p(t) = \rho_L \cdot c_s \cdot v(t) = Z_s \cdot v(t)$$

$$v(t) = \hat{v} \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t)$$

$$p(t) = \hat{p} \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t)$$

Bei 20°C, Luftdruck $p_L = 1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$):

a) Luftdichte $\rho_L = 1.29 \text{ kg/m}^3$,

b) Schallgeschwindigkeit $c_s = 343 \text{ m/s}$:

c) $Z_s = \rho_L \cdot c_s = 443 \text{ Ns/m}^3$:

„spezifische akustische Impedanz“



Magnetischer Wandler „Typ 2“

Schallintensität I_S

Wiederholung



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

- **Schallintensität** = Schalleistung / Wellen-Querschnittsfläche A :

$$I_S(t) = P_S(t) / A = F_S(t) \cdot v(t) / A = \Delta p(t) \cdot v(t)$$

- Mittlere Schallintensität I_S je Periode $T = 1/f$ in einer ebenen Schallwelle:

$$I_S = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T I_S(t) \cdot dt = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T p(t) \cdot v(t) \cdot dt = \frac{\hat{p} \cdot \hat{v}}{T} \cdot \int_0^T \sin^2(2\pi \cdot f \cdot t) \cdot dt = \frac{\hat{p} \cdot \hat{v}}{2} = p_{eff} \cdot v_{eff} = \frac{p_{eff}^2}{Z_S}$$

- **Menschliches Ohr:** (bei $f = 1$ kHz):

Hörschwelle: $I_{S0} = 10^{-12} \text{ W/m}^2, p_{eff,0} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}$

Schmerzgrenze: $I_{S,lim} = 10 \text{ W/m}^2, p_{eff,lim} = 65 \text{ Pa}$

$$I_{S0} = 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = \frac{p_{eff,0}^2}{Z_S} = \frac{(2 \cdot 10^{-5})^2}{443} \quad I_{S,lim} = 10 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = \frac{p_{eff,lim}^2}{Z_S} = \frac{65^2}{443}$$

- Schallkraft: $F_S(t) = \Delta p(t) \cdot A = Z_S \cdot v(t) \cdot A = d_S \cdot \dot{x}(t)$

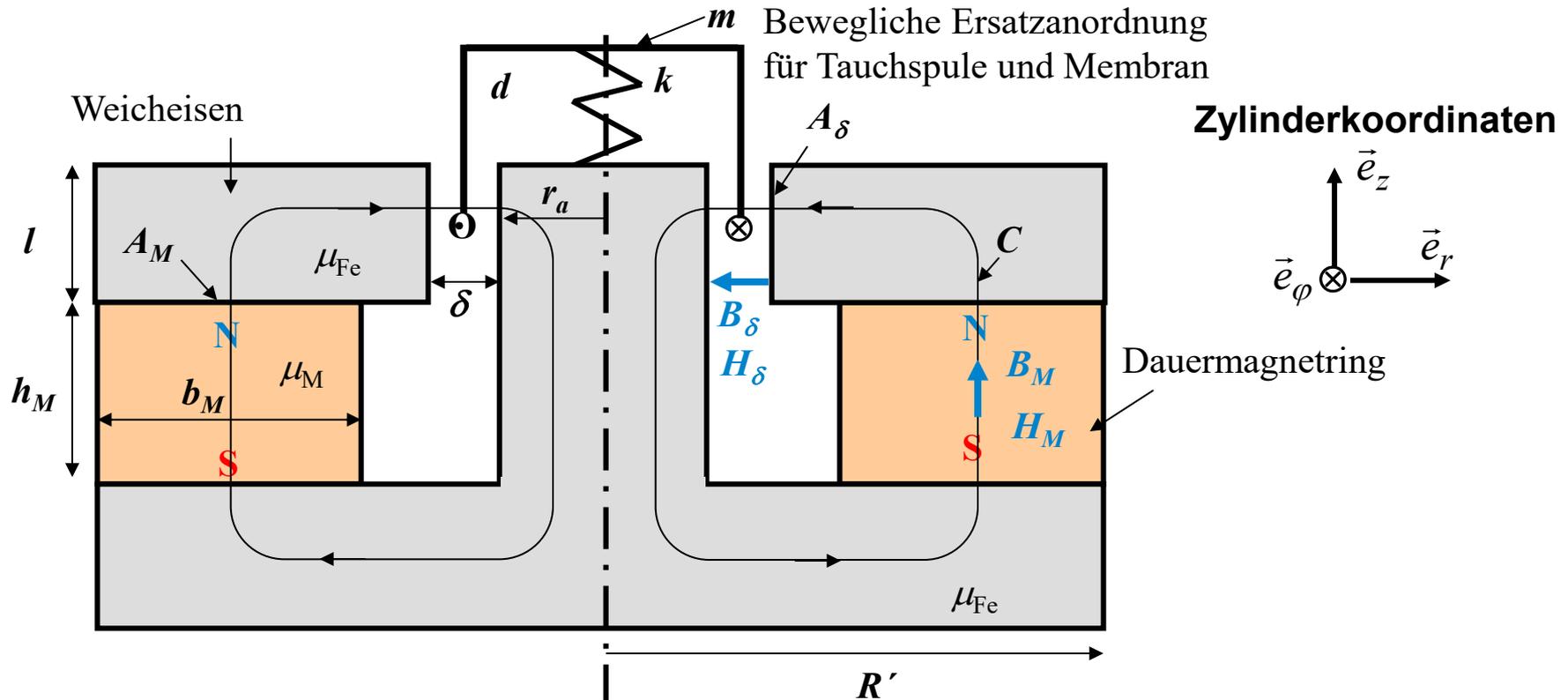
- **Beispiel:** Lautsprecher-Membranfläche $A_M = 80 \text{ cm}^2$:

Dämpfende Schallkraft: $F_S(t) = d_S \cdot \dot{x}(t), \quad d_S = Z_S \cdot A_M = 443 \cdot 80 \cdot 10^{-4} = 3.54 \text{ N} \cdot \text{s/m}$



Magnetischer Wandler „Typ 2“

Geometrie – „Elektrodynamischer Wandler“



- Tauchspule („Voice coil“) vereinfacht als **konzentrierte** („punktförmige“) Spule mit N Windungen, Innenwiderstand R_i , Selbstinduktivität L_i
- Spulen-Strom i gespeist aus **Spannungsquelle** u mit Innenwiderstand R_a

Magnetischer Wandler „Typ 2“

Lautsprecherfunktion

- Spannungsquelle u als „Sprachsignal“ = Überlagerung unterschiedlicher Sinusspannungen unterschiedlicher Amplituden und Frequenzen f
- Spannung u treibt Strom i , der mit Luftspaltfeld B_δ vertikale LORENTZ-Kraft $F_m \sim i$ erzeugt, die die Tauchspule und damit die Lautsprechermembran im Takt des Stromsignals bewegt (bewegliche Anschlussdrähte an Tauchspule!)
- Die Lautsprechermembran verdichtet / verdünnt die Luft = **Abstrahlung von Schallwellen** (Longitudinalwellen)
- Dämpfung: $d = d_R + d_S$, d_R : Reibung bei Bewegung,
 d_S : Schallwellen stellen „akustische Dämpfungskraft“ $\sim d_S(f)$ dar.
Hier vereinfacht: $d = \text{konst.}$ (frequenzunabhängig)
- **Analyse des Wandlerverhaltens:**
 1. Magnetfeldberechnung
 2. Dynamische Gleichungen erstellen (mit *NEWTON* & *KIRCHHOFF*-Gesetzen)
 3. Gleichgewichtspunkte als Arbeitspunkte bestimmen
 4. Frequenzgang des Verhaltens „Membranbewegung“ $z(t)$
in Abhängigkeit von $u(t)$ bestimmen
Erwünscht: $z(t) \sim u(t)$: Sprachsignal = akustisches Signal!

Magnetischer Wandler „Typ 2“

1. Magnetfeldberechnung

- Vereinfachende Annahmen:

(i) Eisen unendlich permeabel $\mu_{Fe} \rightarrow \infty$, (ii) Vernachlässigung von Streuflüssen,
 (iii) Kleiner Luftspalt $\delta \ll r_a$: $B_\delta(r)$ -Feld über Luftspalt $r_a \leq r \leq r_a + \delta$ konstant, $B_\delta = \mu_0 \cdot H_\delta$
 Ferrit-Dauermagnet-Kennlinie: Im 2. Quadranten linear: $B_M = \mu_M H_M + B_R$ $\mu_M \approx 1.05 \cdot \mu_0$

- Flussdurchtrittsflächen: $A_M = (R'^2 - (R' - b_M)^2) \cdot \pi = b_M \cdot (2R' - b_M) \cdot \pi$

$A_\delta = (2r_a + \delta) \cdot \pi \cdot l$ Fläche in Luftspaltmitte $A_\delta < A_M$ } $B_\delta = B_M \cdot (A_M / A_\delta) > B_M$
 • Kein Streufluss = Flusskonstanz: $\Phi = B_\delta \cdot A_\delta = B_M \cdot A_M$ } „Flusskonzentration“

- Durchflutungssatz für Kurve C und $\mu_{Fe} \rightarrow \infty$ bei $i = 0$: $\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = H_\delta \cdot \delta + H_M \cdot h_M = \Theta = 0$

$H_\delta = -H_M \cdot (h_M / \delta)$ H_M -Feld im Magneten negativ = Betrieb im 2. Quadranten $B_M(H_M)$

$B_\delta = \mu_0 \cdot H_\delta$
 $B_M = \mu_M H_M + B_R$
 $B_\delta \cdot A_\delta = B_M \cdot A_M$
 $H_\delta \cdot \delta + H_M \cdot h_M = 0$

Unbekannte: $B_\delta, H_\delta, B_M, H_M$

$$B_\delta = \frac{B_R}{\frac{A_\delta}{A_M} + \frac{\mu_M}{\mu_0} \cdot \frac{\delta}{h_M}}$$

B_δ umso größer, je größer $A_M / A_\delta, h_M / \delta$

Magnetischer Wandler „Typ 2“

Dauermagnet-Kennlinie im 2. Quadranten

$$\left. \begin{aligned} B_{\delta} \cdot A_{\delta} &= B_M \cdot A_M \\ B_{\delta} &= \mu_0 \cdot H_{\delta} \\ H_{\delta} \cdot \delta + H_M \cdot h_M &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$B_M = -\mu_0 \cdot \frac{h_M}{\delta} \cdot \frac{A_{\delta}}{A_M} \cdot H_M$$

Arbeitsgerade

Magnetischer Arbeitspunkt

Dauermagnetkennlinie

$$B_M = \mu_M H_M + B_R$$

Bespiel: Ba-Ferrit, 20°C
 $B_R = 0.38 \text{ T}$, $\mu_M / \mu_0 = 1.05$,
 $\delta / h_M = 1/10$, $A_M / A_{\delta} = 2$

$$B_M = \frac{B_R}{1 + \frac{\mu_M}{\mu_0} \cdot \frac{\delta}{h_M} \cdot \frac{A_M}{A_{\delta}}}$$

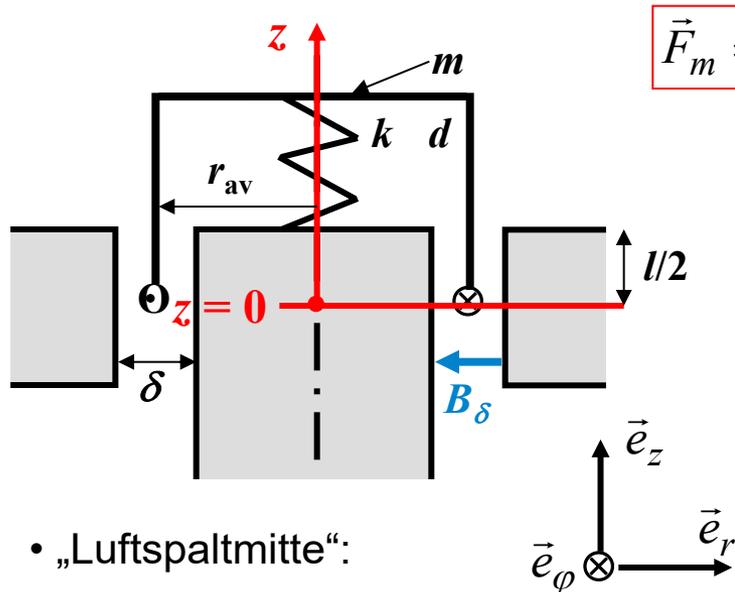
$B_M = 0.31 \text{ T}$, $B_{\delta} = 0.63 \text{ T}$
 („Flusskonzentration“)
 $H_C = 288 \text{ kA/m}$, $H_M = -50 \text{ kA/m}$

$$H_M = -\frac{B_R / \mu_0}{\frac{\mu_M}{\mu_0} + \frac{h_M}{\delta} \cdot \frac{A_{\delta}}{A_M}}$$



Magnetischer Wandler „Typ 2“

2. Dynamische Gleichungen



$$\vec{F}_m = F_m \cdot \vec{e}_z$$

• **LORENTZ-Kraft** auf rechtswendig gewickelte Spule:

$$N \cdot i \cdot \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{B}_\delta = -B_\delta \cdot \vec{e}_r$$

$$\vec{F}_m = \int_s N \cdot i \cdot d\vec{s} \times \vec{B}_\delta$$

$$d\vec{s} = r_{av} \cdot d\varphi \cdot \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{F}_m = \int_0^{2\pi} N \cdot i \cdot r_{av} \cdot (-B_\delta) \cdot d\varphi \cdot \vec{e}_\varphi \times \vec{e}_r =$$

$$= -N \cdot i \cdot r_{av} \cdot B_\delta \cdot (-\vec{e}_z) \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi = \underbrace{N \cdot i \cdot 2\pi \cdot r_{av} \cdot B_\delta}_{K_0 \cdot i} \cdot \vec{e}_z$$

• „Luftspaltmitte“:

$$r_{av} = r_a + \frac{\delta}{2}$$

• **Vertikalposition** z der Tauchspule: $z = 0$ bei Position der Spule bei $l/2$

• Feder entspannt bei $z = 0$

• **NEWTON-Bewegungsgleichung:** $m \cdot \ddot{z} \cdot \vec{e}_z = (F_m - k \cdot z - d \cdot \dot{z}) \cdot \vec{e}_z$

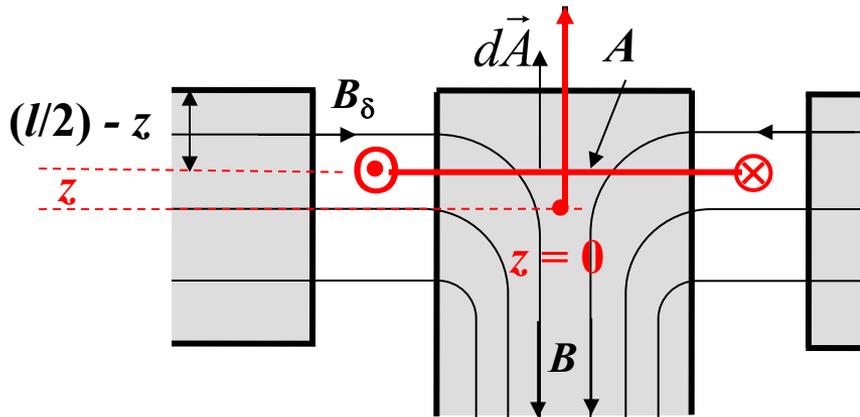
$$m \cdot \ddot{z} + d \cdot \dot{z} + k \cdot z = F_m = K_0 \cdot i \quad K_0 = N \cdot 2\pi \cdot r_{av} \cdot B_\delta \quad \text{Kopplungsterm}$$



Magnetischer Wandler „Typ 2“

Bewegungsinduktion (1)

- **Zwei Möglichkeiten** zur Berechnung der induzierten Spannung $u_{i,f}$ bei bewegter Tauchspule:
 - a) mit der Änderung der Fremd-Flussverkettung ψ_f der Tauchspule,
 - b) mit der bewegungsinduzierten Feldstärke E_b .



- a) **Flussverkettung** ψ_f der Tauchspule mit dem „Fremdfeld“ B_δ :

Spulenfläche A:

$$\begin{aligned}\Phi_f &= \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_A \vec{B} \cdot dA \cdot \vec{e}_z = \\ &= \int_A (-B) \cdot \vec{e}_z \cdot dA \cdot \vec{e}_z = -B \cdot A\end{aligned}$$

- Flusskonstanz: $\Phi_f = -B_\delta \cdot 2\pi \cdot r_{av} \cdot ((l/2) - z)$
- Flussverkettung: $\psi_f(z(t)) = N \cdot \Phi_f = -N \cdot B_\delta \cdot 2\pi \cdot r_{av} \cdot ((l/2) - z(t))$
- Induzierte Spannung: $u_{i,f} = -d\psi_f / dt = -N \cdot B_\delta \cdot 2\pi \cdot r_{av} \cdot \dot{z}$

Magnetischer Wandler „Typ 2“

Bewegungsinduktion (2)

b) Berechnung mit der bewegungsinduzierten Feldstärke E_b :

Im rechtswendigen Umlaufsinn $d\vec{s}$ um den Flächennormalenvektor $d\vec{A}$

$$\vec{v} = \dot{z} \cdot \vec{e}_z \quad \vec{B}_\delta = -B_\delta \cdot \vec{e}_r \quad d\vec{s} = r_{av} \cdot d\varphi \cdot \vec{e}_\varphi$$

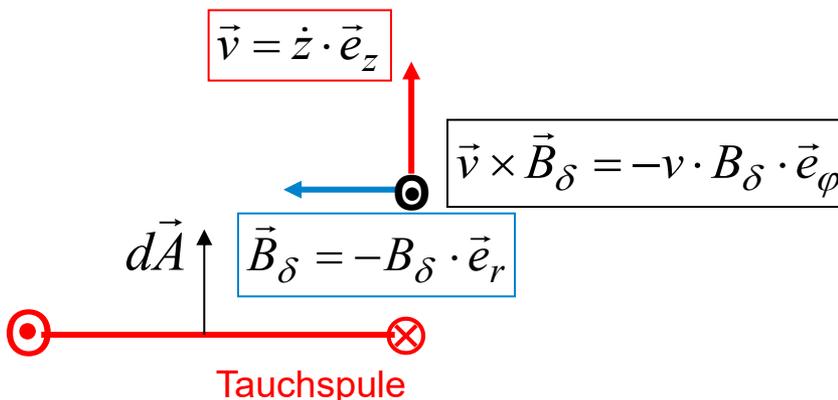
$$u_{i,f} = N \cdot \int_s (\vec{v} \times \vec{B}_\delta) \cdot d\vec{s} = N \cdot \int_0^{2\pi} \dot{z} \cdot (-B_\delta) \cdot r_{av} \cdot d\varphi \cdot (\vec{e}_z \times \vec{e}_r) \cdot \vec{e}_\varphi = -N \cdot \dot{z} \cdot B_\delta \cdot r_{av} \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$u_{i,f} = -N \cdot \dot{z} \cdot B_\delta \cdot 2\pi \cdot r_{av}$$

• Kontrolle der Richtung von E_b :

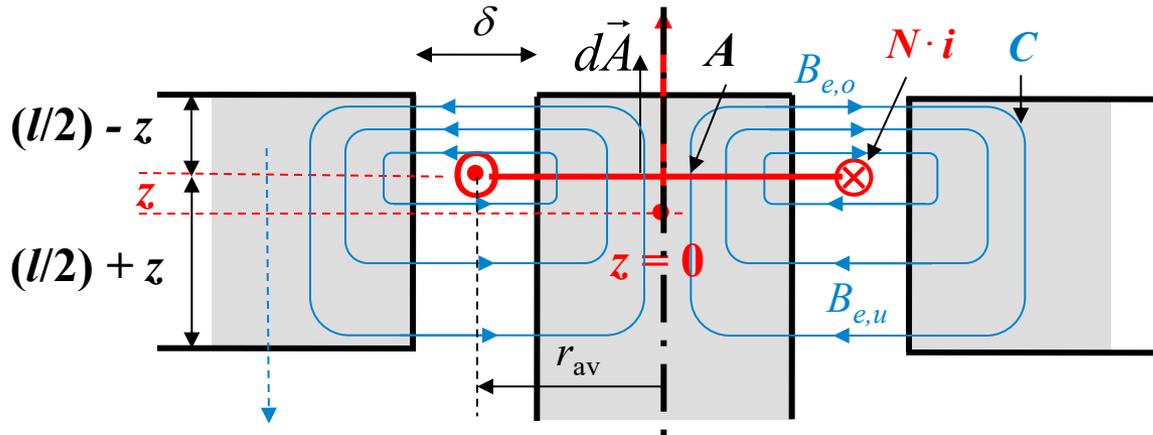
Bei Bewegung der Spule nach oben $v > 0$ verringert sich die Flussverkeftung ψ_f . E_b ist so gerichtet, dass es in der (gedanklich) kurz geschlossenen Spule einen Strom i in Richtung E_b treiben würde, so dass der von ihm erregte Fluss die ursprüngliche Flussverkeftung aufrecht zu halten versucht.

Seine LORENTZ-Kraft $F \sim i \cdot B_\delta$ wirkt gegen v



Magnetischer Wandler „Typ 2“

Selbstinduktivität L_i der Tauchspule



$$\oint_C \vec{H}_e \cdot d\vec{s} = \Theta = N \cdot i$$

$$\mu_{Fe} \rightarrow \infty : H_{Fe,e} = 0$$

$$\Phi_e = B_{e,o} \cdot 2\pi \cdot r_{av} \cdot \left(\frac{l}{2} - z \right)$$

$$\Phi_e = B_{e,u} \cdot 2\pi \cdot r_{av} \cdot \left(\frac{l}{2} + z \right)$$

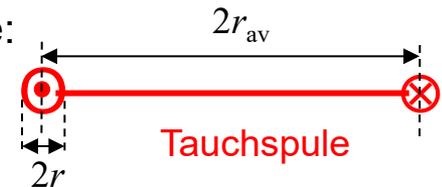
- Spulenfeld über Dauermagnet vernachlässigbar **klein**, da $\mu_M \approx \mu_0$ und $h_M \gg \delta$

$$\oint_C \vec{H}_e \cdot d\vec{s} = H_{e,o} \cdot \delta + H_{Fe,e} \cdot s_{Fe} + H_{e,u} \cdot \delta = H_{e,o} \cdot \delta + H_{e,u} \cdot \delta = N \cdot i$$

$$B_{e,o} \cdot \delta + B_{e,u} \cdot \delta = \mu_0 \cdot N \cdot i \quad B_{e,o} \cdot \left(\frac{l}{2} - z \right) = B_{e,u} \cdot \left(\frac{l}{2} + z \right) \Rightarrow B_{e,o}(z) = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot i}{\delta \cdot l} \cdot \left(\frac{l}{2} + z \right)$$

- Die **Selbstinduktivität $L_i(z)$** ist abhängig von der Lage z der Tauchspule:

$$L_i = \frac{\Psi_e}{i} = \frac{N \cdot \Phi_e}{i} = \frac{\mu_0 \cdot N^2 \cdot i}{\delta \cdot l \cdot i} \cdot 2\pi \cdot r_{av} \cdot \left(\frac{l}{2} + z \right) \cdot \left(\frac{l}{2} - z \right) = \mu_0 \cdot N^2 \cdot \frac{2\pi \cdot r_{av}}{\delta \cdot l} \cdot \left(\frac{l^2}{4} - z^2 \right) = L_i(z)$$



- Für $z \gg l/2$: Grenzwert der Luftspule („Kreisschleife“): $L_{i0} \approx \mu_0 \cdot N^2 \cdot r_{av} \cdot [\ln(8 \cdot r_{av}/r) - 2]$
 $r_{av}/r > 2$

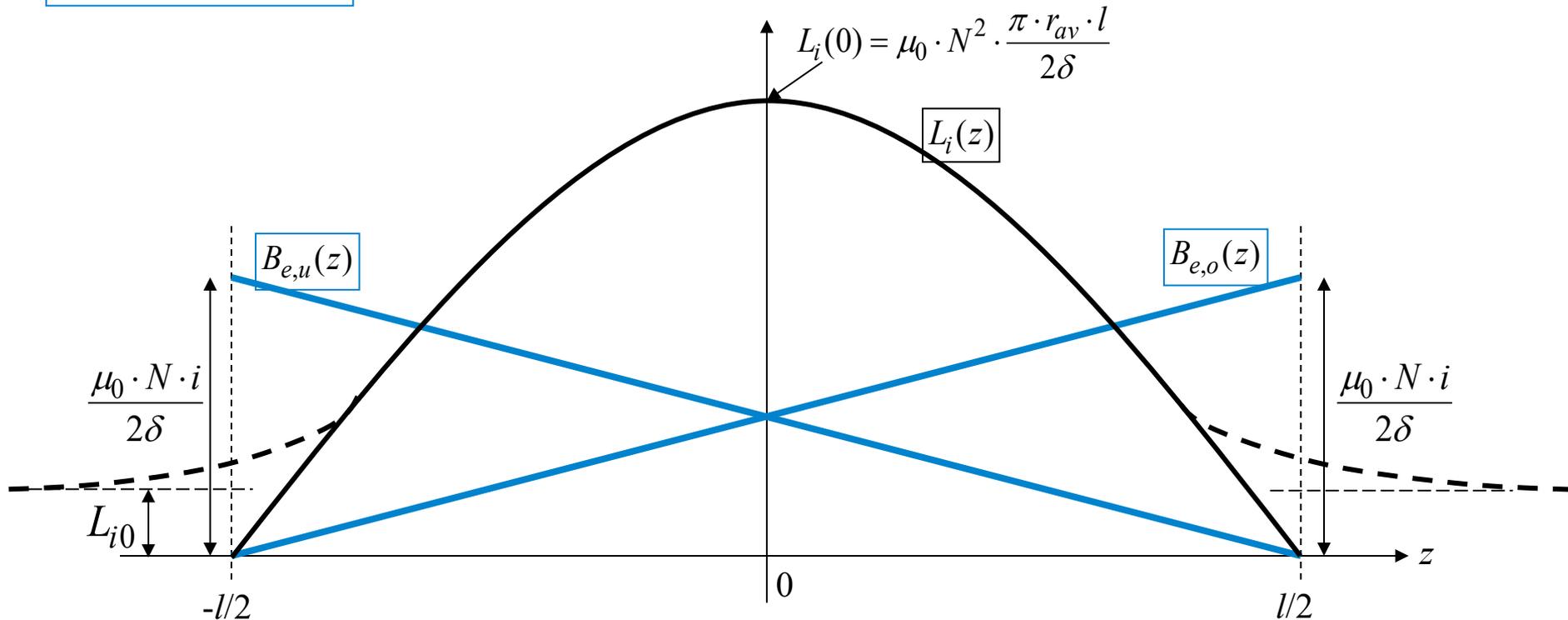
Magnetischer Wandler „Typ 2“

Lageabhängige Spulenselbstinduktivität L_i

$$B_{e,o}(z) = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot i}{\delta \cdot l} \cdot \left(\frac{l}{2} + z \right)$$

$$B_{e,u}(z) = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot i}{\delta \cdot l} \cdot \left(\frac{l}{2} - z \right)$$

$$L_i(z) = \mu_0 \cdot N^2 \cdot \frac{2\pi \cdot r_{av}}{\delta \cdot l} \cdot \left(\frac{l^2}{4} - z^2 \right)$$



Magnetischer Wandler „Typ 2“

Elektrische dynamische Gleichung

- **Selbstinduktionsspannung** $u_{i,e}$ = Ruhinduktion zufolge di/dt , Bewegungsinduktion zufolge dz/dt :

$$u_{i,e} = -d\psi_e(t)/dt = -\frac{d(L_i(z) \cdot i)}{dt} = -i \cdot \frac{dL_i(z)}{dz} \cdot \dot{z} - L_i(z) \cdot \frac{di}{dt}$$

- **KIRCHHOFF'sche** Maschenregel: $u(t) + u_i(t) = u(t) + u_{i,e} + u_{i,f} = (R_a + R_i) \cdot i$

$$u(t) = (R_a + R_i) \cdot i + i \cdot \frac{dL_i(z)}{dz} \cdot \dot{z} + L_i(z) \cdot \frac{di}{dt} + N \cdot \dot{z} \cdot B_\delta \cdot 2\pi \cdot r_{av} \quad \frac{dL_i(z)}{dz} = -\mu_0 \cdot N^2 \cdot \frac{4\pi \cdot r_{av}}{\delta \cdot l} \cdot z$$

$$u(t) = (R_a + R_i) \cdot i - \mu_0 \cdot N^2 \cdot \frac{4\pi \cdot r_{av}}{\delta \cdot l} \cdot i \cdot z \cdot \dot{z} + \mu_0 \cdot N^2 \cdot \frac{2\pi \cdot r_{av}}{\delta \cdot l} \cdot \left(\frac{l^2}{4} - z^2 \right) \cdot \frac{di}{dt} + N \cdot \dot{z} \cdot B_\delta \cdot 2\pi \cdot r_{av}$$

Nichtlineare Terme

- **Vereinfachung:** KLEINE Bewegungen $z \ll l/2$: $\frac{l^2}{4} - z^2 \approx \frac{l^2}{4} \Rightarrow L_i \approx \mu_0 \cdot N^2 \cdot \frac{\pi \cdot r_{av} \cdot l}{2\delta} = \text{konst.}$

$$u(t) = (R_a + R_i) \cdot i + L_i \cdot \frac{di}{dt} + N \cdot \dot{z} \cdot B_\delta \cdot 2\pi \cdot r_{av}$$

LINEARE Systemgleichungen!

$$m \cdot \ddot{z} + d \cdot \dot{z} + k \cdot z = K_0 \cdot i$$

$$(R_a + R_i) \cdot i + L_i \cdot \frac{di}{dt} + K_0 \cdot \dot{z} = u(t)$$

Magnetischer Wandler „Typ 2“

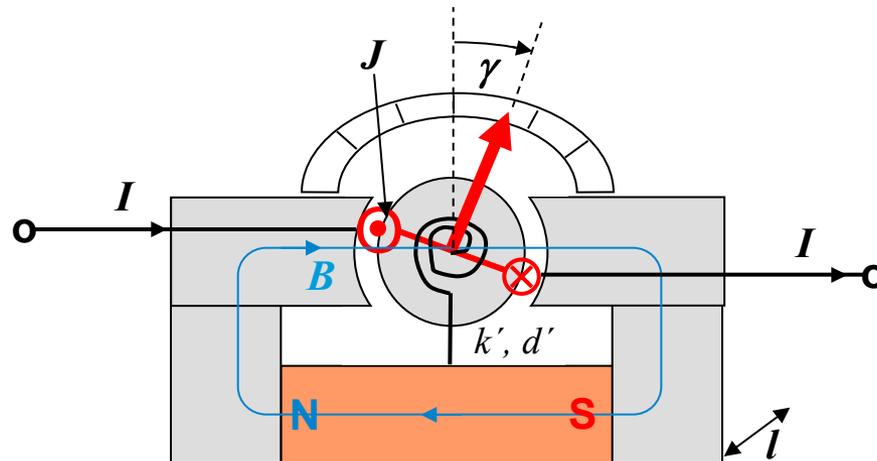
3. Gleichgewichtspunkte

- Gleichgewichtslage $Z = d./dt = 0$: $u(t) = \text{konst.} = U$, $z(t) = \text{konst.} = Z$, $i(t) = \text{konst.} = I$,

$$k \cdot Z = K_0 \cdot I \quad (R_a + R_i) \cdot I = U$$

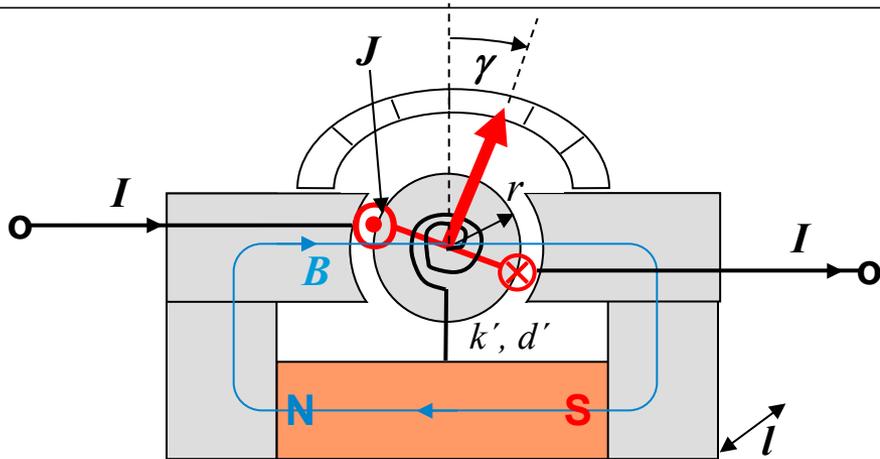
$$Z = \frac{K_0}{k} \cdot \frac{U}{R_a + R_i} \quad -\frac{l}{2} \leq Z \leq \frac{l}{2}$$

- Im Gleichgewicht ist das SYSTEM LINEAR !
- Die Position Z ist proportional zur angelegten Spannung U ! $K_0 = N \cdot 2\pi \cdot r_{av} \cdot B_\delta$
- Anwendung: Spannungsmessung bzw. Strommessung im Drehspulinstrument



$$\gamma \sim U \sim I$$

Magnetischer Wandler „Typ 2“ Drehspulinstrument



- Statt Linearbewegung z :
Drehbewegung: $z = \gamma \cdot r$
- Länge der Spule im B -Feld:
Statt $2\pi \cdot r_{av} \rightarrow 2 \cdot l$
 $u_{i,f} = -N \cdot B_{\delta} \cdot 2l \cdot \dot{z} = -N \cdot B_{\delta} \cdot 2l \cdot r \cdot \dot{\gamma}$
 $F_m = N \cdot i \cdot l \cdot B_{\delta} \rightarrow$ Drehmoment:
 $\rightarrow M_m = 2F_m \cdot r = N \cdot i \cdot 2l \cdot B_{\delta} \cdot r$
 $u_{i,f} = -K'_0 \cdot r \cdot \dot{\gamma} \quad M_m = K'_0 \cdot r \cdot i$
 $K'_0 = 2 \cdot N \cdot B_{\delta} \cdot l$

m : Masse/Spulenseite $\Rightarrow 2m$: Spulenmasse

$$m \cdot \ddot{z} + d \cdot \dot{z} + k \cdot z = F_m \Rightarrow$$

$$\underbrace{2m \cdot r^2}_J \cdot \ddot{\gamma} + \underbrace{2d \cdot r^2}_{d'} \cdot \dot{\gamma} + \underbrace{2k \cdot r^2}_{k'} \cdot \gamma = 2F_m \cdot r = M_m = K'_0 \cdot r \cdot i$$

$$J \cdot \ddot{\gamma} + d' \cdot \dot{\gamma} + k' \cdot \gamma = K'_0 \cdot r \cdot i$$

$$(R_a + R_i) \cdot i + L_i \cdot \frac{di}{dt} = u(t) + u_{i,f} \Rightarrow (R_a + R_i) \cdot i + L_i \cdot \frac{di}{dt} + K'_0 \cdot r \cdot \dot{\gamma} = u(t)$$

Spannungsmessung

Gleichgewichts-Winkellage: $d \cdot / dt = 0 \rightarrow u(t) = U : \gamma = \frac{K'_0 \cdot r}{k'} \cdot \frac{U}{R_a + R_i} \Rightarrow \gamma \sim U \sim I$

Magnetischer Wandler „Typ 2“

4. Frequenzgang

$$u(t) = U + \hat{U} \cdot \cos \omega t = U + \operatorname{Re} \left\{ \hat{U} \cdot e^{j\omega t} \right\} \quad i(t) = I + \hat{I} \cdot \cos(\omega t + \varphi) = I + \operatorname{Re} \left\{ \hat{I} \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t} \right\}$$

$$z(t) = Z + \hat{Z} \cdot \cos(\omega t + \alpha) = Z + \operatorname{Re} \left\{ \hat{Z} \cdot e^{j\alpha} \cdot e^{j\omega t} \right\} \quad \underline{\hat{Z}} = \hat{Z} \cdot e^{j\alpha} \quad \underline{\hat{I}} = \hat{I} \cdot e^{j\varphi}$$

$$(-\omega^2 \cdot m + j\omega \cdot d + k) \cdot \underline{\hat{Z}} - K_0 \cdot \underline{\hat{I}} = 0, \quad (\underline{\hat{Z}} / \underline{\hat{I}} = K_0 / (-\omega^2 \cdot m + j\omega \cdot d + k)), \quad R = R_a + R_i,$$

$$j\omega \cdot K_0 \cdot \underline{\hat{Z}} + (R + j\omega \cdot L_i) \cdot \underline{\hat{I}} = \hat{U},$$

$$\begin{pmatrix} -\omega^2 \cdot m + j\omega \cdot d + k & -K_0 \\ j\omega \cdot K_0 & R + j\omega \cdot L_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{\hat{Z}} \\ \underline{\hat{I}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{U} \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{Det} = \begin{vmatrix} -\omega^2 \cdot m + j\omega \cdot d + k & -K_0 \\ j\omega \cdot K_0 & R + j\omega \cdot L_i \end{vmatrix}$$

$$\operatorname{Det} = (-\omega^2 \cdot m + j\omega \cdot d + k) \cdot (R + j\omega \cdot L_i) + j\omega \cdot K_0^2$$

• **Frequenzgang:** $\underline{\hat{Z}} = \frac{1}{\operatorname{Det}} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -K_0 \\ \hat{U} & R + j\omega \cdot L_i \end{vmatrix} = \frac{K_0 \cdot \hat{U}}{(-\omega^2 \cdot m + j\omega \cdot d + k) \cdot (R + j\omega \cdot L_i) + j\omega \cdot K_0^2}$

$$\underline{\hat{I}} = \frac{1}{\operatorname{Det}} \cdot \begin{vmatrix} -\omega^2 \cdot m + j\omega \cdot d + k & 0 \\ j\omega \cdot K_0 & \hat{U} \end{vmatrix} = \frac{(-\omega^2 \cdot m + j\omega \cdot d + k) \cdot \hat{U}}{(-\omega^2 \cdot m + j\omega \cdot d + k) \cdot (R + j\omega \cdot L_i) + j\omega \cdot K_0^2}$$

• **Eingangsimpedanz:** $\frac{\hat{U}}{\underline{\hat{I}}} = R + j\omega \cdot L_i + \frac{j\omega \cdot K_0^2}{-\omega^2 \cdot m + j\omega \cdot d + k} = R + j\omega \cdot L_i + \frac{j\omega \cdot K_0 \cdot \underline{\hat{Z}}}{\underline{\hat{I}}}$

Magnetischer Wandler „Typ 2“

Eingangsimpedanz



- „Akustischer Strahlungswiderstand“ R_S , „Strahlungsreaktanz“ X_S :

$$\frac{\hat{U}}{\hat{I}} = R + R_S + j \cdot (\omega \cdot L_i + X_S) = R + j\omega \cdot L_i + \frac{\omega^2 \cdot K_0^2 \cdot d + j\omega \cdot K_0^2 \cdot (k - \omega^2 \cdot m)}{(k - \omega^2 \cdot m)^2 + \omega^2 \cdot d^2}$$

$$R_S = \frac{\omega^2 \cdot K_0^2 \cdot d}{(k - \omega^2 \cdot m)^2 + \omega^2 \cdot d^2} = \frac{\omega^2 \cdot K_0^2 / (m \cdot \tau)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega / \tau)^2}$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad \tau = \frac{m}{d} = \frac{1}{\omega_d} = T_d$$

$$X_S = \frac{\omega \cdot K_0^2 \cdot (k - \omega^2 \cdot m)}{(k - \omega^2 \cdot m)^2 + \omega^2 \cdot d^2} = \frac{\omega \cdot (\omega_0^2 - \omega^2) \cdot (K_0^2 / m)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega / \tau)^2}$$

τ : Dämpfungszeitkonstante

ω_0 : Ungedämpfte Eigenkreisfrequenz

- „Strahlungsreaktanz“ X_S : $\omega < \omega_0$: frequenzabhängige Induktivität $L_S = X_S / \omega$
 $\omega > \omega_0$: frequenzabhängige Kapazität $C_S = -1 / (\omega X_S)$

- Akustischer Strahlungswiderstand verschwindet bei $d = 0 = d_R + d_S$

Bei reibungsfreier Bewegung $d_R = 0$ **nur Dämpfung durch Schallabstrahlung** $\tau_S = \frac{m}{d_S}$

- Abgestrahlte Schall-Leistung P_S bei reibungsarmer Bewegung: $d_R \ll d_S$

$$P_S = R_S \cdot I_{\text{eff}}^2 = R_S \cdot \hat{I}^2 / 2 = R_S \cdot |\hat{I}|^2 / 2 \Rightarrow p_S = \frac{P_S}{U_{\text{eff}}^2 / R} = \frac{R_S \cdot |\hat{I}|^2 / 2}{U_{\text{eff}}^2 / R} = \frac{R_S \cdot |\hat{I}|^2 \cdot R}{\hat{U}^2}$$



Magnetischer Wandler „Typ 2“

„Normierte“ Schall-Leistung p_S (1)



$$\underline{\hat{I}} = \frac{(k - \omega^2 \cdot m + j\omega \cdot d_S) \cdot \hat{U}}{(k - \omega^2 \cdot m + j\omega \cdot d_S) \cdot (R + j\omega \cdot L_i) + j\omega \cdot K_0^2} = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) + j \cdot (\omega / \tau_S)}{\left(\omega_0^2 + j \cdot \frac{\omega}{\tau_S} - \omega^2 \right) \cdot \left(1 + j \cdot \frac{\omega \cdot L_i}{R} \right) + j\omega \cdot \frac{K_0^2}{R \cdot m}} \cdot \frac{\hat{U}}{R}$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad \tau_S = \frac{m}{d_S} \quad \omega_L = \frac{R}{L_i} \quad \omega_K = \frac{K_0^2}{R \cdot m}$$

$$\underline{\hat{I}} = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) + j \cdot (\omega / \tau_S)}{\left(\omega_0^2 - \omega^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{\omega_L \tau_S} \right) \right) + j\omega \cdot \left(\omega_K + \frac{1}{\tau_S} + \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_L} \right)} \cdot \frac{\hat{U}}{R} \quad R_S = \frac{\omega^2 \cdot \omega_K \cdot (R / \tau_S)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega / \tau_S)^2}$$

$$p_S = \frac{R \cdot R_S \cdot \hat{I}^2}{\hat{U}^2} = \frac{R}{\hat{U}^2} \cdot \frac{\omega^2 \cdot \omega_K \cdot (R / \tau_S)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega / \tau_S)^2} \cdot \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega / \tau_S)^2}{\left(\omega_0^2 - \omega^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{\omega_L \tau_S} \right) \right)^2 + \omega^2 \cdot \left(\omega_K + \frac{1}{\tau_S} + \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_L} \right)^2} \cdot \frac{\hat{U}^2}{R^2}$$

$$p_S = \frac{\omega^2 \cdot \omega_K / \tau_S}{\left(\omega_0^2 - \omega^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{\omega_L \tau_S} \right) \right)^2 + \omega^2 \cdot \left(\omega_K + \frac{1}{\tau_S} + \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_L} \right)^2}$$



Magnetischer Wandler „Typ 2“

„Normierte“ Schall-Leistung p_S (2)



$$p_S = \frac{\omega^2 \cdot \omega_K / \tau_S}{\left(\omega_0^2 - \omega^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{\omega_L \tau_S}\right) \right)^2 + \omega^2 \cdot \left(\omega_K + \frac{1}{\tau_S} + \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_L} \right)^2}$$

- Da $L_i \sim \mu_0$ i. A. sehr klein, ist **elektr. Dämpfung** $\omega_L = R/L_i \sim 1/L_i$ i. A. sehr groß: $\omega_0 = \sqrt{k/m} \ll \omega_L$

$$1) 0 < \omega \ll \omega_0 : p_S \approx \frac{\omega^2}{\omega_0^4} \cdot \frac{\omega_K}{\tau_S} = \frac{\omega^2}{(k/m)^2} \cdot \frac{d_S}{m} \cdot \frac{K_0^2}{R \cdot m} = \omega^2 \cdot \frac{d_S}{R} \cdot \frac{(2\pi \cdot r_{av} \cdot N \cdot B_\delta)^2}{k^2}$$

$$2) \omega_0 < \omega < \omega_L : p_S \approx \frac{\omega^2 \cdot \omega_K / \tau_S}{\omega^4 \cdot \left(1 + \frac{1}{\omega_L \tau_S}\right)^2 + \omega^2 \cdot \left(\omega_K + \frac{1}{\tau_S}\right)^2} \approx \frac{\omega^2 \cdot \omega_K / \tau_S}{\omega^4 \cdot \left(1 + \frac{1}{\omega_L \tau_S}\right)^2} \approx \frac{\omega^2 \cdot \omega_K / \tau_S}{\omega^4} = \frac{\omega_K}{\omega^2 \cdot \tau_S}$$

$$p_S \approx \frac{\omega_K}{\omega^2 \cdot \tau_S} = \frac{1}{\omega^2} \cdot \frac{d_S}{m} \cdot \frac{K_0^2}{R \cdot m} = \frac{1}{\omega^2} \cdot \frac{d_S}{R} \cdot \frac{(2\pi \cdot r_{av} \cdot N \cdot B_\delta)^2}{k^2} \cdot \frac{k^2}{m^2}$$

$$3) \omega \gg \omega_L : p_S \approx \frac{\omega^2 \cdot \omega_K / \tau_S}{\omega^2 \cdot \left(\frac{-\omega^2}{\omega_L}\right)^2} = \frac{\omega_L^2 \cdot \omega_K / \tau_S}{\omega^4} = \frac{1}{\omega^4} \cdot \frac{R^2}{L_i^2} \cdot \frac{d_S}{m} \cdot \frac{K_0^2}{R \cdot m} = \frac{1}{\omega^4} \cdot \frac{R \cdot d_S}{L_i^2} \cdot \frac{(2\pi \cdot r_{av} \cdot N \cdot B_\delta)^2}{m^2}$$



Magnetischer Wandler „Typ 2“

Maximum der „normierten“ Schall-Leistung p_S



$$p_S = \frac{\omega^2 \cdot \omega_K / \tau_S}{\left(\omega_0^2 - \omega^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{\omega_L \tau_S}\right) \right)^2 + \omega^2 \cdot \left(\omega_K + \frac{1}{\tau_S} + \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_L} \right)^2}$$

- Maximum von p_S (für $\omega_L \sim 1/L_i$ sehr groß): $\omega_0 \ll \omega_L$



$$p_S \cong \frac{\omega^2 \cdot \omega_K / \tau_S}{\left(\omega_0^2 - \omega^2 \right)^2 + \omega^2 \cdot \underbrace{\left(\omega_K + \frac{1}{\tau_S} \right)^2}_A} = p_S(\underbrace{\omega^2}_{\xi}) = p_S(\xi) \sim f(\xi) = \frac{\xi}{\left(\omega_0^2 - \xi \right)^2 + \xi \cdot A} \Rightarrow \frac{dp_S}{d\xi} = 0$$

$$\frac{dp_S}{d\xi} = 0 \Leftrightarrow \frac{df}{d\xi} = 0 = \frac{1}{\left(\omega_0^2 - \xi \right)^2 + \xi \cdot A} - \frac{\xi \cdot (-2 \cdot (\omega_0^2 - \xi) + A)}{\left(\left(\omega_0^2 - \xi \right)^2 + \xi \cdot A \right)^2} \Rightarrow \left(\omega_0^2 - \xi \right)^2 + \xi \cdot A - \xi \cdot (-2 \cdot (\omega_0^2 - \xi) + A) = 0$$

$$\left((\omega_0^2 - \xi) - \xi \cdot (-2) \right) \cdot (\omega_0^2 - \xi) = (\omega_0^2 + \xi) \cdot (\omega_0^2 - \xi) = 0 \Rightarrow \xi = \omega_0^2 = \omega^2$$

$$p_{S,\max} \cong p_S(\omega_0) = \frac{\omega_K / \tau_S}{\left(\omega_K + \frac{1}{\tau_S} \right)^2} = \frac{\omega_K \cdot \tau_S}{(\omega_K \cdot \tau_S + 1)^2}$$

- Das Maximum $p_{S,\max}$ tritt für $\omega_0 \ll \omega_L$ bei $\omega = \omega_0$ auf!
- Bei mech. Resonanz $\omega = \omega_0$ größte Schwingungsleistung, daher auch Schall-Leistung p_S maximal!



Magnetischer Wandler „Typ 2“

Maximierung der Schall-Leistung $p_{S,opt}$ (1)

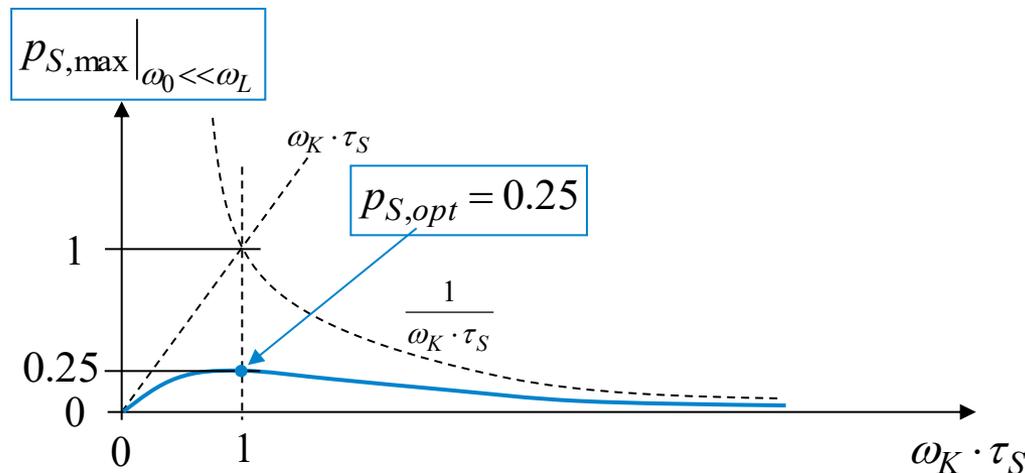


$$p_{S,max} \Big|_{\omega_0 \ll \omega_L} = p_S(\omega_0) = \frac{\omega_K \cdot \tau_S}{(\omega_K \cdot \tau_S + 1)^2} \quad p_{S,max} \Big|_{\omega_0 \ll \omega_L} = \frac{(2\pi \cdot r_{av} \cdot N \cdot B_\delta)^2 / (R \cdot d_S)}{\left((2\pi \cdot r_{av} \cdot N \cdot B_\delta)^2 / (R \cdot d_S) + 1 \right)^2}$$

- Wie müssen die Parameter des Lautsprechers N , B_δ , R , r_{av} , d_S gewählt werden, dass die bei ω_0 auftretende Maximalleistung $p_{S,max}$ MAXIMIERT wird als $p_{S,opt}$?

$$\frac{dp_{S,max}}{d(\underbrace{\omega_K \cdot \tau_S}_a)} = \frac{dp_{S,max}}{da} = 0 \Rightarrow \frac{d}{da} \left(\frac{a}{(a+1)^2} \right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{(a+1)^2} - \frac{2a}{(a+1)^3} = 0 \Rightarrow a+1-2a=0 \Rightarrow a=1$$

$$p_{S,opt} = p_{S,max}(\omega_K \cdot \tau_S = 1) = \frac{1}{(1+1)^2} = \frac{1}{4} = \frac{P_{S,opt}}{U_{eff}^2 / R}$$



Magnetischer Wandler „Typ 2“

Maximierung der Schall-Leistung $p_{S,opt}$ (2)

- Ein optimierter Lautsprecher erfüllt die **Bedingung**: $\omega_K \cdot \tau_S = 1 = \frac{K_0^2}{R \cdot m} \cdot \frac{m}{d_S} = \frac{K_0^2}{R \cdot d_S} \Rightarrow K_0^2 = R \cdot d_S$

$$(2\pi \cdot r_{av} \cdot N \cdot B_\delta)^2 = R \cdot d_S \quad (\text{Optimierungs-Bedingung})$$

- Die maximal mögliche abgestrahlte Schall-Leistung tritt beim optimierten Lautsprecher auf.
- Sie ist maximal $\frac{1}{4}$ der fiktiven „Normierungsleistung“ $(U_{eff})^2 / R$!
- Wegen

$$R_S(\omega_0) = \frac{\omega^2 \cdot \omega_K \cdot (R / \tau_S)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega / \tau_S)^2} \Bigg|_{\omega_0} = \omega_K \cdot (R \cdot \tau_S) = R \cdot (\omega_K \cdot \tau_S) = R \cdot 1 = R$$

ist die Optimierungsbedingung identisch mit der „Leistungsanpassung“ $R = R_i + R_a = R_S(\omega_0)$.

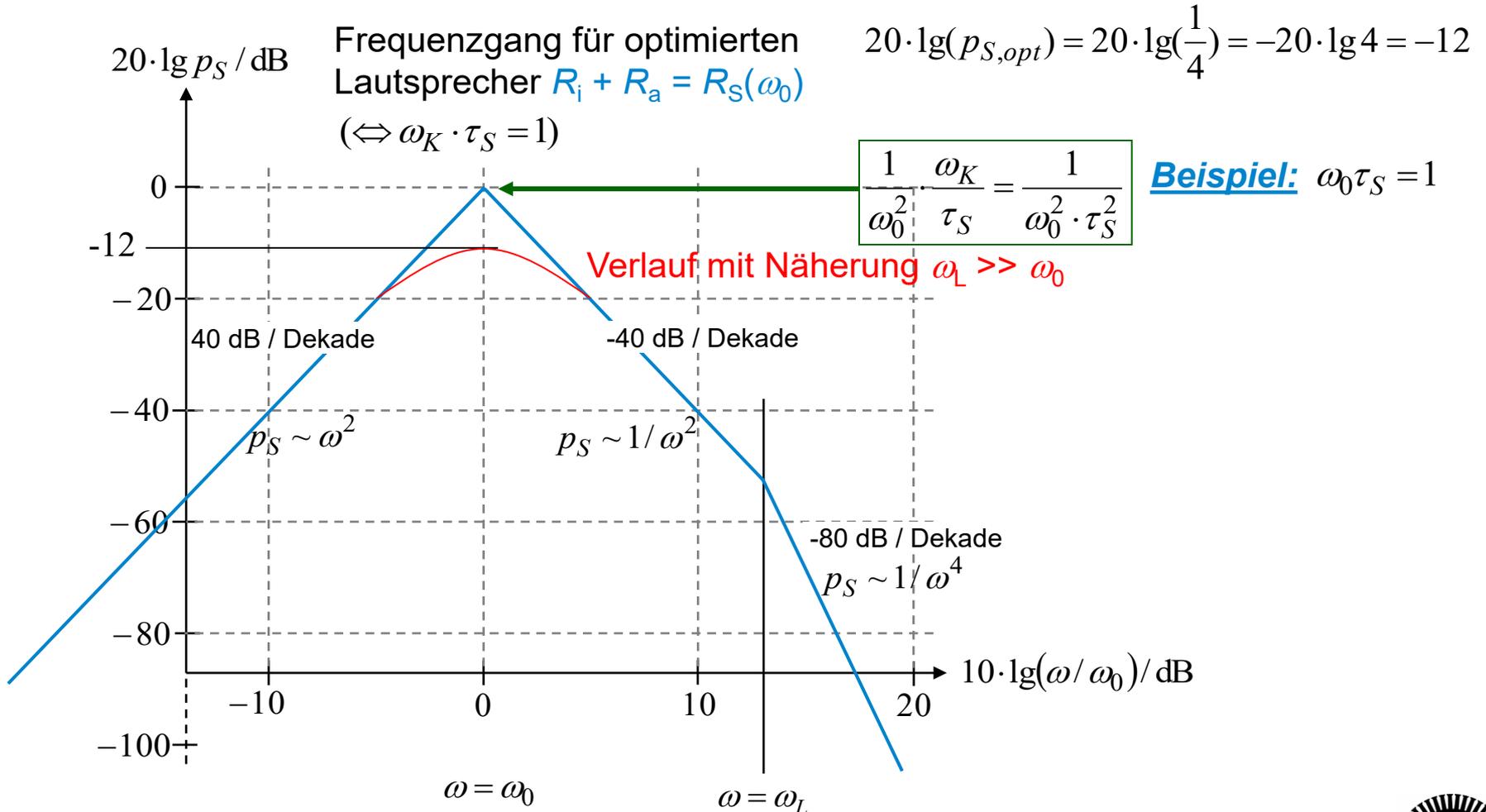
Magnetischer Wandler „Typ 2“

Frequenzgang der normierten Schall-Leistung p_S

Kleine Spulen-Selbstinduktivität $\omega_L \gg \omega_0$



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT



Magnetischer Wandler „Typ 2“

Frequenzgang der Membran-Schwingamplitude (1)

• Amplitudengang:

$$\left| \frac{\hat{Z}}{\hat{U}} \right| = \frac{K_0}{\left| (-\omega^2 \cdot m + j\omega \cdot d + k) \cdot (R + j\omega \cdot L_i) + j\omega \cdot K_0^2 \right|} = \frac{\omega_K / K_0}{\left| (\omega_0^2 - \omega^2 + j \cdot (\omega / \tau_S)) \cdot (1 + j \cdot (\omega / \omega_L)) + j\omega \cdot \omega_K \right|}$$

$$\left| \frac{\hat{Z}}{\hat{U}} \right| = \frac{\omega_K / K_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{\omega_L \tau_S}\right) \right)^2 + \omega^2 \cdot \left(\omega_K + \frac{1}{\tau_S} + \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_L} \right)^2}}$$

1) $0 < \omega < \omega_0$: $\left| \frac{\hat{Z}}{\hat{U}} \right| \approx \frac{\omega_K / K_0}{\sqrt{(\omega_0^2)^2}} = \frac{\omega_K}{K_0 \cdot \omega_0^2} = \text{konst.} = \frac{K_0}{k \cdot R}$

• Annahme: $\omega_0 \ll \omega_L$



2) $\omega_0 < \omega < \omega_L$: $\left| \frac{\hat{Z}}{\hat{U}} \right| \approx \frac{\omega_K / K_0}{\sqrt{(-\omega^2)^2}} = \frac{\omega_K}{K_0 \cdot \omega^2} = \frac{K_0}{R \cdot m \cdot \omega^2}$

3) $\omega_L \ll \omega$: $\left| \frac{\hat{Z}}{\hat{U}} \right| \approx \frac{\omega_K / K_0}{\sqrt{\omega^2 \cdot (-\omega^2 / \omega_L)^2}} = \frac{\omega_K \omega_L}{K_0 \cdot \omega^3} = \frac{K_0}{m \cdot L_i \cdot \omega^3}$

Magnetischer Wandler „Typ 2“

Frequenzgang der Membran-Schwingamplitude (2)

- **Amplitudengang:** Vereinfacht für $\omega \ll \omega_L$

$$\omega \ll \omega_L : \left| \frac{\hat{Z}}{\hat{U}} \right| \approx \frac{\omega_K / K_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \cdot \left(\omega_K + \frac{1}{\tau_S} \right)^2}} \Rightarrow \left| \frac{\hat{Z}}{\hat{U}} \right|_{\omega_0} \approx \frac{\omega_K / K_0}{\omega_0 \cdot \left(\omega_K + \frac{1}{\tau_S} \right)} = \frac{\omega_K \tau_S / K_0}{\omega_0 \cdot (\omega_K \tau_S + 1)}$$

- Bei optimal ausgelegtem Lautsprecher:
Bei $\omega = \omega_0$ Maximum $\Leftrightarrow \omega_K \tau_S = 1$: $\left| \frac{\hat{Z}}{\hat{U}} \right|_{\omega_0, \omega_K \tau_S = 1} \approx \frac{1}{2\omega_0 \cdot K_0}$

- **Beispiel:** Wahl von k, m so, dass $\omega_0 = \omega_K \Leftrightarrow \sqrt{k/m} = K_0^2 / (R \cdot m) \Rightarrow R \cdot \sqrt{k \cdot m} = K_0^2$

optimierter Lautsprecher : $\omega_K \tau_S = 1 \Rightarrow \omega_0 \tau_S = 1$

$$\left| \frac{\hat{Z}}{\hat{U}} \right|_{\omega_0, \omega_K \tau_S = 1} \approx \frac{1}{2\omega_0 \cdot K_0} = \frac{\tau_S}{2 \cdot K_0}$$

Asymptote für $\omega \ll \omega_0$:

$$\left| \frac{\hat{Z}}{\hat{U}} \right| \approx \frac{\omega_K}{K_0 \cdot \omega_0^2} = \frac{1/\tau_S}{K_0 \cdot \omega_0^2} = \frac{1}{K_0 \cdot \tau_S \omega_0 \cdot \omega_0} = \frac{\tau_S}{K_0} \approx 2 \cdot \left| \frac{\hat{Z}}{\hat{U}} \right|_{\omega_0}$$

Asymptote für $\omega_L > \omega \gg \omega_0$:

$$\left| \frac{\hat{Z}}{\hat{U}} \right| \approx \frac{\omega_K}{K_0 \cdot \omega^2} \quad \text{Bei } \omega = \omega_0: \left| \frac{\hat{Z}}{\hat{U}} \right|_{\omega_0} \approx \frac{\omega_K}{K_0 \cdot \omega_0^2} = \frac{\tau_S}{K_0}$$

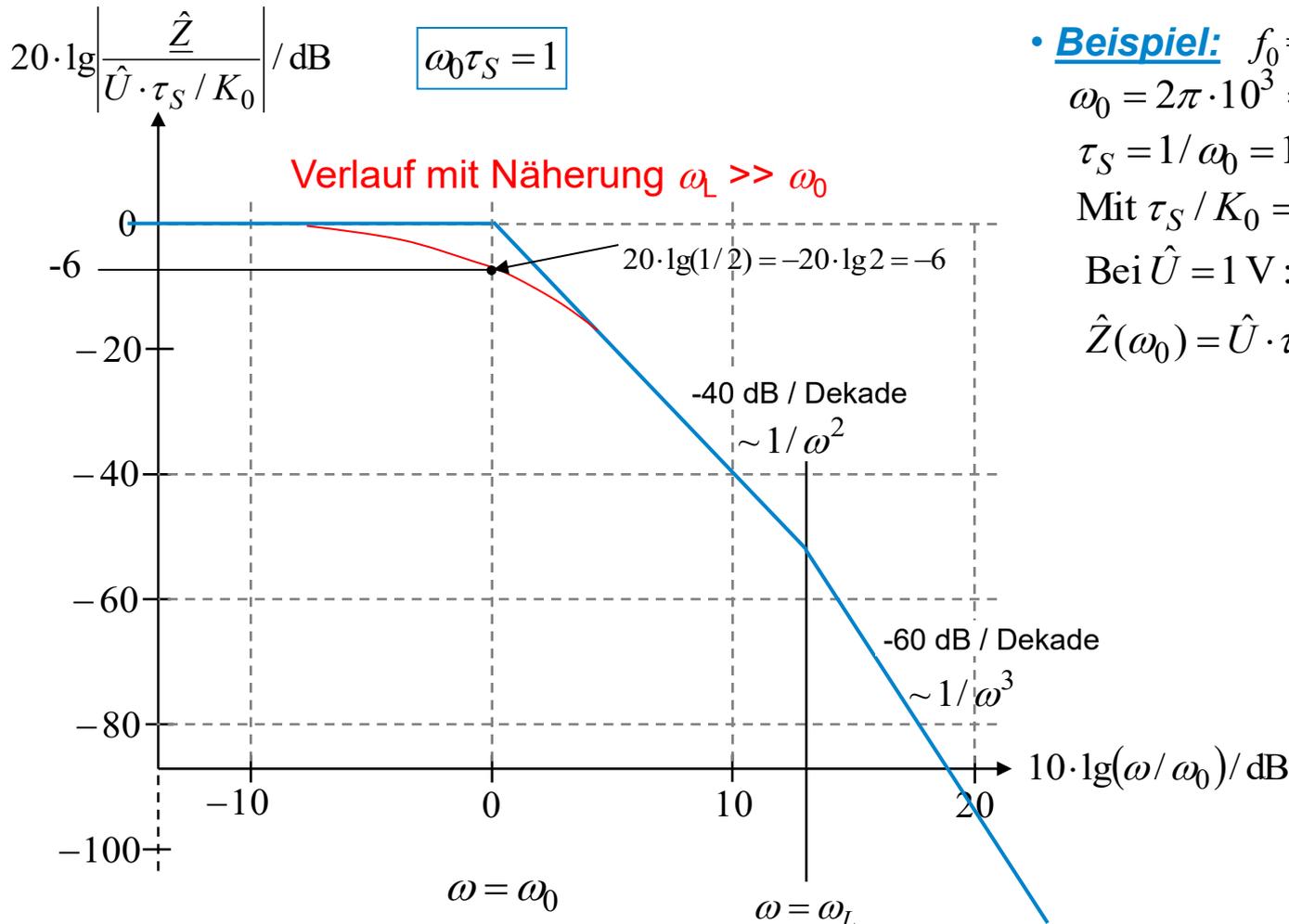
Magnetischer Wandler „Typ 2“

Frequenzgang der Membran-Schwingamplitude (3)

Große el. Dämpfung $\omega_L \gg \omega_0$



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT



- **Beispiel:** $f_0 = 1 \text{ kHz}$
 $\omega_0 = 2\pi \cdot 10^3 = 6383 / \text{s}$
 $\tau_S = 1 / \omega_0 = 1 / (6383 / \text{s}) = 0.157 \text{ ms}$
Mit $\tau_S / K_0 = 0.125 \text{ mm/V}$:
Bei $\hat{U} = 1 \text{ V}$:
 $\hat{Z}(\omega_0) = \hat{U} \cdot \tau_S / (2K_0) = 62.5 \text{ } \mu\text{m}$



Magnetischer Wandler „Typ 2“

Frequenzgang der Membran-Schwingamplitude (4)

Große el. Dämpfung $\omega_L \gg \omega_0$



- Im Bereich quadratisch mit der Frequenz f zunehmender Schall-Leistung $P_S \sim \omega^2$ ist die Schwingungsamplitude der Membran (Weg $z(t)$) **direkt proportional** zur Amplitude des Sprachsignals $u(t)$: $z(t) \sim u(t)$!

$$z(t) = Z + \hat{Z} \cdot \cos(\omega \cdot t + \alpha) \Rightarrow v(t) = \dot{z}(t) = -\omega \cdot \hat{Z} \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha) = -\hat{v} \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha)$$

$$P_S = Z_S \cdot v_{eff}^2 \cdot A = Z_S \cdot \frac{\hat{v}^2}{2} \cdot A = Z_S \cdot \frac{\omega^2 \cdot \hat{Z}^2}{2} \cdot A$$

$$\boxed{\hat{U} \sim \hat{Z}} \quad P_S \sim Z_S \cdot \frac{\omega^2 \cdot \hat{U}^2}{2} \cdot A \quad \boxed{P_S \sim \omega^2}$$



Magnetischer Wandler „Typ 2“

Vergleich zum Wandler Typ 1



- Nicht eine Kraft auf magnetisierbare Körper ist maßgebend, sondern die LORENTZ-Kraft auf stromdurchflossene Leiter
- Daher kein instabiles Verhalten → **kein Schnapp-Mechanismus!**
- Die Bewegungsgleichungen sind (bei $L_i = \text{konstant}$) LINEAR.
- **Keine Linearisierung** und Kleinsignaltheorie erforderlich.
- Zwei typische Anwendungen:
 - Drehspulinstrument
 - Lautsprecher



Magnetischer Wandler „Typ 2“

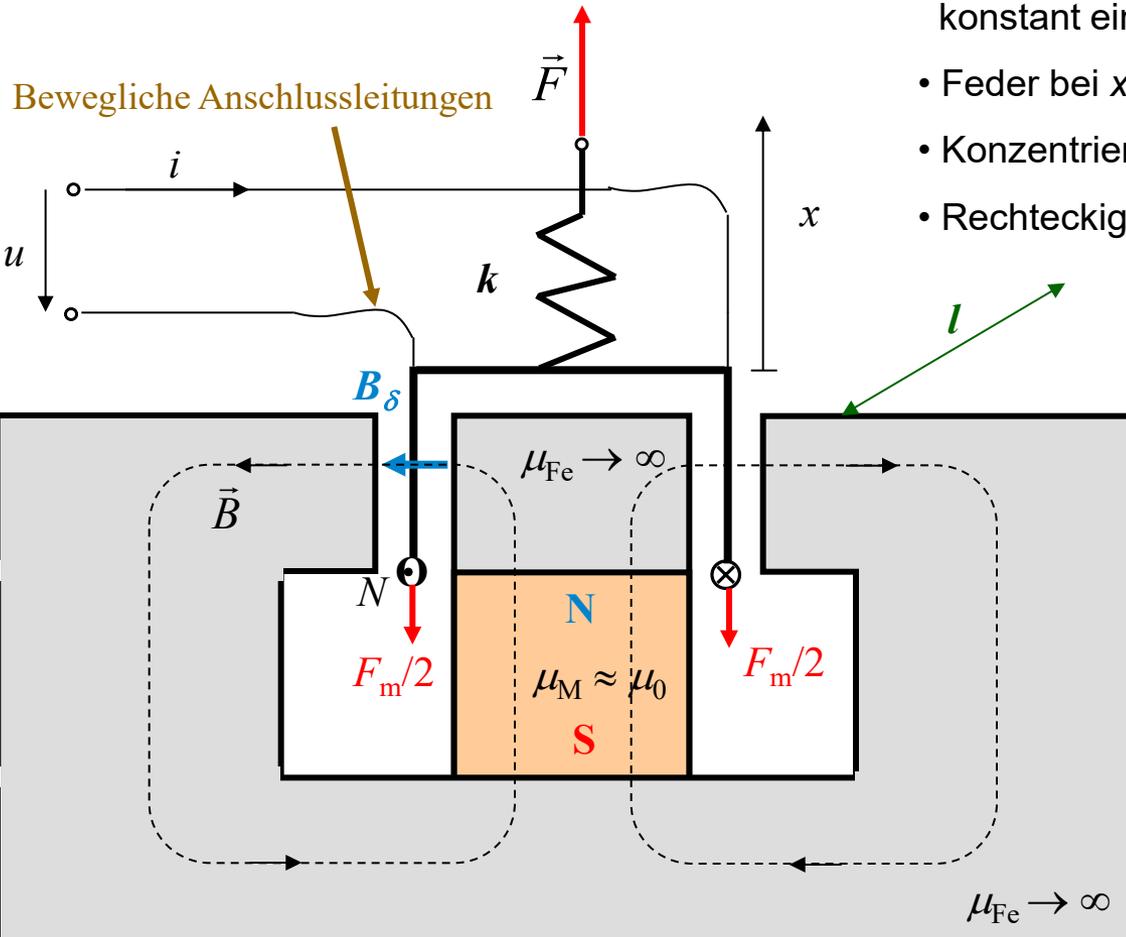
Grundtyp – Linearisierung: Vierpoldarstellung (1)

Annahmen: • Luftspaltflussdichte B_δ vom Permanentmagnet konstant eingepägt

• Feder bei $x = 0$ entspannt

• Konzentrierte N -windige Spule (Rechteckschleife)

• Rechteckiger Querschnitt mit Länge l



• Spuleninduktivität L_0 sei unabhängig von Spulenposition $0 \leq x \leq h$

• Spulenflussverkettung mit PM-Feld maximal bei $x = 0$:

$$\Psi_p = N \cdot 2h \cdot l \cdot B_\delta$$

• Spulenflussverkettung mit PM-Feld hängt von x ab:

$$\Psi_p(x) = \Psi_p \cdot (1 - (x/h))$$

$$0 \leq x \leq h$$

Magnetischer Wandler „Typ 2“

Grundtyp – Linearisierung: Vierpoldarstellung (2)

- Spulenbewegung **um den Arbeitspunkt** x_0 : ($0 \leq x_0 \leq h$), $0 \leq x \leq h$: $x(t) = x_0 + x_1(t)$
 $F(t) = F_0 + F_1(t)$, $\psi(t) = \Psi_0 + \psi_1(t)$, $i(t) = I_0 + i_1(t)$
- Da Wandler linear, ist Beschränkung auf kleine Bewegung **nicht nötig**, solange $0 \leq x \leq h$
- Resultierende Spulenflussverkettung: Eigenfeld und PM-Feld:

$$0 \leq x \leq h: \psi(t) = \psi(x(t), t) = L_0 \cdot i(t) + \Psi_p \cdot (1 - (x/h))$$

$$\psi(t) = \Psi_0 + \psi_1(t) = L_0 \cdot (I_0 + i_1(t)) + \Psi_p \cdot (1 - (x_0 + x_1(t))/h)$$

$$\Psi_0 = L_0 \cdot I_0 + \Psi_p \cdot (1 - (x_0/h)), \quad \psi_1 = L_0 \cdot i_1 - \Psi_p \cdot x_1/h \Rightarrow i_1 = \frac{\psi_1}{L_0} + \frac{\Psi_p \cdot (x_1/h)}{L_0}$$

$$i_1 = \frac{\psi_1}{L_0} + \frac{N \cdot 2h \cdot l \cdot B_\delta \cdot (x_1/h)}{L_0} = \frac{\psi_1}{L_0} + \frac{N \cdot 2 \cdot l \cdot B_\delta \cdot x_1}{L_0} = \frac{\psi_1}{L_0} + \frac{l_e \cdot B_\delta \cdot x_1}{L_0} \quad l_e := N \cdot 2 \cdot l$$

- LORENTZ-Kraft auf Spulenleiter im PM-Feld und Federkraft:

$$F = F_0 + F_1 = \underbrace{N \cdot 2 \cdot l \cdot B_\delta \cdot i}_{F_m} + k \cdot x = N \cdot 2 \cdot l \cdot B_\delta \cdot (I_0 + i_1) + k \cdot (x_0 + x_1)$$

$$F_0 = N \cdot 2 \cdot l \cdot B_\delta \cdot I_0 + k \cdot x_0, \quad F_1 = N \cdot 2 \cdot l \cdot B_\delta \cdot i_1 + k \cdot x_1 = l_e \cdot B_\delta \cdot i_1 + k \cdot x_1$$

Magnetischer Wandler „Typ 2“

Grundtyp – Linearisierung: Vierpoldarstellung (3)



$$F_1 = l_e \cdot B_\delta \cdot i_1 + k \cdot x_1 = l_e \cdot B_\delta \cdot \left(\frac{\psi_1}{L_0} + \frac{l_e \cdot B_\delta \cdot x_1}{L_0} \right) + k \cdot x_1 = \frac{l_e \cdot B_\delta \cdot \psi_1}{L_0} + \left(\frac{(l_e \cdot B_\delta)^2}{L_0} + k \right) \cdot x_1$$

$$v_1 = dx_1 / dt : F_1 = l_e \cdot B_\delta \cdot i_1 + k \cdot \int v_1 \cdot dt \Rightarrow i_1 = \frac{F_1}{l_e \cdot B_\delta} - \frac{k \cdot \int v_1 \cdot dt}{l_e \cdot B_\delta}$$

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{L_0} & \frac{l_e \cdot B_\delta}{L_0} \\ \frac{l_e \cdot B_\delta}{L_0} & \frac{(l_e \cdot B_\delta)^2}{L_0} + k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \psi_1 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

Kopplungsterm zw. mech. u. el. System: $K_0 = \frac{l_e \cdot B_\delta}{L_0}$

Bei $K_0 = 0$: $i_1 = \psi_1 / L_0$, $F_1 = k \cdot x_1$

Kopplungsfaktor: $\kappa = \frac{l_e \cdot B_\delta}{\sqrt{(l_e \cdot B_\delta)^2 + L_0 k}}$

- Für sinusförmige Änderungen um den Arbeitspunkt: $\begin{cases} i_1(t) = \text{Re}\{\hat{\underline{I}}_1 \cdot e^{j\alpha t}\} & \psi_1(t) = \text{Re}\{\hat{\underline{\Psi}}_1 \cdot e^{j\alpha t}\} \\ x_1(t) = \text{Re}\{\hat{\underline{X}}_1 \cdot e^{j\alpha t}\} & F_1(t) = \text{Re}\{\hat{\underline{F}}_1 \cdot e^{j\alpha t}\} \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} \hat{\underline{I}}_1 \\ \hat{\underline{F}}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{L_0} & \frac{l_e \cdot B_\delta}{L_0} \\ \frac{l_e \cdot B_\delta}{L_0} & \frac{(l_e \cdot B_\delta)^2}{L_0} + k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{\underline{\Psi}}_1 \\ \hat{\underline{X}}_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\underline{I}}_1 \\ \hat{\underline{F}}_1 \end{pmatrix} = (B) \cdot \begin{pmatrix} \hat{\underline{\Psi}}_1 \\ \hat{\underline{X}}_1 \end{pmatrix}$$



Magnetischer Wandler „Typ 2“

Grundtyp – Linearisierung: Vierpoldarstellung (4)

- Spannungsinduktion bei a) Stromänderung, b) Spulenbewegung um den Arbeitspunkt x_0 :

$$u(t) = \frac{d\psi(x(t), t)}{dt} = \frac{d\psi}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{d\psi}{dt} = -\frac{\Psi_p}{h} \cdot \frac{dx}{dt} + L_0 \cdot \frac{di}{dt} = -\frac{\Psi_p}{h} \cdot \frac{dx_1}{dt} + L_0 \cdot \frac{di_1}{dt} = U_0 + u_1(t) = u_1(t)$$

$$U_0 = 0, \quad \frac{dx_1}{dt} = v_1, \quad u_1(t) = -\frac{N \cdot 2h \cdot l \cdot B_\delta}{h} \cdot v_1 + L_0 \cdot \frac{di_1}{dt} = -l_e \cdot B_\delta \cdot v_1 + L_0 \cdot \frac{di_1}{dt}$$

$$u_1 = -l_e \cdot B_\delta \cdot v_1 + \frac{L_0}{l_e \cdot B_\delta} \cdot \frac{dF_1}{dt} - \frac{L_0 \cdot k \cdot v_1}{l_e \cdot B_\delta} = \frac{L_0}{l_e \cdot B_\delta} \cdot \frac{dF_1}{dt} - \frac{k}{l_e \cdot B_\delta} \cdot \left(L_0 + \frac{(l_e \cdot B_\delta)^2}{k} \right) \cdot v_1$$

- Für sinusförmige Änderungen um den Arbeitspunkt x_0 : $u_1(t) = \text{Re}\{\hat{U}_1 \cdot e^{j\omega t}\}$ $v_1(t) = \text{Re}\{\hat{V}_1 \cdot e^{j\omega t}\}$

$$\begin{pmatrix} \hat{I}_1 \\ \hat{U}_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{l_e \cdot B_\delta} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{k}{j \cdot \omega} \\ j \cdot \omega \cdot L_0 & -k \cdot \left(L_0 + \frac{(l_e \cdot B_\delta)^2}{k} \right) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{F}_1 \\ \hat{V}_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{I}_1 \\ \hat{U}_1 \end{pmatrix} = (\underline{T}) \cdot \begin{pmatrix} \hat{F}_1 \\ \hat{V}_1 \end{pmatrix}$$

Siehe Publikation „Equivalent circuit representation of electromechanical transducers: Part I. Lumped parameter systems“, Harrie A C Tilmans 1996 *J. Micromech. Microeng.* **6** 157:
Tw. andere Notation, Fehlerkorrektur in *J. Micromech. Microeng.* **6** (1996) 359.

Magnetischer Wandler „Typ 2“

Statische Stabilität mit Feder k stets vorhanden

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{L_0} & \frac{l_e \cdot B_\delta}{L_0} \\ \frac{l_e \cdot B_\delta}{L_0} & \frac{(l_e \cdot B_\delta)^2}{L_0} + k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \psi_1 \\ x_1 \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} F_1 = \frac{l_e \cdot B_\delta \cdot \psi_1}{L_0} + \left(\frac{(l_e \cdot B_\delta)^2}{L_0} + k \right) \cdot x_1 \\ i_1 = \frac{\psi_1}{L_0} + \frac{l_e \cdot B_\delta \cdot x_1}{L_0} \end{array} \right. \quad F_1 = l_e \cdot B_\delta \cdot i_1 + k \cdot x_1$$

- Mechanische dynamische Gleichung im Arbeitspunkt x_0 :

$$m \cdot \ddot{x}_1 + F_1 = 0 \Rightarrow m \cdot \ddot{x}_1 + l_e \cdot B_\delta \cdot i_1 + k \cdot x_1 = 0 \Rightarrow \underbrace{m}_{\overline{T}} \cdot \ddot{x}_1 + \underbrace{k}_{\overline{K}} \cdot x_1 = -l_e \cdot B_\delta \cdot i_1$$

- Statische Stabilität im Arbeitspunkt x_0 : $K > 0$: $k > 0$
- **Resultat:** Wandler Typ 2 **stets statisch stabil** im Arbeitspunkt $\pm I_0, x_0$!
KEIN Pull-in/Pull-out-Effekt!
- Wandler Typ 2 **stets statisch stabil** im Arbeitspunkt $\pm I_0, x_0$,
da **Kopplungsfaktor** stets $0 < \kappa < 1$, solange Feder vorhanden, also $k > 0$!

$$0 < \kappa = \frac{l_e \cdot B_\delta}{\sqrt{(l_e \cdot B_\delta)^2 + L_0 k}} < 1$$



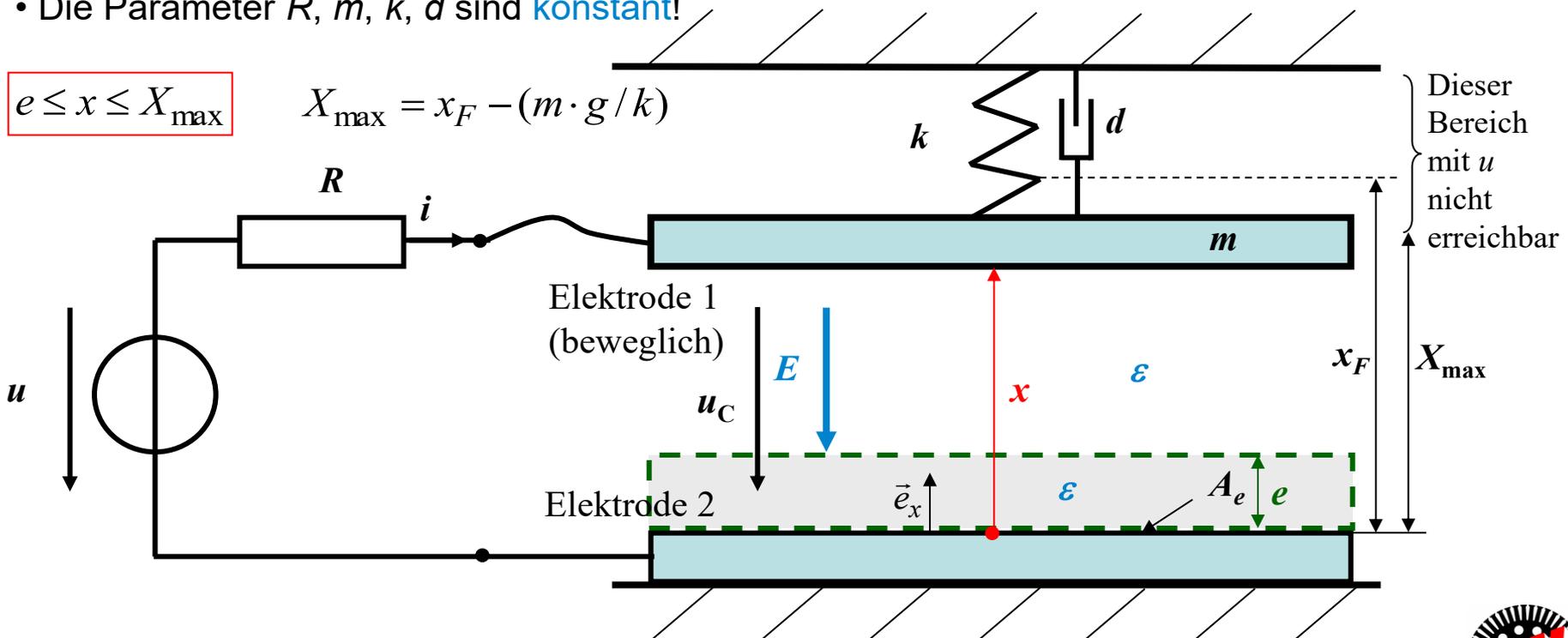
- Magnetischer Wandler „Typ 1“
- Magnetischer Wandler „Typ 2“
- Kapazitiver Wandler „Typ 3“
- Kapazitiver Wandler „Typ 4“



Kapazitiver Wandler „Typ 3“

Prinzipielle Geometrie

- Bei $x = x_F$ ist die Feder entspannt. Isolierende Distanzscheibe e verhindert Plattenkurzschluss.
- Das E -Feld ist homogen (keine Randeffekte)
- Material zwischen den Elektroden linear polarisierbar (flüssig, gasförmig: $D = \epsilon \cdot E$)
- Die Parameter R , m , k , d sind konstant!



Kapazitiver Wandler „Typ 3“

Elektrostatiche Kraft

Übung



- **MAXWELL**’scher Zug auf Elektrode 1: $\vec{p}_{e,x} = -\frac{\varepsilon \cdot E_x^2}{2} \cdot \vec{e}_x = -\frac{\varepsilon \cdot E^2}{2} \cdot \vec{e}_x \rightarrow \vec{F}_e = -\frac{\varepsilon \cdot E^2 \cdot A_e}{2} \cdot \vec{e}_x$
Wirkt anziehend in Richtung zur Elektrode 2

- Elektrisches Feld E : Hüllfläche O um Elektrode 1, wo die Ladung Q ist:

$$Q = \oint_O \vec{D} \cdot d\vec{A} = \int_{A_e} D \cdot dA = E \cdot \varepsilon \cdot A_e \quad E \text{ im Bereich } 0 \leq s \leq x$$

- El. Spannung u_C zwischen den beiden Elektroden:

$$u_C = \int_{s=0}^{s=x} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_0^x (-E \cdot \vec{e}_x) \cdot (-ds \cdot \vec{e}_x) = \int_0^x E \cdot ds = E \cdot x \quad \vec{F}_e = -\frac{\varepsilon \cdot u_C^2 \cdot A_e}{2x^2} \cdot \vec{e}_x$$

- **NEWTON**’sche Bewegungsgleichung für Elektrode 1:

$$m \cdot \ddot{x} \cdot \vec{e}_x = (x_F - x) \cdot k \cdot \vec{e}_x - d \cdot \dot{x} \cdot \vec{e}_x - m \cdot g \cdot \vec{e}_x - \frac{\varepsilon \cdot u_C^2 \cdot A_e}{2x^2} \cdot \vec{e}_x$$

$$m \cdot \ddot{x} + d \cdot \dot{x} + k \cdot x = x_F \cdot k - m \cdot g - \frac{\varepsilon \cdot u_C^2 \cdot A_e}{2x^2}$$



Kapazitiver Wandler „Typ 3“

Elektrische dynamische Gleichung

Übung



- KIRCHHOFF'sche Maschengleichung: $u = R \cdot i + u_C$
- Ladung Q auf Elektrode 1: $Q = E \cdot \varepsilon \cdot A_e = u_C \cdot \varepsilon \cdot A_e / x = C \cdot u_C \Rightarrow C(x) = \varepsilon \cdot A_e / x$
- Ladungsänderung dQ/dt ist der Ladestrom i : $i = dQ/dt = d(C \cdot u_C)/dt$

$$i(t) = \frac{dC(x(t))}{dt} \cdot u_C(t) + C(x(t)) \cdot \frac{du_C(t)}{dt} = \frac{dC(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot u_C + C(x) \cdot \frac{du_C}{dt} = -\frac{\varepsilon \cdot A_e}{x^2} \cdot \dot{x} \cdot u_C + \frac{\varepsilon \cdot A_e}{x} \cdot \frac{du_C}{dt}$$

- Elektrische dynamische Gleichung:

$$i(t) = -\frac{\varepsilon \cdot A_e}{x^2} \cdot \dot{x} \cdot (u - R \cdot i) + \frac{\varepsilon \cdot A_e}{x} \cdot \left(\frac{du}{dt} - R \cdot \frac{di}{dt} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\varepsilon \cdot A_e \cdot R}{x} \cdot \frac{di}{dt} + i \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon \cdot A_e \cdot R}{x^2} \cdot \dot{x} \right) = -\frac{\varepsilon \cdot A_e}{x^2} \cdot \dot{x} \cdot u + \frac{\varepsilon \cdot A_e}{x} \cdot \frac{du}{dt}$$

$$\frac{di}{dt} + i \cdot \left(\frac{x}{\varepsilon \cdot A_e \cdot R} - \frac{\dot{x}}{x} \right) = -\frac{\dot{x}}{x} \cdot \frac{u}{R} + \frac{1}{R} \cdot \frac{du}{dt}$$

$$m \cdot \ddot{x} + d \cdot \dot{x} + k \cdot x = x_F \cdot k - m \cdot g - \frac{\varepsilon \cdot (u - i \cdot R)^2 \cdot A_e}{2x^2}$$

Nichtlineares Diff.-gleichungssystem
dritter Ordnung = drei gekoppelte
 Energiespeicher:
 1) kinetisch,
 2) Federspeicher,
 3) elektrostatisch



Kapazitiver Wandler „Typ 3“

Übung



Statische Gleichgewichtslagen: $d./dt = 0$

$$\frac{di}{dt} + i \cdot \left(\frac{x}{\varepsilon \cdot A_e \cdot R} - \frac{\dot{x}}{x} \right) = - \frac{\dot{x}}{x} \cdot \frac{u}{R} + \frac{1}{R} \cdot \frac{du}{dt} \rightarrow i \cdot \frac{x}{\varepsilon \cdot A_e \cdot R} \Big|_{x \geq e} = 0 \rightarrow i = 0 = dQ/dt \rightarrow Q = \text{konst.}$$

- Bei $u(t) = U$ konst. fließt KEIN Strom über die Kapazität $C \rightarrow$ Ladung Q auf Elektroden ist konstant.

$$i = 0: U = U_C, \quad Q = C(x) \cdot U_C = (\varepsilon \cdot A_e / x) \cdot U_C = (\varepsilon \cdot A_e / x) \cdot U$$

$$m \cdot \ddot{x} + d \cdot \dot{x} + k \cdot x = x_F \cdot k - m \cdot g - \frac{\varepsilon \cdot (u - i \cdot R)^2 \cdot A_e}{2x^2} \rightarrow k \cdot x = x_F \cdot k - m \cdot g - \frac{\varepsilon \cdot U^2 \cdot A_e}{2x^2}$$

- Statische Kennlinie $U(X)$:
$$\frac{\varepsilon \cdot U^2 \cdot A_e}{2k} = X^2 \cdot \left(x_F - \frac{m \cdot g}{k} - X \right)$$

- Nullstellen $U(X) = 0$: $X_{1,2} = 0, X_{\max} = x_F - (m \cdot g / k)$

- Maximum $U(X) = U_{\max}$ bei: $X_3 = (2/3) \cdot (x_F - (m \cdot g / k)) = (2/3) \cdot X_{\max}$

$$\frac{\varepsilon \cdot U(X_3)^2 \cdot A_e}{2k} = \frac{4}{27} \cdot \left(x_F - \frac{m \cdot g}{k} \right)^3 \Rightarrow U_3^2 = U^2(X_3) = \frac{8 \cdot k}{27 \cdot \varepsilon \cdot A_e} \cdot \left(x_F - \frac{m \cdot g}{k} \right)^3$$



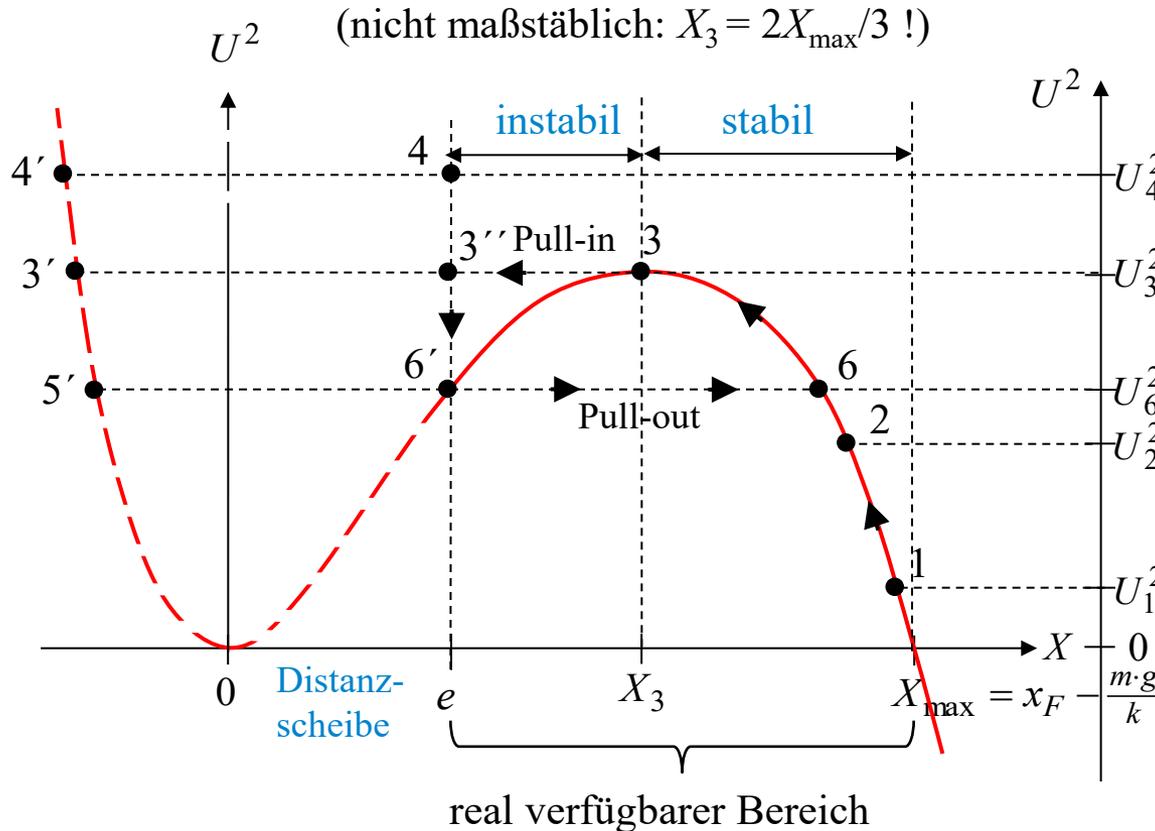
Kapazitiver Wandler „Typ 3“

Gleichgewichtslagen: $d./dt = 0$

Übung



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT



- Stabiles und instabiles Verhalten wie bei Wandler 1
- Einbau einer isolierenden **Distanzscheibe** (Dicke e) auf Elektrode 2, um Plattenkurzschluss zu vermeiden
- Elektrostatischer Schalter („Schnappverhalten“) mit Spannungssteuerung
- Gerät ist **lageabhängig** (Einfluss von g !)
 - „**Schalthyserese**“ $U^2(X)$ für Arbeitspunkte:
 $6 \rightarrow 3 \rightarrow 3'' \rightarrow 6' \rightarrow 6$

- Bei $6'$ (Instabil): „**Klebekraft = 0**“: **Abfallen** der oberen Elektrode zur Position 6 (**Stabil**)



Kapazitiver Wandler „Typ 3“

Statische Stabilitätsuntersuchung

Übung

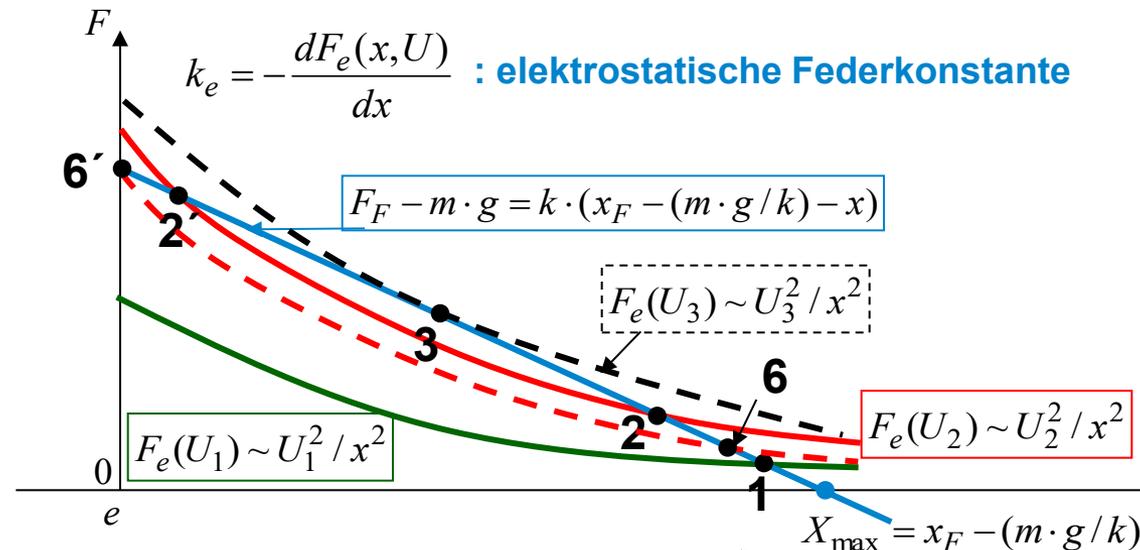


TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

• Gleichgewichtsbedingung: $F_e = F_F - m \cdot g \Rightarrow \frac{\varepsilon \cdot A_e}{2x^2} \cdot U^2 = k \cdot x_F - k \cdot x - m \cdot g$

• Statische Stabilitätsbedingung im jeweiligen Gleichgewichtspunkt: $K = -\frac{d(F_F(x) - m \cdot g)}{dx} + \frac{dF_e(x, U)}{dx} = k - k_e > 0$

$$d = 0 : m \cdot \ddot{x} = -F_e + F_F - m \cdot g \Rightarrow x(t) = X + \Delta x(t), |\Delta x / X| \ll 1 \quad m \cdot \Delta \ddot{x} + K \cdot \Delta x = 0$$



• Arbeitspunkte 1, 2, 6 : **STABIL**

$$K(X_1) = \frac{dF_e(x, U_1)}{dx} + k > 0$$

$$K(X_2) = \frac{dF_e(x, U_2)}{dx} + k > 0$$

• Arbeitspunkt 3: **Stabilitätsgrenze**

$$K(X_3) = \frac{dF_e(x, U_3)}{dx} + k = 0$$

• Arbeitspunkte 2', 6' : **INSTABIL**

$$K(X_{2'}) = \frac{dF_e(x, U_2)}{dx} + k < 0$$

Distanz-
scheibe

$$(X_3 = 2X_{\max} / 3 !)$$



Kapazitiver Wandler „Typ 3“

Ladung Q , $-Q$ auf den Elektroden 1, 2

Übung

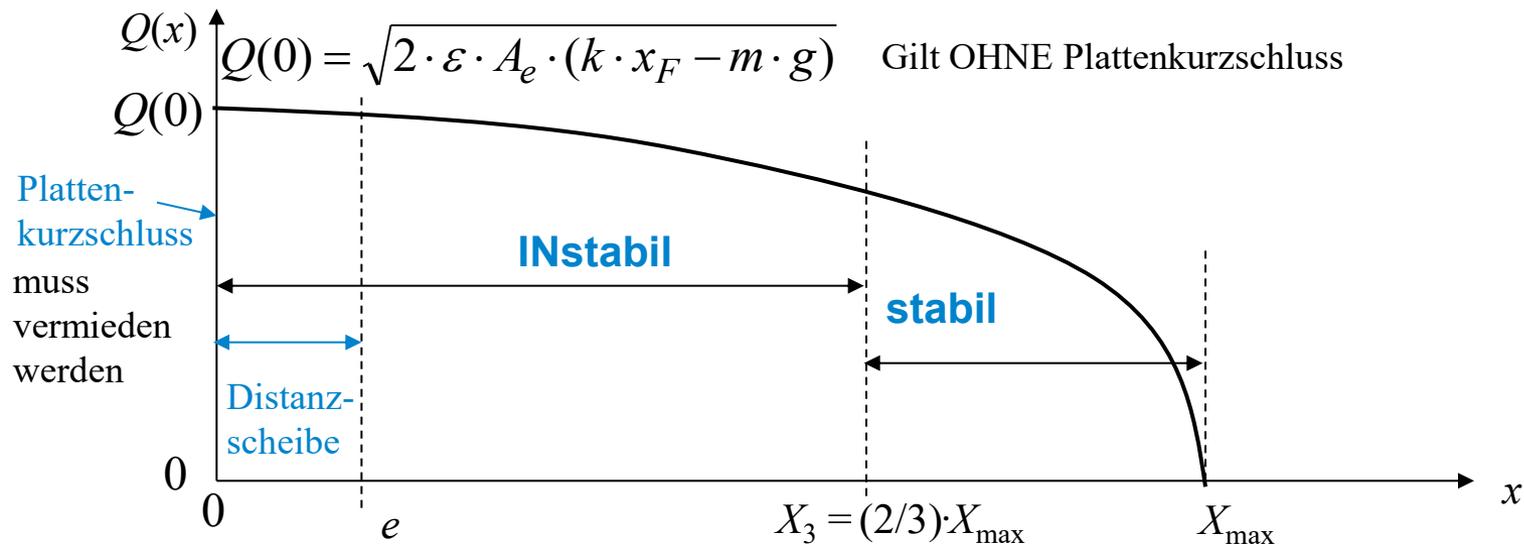


TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

$$Q = (\varepsilon \cdot A_e / x) \cdot U = (\varepsilon \cdot A_e / x) \cdot x \cdot \sqrt{2 \cdot (k \cdot x_F - m \cdot g - k \cdot x) / (\varepsilon \cdot A_e)}$$

$$Q(x) = \sqrt{2 \cdot \varepsilon \cdot A_e \cdot (k \cdot x_F - m \cdot g - k \cdot x)} = \sqrt{2 \cdot \varepsilon \cdot A_e \cdot k \cdot (X_{\max} - x)}$$

- Mit sinkendem Plattenabstand x muss über die (bis X_3 zunehmende) von außen angelegte Gleichspannung U mehr Ladung Q getrennt werden, um die erhöhte Kraft F_e gegen die sich spannende Feder k aufzubringen.

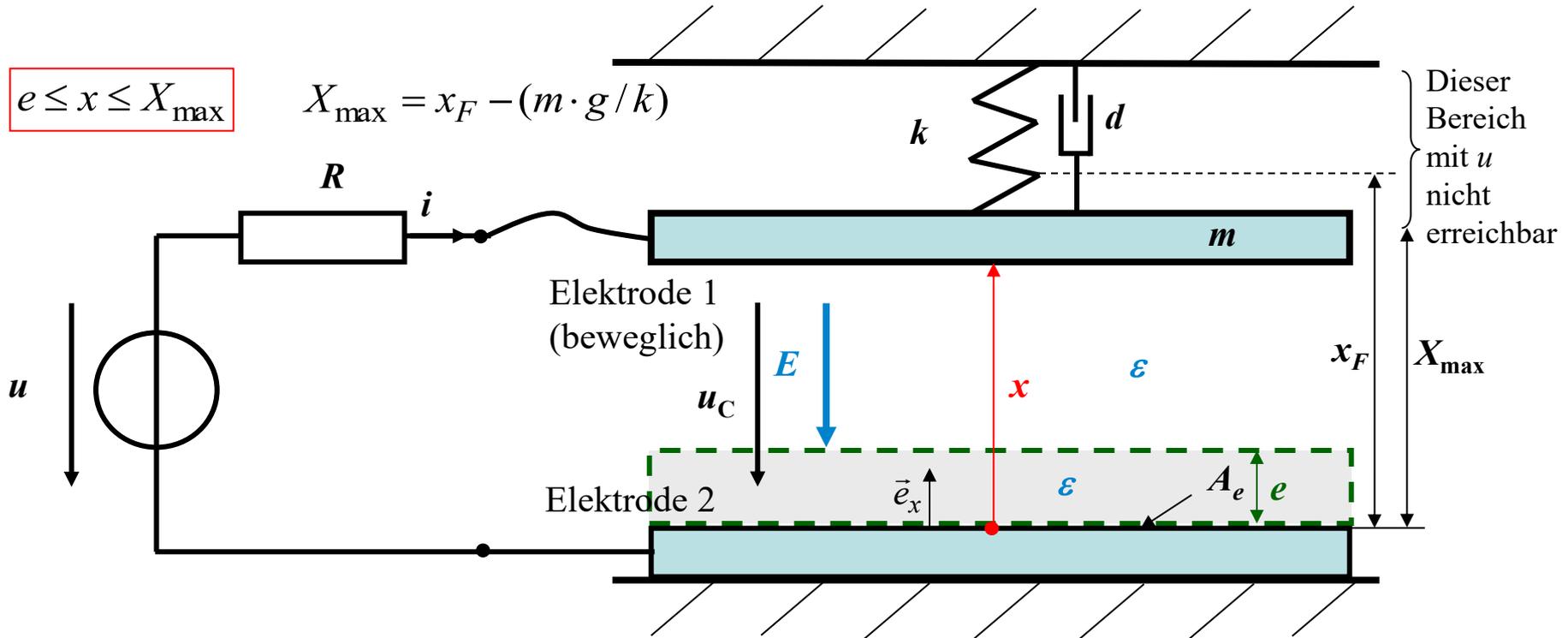


Kapazitiver Wandler „Typ 3“ Beispiel-Geometrie (1)

Übung



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT



- Quadratische Cu-Elektrodenfläche, Seitenlänge 50 mm, Dicke $\Delta = 0.45 \text{ mm}$: $A_e = 0.05^2 = 2500 \text{ mm}^2$
 $m = \gamma_{Cu} \cdot \Delta \cdot A_e = 8900 \cdot 0.45 \cdot 2500 \cdot 10^{-9} = 10 \text{ g}$, $x_F = 1.5 \text{ mm}$, $e = 0.5 \text{ mm}$, $k = 196.2 \text{ N/m}$, $\epsilon = \epsilon_0$
 $X_{\max} = x_F - (m \cdot g / k) = 1.5 - (10 \cdot 9.81 / 196.2) = 1 \text{ mm}$, $0.1 \leq x / \text{mm} \leq 1$, $X_3 = \frac{2}{3} \cdot X_{\max} = 0.666 \text{ mm}$,



Kapazitiver Wandler „Typ 3“

Beispiel-Geometrie (2)

Übung



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

- Erforderliche Mindestspannung für Pull-in bei $X_3 = 0.66 \text{ mm}$:

$$U_3^2 = U^2(X_3) = \frac{8 \cdot k}{27 \cdot \varepsilon_0 \cdot A_e} \cdot X_{\max}^3 \Rightarrow U_3 = \sqrt{\frac{8 \cdot k}{27 \cdot \varepsilon_0 \cdot A_e} \cdot X_{\max}^3}$$

$$U_3 = \sqrt{\frac{8 \cdot 196.2}{27 \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 0.0025} \cdot (10^{-3})^3} = 1620 \text{ V}$$

- Ist Feldstärke < Durchschlagfeldstärke (Luft 20°C, Homogenfeld, 1 mm) = $E_D = 40 \text{ kV/cm}$?

$$E(X_3) = U_3 / X_3 = 1620 / 0.666 = 2430 \text{ V/mm} = 24.3 \text{ kV/cm} < E_D \text{ erfüllt!}$$

- El. Plattenladung bei U_3 und X_3 : $Q(X_3) = \sqrt{2 \cdot \varepsilon_0 \cdot A_e \cdot k \cdot (X_{\max} - X_3)}$

$$Q(X_3) = \sqrt{2 \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 0.0025 \cdot 196.2 \cdot (1 - 0.666) \cdot 10^{-3}} = 53.8 \text{ nC}$$

- Kontrolle: $E(X_3) = Q(X_3) / (\varepsilon_0 A_e) = 53.8 \cdot 10^{-9} / (8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 0.0025) = 2430 \text{ V/mm}$

- Ist Maximalfeldstärke < E_D ? Tritt auf bei U_3 und $x_{\min} = e$:

$$E_{\max} = U_3 / e = 1620 / 0.5 = 3240 \text{ V/mm} = 32.4 \text{ kV/cm} < E_D \text{ erfüllt!}$$



Kapazitiver Wandler „Typ 3“

Linearisierte dynamische Gleichungen

Übung



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

- Linearisierte dynamische Gleichungen im Arbeitspunkt ($i = 0, x = X$) bei $u(t) = U$:

$$i(t) = 0 + \Delta i(t), x(t) = X + \Delta x(t):$$

$$\frac{d\Delta i}{dt} + \Delta i \cdot \left(\frac{X + \Delta x}{\varepsilon \cdot A_e \cdot R} - \frac{\Delta \dot{x}}{X + \Delta x} \right) = - \frac{\Delta \dot{x}}{X + \Delta x} \cdot \frac{U}{R} + \frac{1}{R} \cdot \overbrace{\frac{dU}{dt}}{=0} \Rightarrow \frac{d\Delta i}{dt} + \Delta i \cdot \frac{X}{\varepsilon \cdot A_e \cdot R} \approx - \frac{\Delta \dot{x}}{X} \cdot \frac{U}{R}$$

$$m \cdot \Delta \ddot{x} + d \cdot \Delta \dot{x} + k \cdot \Delta x + k \cdot X = x_F \cdot k - m \cdot g - \frac{\varepsilon \cdot (U - \Delta i \cdot R)^2 \cdot A_e}{2 \cdot (X + \Delta x)^2} \Rightarrow$$

$$m \cdot \Delta \ddot{x} + d \cdot \Delta \dot{x} + k \cdot \Delta x \approx \underbrace{\frac{\varepsilon \cdot A_e \cdot U^2 \cdot \Delta x}{X^3}}_{k_e} + \frac{\varepsilon \cdot A_e \cdot U \cdot R \cdot \Delta i}{X^2}$$

$$m \cdot \Delta \ddot{x} + d \cdot \Delta \dot{x} + \Delta x \cdot \left(k - \frac{\varepsilon \cdot A_e \cdot U^2}{X^3} \right) = \frac{\varepsilon \cdot A_e \cdot R \cdot U}{X^2} \cdot \Delta i$$

K_0 : Kopplungsterm

$$\frac{d\Delta i}{dt} + \Delta i \cdot \frac{X}{\varepsilon \cdot A_e \cdot R} = - \frac{U}{X \cdot R} \cdot \Delta \dot{x} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\varepsilon \cdot A_e \cdot R^2}{X} \cdot \frac{d\Delta i}{dt} + R \cdot \Delta i = - \frac{\varepsilon \cdot A_e \cdot R \cdot U}{X^2} \cdot \Delta \dot{x}$$

$$m \cdot \Delta \ddot{x} + \left(d + \frac{m \cdot X}{\varepsilon \cdot A_e \cdot R} \right) \cdot \Delta \ddot{x} + \left(k + \frac{d \cdot X}{\varepsilon \cdot A_e \cdot R} \right) \cdot \Delta \dot{x} + \left(\frac{k \cdot X}{\varepsilon \cdot A_e \cdot R} - \frac{U^2}{X^2 \cdot R} \right) \cdot \Delta x = 0$$

3 gekoppelte
Energiespeicher:
 $m, k, C(x)$



Kapazitiver Wandler „Typ 3“

Dynamische Stabilität

Übung



$$m \cdot \Delta \ddot{x} + \left(d + \frac{m \cdot X}{\varepsilon \cdot A_e \cdot R}\right) \cdot \Delta \dot{x} + \left(k + \frac{d \cdot X}{\varepsilon \cdot A_e \cdot R}\right) \cdot \Delta x + \left(\frac{k \cdot X}{\varepsilon \cdot A_e \cdot R} - \frac{U^2}{X^2 \cdot R}\right) \cdot \Delta x = 0$$

$$b_3 \cdot \Delta \ddot{x} + b_2 \cdot \Delta \dot{x} + b_1 \cdot \Delta x + b_0 \cdot \Delta x = 0$$

- Statische Stabilitätsbedingung: $K = k_{res} = \frac{dF_e(x,U)}{dx} - \frac{d(F_F(x) - m \cdot g)}{dx} = -k_e + k > 0$

$$K = \frac{d}{dx} \left(\frac{\varepsilon \cdot A_e}{2x^2} \cdot U^2 \right) - \frac{d}{dx} (k \cdot x_F - k \cdot x - m \cdot g) = -\frac{\varepsilon \cdot A_e}{x^3} \cdot U^2 + k > 0 \quad k_e: \text{„elektrische Federkonstante“}$$

$$b_0 = \frac{X}{\varepsilon \cdot A_e \cdot R} \cdot \left(k - \frac{\varepsilon \cdot A_e \cdot U^2}{X^3} \right) = \frac{X}{\varepsilon \cdot A_e \cdot R} \cdot K > 0, \text{ wenn statisch stabil!} \quad k_e = -\frac{dF_e(x,U)}{dx}$$

- **HURWITZ-Kriterium:** Für $b_0 > 0$, damit gedämpft abklingend!

$$D_1 = b_1 = k + \frac{d \cdot X}{\varepsilon \cdot A_e \cdot R} > 0$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} b_1 & b_0 \\ b_3 & b_2 \end{vmatrix} = b_1 b_2 - b_3 b_0 > 0$$

$$D_2 = \left(k + \frac{d \cdot X}{\varepsilon \cdot A_e \cdot R}\right) \cdot \left(d + \frac{m \cdot X}{\varepsilon \cdot A_e \cdot R}\right) - \frac{m}{R} \cdot \left(\frac{k \cdot X}{\varepsilon \cdot A_e} - \frac{U^2}{X^2}\right) = k \cdot d + \frac{d^2 \cdot X}{\varepsilon \cdot A_e \cdot R} + \frac{d \cdot m \cdot X}{(\varepsilon \cdot A_e \cdot R)^2} + \frac{m \cdot U^2}{R \cdot X^2} > 0$$

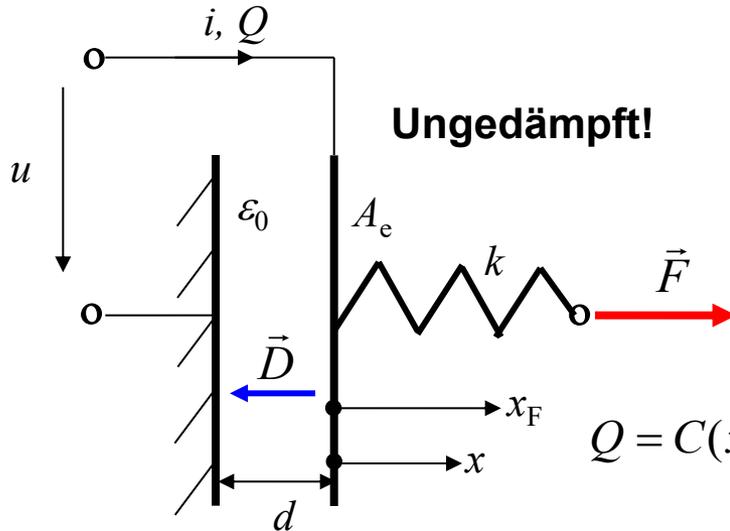
$$D_3 = \begin{vmatrix} b_1 & b_0 & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 \\ 0 & 0 & b_3 \end{vmatrix} = b_1 b_2 b_3 - b_3 b_3 b_0 = b_3 \cdot (b_1 b_2 - b_3 b_0) = b_3 \cdot D_2 > 0$$

Gleichgewicht
auch
dynamisch
stabil, wenn
statisch stabil



Kapazitiver Wandler „Typ 3“

Grundtyp – Linearisierung: Vierpoldarstellung (1)



- Bei $x = x_F$ ist die Feder k entspannt.
- **Mindest-Distanz d** vermeidet Plattenkurzschluss.
- Das D -Feld ist **homogen** (keine Randeffekte)
- Linearisierung im Arbeitspunkt x_0

$$|Q_1 / Q_0| \ll 1, |x_1 / x_0| \ll 1, |u_1 / U_0| \ll 1, |F_1 / F_0| \ll 1$$

$$Q = C(x) \cdot u = \frac{\varepsilon_0 \cdot A_e}{d + x} \cdot u \Rightarrow Q = Q_0 + Q_1 = \frac{\varepsilon_0 \cdot A_e}{d + x_0 + x_1} \cdot (U_0 + u_1)$$

$$Q_0 + Q_1 = \frac{\varepsilon_0 \cdot A_e \cdot U_0}{(d + x_0) \cdot \left(1 + \frac{x_1}{d + x_0}\right)} \cdot \left(1 + \frac{u_1}{U_0}\right) \approx \frac{\varepsilon_0 \cdot A_e \cdot U_0}{d + x_0} \cdot \left(1 - \frac{x_1}{d + x_0}\right) \cdot \left(1 + \frac{u_1}{U_0}\right) \quad C_0 := \frac{\varepsilon_0 \cdot A_e}{d + x_0}$$

$$Q_0 + Q_1 \approx \underbrace{C_0 U_0}_{Q_0} \cdot \left(1 - \frac{x_1}{d + x_0}\right) \cdot \left(1 + \frac{u_1}{U_0}\right) \approx Q_0 \cdot \left(1 - \frac{x_1}{d + x_0} + \frac{u_1}{U_0}\right) \quad Q_1 \approx -\frac{Q_0 \cdot x_1}{d + x_0} + \frac{Q_0 \cdot u_1}{U_0}$$

$$u_1 \approx \frac{Q_1}{C_0} + \frac{Q_0 \cdot x_1}{(d + x_0) \cdot C_0}$$

Achtung: d ist hier die Minimaldistanz durch nicht polarisierbares Distanzstück, nicht der Dämpfungsbeiwert!

Kapazitiver Wandler „Typ 3“

Grundtyp – Linearisierung: Vierpoldarstellung (2)



- Elektrostatische Kraft F_e aus MAXWELL-Zug: $D = Q / A_e \Rightarrow F_e = \frac{D^2 \cdot A_e}{2\epsilon_0} = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 \cdot A_e}$

$$F = F_e + F_F = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 \cdot A_e} + k \cdot (x - x_F) = F_0 + F_1 = \frac{(Q_0 + Q_1)^2}{2\epsilon_0 \cdot A_e} + k \cdot (x_0 + x_1) - k \cdot x_F$$

- Linearisierung im Arbeitspunkt x_0 :

$$F_0 + F_1 = \frac{Q_0^2}{2\epsilon_0 \cdot A_e} \cdot \left(1 + \frac{Q_1}{Q_0}\right)^2 + k \cdot (x_0 + x_1 - x_F) \approx \frac{Q_0^2}{2\epsilon_0 \cdot A_e} \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{Q_1}{Q_0}\right) + k \cdot (x_0 - x_F + x_1)$$

$$F_0 = \frac{Q_0^2}{2\epsilon_0 \cdot A_e} + k \cdot (x_0 - x_F) \quad F_1 \approx \frac{Q_0 \cdot Q_1}{\epsilon_0 \cdot A_e} + k \cdot x_1 = \frac{Q_0 \cdot Q_1}{(d + x_0) \cdot C_0} + k \cdot x_1$$

$$Q_1 = (F_1 - k \cdot x_1) \cdot (d + x_0) \cdot \frac{C_0}{Q_0}$$

$$Q_1 = (F_1 - k \cdot x_1) \cdot \frac{\epsilon_0 A_e}{Q_0}$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{C_0} & \frac{Q_0}{(d + x_0) \cdot C_0} \\ \frac{Q_0}{(d + x_0) \cdot C_0} & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q_1 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

Kopplungsterm zw. mech. u. el. System:

$$K_0 = \frac{Q_0}{(d + x_0) \cdot C_0}$$

Ohne Kopplung: $K_0 = 0$: $u_1 = Q_1 / C_0$, $F_1 = k \cdot x_1$



Kapazitiver Wandler „Typ 3“

Grundtyp – Linearisierung: Vierpoldarstellung (3)



$$\begin{pmatrix} u_1 \\ F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{C_0} & \frac{Q_0}{(d+x_0) \cdot C_0} \\ \frac{Q_0}{(d+x_0) \cdot C_0} & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q_1 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

Kopplungsfaktor: $\kappa = \frac{Q_0}{(d+x_0) \cdot \sqrt{k} \cdot C_0}$

$$\kappa = \frac{\sqrt{C_0} \cdot U_0}{(d+x_0) \cdot \sqrt{k}}$$

Für sinusförmige Änderungen um den Arbeitspunkt:

$$u_1(t) = \operatorname{Re}\{\hat{\underline{U}}_1 \cdot e^{j\omega t}\} \quad Q_1(t) = \operatorname{Re}\{\hat{\underline{Q}}_1 \cdot e^{j\omega t}\}$$
$$x_1(t) = \operatorname{Re}\{\hat{\underline{X}}_1 \cdot e^{j\omega t}\} \quad F_1(t) = \operatorname{Re}\{\hat{\underline{F}}_1 \cdot e^{j\omega t}\}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\underline{U}}_1 \\ \hat{\underline{F}}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{C_0} & \frac{Q_0}{(d+x_0) \cdot C_0} \\ \frac{Q_0}{(d+x_0) \cdot C_0} & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{\underline{Q}}_1 \\ \hat{\underline{X}}_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\underline{U}}_1 \\ \hat{\underline{F}}_1 \end{pmatrix} = (B) \cdot \begin{pmatrix} \hat{\underline{Q}}_1 \\ \hat{\underline{X}}_1 \end{pmatrix}$$



Kapazitiver Wandler „Typ 3“

Grundtyp – Linearisierung: Vierpoldarstellung (4)



$$u_1 \approx \frac{Q_1}{C_0} + \frac{Q_0 \cdot x_1}{(d + x_0) \cdot C_0} = \frac{1}{C_0} \cdot (F_1 - k \cdot x_1) \cdot \frac{\varepsilon_0 \cdot A_e}{Q_0} + \frac{Q_0 \cdot x_1}{(d + x_0) \cdot C_0}$$

$$u_1 \approx \frac{d + x_0}{Q_0} \cdot F_1 - \frac{d + x_0}{Q_0} \cdot \left(k - \frac{Q_0^2}{(d + x_0)^2 \cdot C_0} \right) \cdot \underbrace{x_1}_{\int v_1 \cdot dt}$$

$$Q_1 = (F_1 - k \cdot x_1) \cdot \frac{\varepsilon_0 \cdot A_e}{Q_0} \Rightarrow i_1 = \frac{dQ_1}{dt} = \left(\frac{dF_1}{dt} - k \cdot v_1 \right) \cdot \frac{C_0 \cdot (d + x_0)}{Q_0}$$

- Für sinusförmige Änderungen um den Arbeitspunkt x_0 : $i_1(t) = \text{Re}\{\hat{I}_1 \cdot e^{j\omega t}\}$ $v_1(t) = \text{Re}\{\hat{V}_1 \cdot e^{j\omega t}\}$

$$\begin{pmatrix} \hat{U}_1 \\ \hat{I}_1 \end{pmatrix} = \frac{d + x_0}{Q_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{j \cdot \omega} \cdot \left(k - \frac{\overbrace{Q_0^2}^{k_e}}{C_0 \cdot (d + x_0)^2} \right) \\ j \cdot \omega \cdot C_0 & -k \cdot C_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{F}_1 \\ \hat{V}_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{U}_1 \\ \hat{I}_1 \end{pmatrix} = (\underline{T}) \cdot \begin{pmatrix} \hat{F}_1 \\ \hat{V}_1 \end{pmatrix}$$

Siehe Publikation „Equivalent circuit representation of electromechanical transducers: Part I. Lumped parameter systems“, Harrie A C Tilmans 1996 *J. Micromech. Microeng.* **6** 157:
Tw. andere Notation, Fehlerkorrektur in *J. Micromech. Microeng.* **6** (1996) 359.



Kapazitiver Wandler „Typ 3“

Kopplungsfaktor κ und statische Stabilität

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{C_0} & \frac{Q_0}{(d+x_0) \cdot C_0} \\ \frac{Q_0}{(d+x_0) \cdot C_0} & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q_1 \\ x_1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$Q_0 = C_0 U_0 : F_1 = \frac{U_0}{d+x_0} \cdot Q_1 + k \cdot x_1$$

$$u_1 = \frac{Q_1}{C_0} + \frac{U_0}{d+x_0} \cdot x_1$$

$$F_1 = \frac{U_0 C_0}{d+x_0} \cdot u_1 + \left(-\frac{C_0 U_0^2}{(d+x_0)^2} + k \right) \cdot x_1$$

- Mechanische dynamische Gleichung im Arbeitspunkt x_0 :

$$m \cdot \ddot{x}_1 + F_1 = 0 \Rightarrow m \cdot \ddot{x}_1 + \left(-\frac{C_0 U_0^2}{(d+x_0)^2} + k \right) \cdot x_1 = -\frac{U_0 C_0}{d+x_0} \cdot u_1 = \underbrace{\frac{m}{T > 0} \cdot \ddot{x}_1 + \left(-\frac{C_0 U_0^2}{(d+x_0)^2} + k \right) \cdot x_1}_{K}$$

- Statische Stabilität im Arbeitspunkt x_0 :

$$K > 0 : -\frac{C_0 U_0^2}{(d+x_0)^2} + k > 0 \Rightarrow k > \frac{C_0 U_0^2}{(d+x_0)^2} \Rightarrow \frac{1}{k} < \frac{(d+x_0)^2}{C_0 U_0^2} \Rightarrow \frac{C_0 U_0^2}{(d+x_0)^2 \cdot k} = \kappa^2 < 1$$

- **Resultat:** Wandler Typ 3 **statisch stabil** im Arbeitspunkt $\pm U_0, x_0$,
wenn **Kopplungsfaktor** $0 < \kappa < 1$
- Pull-in-Effekt bei $\kappa = 1$ bzw. $K = 0$!

Kapazitiver Wandler „Typ 3“

Pull-in-Lage und Pull-in-Strom: IDENTISCH mit früherem Ergebnis!

Übung



- Pull-in-Effekt bei $\kappa = 1$ bzw. $K = 0!$ Dies tritt bei folgendem x_0 :

a) Gleichgewicht der statischen *Coulomb*- u. Federkraft:

$$F_0 = \frac{Q_0^2}{2\varepsilon_0 \cdot A_e} + k \cdot (x_0 - x_F) = \frac{Q_0^2}{2C_0 \cdot (d + x_0)} + k \cdot (x_0 - x_F) = 0$$

$$\frac{C_0 k \cdot (d + x_0)^2}{C_0 \cdot 2 \cdot (d + x_0)} + k \cdot (x_0 - x_F) = 0 \Rightarrow (d + x_0)/2 = x_F - x_0 \Rightarrow x_0 = \frac{2}{3} \cdot \left(x_F - \frac{d}{2} \right) \quad \text{„Pull-in“-Lage}$$

$$\kappa = \frac{\pm C_0 U_0}{(d + x_0) \cdot \sqrt{C_0 \cdot k}} = 1 \Rightarrow U_0|_{x_0, pull-in} = \pm \frac{(d + x_0) \cdot \sqrt{k}}{\sqrt{C_0}} = \pm \frac{2}{3} \cdot \frac{(d + x_F) \cdot \sqrt{k}}{\sqrt{C_0}} = U_{0, pull-in} \quad \text{„Pull-in“-Spannung}$$

b) Stabilitätsgrenze $\kappa = \pm 1$:

$$\kappa = \pm \frac{\sqrt{C_0} \cdot U_0}{(d + x_0) \cdot \sqrt{k}} = \pm 1$$

- Vergleich: Vorherige Pull-in-Ergebnisse vom Wandler 3:

hier für $m \cdot g = 0$, e entspricht hier d , $x \rightarrow x + d$, $x_F \rightarrow x_F + d$, $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$:

$$X_3 = (2/3) \cdot (x_F - (m \cdot g / k)) = (2/3) \cdot x_F \rightarrow x_0 + d = (2/3) \cdot (x_F + d) \Rightarrow x_0 = (2/3) \cdot (x_F - d/2) \quad \text{„Pull-in“-Lage}$$

$$U_3^2 = \frac{8 \cdot k}{27 \cdot \varepsilon \cdot A_e} \cdot \left(x_F - \frac{m \cdot g}{k} \right)^3 = \frac{8 \cdot k}{27 \cdot \varepsilon \cdot A_e} \cdot x_F^3 \quad U_3 = \pm \frac{2}{3} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot k}{3 \cdot \varepsilon \cdot A_e}} \cdot x_F^3 = U_{0, pull-in}$$

$$\pm U_{0, pull-in} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot k}{3 \cdot \frac{\varepsilon_0 \cdot A_e}{d + x_0}} \cdot \frac{(x_F + d)^3}{d + x_0}} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot k}{3 \cdot C_0} \cdot \frac{(x_F + d)^3}{d + \frac{2}{3} \cdot (x_F - \frac{d}{2})}} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot k}{3 \cdot C_0} \cdot \frac{(x_F + d)^3}{\frac{2}{3} \cdot (x_F + d)}} = \frac{2 \cdot (x_F + d)}{3} \cdot \sqrt{\frac{k}{C_0}} \quad \text{„Pull-in“-Spannung}$$





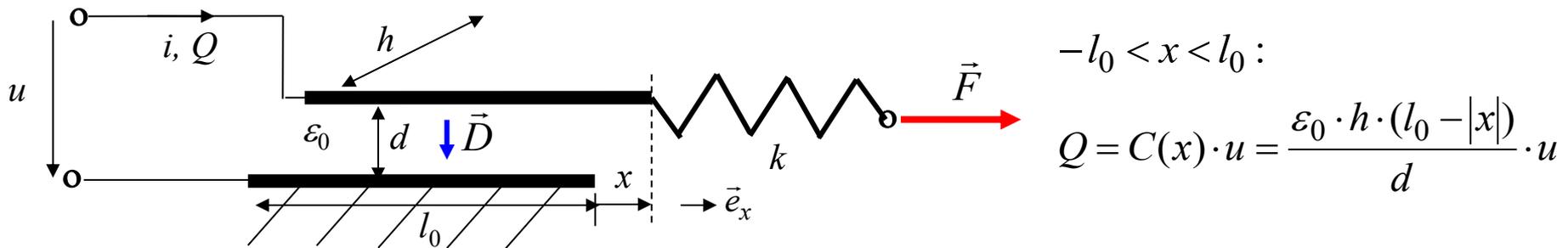
- Magnetischer Wandler „Typ 1“
- Magnetischer Wandler „Typ 2“
- Kapazitiver Wandler „Typ 3“
- Kapazitiver Wandler „Typ 4“



Kapazitiver Wandler „Typ 4“

Grundtyp – Linearisierung: Vierpoldarstellung (1)

- Obere Elektrode seitlich verschiebbar (Verschiebungslänge x)
- Bei $x = 0$ ist die Feder k entspannt. Bei $x = 0$ tritt die Elektrodenüberdeckung l_0 auf.
- Elektrodenabstand $d = \text{konst.}$, Plattenbreite h . Das D -Feld ist homogen (keine Randeffekte)
- Linearisierung im Arbeitspunkt U_0, x_0 : $|Q_1 / Q_0| \ll 1, |x_1 / x_0| \ll 1, |u_1 / U_0| \ll 1, |F_1 / F_0| \ll 1$



$$0 < x < l_0 : Q = Q_0 + Q_1 = \frac{\epsilon_0 \cdot h \cdot (l_0 - x_0 - x_1)}{d} \cdot (U_0 + u_1)$$

$$Q_0 + Q_1 = \frac{\epsilon_0 \cdot h \cdot (l_0 - x_0) \cdot U_0}{d} \cdot \left(1 - \frac{x_1}{l_0 - x_0}\right) \cdot \left(1 + \frac{u_1}{U_0}\right) \approx \frac{\epsilon_0 \cdot h \cdot (l_0 - x_0) \cdot U_0}{d} \cdot \left(1 - \frac{x_1}{l_0 - x_0} + \frac{u_1}{U_0}\right)$$

$$C_0 := \frac{\epsilon_0 \cdot h \cdot (l_0 - x_0)}{d}$$

$$Q_0 = C_0 \cdot U_0, \quad Q_1 \approx -\frac{\epsilon_0 \cdot h \cdot U_0 \cdot x_1}{d} + \frac{\epsilon_0 \cdot h \cdot (l_0 - x_0) \cdot u_1}{d}$$

Kapazitiver Wandler „Typ 4“

Grundtyp – Linearisierung: Vierpoldarstellung (2)

$$Q_1 \approx -\frac{\varepsilon_0 \cdot h \cdot U_0 \cdot x_1}{d} + \underbrace{\frac{\varepsilon_0 \cdot h \cdot (l_0 - x_0) \cdot u_1}{d}}_{C_0 \cdot u_1} \Rightarrow u_1 = \frac{Q_1}{C_0} + \underbrace{\frac{\varepsilon_0 \cdot h \cdot U_0 \cdot x_1}{d \cdot C_0}}_{\frac{Q_0 \cdot x_1}{(l_0 - x_0) \cdot C_0}} = \frac{Q_1}{C_0} + \frac{Q_0 \cdot x_1}{(l_0 - x_0) \cdot C_0}$$

- **Elektrostatische Kraft F_e** in Richtung zunehmender Ko-Energie W_e^* gerichtet: $F_e = \frac{dW_e^*}{dx} > 0$

$$0 < x < l_0 : F_e = \frac{dW_e^*}{dx} = \frac{d}{dx} \frac{C(x) \cdot u^2}{2} = \frac{d}{dx} \frac{\varepsilon_0 \cdot h \cdot (l_0 - x) \cdot u^2}{2 \cdot d} = -\frac{\varepsilon_0 \cdot h \cdot u^2}{2 \cdot d} < 0$$

$$0 > x > -l_0 : F_e = \frac{\varepsilon_0 \cdot h \cdot u^2}{2 \cdot d} > 0$$

$$F = -F_e - F_F = \frac{\varepsilon_0 \cdot h \cdot u^2}{2 \cdot d} + k \cdot x \Rightarrow F = F_0 + F_1 = \frac{\varepsilon_0 \cdot h \cdot U_0^2 \cdot (1 + u_1 / U_0)^2}{2 \cdot d} + k \cdot (x_0 + x_1)$$

$$F_0 = \frac{\varepsilon_0 \cdot h \cdot U_0^2}{2 \cdot d} + k \cdot x_0 \quad F_1 \approx \frac{\varepsilon_0 \cdot h \cdot U_0 \cdot u_1}{d} + k \cdot x_1 = \frac{\varepsilon_0 \cdot h \cdot U_0}{d} \cdot \left(\frac{Q_1}{C_0} + \frac{Q_0 \cdot x_1}{C_0 \cdot (l_0 - x_0)} \right) + k \cdot x_1$$

$$F_1 \approx \frac{Q_0}{C_0 \cdot (l_0 - x_0)} \cdot Q_1 + \left(\frac{Q_0^2}{C_0 \cdot (l_0 - x_0)^2} + k \right) \cdot x_1 \quad Q_1 = \left(F_1 - \left(\frac{Q_0^2}{C_0 \cdot (l_0 - x_0)^2} + k \right) \cdot x_1 \right) \cdot \frac{C_0 \cdot (l_0 - x_0)}{Q_0}$$

Kapazitiver Wandler „Typ 4“

Grundtyp – Linearisierung: Vierpoldarstellung (3)

$$u_1 = \frac{Q_1}{C_0} + \frac{Q_0 \cdot x_1}{(l_0 - x_0) \cdot C_0} = \frac{1}{C_0} \cdot \left(F_1 - \left(\frac{Q_0^2}{C_0 \cdot (l_0 - x_0)^2} + k \right) \cdot x_1 \right) \cdot \frac{C_0 \cdot (l_0 - x_0)}{Q_0} + \frac{Q_0 \cdot x_1}{(l_0 - x_0) \cdot C_0}$$

$$u_1 = \frac{l_0 - x_0}{Q_0} \cdot F_1 - \frac{l_0 - x_0}{Q_0} \cdot k \cdot \underbrace{x_1}_{\int v_1 \cdot dt}$$

$$i_1 = \frac{dQ_1}{dt} = \left(\frac{dF_1}{dt} - \left(\frac{Q_0^2}{C_0 \cdot (l_0 - x_0)^2} + k \right) \cdot \frac{dx_1}{dt} \right) \cdot \frac{C_0 \cdot (l_0 - x_0)}{Q_0}$$

$$i_1 = \frac{C_0 \cdot (l_0 - x_0)}{Q_0} \cdot \frac{dF_1}{dt} - \frac{k \cdot (l_0 - x_0)}{Q_0} \cdot \left(C_0 + \frac{Q_0^2}{k \cdot (l_0 - x_0)^2} \right) \cdot v_1$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{C_0} & \frac{Q_0}{(l_0 - x_0) \cdot C_0} \\ \frac{Q_0}{(l_0 - x_0) \cdot C_0} & \frac{Q_0^2}{C_0 \cdot (l_0 - x_0)^2} + k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q_1 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

Kopplungsterm zw. mech. u. el. System:

$$K_0 = \frac{Q_0}{(l_0 - x_0) \cdot C_0}$$

Ohne Kopplung: $K_0 = 0$: $u_1 = Q_1 / C_0$, $F_1 = k \cdot x_1$

Kapazitiver Wandler „Typ 4“

Grundtyp – Linearisierung: Vierpoldarstellung (4)

Für sinusförmige Änderungen um den Arbeitspunkt x_0 :

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \operatorname{Re}\{\hat{U}_1 \cdot e^{j\alpha t}\} & Q_1(t) &= \operatorname{Re}\{\hat{Q}_1 \cdot e^{j\alpha t}\} & i_1(t) &= \operatorname{Re}\{\hat{I}_1 \cdot e^{j\alpha t}\} \\ x_1(t) &= \operatorname{Re}\{\hat{X}_1 \cdot e^{j\alpha t}\} & F_1(t) &= \operatorname{Re}\{\hat{F}_1 \cdot e^{j\alpha t}\} & v_1(t) &= \operatorname{Re}\{\hat{V}_1 \cdot e^{j\alpha t}\} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{U}_1 \\ \hat{F}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{C_0} & \frac{Q_0}{(l_0 - x_0) \cdot C_0} \\ \frac{Q_0}{(l_0 - x_0) \cdot C_0} & \frac{Q_0^2}{C_0 \cdot (l_0 - x_0)^2} + k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{Q}_1 \\ \hat{X}_1 \end{pmatrix} = (B) \cdot \begin{pmatrix} \hat{Q}_1 \\ \hat{X}_1 \end{pmatrix} \quad \boxed{\begin{pmatrix} \hat{U}_1 \\ \hat{F}_1 \end{pmatrix} = (B) \cdot \begin{pmatrix} \hat{Q}_1 \\ \hat{X}_1 \end{pmatrix}}$$

Kopplungsfaktor: $\kappa = \frac{Q_0}{(l_0 - x_0) \cdot \sqrt{\frac{Q_0^2}{(l_0 - x_0)^2} + k \cdot C_0}}$

Kapazitiver Wandler „Typ 4“

Grundtyp – Linearisierung: Vierpoldarstellung (5)

- Für sinusförmige Änderungen um den Arbeitspunkt:

$$\begin{aligned}
 u_1(t) &= \operatorname{Re}\{\hat{\underline{U}}_1 \cdot e^{j\omega t}\} & Q_1(t) &= \operatorname{Re}\{\hat{\underline{Q}}_1 \cdot e^{j\omega t}\} & i_1(t) &= \operatorname{Re}\{\hat{\underline{I}}_1 \cdot e^{j\omega t}\} \\
 x_1(t) &= \operatorname{Re}\{\hat{\underline{X}}_1 \cdot e^{j\omega t}\} & F_1(t) &= \operatorname{Re}\{\hat{\underline{F}}_1 \cdot e^{j\omega t}\} & v_1(t) &= \operatorname{Re}\{\hat{\underline{V}}_1 \cdot e^{j\omega t}\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\underline{U}}_1 \\ \hat{\underline{I}}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{l_0 - x_0}{Q_0} & -\frac{l_0 - x_0}{j \cdot \omega \cdot Q_0} \cdot k \\ j \cdot \omega \cdot \frac{C_0 \cdot (l_0 - x_0)}{Q_0} & -\frac{k \cdot (l_0 - x_0)}{Q_0} \cdot \left(C_0 + \frac{Q_0^2}{k \cdot (l_0 - x_0)^2} \right) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{\underline{F}}_1 \\ \hat{\underline{V}}_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\underline{U}}_1 \\ \hat{\underline{I}}_1 \end{pmatrix} = \frac{l_0 - x_0}{Q_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{k}{j \cdot \omega} \\ j \cdot \omega \cdot C_0 & -k \cdot \left(C_0 + \frac{Q_0^2}{k \cdot (l_0 - x_0)^2} \right) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{\underline{F}}_1 \\ \hat{\underline{V}}_1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} \hat{\underline{U}}_1 \\ \hat{\underline{I}}_1 \end{pmatrix} = (\underline{T}) \cdot \begin{pmatrix} \hat{\underline{F}}_1 \\ \hat{\underline{V}}_1 \end{pmatrix}}$$

Siehe Publikation „Equivalent circuit representation of electromechanical transducers: Part I. Lumped parameter systems“, Harrie A C Tilmans 1996 *J. Micromech. Microeng.* **6** 157:
Tw. andere Notation, Fehlerkorrektur in *J. Micromech. Microeng.* **6** (1996) 359.

Kapazitiver Wandler „Typ 4“

Statische Stabilität mit Feder k stets vorhanden

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{C_0} & \frac{Q_0}{(l_0 - x_0) \cdot C_0} \\ \frac{Q_0}{(l_0 - x_0) \cdot C_0} & \frac{Q_0^2}{C_0 \cdot (l_0 - x_0)^2} + k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q_1 \\ x_1 \end{pmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} F_1 = \frac{Q_0 \cdot Q_1}{C_0 \cdot (l_0 - x_0)} + \left(\frac{Q_0^2}{C_0 \cdot (l_0 - x_0)^2} + k \right) \cdot x_1 \\ u_1 = \frac{Q_1}{C_0} + \frac{Q_0 \cdot x_1}{(l_0 - x_0) \cdot C_0} \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} F_1 = \frac{Q_0}{l_0 - x_0} \cdot u_1 + k \cdot x_1 \end{array} \right.$$

- Mechanische dynamische Gleichung im Arbeitspunkt x_0 :

$$m \cdot \ddot{x}_1 + F_1 = 0 \Rightarrow m \cdot \ddot{x}_1 + \frac{Q_0}{l_0 - x_0} \cdot u_1 + k \cdot x_1 = 0 \Rightarrow \underbrace{m}_{\overline{m}} \cdot \ddot{x}_1 + \underbrace{k}_{\overline{K}} \cdot x_1 = - \frac{Q_0}{l_0 - x_0} \cdot u_1$$

- Statische Stabilität im Arbeitspunkt x_0 : $K > 0$: $k > 0$
- **Resultat:** Wandler Typ 4 **stets statisch stabil** im Arbeitspunkt $\pm U_0, x_0$!
KEIN Pull-in/Pull-out-Effekt!
- Wandler Typ 4 **stets statisch stabil** im Arbeitspunkt $\pm U_0, x_0$,
da **Kopplungsfaktor** stets $0 < \kappa < 1$, solange Feder vorhanden, also $k > 0$!

$$0 < \kappa = \frac{Q_0 / (l_0 - x_0)}{\sqrt{\frac{Q_0^2}{(l_0 - x_0)^2} + k \cdot C_0}} < 1$$



Magnetische Wandler	Kapazitive Wandler
$\begin{pmatrix} \hat{\underline{I}}_1 \\ \hat{\underline{U}}_1 \end{pmatrix} = (\underline{T}) \cdot \begin{pmatrix} \hat{\underline{F}}_1 \\ \hat{\underline{V}}_1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \hat{\underline{U}}_1 \\ \hat{\underline{I}}_1 \end{pmatrix} = (\underline{T}) \cdot \begin{pmatrix} \hat{\underline{F}}_1 \\ \hat{\underline{V}}_1 \end{pmatrix}$
<p>Typ 1: Pull-in-Verhalten</p> $\frac{d+x_0}{\Psi_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{j \cdot \omega} \cdot \left(k - \frac{\Psi_0^2}{(d+x_0)^2 \cdot L_0} \right) \\ j \cdot \omega \cdot L_0 & -L_0 \cdot k \end{pmatrix}$	<p>Typ 3: Pull-in-Verhalten</p> $\frac{d+x_0}{Q_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{j \cdot \omega} \cdot \left(k - \frac{Q_0^2}{C_0 \cdot (d+x_0)^2} \right) \\ j \cdot \omega \cdot C_0 & -k \cdot C_0 \end{pmatrix}$
<p>Typ 2: KEIN Pull-in-Verhalten</p> $\frac{1}{l_e \cdot B_\delta} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{k}{j \cdot \omega} \\ j \cdot \omega \cdot L_0 & -k \cdot \left(L_0 + \frac{(l_e \cdot B_\delta)^2}{k} \right) \end{pmatrix}$	<p>Typ 4: KEIN Pull-in-Verhalten</p> $\frac{l_0-x_0}{Q_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{k}{j \cdot \omega} \\ j \cdot \omega \cdot C_0 & -k \cdot \left(C_0 + \frac{Q_0^2}{k \cdot (l_0-x_0)^2} \right) \end{pmatrix}$

Formal entsprechen einander im Kleinsignalverhalten die (\underline{T}) -Matrizen von Wandler **Typ 1 und Typ 3** sowie von **Typ 2 und Typ 4**, wenn \underline{I} und \underline{U} beim Übergang vom magnetischen zum kapazitiven Wandler **getauscht** werden (siehe Vorlesungsteil von *Prof. Kupnik*).





Zusammenfassung:

- (Nichtlineare) Berechnung des **magnetischen Arbeitspunkts**
- Stabile & instabile Arbeitspunkte \Rightarrow Anwendung: **Schalter**
- **(Linearisiertes) Kleinsignalverhalten** im stabilen Arbeitspunkt
- Amplituden-Frequenzgang bei erzwungener Schwingung \Rightarrow
 \Rightarrow z.B.: Wandler 1: **Schwingungsmessung**
Wandler 2: **Lautsprecher**
- Frequenzgangsdarstellung: Doppelt-logarithmisches **BODE-Diagramm**
- Je nach Frequenzbereich z. B. Wandler 1: Messung
 - des Schwingungswegs,
 - der Schwinggeschwindigkeit,
 - der Schwingungsbeschleunigung

