Elektromechanische Systeme
Teil von Prof. Binder:
„Mathematische Analyse von Wandlern & Aktoren“

1. Einführung

Elektromechanische Systeme

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

6. Dynamische Untersuchung des Wandlerverhaltens

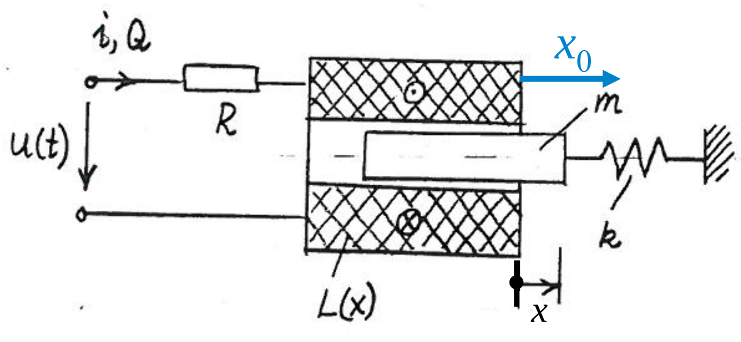
- Gleichgewicht
- Linearisierung
- Kleinsignalverhalten
- Stabilität
- Statische Instabilität
- Dynamische Instabilität
- Lineares System mit konstanten Koeffizienten: Beispiel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Gleichgewicht
- Linearisierung
- Kleinsignalverhalten
- Stabilität
- Statische Stabilität
- Dynamische Stabilität
- Lineares System mit konstanten Koeffizienten: Beispiel

Gleichgewicht
Gleichgewichtszustand i^* und x^*

Beispiel 1:



$$\frac{d}{dt}\left(L(x)\cdot i\right)+R\cdot i=u$$

$$m\cdot\ddot{x}-\frac{L'(x)}{2}\cdot i^2+k\cdot(x-x_0)=0$$

Nichtlineares gekoppeltes Differentialgleichungssystem !

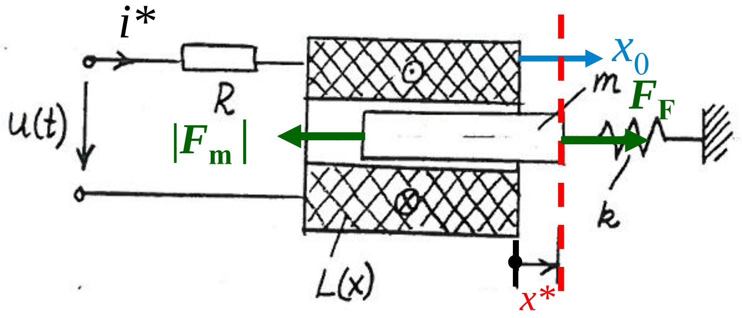
- Feder k entspannt bei $x = x_0$
- Gleichgewichtsbedingung des nichtlinearen gekoppelten Systems: $d./dt = 0$
- Elektrisches Gleichgewicht $u(t) = U$: $\boxed{R\cdot i=u \Rightarrow i^*=\frac{u}{R}=\frac{U}{R}=I}$ Gleichstrom !

Gleichgewicht
Gleichgewichtszustand *i** und *x**

Beispiel 1:

- Feder k entspannt bei $x = x_0$
- Gleichgewichtsbedingung des nichtlinearen gekoppelten Systems: $d./dt = 0$
- Mechanisches (Kräfte-)Gleichgewicht: $F_m + F_F = \frac{L'(x^*)}{2} \cdot (i^*)^2 - k \cdot (x^* - x_0) = 0$

Kraft aus potentiellem Speicher ist **Federkraft F_F:**



x^*: Gleichgewichtslage:
Tritt bei $x_0 > x > 0$ auf, weil bei $x < 0$:
a) $F_m > 0$, da $dL/dx > 0$;
b) $F_F > 0 \Rightarrow$ kein Kräftegleichgewicht

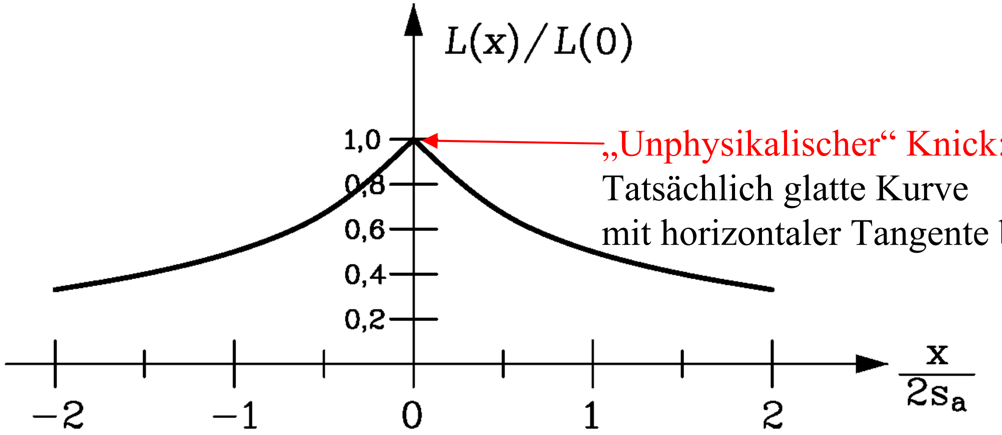
Gleichgewicht
Vereinfachter Verlauf der Selbstinduktivität $L(x)$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Beispiel 1: $x>0: \dfrac{L(x)}{L(0)} \approx \dfrac{1}{1+x/(2s_a)}, \quad x<0: \dfrac{L(x)}{L(0)} \approx \dfrac{1}{1-x/(2s_a)}$

$x>0: L'(x) = -\dfrac{L(0)/(2s_a)}{(1+x/(2s_a))^2} \quad x<0: L'(x) = \dfrac{L(0)/(2s_a)}{(1-x/(2s_a))^2}$

Für $x = 0$ gilt Induktivitätsformel nicht, da dort kein „glatter" Verlauf $L(x)$!)



„Unphysikalischer" Knick:
Tatsächlich glatte Kurve mit horizontaler Tangente bei $x = 0$

s_a: Einseitige „Stirn"-Feldlinienlänge (siehe Kap. 2)

$\xi = \dfrac{x}{2s_a}, \quad \xi_0 = \dfrac{x_0}{2s_a}, \quad \xi^* = \dfrac{x^*}{2s_a}$

Für $x > 0$: $F_m + F_F = 0 \Rightarrow -F_m = F_F \Rightarrow \dfrac{L(0)\cdot(i^*)^2/2}{k\cdot(2s_a)^2}\cdot\dfrac{1}{(1+x^*/(2s_a))^2} = \dfrac{x_0}{2s_a} - \dfrac{x^*}{2s_a}$

Abkürzungen: $W_{m0}^* = \dfrac{L(0)\cdot(U/R)^2}{2}, W_{p0} := \dfrac{k\cdot(2\cdot\sqrt{2}\cdot s_a)^2}{2}$

$$\boxed{\frac{W_{m0}^*}{W_{p0}}\cdot\frac{1}{(1+\xi^*)^2} = \xi_0 - \xi^*}$$

Gleichgewicht
Berechnung der Gleichgewichtslage x^*

$$\frac{W_{m0}^*}{W_{p0}} \cdot \frac{1}{(1+\xi^*)^2} = \xi_0 - \xi^* \qquad w = \frac{W_{m0}^*}{W_{p0}} \qquad \Rightarrow \xi^* = -\frac{W_{m0}^*}{W_{p0}\cdot(1+\xi^*)^2} + \xi_0 = -\frac{w}{(1+\xi^*)^2} + \xi_0$$

$$\boxed{\Rightarrow \xi^{*3} + \xi^{*2} \cdot (2-\xi_0) + \xi^* \cdot (1-2\xi_0) + w - \xi_0 = 0, \quad \xi^* > 0}$$

- Algebraische Gleichung 3. Ordnung $\Rightarrow$ 3 Nullstellen möglich.
  <u>Welche</u> der drei Nullstellen geben physikalisch relevante Lösungen an?

- ***<u>Beispiel 1a:</u>*** Für $W^*_{\mathrm{m0}} = W_{\mathrm{p0}} \Rightarrow w = 1$ und für $x_0 = 2s_{\mathrm{a}} \Rightarrow \xi_0 = 1$ $\boxed{\Rightarrow \xi^{*3} + \xi^{*2} - \xi^* + 0 = 0, \quad \xi^* > 0}$

  Drei Lösungen:

  $$(\xi^2 + \xi - 1)\cdot\xi = 0 \Rightarrow \quad \xi_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1} = \begin{cases} \xi_1 = 0.618 \\ \xi_2 = -1.618 \end{cases}, \quad \xi_3 = 0$$

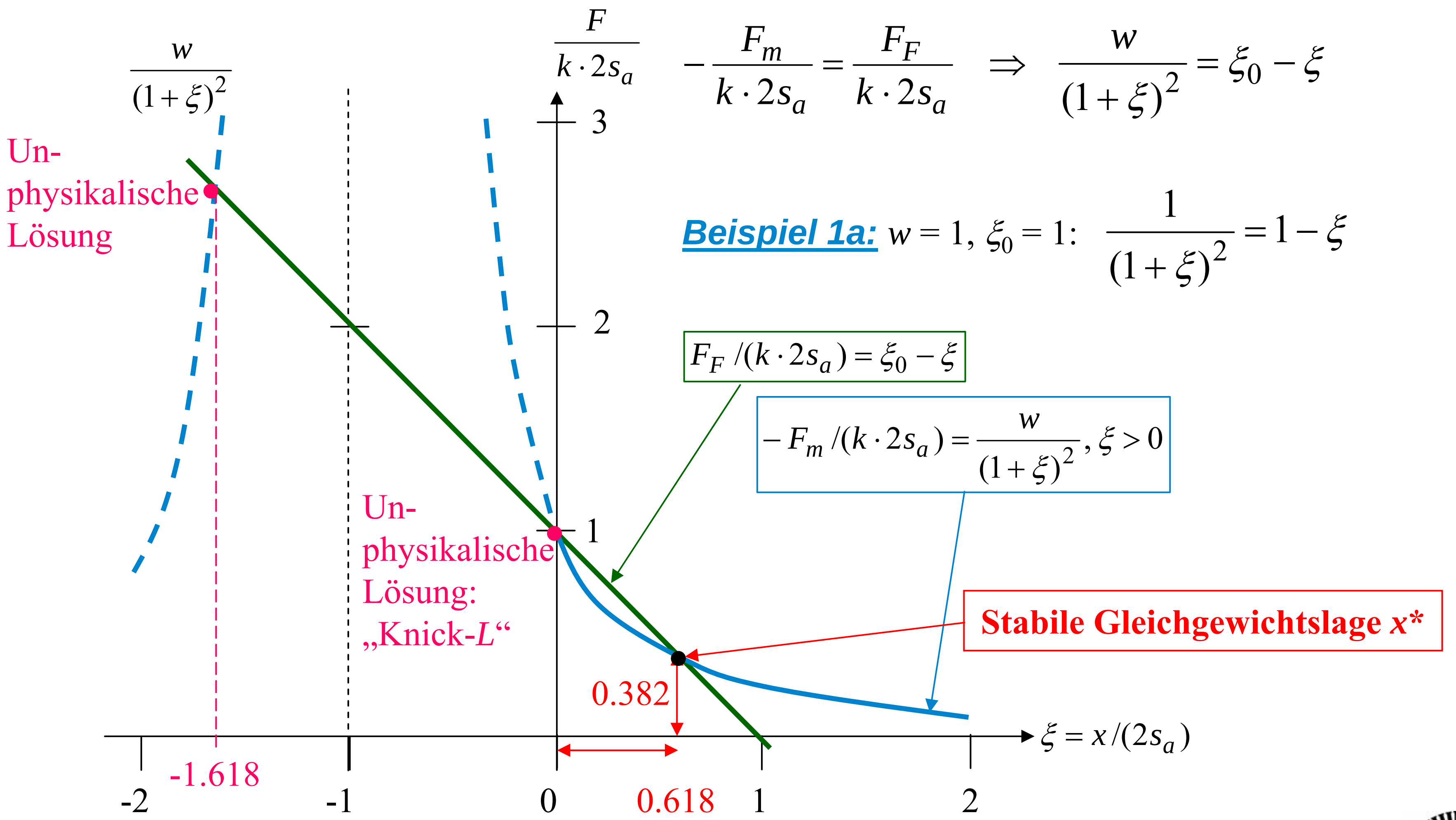
  Für $\xi > 0$ verbleibt: $\xi_1 = 0.618 = \xi^*$ $\boxed{x_1 = 0.618 \cdot 2s_a = 0.618 \cdot x_0 = x^*}$ $\boxed{0 < x^* = 0.618 \cdot x_0 < x_0}$

- <u>Plausibilität der Lösung</u>: Gedehnte Feder: $F_F = -k\cdot(x^* - x_0) = -(-0.382)\cdot k \cdot x_0 = 0.382 \cdot k \cdot x_0 > 0$
  Federkraft $F_F > 0$ und Magnetkraft $F_m < 0$ im statischen Gleichgewicht !
  $x^* > 0$: $F_m < 0$, da $dL/dx < 0 \;\Rightarrow$ Kräftegleichgewicht!

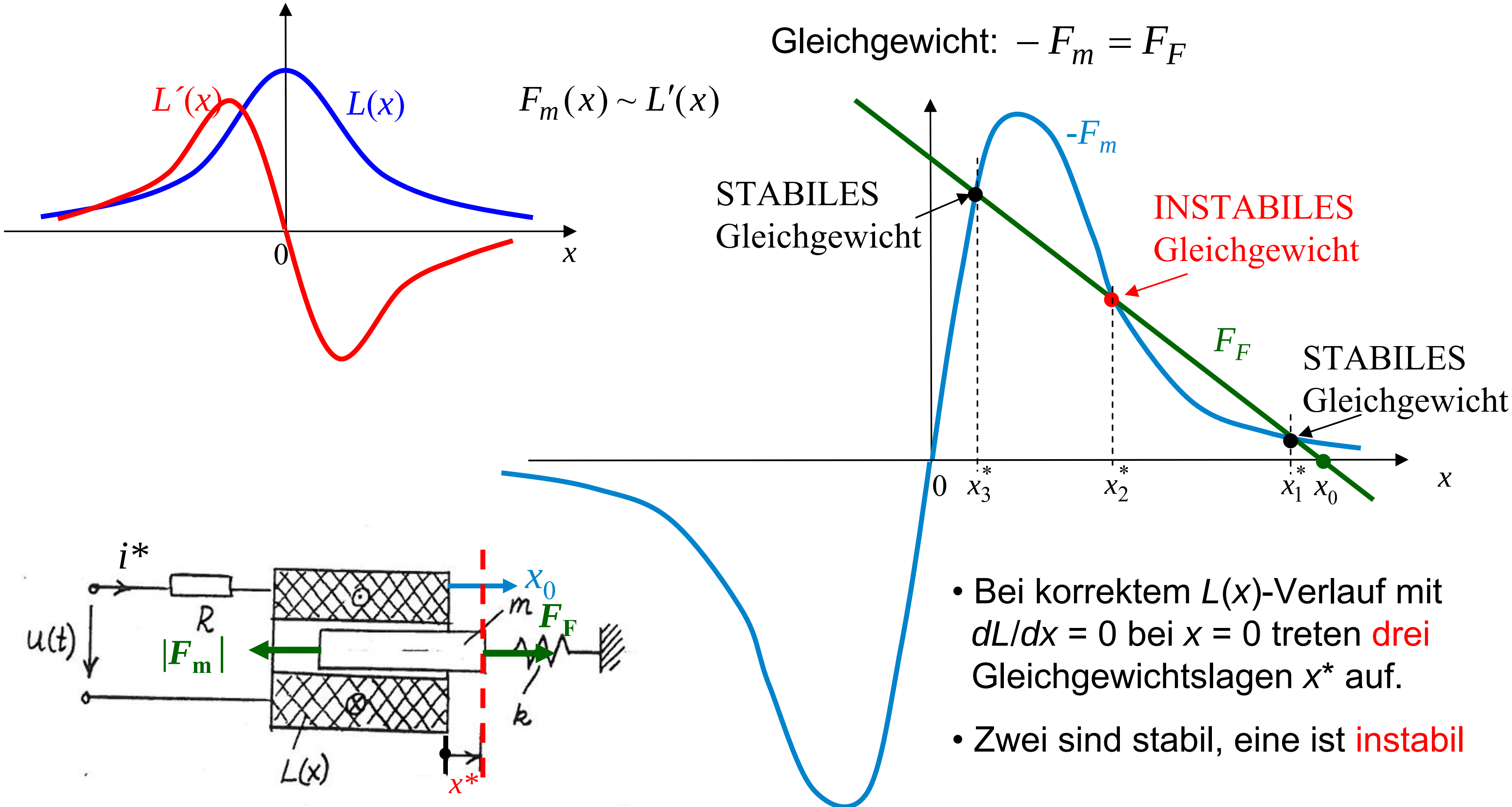
Gleichgewicht
Gleichgewichtslage $x^* = X$

$$-\frac{F_m}{k \cdot 2s_a} = \frac{F_F}{k \cdot 2s_a} \Rightarrow \frac{w}{(1+\xi)^2} = \xi_0 - \xi$$

Beispiel 1a: $w = 1,\ \xi_0 = 1:\quad \frac{1}{(1+\xi)^2} = 1 - \xi$



Gleichgewicht
Korrekter Verlauf der Selbstinduktivität $L(x)$



- Bei korrektem $L(x)$-Verlauf mit $dL/dx = 0$ bei $x = 0$ treten drei Gleichgewichtslagen x^* auf.
- Zwei sind stabil, eine ist instabil

Wiederholung

Gleichgewicht
Gleichgewichtslage – Berechnung (1)

- Allgemeine Lösungsgleichung für Gleichgewichtslagen:

  Algebraische Gleichung m-ter Ordnung mit reell-wertigen Koeffizienten $\Rightarrow$
  Fundamentalsatz der Algebra (*C. F. GAUSS*): Es existieren m Lösungen, wovon die (für Gleichgewichtslagen unphysikalischen) komplex-wertigen Lösungen als konjugiert komplexe Paare auftreten.
  Daher: Bei ungeradem m existiert mindestens eine <u>reelle</u> Lösung!

- Bis zur Ordnung m = 4 analytische Lösungsformeln vorhanden

  m = 1: Eine reelle Lösung
  m = 2: *VIETA*-Formel: i) Zwei reelle Lösungen oder ii) zwei konjugiert komplexe Lösungen;
  m = 3: *CARDANO*–Formel (basierend auf *Scipione del Ferro*):
  i) Eine reelle Lösung + zwei konjugiert komplexe Lösungen oder
  ii) drei reelle Lösungen;
  m = 4: *FERRARI*- Formel:
  i) Vier konjugiert komplexe Lösungen oder
  ii) zwei reelle u. zwei konjugiert komplexe Lösungen oder
  iii) vier reelle Lösungen;
  m > 4: *N. H. ABEL* und *E. GALOIS* bewiesen:
  Es existieren für m > 4 KEINE analytische Lösungsformeln!

Gleichgewicht
Gleichgewichtslage – Berechnung (2)

- Numerische iterative Nullstellensuchverfahren:
  Intervallhalbierungsverfahren,
  Regula falsi,
  Fixpunktiteration,
  Newton-Raphson-Verfahren, …

- Fragen:
  Ist das System in der Gleichgewichtslage $x^* = X$ gegen kleine Störungen dieses Betriebszustands stabil?
  Wird das System um den kleinen Wert $\Delta x/x^* << 1$ aus x^* ausgelenkt, kehrt das System
  a) wieder nach x^* zurück (STABIL)
  oder
  b) nicht (INSTABIL)?

- Gleichgewicht
- Linearisierung
- Kleinsignalverhalten
- Stabilität
- Statische Stabilität
- Dynamische Stabilität
- Lineares System mit konstanten Koeffizienten: Beispiel

Linearisierung

Beispiel 1: Differentialgleichung linearisiert

- Nichtlineares gekoppeltes Differentialgleichungssystem in der (kleinen) Umgebung $\Delta i, \Delta x$ um die Gleichgewichts"lage" i^*, x^* linearisiert: $i(t) = i^* + \Delta i(t)$, $x(t) = x^* + \Delta x(t)$.

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(L(x)\cdot i\right) + R\cdot i = u \Rightarrow \frac{dL(x)}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}\cdot i(t) + L(x)\cdot\frac{di}{dt} + R\cdot i(t) = u(t) \\ m\cdot\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{L'(x)}{2}\cdot i(t)^2 + k\cdot x(t) = k\cdot x_0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\left|\Delta x / x^*\right| << 1 \\ &\left|\Delta i / i^*\right| << 1 \end{aligned}$$

- Koeffizienten in der Gleichgewichtslage i^*, x^*: $L'(x^*), L(x^*), R, m, k$
- Zerlegung der Vorgabegröße: $u(t) = u^* + \Delta u(t)$: $\left|\Delta u / u^*\right| << 1$
- Zeitableitungen:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d(x^* + \Delta x)}{dt} = \frac{dx^*}{dt} + \frac{d\Delta x}{dt} = 0 + \frac{d\Delta x}{dt} = \frac{d\Delta x}{dt}$$

ebenso: $\frac{di}{dt} = \frac{d\Delta i}{dt}$

Linearisierung
Produkte kleiner Größen vernachlässigbar!

- Produkte „kleiner“ Größen sind vernachlässigbar klein !
- „Klein“ bedeutet: Klein in Bezug auf die Gleichgewichtsgrößen!

$$\left(1+\frac{\Delta x}{x^*}\right)\cdot\left(1+\frac{\Delta i}{i^*}\right)=1+\frac{\Delta x}{x^*}+\frac{\Delta i}{i^*}+\underbrace{\cancel{\frac{\Delta x}{x^*}\cdot\frac{\Delta i}{i^*}}}_{<<1}\approx 1+\frac{\Delta x}{x^*}+\frac{\Delta i}{i^*}$$

Beispiel:

$$\frac{\Delta x}{x^*}=0.1 \qquad \frac{\Delta i}{i^*}=0.1$$

$$\text{exakt}:\quad \left(1+\frac{\Delta x}{x^*}\right)\cdot\left(1+\frac{\Delta i}{i^*}\right)=(1+0.1)\cdot(1+0.1)=1.1^2=1.21$$

$$\text{Näherung}:\quad \left(1+\frac{\Delta x}{x^*}\right)\cdot\left(1+\frac{\Delta i}{i^*}\right)\approx 1+\frac{\Delta x}{x^*}+\frac{\Delta i}{i^*}=1+0.1+0.1=1.20$$

- z. B.: $\underline{\frac{\Delta x}{x^*}<<1,\ \frac{\Delta i}{i^*}<<1}: \frac{\Delta x}{x^*}\cdot\frac{\Delta i}{i^*}<<1,\ \frac{d\Delta x/dt}{x^*}\cdot\frac{\Delta i}{i^*}<<1,\ \frac{\Delta x}{x^*}\cdot\frac{d\Delta i/dt}{i^*}<<1$

Linearisierung

„Schwach“ nichtlinear vs. „wesentlich“ nichtlinear

- ***Beispiel A:*** „Schwach“ nichtlinear: $N = \left(1+\frac{\Delta x}{x^*}\right)^2 = 1+\frac{2\Delta x}{x^*}+\left(\frac{\Delta x}{x^*}\right)^2 \qquad \left(1+\frac{\Delta x}{x^*}\right)^2 \approx 1+\frac{2\Delta x}{x^*} = L$

$\Rightarrow$ Wie groß darf $\Delta x/x^*$ sein für einen Fehler zwischen *N* und *L* von 10%:

$$N/L = 1.1 \Rightarrow \frac{\Delta x}{x^*} = -0.23\,(N=0.59,\ L=0.54) \quad \text{und} \quad \frac{\Delta x}{x^*} = 0.43\,(N=2.05,\ L=1.86)$$

- ***Beispiel B:*** „Wesentlich“ nichtlinear:

$$N = \left(1+\frac{\Delta x}{x^*}\right)^5 = 1+5\cdot\frac{\Delta x}{x^*}+10\cdot\left(\frac{\Delta x}{x^*}\right)^2+10\cdot\left(\frac{\Delta x}{x^*}\right)^3+5\cdot\left(\frac{\Delta x}{x^*}\right)^4+\left(\frac{\Delta x}{x^*}\right)^5 \qquad \left(1+\frac{\Delta x}{x^*}\right)^5 \approx 1+\frac{5\Delta x}{x^*} = L$$

$\Rightarrow$ Wie groß darf $\Delta x/x^*$ sein für einen Fehler zwischen *N* und *L* von 10%:

$$N/L = 1.1 \Rightarrow \frac{\Delta x}{x^*} = -0.08\,(N=0.66,\ L=0.60) \quad \text{und} \quad \frac{\Delta x}{x^*} = 0.125\,(N=1.80,\ L=1.625)$$

- Für einen Fehler von max. 10% ist die zulässige Abweichung vom Gleichgewichtspunkt x^* im Bsp. A relativ groß (-0.23 … 0.43)
  und
  im Bsp. B relativ klein (-0.08 … 0.125)!

Linearisierung

Beispiel 1: Differentialgleichungen linearisiert

- Elektrische Gleichung linearisiert: $\frac{dL(x)}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}\cdot i(t)+L(x)\cdot\frac{di}{dt}+R\cdot i(t)=u(t)$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dL(x)}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}\cdot i(t)\approx\left(\left.\frac{dL}{dx}\right|_{x^*}+\left.\frac{d^2L}{dx^2}\right|_{x^*}\cdot\Delta x\right)\cdot\underbrace{\frac{d\Delta x}{dt}\cdot(i^*+\Delta i)}_{\approx\frac{d\Delta x}{dt}\cdot i^*}\approx\underbrace{\left.\frac{dL}{dx}\right|_{x^*}}_{L'(x^*)}\cdot\frac{d\Delta x}{dt}\cdot i^*\\
&(L(x^*)+L'(x^*)\cdot\Delta x)\cdot\frac{d\Delta i}{dt}\approx L(x^*)\cdot\frac{d\Delta i}{dt}
\end{aligned}\right\}$$

$$\boxed{L'(x^*)\cdot\frac{d\Delta x}{dt}\cdot i^*+L(x^*)\cdot\frac{d\Delta i}{dt}+R\cdot(i^*+\Delta i)\approx u^*+\Delta u}$$

- Mechanische Gleichung linearisiert: $m\cdot\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{L'(x)}{2}\cdot i(t)^2+k\cdot x(t)=k\cdot x_0$

$$L'(x)\cdot i(t)^2\approx(L'(x^*)+L''(x^*)\cdot\Delta x)\cdot\underbrace{(i^*+\Delta i)^2}_{i^{*2}+2i^*\cdot\Delta i+\cancel{(\Delta i)^2}}\approx L'(x^*)\cdot(i^*)^2+L'(x^*)\cdot 2i^*\cdot\Delta i+L''(x^*)\cdot\Delta x\cdot i^{*2}$$

$$\boxed{m\cdot\frac{d^2\Delta x}{dt^2}-\frac{L'(x^*)}{2}\cdot(i^*)^2-\frac{L'(x^*)}{2}\cdot 2i^*\cdot\Delta i-\frac{L''(x^*)}{2}\cdot(i^*)^2\cdot\Delta x+k\cdot(x^*+\Delta x)\approx k\cdot x_0}$$

Linearisierung
Bsp. 1: Lokal-Verhalten in Gleichgewichtslage

- Nichtlineares gekoppeltes Differentialgleichungssystem in der (kleinen) Umgebung Δi, Δx um die Gleichgewichts"lage" i^*, x^* linearisiert!

$$L'(x^*)\cdot\frac{d\Delta x}{dt}\cdot i^* + L(x^*)\cdot\frac{d\Delta i}{dt} + \cancel{R\cdot i^*} + R\cdot\Delta i \approx \cancel{u^*} + \Delta u$$

Gleichgewicht

$$m\cdot\frac{d^2\Delta x}{dt^2} - \cancel{\frac{L'(x^*)}{2}\cdot(i^*)^2} - \frac{L'(x^*)}{2}\cdot 2i^*\cdot\Delta i - \frac{L''(x^*)}{2}\cdot(i^*)^2\cdot\Delta x + \cancel{k\cdot x^*} + k\cdot\Delta x \approx \cancel{k\cdot x_0}$$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= u^* - R\cdot i^* \Rightarrow i^* = u^*/R \\ 0 &= k\cdot(x_0 - x^*) + \frac{L'(x^*)}{2}\cdot i^{*2} \end{aligned}\right\}$$

Gleichgewicht: *d./dt* = 0

In Gleichgewichtslage: Abweichungen $\Delta i = 0$, $\Delta x = 0$

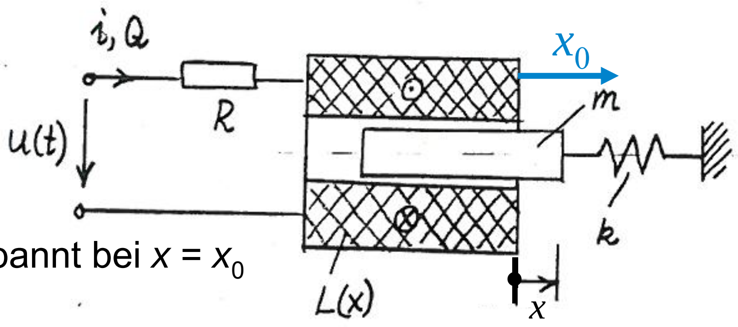
- Die Gleichgewichts-Gleichungen ergeben sich auch direkt aus den nichtlinearen Gleichungen für *d./dt* = 0 (siehe frühere Folie)

- Linearisiertes gekoppeltes Differentialgleichungssystem, gültig in Umgebung Δi, Δx um i^*, x^*

Linearisierung

Linearisierte Differentialgleichungen (1)

Beispiel 1:



Feder k entspannt bei $x = x_0$

n = 2: Zwei verallg. Koordinaten:

$$q_1 = Q,\ q_2 = x$$

Linearisiertes Diff.-gleichungssystem, gültig in Umgebung ΔQ, Δx um Q^*, x^*

$$q_1 = Q^* + \Delta Q,\ q_2 = x^* + \Delta x$$

$$L'(x^*) \cdot i^* \cdot \frac{d\Delta x}{dt} + L(x^*) \cdot \frac{d\Delta i}{dt} + R \cdot \Delta i \approx \Delta u \qquad m \cdot \frac{d^2 \Delta x}{dt^2} - \frac{L'(x^*)}{2} \cdot 2i^* \cdot \Delta i + \left(k - \frac{L''(x^*)}{2} \cdot i^{*2}\right) \cdot \Delta x \approx 0$$

$$\left.\begin{aligned} & L(x^*) \cdot \frac{d^2 \Delta Q}{dt^2} + R \cdot \frac{d\Delta Q}{dt} + L'(x^*) \cdot i^* \cdot \frac{d\Delta x}{dt} \approx \Delta u \\ & m \cdot \frac{d^2 \Delta x}{dt^2} + \left(k - \frac{L''(x^*) \cdot i^{*2}}{2}\right) \cdot \Delta x - L'(x^*) \cdot i^* \cdot \frac{d\Delta Q}{dt} \approx 0 \end{aligned}\right\}$$

n = 2 gekoppelte Diff.-gleichungen 2. Ordnung

Kopplungsterm: $L'(x^*) \cdot i^* \cdot \frac{d\ldots}{dt}$

Magnet. Federkonstante: $k_m = \frac{dF_m}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{L'(x) \cdot i^2}{2}\right) = \frac{L''(x) \cdot i^2}{2}$

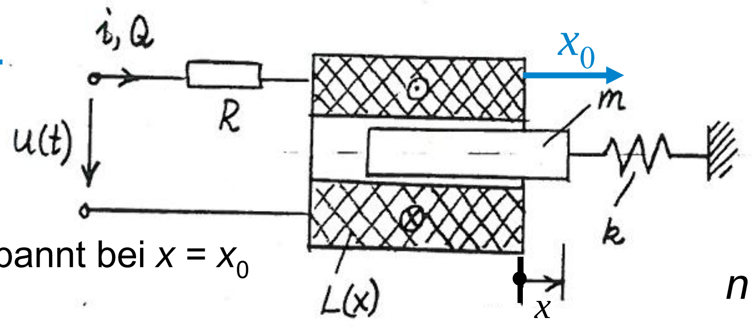
Verringerung der resultierenden Federwirkung durch das magnetische Feld:

$$k - \frac{L''(x^*) \cdot i^{*2}}{2} = k - \left.\frac{dF_m}{dx}\right|_{x^*, i^*} < k$$

Linearisierung

Linearisierte Differentialgleichungen (2)

Beispiel 1:



Feder k entspannt bei $x = x_0$

n = 2: Zwei verallg. Koordinaten:
$q_1 = Q, q_2 = x$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} L(x^*) & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}}_{(T)} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \Delta\ddot{Q} \\ \Delta\ddot{x} \end{pmatrix}}_{\Delta\ddot{\vec{q}}} + \underbrace{\begin{pmatrix} R & \overbrace{L'(x^*)\cdot i^*}^{\text{Kopplungsterm}} \\ -\underbrace{L'(x^*)\cdot i^*}_{\text{Kopplungsterm}} & 0 \end{pmatrix}}_{(D)} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \Delta\dot{Q} \\ \Delta\dot{x} \end{pmatrix}}_{\Delta\dot{\vec{q}}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k - \dfrac{L''(x^*)\cdot i^{*2}}{2} \end{pmatrix}}_{(K)} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \Delta Q \\ \Delta x \end{pmatrix}}_{\Delta\vec{q}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \Delta u(t) \\ 0 \end{pmatrix}}_{\Delta\vec{F}(t)}$$

- n = 2 Diff.-gleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.
- Die Koeffizienten sind nur im betrachteten Gleichgewichtspunkt x^* gültig.
- Die (n x n) = (2 x 2)-Trägheitsmatrix (T) ist symmetrisch ($T_{kl} = T_{lk}$) !

Linearisierung
Linearisierte Differentialgleichungen (3)

- **Allgemein:**
  Bei n verallgemeinerten unabhängigen Koordinaten Q, x entsteht bei der Linearisierung der nichtlinearen Systemgleichungen stets ein System von n Diff.-gleichungen zweiter Ordnung mit konstanten (oder zeitabhängigen) Koeffizienten.
- Diese Koeffizienten sind nur im betrachteten Gleichgewichtspunkt Q^***,** x^* gültig.
- Der Gültigkeitsbereich für ΔQ, Δx der linearisierten Gleichungen ist i. A. schwer abschätzbar.
- Manchmal sind Systeme „wesentlich nichtlinear“,
  d.h. durch Linearisierung dermaßen vereinfacht,
  dass sie dann keine physikalisch sinnvolle Lösung mehr zulassen.

Linearisierung
Systematik linearisierter Diff.-gleichungen

- Die *n* Diff.-gleichungen zweiter Ordnung lassen sich mit dem Koordinatenvektor $(q_1, \ldots, q_n)$ als Matrixgleichung übersichtlich schreiben, wobei die konstanten oder zeitabhängigen Koeffizienten in den drei (*n* x *n*) Koeffizientenmatrizen stehen: $\Delta\vec{q} = (\Delta q_1, \ldots, \Delta q_n)$

$$(T(t))\cdot\Delta\ddot{\vec{q}} + (D(t))\cdot\Delta\dot{\vec{q}} + (K(t))\cdot\Delta\vec{q} = \Delta\vec{F}(t)$$

$(T(t))$	Trägheitsmatrix
$(D(t))$	Dämpfungsmatrix
$(K(t))$	Steifigkeitsmatrix
$\Delta\vec{F}(t)$	Störvektor

Häufig sind die Koeffizienten dieser Matrizen zeitlich konstant: (T), (D), (K), $\Delta\vec{F}(t)$

$$(T)\cdot\Delta\ddot{\vec{q}} + (D)\cdot\Delta\dot{\vec{q}} + (K)\cdot\Delta\vec{q} = \Delta\vec{F}(t)$$

$$k_m = \frac{L''(x^*)\cdot i^{*2}}{2}$$

Beispiel 1:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} L(x^*) & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}}_{(T)} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \Delta\ddot{Q} \\ \Delta\ddot{x} \end{pmatrix}}_{\Delta\ddot{\vec{q}}} + \underbrace{\begin{pmatrix} R & \overbrace{L'(x^*)\cdot i^*}^{\text{Kopplungsterm}} \\ -\overbrace{L'(x^*)\cdot i^*} & 0 \end{pmatrix}}_{(D)} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \Delta\dot{Q} \\ \Delta\dot{x} \end{pmatrix}}_{\Delta\dot{\vec{q}}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k - k_m \end{pmatrix}}_{(K)} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \Delta Q \\ \Delta x \end{pmatrix}}_{\Delta\vec{q}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \Delta u(t) \\ 0 \end{pmatrix}}_{\Delta\vec{F}(t)}$$

- Die Trägheitsmatrix ist jedenfalls symmetrisch !

- Gleichgewicht
- Linearisierung
- Kleinsignalverhalten
- Stabilität
- Statische Stabilität
- Dynamische Stabilität
- Lineares System mit konstanten Koeffizienten: Beispiel

Kleinsignalverhalten
Lokal-Verhalten in einer Gleichgewichtslage (1)

- Elektromechanische Systeme arbeiten häufig im stationären (= eingeschwungenen) Betrieb, speziell also in einer Gleichgewichtslage q^*, um die die Systemparameter z. B. mit einer bestimmten Anrege-Frequenz f mit begrenzter Amplitude, z. B. $\Delta q / q^* << 1$ schwingen.
- Wie ist der Frequenzgang des Systems, also das Verhältnis einer interessierenden
  a) Ausgangssignal-Amplitude zu einer Anrege- bzw. Eingangs-Signalamplitude (Amplitudengang),
  oder
  b) die zugehörige Phasenverschiebung des Ausgangs- zum Eingangssignal (Phasengang)?
- Wie reagiert das System bei Störungen möglicher stationärer Betriebszustände?
- Die Methode der Störungsrechnung erlaubt Aussagen in begrenztem Rahmen (= für Störungen mit kleiner Amplitude), da die (nur begrenzt um die Gleichgewichtslage gültigen) linearisierten Systemgleichungen verwendet werden.

Kleinsignalverhalten
Lokal-Verhalten in einer Gleichgewichtslage (2)

- Für Systeme mit konstanten Koeffizienten steht eine Reihe von Methoden zur Untersuchung des Systems im Zeit- und Frequenzbereich zur Verfügung:

Zeitbereich:

a) Direkter Ansatz mit Homogen- und Partikulärlösung,

b) *Laplace*-Transformation,

Frequenzbereich:

c) Komplexe Rechnung im Frequenzbereich (Amplituden-/ Phasengang).

Kleinsignalverhalten

Sonderfall:

Differentialgleichungssystem mit konst. Koeffizienten

$$\boxed{(T)\cdot \Delta\ddot{\vec{q}} + (D)\cdot \Delta\dot{\vec{q}} + (K)\cdot \Delta\vec{q} = \Delta\vec{F}(t)}$$

- Die Koeffizienten dieser drei Matrizen sind zeitlich konstant: $\left\{\begin{matrix}(T)\\(D)\\(K)\end{matrix}\right.$

- Werden n - 1 Koordinaten Δq_2, …, Δq_n eliminiert, so erhalten wir EINE lineare Differentialgleichung der Ordnung $m = 2n$ für die Unbekannte Δq_1.

- Wird statt einer Koordinate ΔQ deren Ableitung $\Delta i = d\Delta Q/dt$ verwendet, so erhalten wir EINE lineare Differentialgleichung der Ordnung $m = 2n – 1$ für die Unbekannte Δq_1.

Kleinsignalverhalten

Beispiel 1: Differentialgleichung 3. Ordnung

Beispiel 1: n = 2: $q_1 = Q, q_2 = x$ Eine Diff.-gleichung 2·2 = 4. Ordnung für Δx bzw. ΔQ

Wird $\Delta i = d\Delta Q/dt$ eingeführt, ergibt sich eine Diff.-gleichung 2·2-1 = 3. Ordnung für Δx bzw. Δi

$$k_m = \frac{L''(x^*)\cdot i^{*2}}{2} \rightarrow k_{res} = k - k_m$$

$$L'(x^*)\cdot i^* \cdot \frac{d\Delta x}{dt} + L(x^*)\cdot\frac{d\Delta i}{dt} + R\cdot\Delta i = \Delta u \qquad m\cdot\frac{d^2\Delta x}{dt^2} - L'(x^*)\cdot i^*\cdot\Delta i + k_{res}\cdot\Delta x = 0$$

$$m\cdot\Delta\dddot{x} + \frac{m\cdot R}{L(x^*)}\cdot\Delta\ddot{x} + \left(k_{res} + \frac{(L'(x^*)\cdot i^*)^2}{L(x^*)}\right)\cdot\Delta\dot{x} + \frac{k_{res}\cdot R}{L(x^*)}\cdot\Delta x = \frac{L'(x^*)\cdot i^*}{L(x^*)}\cdot\Delta u$$

Δi eliminiert

oder

$$m\cdot\Delta\dddot{i} + \frac{m\cdot R}{L(x^*)}\cdot\Delta\ddot{i} + \left(k_{res} + \frac{(L'(x^*)\cdot i^*)^2}{L(x^*)}\right)\cdot\Delta\dot{i} + \frac{k_{res}\cdot R}{L(x^*)}\cdot\Delta i = \frac{m}{L(x^*)}\cdot\Delta\ddot{u} + \frac{k_{res}}{L(x^*)}\cdot\Delta u$$

Δx eliminiert

- Der Differentialoperator $m\cdot\frac{d^3(.)}{dt^3} + \frac{m\cdot R}{L(x^*)}\cdot\frac{d^2(.)}{dt^2} + \left(k_{res} + \frac{(L'(x^*)\cdot i^*)^2}{L(x^*)}\right)\cdot\frac{d(.)}{dt} + \frac{k_{res}\cdot R}{L(x^*)}\cdot(.)$

ist dabei sowohl für Δx als auch Δi derselbe,
denn er beschreibt das resultierende dynamische Systemverhalten!

Kleinsignalverhalten

Wiederholung

Lineare Differentialgleichung mit konst. Koeffizienten (1)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- „Gewöhnliche“ lineare Diff.-gleichung (nicht partielle! = NUR Zeitableitung) mit konstanten reellen Koeffizienten $b_m, b_{m-1}, \ldots, b_1, b_0$ der Ordnung m hat den Differentialoperator:

$$b_m \cdot \frac{d^m(.)}{dt^m} + b_{m-1} \cdot \frac{d^{m-1}(.)}{dt^{m-1}} + \ldots + b_1 \cdot \frac{d(.)}{dt} + b_0 \cdot (.) \Rightarrow b_m \cdot \frac{d^m y(t)}{dt^m} + b_{m-1} \cdot \frac{d^{m-1} y(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + b_1 \cdot \frac{dy(t)}{dt} + b_0 \cdot y(t) = g(t)$$

- „Linear“: Sind $y_1(t), y_2(t)$ Lösungen, dann ist auch jede Linearkombination $k_1 \cdot y_1(t) + k_2 \cdot y_2(t)$ eine Lösung!

- Es gibt m voneinander linear UNABHÄNGIGE Lösungen $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_{m-1}(t), y_m(t)$

- Es sind m Anfangsbedingungen $y(0), y'(0), \ldots, y^{(m-1)}(0)$ nötig, um die Koeffizienten k_i, $i = 1, \ldots, m$ der Linearkombinationen der Lösungsfunktionen $y_i(t)$ als resultierende Gesamtlösung $y(t)$ zu bestimmen:

$$y(t) = k_1 \cdot y_1(t) + k_2 \cdot y_2(t) + \ldots + k_{m-1} \cdot y_{m-1}(t) + k_m \cdot y_m(t)$$

- Die homogene Lösung $y_h(t)$ löst die „homogene“ Differentialgleichung („rechte Seite“ ist Null):

$$\boxed{b_m \cdot \frac{d^m y_h(t)}{dt^m} + b_{m-1} \cdot \frac{d^{m-1} y_h(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + b_1 \cdot \frac{dy_h(t)}{dt} + b_0 \cdot y_h(t) = 0}$$

- Die partikuläre Lösung $y_p(t)$ löst die „partikuläre“ Differentialgleichung („rechte Seite“ $g(t)$):

$$\boxed{b_m \cdot \frac{d^m y_p(t)}{dt^m} + b_{m-1} \cdot \frac{d^{m-1} y_p(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + b_1 \cdot \frac{dy_p(t)}{dt} + b_0 \cdot y_p(t) = g(t)}$$

Kleinsignalverhalten

Wiederholung

Lineare Differentialgleichung mit konst. Koeffizienten (2)

- Die Lösungsfunktionen $y_i(t)$ sind Exponentialfunktionen $y_i(t) = e^{\lambda_i \cdot t}$, wenn $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$.
- Einsetzen der i-ten Lösungsfunktion $y_i(t)$ in die homogene Differentialgleichung ergibt „charakteristisches Polynom“ $p(\lambda)$:

$$b_m \cdot \frac{d^m y_i(t)}{dt^m} + b_{m-1} \cdot \frac{d^{m-1} y_i(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + b_1 \cdot \frac{dy_i(t)}{dt} + b_0 \cdot y_i(t) = 0 = e^{\lambda_i \cdot t} \cdot p(\lambda_i)$$

- „Charakteristisches“ Polynom $p(\lambda)$ MUSS daher Null sein für betreffendes λ:

$$\boxed{p(\lambda) = b_m \cdot \lambda^m + b_{m-1} \cdot \lambda^{m-1} + \ldots + b_1 \cdot \lambda + b_0 = 0}$$

Algebraische Gleichung zu Bestimmung der m „Eigenwerte“ λ_i, $i = 1, \ldots, m$

Kleinsignalverhalten

Wiederholung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Lineare Differentialgleichung mit konst. Koeffizienten (3)

- Wenn alle Nullstellen λ_i von $p(\lambda) = 0$ reell und verschieden sind: $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \ldots \neq \lambda_m$

  dann sind die m linear unabhängigen Lösungen: $y_1(t) = e^{\lambda_1 \cdot t},\ y_2(t) = e^{\lambda_2 \cdot t},\ \ldots,\ y_m(t) = e^{\lambda_m \cdot t}$

- Wenn $k/2$ Nullstellen jeweils konjugiert komplex sind: $\underline{\lambda}_l = \alpha_l \pm j \cdot \beta_l,\ l = 1, \ldots, k/2$

  dann sind wegen $e^{\underline{\lambda}_l \cdot t} = e^{\alpha_l \cdot t} \cdot (\cos(\beta_l t) \pm j \cdot \sin(\beta_l t))$

  die m linear unabhängigen Lösungen $y_1(t) = e^{\alpha_1 \cdot t} \cdot \cos(\beta_1 t),\ y_2(t) = e^{\alpha_1 \cdot t} \cdot \sin(\beta_1 t), \ldots$

  $y_{k-1}(t) = e^{\alpha_{k/2} \cdot t} \cdot \cos(\beta_{k/2} \cdot t),\ y_k(t) = e^{\alpha_{k/2} \cdot t} \cdot \sin(\beta_{k/2} \cdot t),\ y_{k+1}(t) = e^{\lambda_{k+1} \cdot t}, \ldots, y_m(t) = e^{\lambda_m \cdot t}$

- Wenn eine Nullstelle, z. B. λ_0, k-fach auftritt: $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k \cdot q(\lambda)$ $\quad q(\lambda)$: Polynom $(m\text{-}k)$ - ter Ordng.

  dann ist:

  $y_1(t) = e^{\lambda_0 \cdot t},\ y_2(t) = t \cdot e^{\lambda_0 \cdot t}, \ldots, y_k(t) = t^{k-1} \cdot e^{\lambda_0 \cdot t}$

  $y_{k+1}(t) = e^{\lambda_{k+1} \cdot t}, \ldots, y_m(t) = e^{\lambda_m \cdot t}, \quad \lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_m$: m-k reelle Wurzeln des Polynoms $q(\lambda)$

- Wenn eine komplexe Nullstelle, z. B. $\underline{\lambda}_0$, $k/2$-fach auftritt, dann auch ihr konjugiert komplexer Wert. $\underline{\lambda}_0 = \alpha_0 + j \cdot \beta_0,\ \underline{\lambda}_0^* = \alpha_0 - j \cdot \beta_0$

  Dann ist: $y_1(t) = e^{\alpha_0 \cdot t} \cdot \cos(\beta_0 t),\ y_2(t) = e^{\alpha_0 \cdot t} \cdot \sin(\beta_0 t),\ y_3(t) = t \cdot e^{\alpha_0 \cdot t} \cdot \cos(\beta_0 t),\ y_4(t) = t \cdot e^{\alpha_0 \cdot t} \cdot \sin(\beta_0 t) \ldots$

  $y_{k-1}(t) = t^{\frac{k}{2}-1} \cdot e^{\alpha_0 \cdot t} \cdot \cos(\beta_0 t),\ y_k(t) = t^{\frac{k}{2}-1} \cdot e^{\alpha_0 \cdot t} \cdot \sin(\beta_0 t),\ \ y_{k+1}(t) = e^{\lambda_{k+1} \cdot t}, \ldots, y_m(t) = e^{\lambda_m \cdot t}$

Kleinsignalverhalten

Beispiel 2: Ausgleichsvorgang $y_h(t)$

Beispiel 2:

n = 1: Lösung der homogenen Differentialgleichung 2. Ordnung:

$$T \cdot \ddot{y} + D \cdot \dot{y} + K \cdot y = 0 \quad y_1(t) = e^{\lambda_1 t} \quad y_2(t) = e^{\lambda_2 t} \quad p(\lambda) = T \cdot \lambda^2 + D \cdot \lambda + K = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{D}{2T} \pm \sqrt{\left(\frac{D}{2T}\right)^2 - \frac{K}{T}} \quad \text{Falls} \left(\frac{D}{2T}\right)^2 - \frac{K}{T} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{D}{2T} = \lambda$$

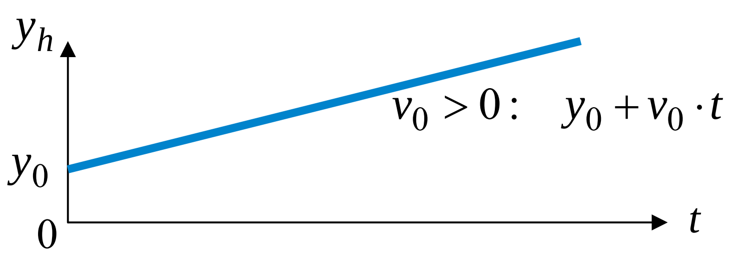
DOPPELTE reelle Nullstelle!
(Aperiodischer Grenzfall)

$y_1(t) = e^{\lambda \cdot t},\ y_2(t) = t \cdot e^{\lambda \cdot t}$ Anfangsbedingungen („Störung“ von $y = 0$): $y(0) = y_0,\ \dot{y}(0) = v_0$

$$\boxed{y_h(t) = k_1 \cdot y_1(t) + k_2 \cdot y_2(t) = e^{\lambda \cdot t} \cdot \left(y_0 + (v_0 - \lambda \cdot y_0) \cdot t\right)}$$

Unterscheidung: λ > 0: INSTABIL, λ < 0: asymptotisch STABIL, λ = 0: GRENZSTABIL

$$\text{z.B.:}\ \lambda = 0\ (\Leftrightarrow K = D = 0): y_h(t) = e^{0 \cdot t} \cdot \left(y_0 + (v_0 - 0 \cdot y_0) \cdot t\right) = y_0 + v_0 \cdot t$$



$$(T \cdot \ddot{y} + 0 \cdot \dot{y} + 0 \cdot y = T \cdot \ddot{y} = 0 \quad \ddot{y} = 0 \quad y_h(t) = v_0 t + y_0)$$

a) $y_0 = 0,\ v_0 \neq 0$: y_h wächst unbeschränkt: INSTABIL
b) $y_0 \neq 0,\ v_0 = 0$: y_h kehrt nicht nach Null zurück, nicht asymptotisch stabil!

Kleinsignalverhalten

Wiederholung

Beispiel 3: Homogenes lineares Diff.-gleichungssystem (1)

$$\dot{y}_1(t) = a_{11}\cdot y_1(t) + a_{12}\cdot y_2(t)$$
$$\dot{y}_2(t) = a_{21}\cdot y_1(t) + a_{22}\cdot y_2(t)$$

$$\begin{pmatrix}\dot{y}_1(t)\\ \dot{y}_2(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{y}}(t) = (A)\cdot\vec{y}(t) \quad \vec{y}(t) = \begin{pmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\end{pmatrix}$$

$$\ddot{y}_1 = a_{11}\cdot\dot{y}_1 + a_{12}\cdot\dot{y}_2 = a_{11}\cdot\dot{y}_1 + a_{12}\cdot(a_{21}\cdot y_1 + a_{22}\cdot y_2) = a_{11}\cdot\dot{y}_1 + a_{12}\cdot a_{21}\cdot y_1 + a_{12}\cdot a_{22}\cdot(\dot{y}_1 - a_{11}\cdot y_1)/a_{12}$$

$$\boxed{L(y_1) = \ddot{y}_1 - (a_{11}+a_{22})\cdot\dot{y}_1 + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\cdot y_1 = 0}$$ y_2 wurde eliminiert

$$\boxed{L(y_2) = \ddot{y}_2 - (a_{11}+a_{22})\cdot\dot{y}_2 + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\cdot y_2 = 0}$$ y_1 wurde eliminiert

Es tritt stets derselbe Diff.-operator $L(.)$ auf, da die homog. Diff.-gleichung das resultierende dynamische Systemverhalten bei Ausgleichsvorgängen beschreibt.

$$p(\lambda) = \underbrace{\lambda^2}_{T=1} - \underbrace{(a_{11}+a_{22})}_{D}\cdot\lambda + \underbrace{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}_{K} = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{D}{2T} \pm \sqrt{\left(\frac{D}{2T}\right)^2 - \frac{K}{T}}$$

$$y_a(t) = C_{11}\cdot e^{\lambda_1\cdot t},\; y_b(t) = C_{12}\cdot e^{\lambda_2\cdot t}$$

$$\boxed{y_1(t) = C_{11}\cdot e^{\lambda_1\cdot t} + C_{12}\cdot e^{\lambda_2\cdot t} \quad y_2(t) = C_{21}\cdot e^{\lambda_1\cdot t} + C_{22}\cdot e^{\lambda_2\cdot t}}$$

(Zwei linear unabhängige Lösungen)

$$y_2 = (\dot{y}_1 - a_{11}\cdot y_1)/a_{12} = (\lambda_1 C_{11}\cdot e^{\lambda_1\cdot t} + \lambda_2 C_{12}\cdot e^{\lambda_2\cdot t} - a_{11}C_{11}\cdot e^{\lambda_1\cdot t} - a_{11}C_{12}\cdot e^{\lambda_2\cdot t})/a_{12}$$

$$y_2 = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}}\cdot C_{11}\cdot e^{\lambda_1\cdot t} + \frac{\lambda_2 - a_{11}}{a_{12}}\cdot C_{12}\cdot e^{\lambda_2\cdot t} = K_1\cdot C_{11}\cdot e^{\lambda_1\cdot t} + K_2\cdot C_{12}\cdot e^{\lambda_2\cdot t} = C_{21}\cdot e^{\lambda_1\cdot t} + C_{22}\cdot e^{\lambda_2\cdot t}$$

$$\boxed{\vec{y}(t) = \begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix} = C_{11}\cdot\begin{pmatrix}1\\ K_1\end{pmatrix}\cdot e^{\lambda_1 t} + C_{12}\cdot\begin{pmatrix}1\\ K_2\end{pmatrix}\cdot e^{\lambda_2 t}}$$

Kleinsignalverhalten

Wiederholung

Beispiel 3: Homogenes lineares Diff.-gleichungssystem (2)

Alternativer Lösungsweg über Matrizenrechnung ($m = 2n = 2$):

1) Eigenwertgleichung:

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{y}}(t) = (E)\cdot\dot{\vec{y}}(t) = (A)\cdot\vec{y}(t) \Rightarrow -(E)\cdot\dot{\vec{y}}(t) + (A)\cdot\vec{y}(t) = \vec{0} \qquad (E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösungsansatz: $\vec{y}_i(t) = \begin{pmatrix} C_{i1} \\ C_{i2} \end{pmatrix} \cdot e^{\underline{\lambda}_i \cdot t} = \vec{C}_i \cdot e^{\underline{\lambda}_i \cdot t}, \; i = 1, 2$

$$-(E)\cdot\vec{C}_i \cdot \underline{\lambda}_i \cdot e^{\underline{\lambda}_i \cdot t} + (A)\cdot\vec{C}_i \cdot e^{\underline{\lambda}_i \cdot t} = \vec{0} \Rightarrow \{-(E)\cdot\underline{\lambda}_i + (A)\}\cdot\vec{C}_i = \vec{0}$$

Entweder: $\vec{C}_i = \vec{0}$ oder $\det\{(E)\cdot\underline{\lambda}_i - (A)\} = 0$

$$\det\{-(E)\cdot\underline{\lambda}_i + (A)\} = \det\left\{-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\underline{\lambda}_i + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right\} = \begin{vmatrix} a_{11} - \underline{\lambda}_i & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \underline{\lambda}_i \end{vmatrix} = (a_{11} - \underline{\lambda}_i)\cdot(a_{22} - \underline{\lambda}_i) - a_{21}a_{12} = 0$$

$$\boxed{p(\underline{\lambda}_i) = \det\{-(E)\cdot\underline{\lambda}_i + (A)\} = \underline{\lambda}_i^2 - (a_{11} + a_{22})\cdot\underline{\lambda}_i + a_{11}a_{12} - a_{12}a_{21} = 0 \Rightarrow \underline{\lambda}_1, \underline{\lambda}_2}$$ Eigenwerte

2) Die beiden linear UNabhängigen Lösungen sind die beiden Eigenvektoren $\vec{C}_1, \vec{C}_2$ zu $\underline{\lambda}_1$, $\underline{\lambda}_2$!

Kleinsignalverhalten

Wiederholung

Beispiel 3: Homogenes lineares Diff.-gleichungssystem (3)

1) Die beiden linear UNabhängigen Lösungen sind die beiden Eigenvektoren $\vec{C}_1, \vec{C}_2$ zu $\underline{\lambda}_1$, $\underline{\lambda}_2$:

$$\vec{C}_1 = \begin{pmatrix} C_{11} \\ C_{12} \end{pmatrix} \qquad \vec{C}_2 = \begin{pmatrix} C_{21} \\ C_{22} \end{pmatrix}$$

2) Eigenwertgleichung zu $\underline{\lambda}_1$: $(E)\cdot\vec{C}_1\cdot\underline{\lambda}_1 = (A)\cdot\vec{C}_1 = \begin{pmatrix} C_{11} \\ C_{12} \end{pmatrix}\cdot\underline{\lambda}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} C_{11} \\ C_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} \\ a_{21}C_{11} + a_{22}C_{12} \end{pmatrix}$

3) Ermittlung von $\underline{\lambda}_1$:

$$(\underline{\lambda}_1 - a_{11})\cdot C_{11} - a_{12}C_{12} = 0 \quad (1) \longrightarrow C_{12} = \frac{\underline{\lambda}_1 - a_{11}}{a_{12}}\cdot C_{11} = K_1\cdot C_{11}$$

$$-a_{21}C_{11} + (\underline{\lambda}_1 - a_{22})\cdot C_{12} = 0 \quad (2) \longrightarrow C_{12} = \frac{a_{21}}{\underline{\lambda}_1 - a_{22}}\cdot C_{11} = K_1\cdot C_{11}$$

$$K_1 = \frac{\underline{\lambda}_1 - a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{21}}{\underline{\lambda}_1 - a_{22}}$$

$$\boxed{\vec{C}_1 = \begin{pmatrix} C_{11} \\ C_{12} \end{pmatrix} = C_{11}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ K_1 \end{pmatrix}}$$

4) In gleicher Weise für $\underline{\lambda}_2$: $\vec{C}_2 = \begin{pmatrix} C_{21} \\ C_{22} \end{pmatrix}$ $\quad C_{22} = K_2\cdot C_{21} \quad K_2 = \frac{\underline{\lambda}_2 - a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{21}}{\underline{\lambda}_2 - a_{11}}$

5) Lösung: $\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} C_{11} \\ C_{12} \end{pmatrix}\cdot e^{\underline{\lambda}_1\cdot t} + \begin{pmatrix} C_{21} \\ C_{22} \end{pmatrix}\cdot e^{\underline{\lambda}_2\cdot t}$

$$\boxed{\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_{11}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ K_1 \end{pmatrix}\cdot e^{\underline{\lambda}_1 t} + C_{21}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ K_2 \end{pmatrix}\cdot e^{\underline{\lambda}_2 t}}$$

Kleinsignalverhalten

Wiederholung

Darstellung als Differentialgleichungssystem (1)

- Die Linearisierung der nichtlinearen *LAGRANGE*-Differentialgleichungen zur Untersuchung der Stabilität eines Gleichgewichtszustands bzw. stationären Betriebspunkts $\vec{y}_B$ führt bei konstanten verallgemeinerten Kräften auf ein homogenes System (= „rechte Seite“ $g(t) = 0$) von m linearen Diff.-gleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten a_{ij}.

$$\boxed{\dot{\vec{y}}(t) = (A)\cdot\vec{y}(t) \quad \vec{y}(t) = (y_1(t),\ldots,y_m(t))} \qquad \dot{y}_i(t) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\cdot y_j(t) \quad i = 1,\ldots,m$$

(A): m x m – Matrix mit konstanten Elementen a_{ij} $\quad i = 1,\ldots,m \quad j = 1,\ldots,m$

- Lösungsansatz: $\vec{y}(t) = \sum_{i=1}^{m} \vec{C}_i \cdot e^{\underline{\lambda}_i\cdot t} \qquad \vec{C}_i = (C_{i1},\ldots,C_{im})$
- Liefert für $\vec{C}_i \cdot e^{\underline{\lambda}_i\cdot t}$ m lineare, homogene, algebraische Gleichungssysteme:

$$\boxed{\underline{\lambda}_i\cdot(E)\cdot\vec{C}_i - (A)\cdot\vec{C}_i = \vec{0}}$$

(E): m x m – Einheitsmatrix, $(E)\cdot\vec{C}_i = \vec{C}_i \qquad \vec{0} = (0,\ldots,0)$ (Nullvektor)

zur Bestimmung der Vektoren $\vec{C}_i$. Es gibt nur dann Lösungen $\vec{C}_i \neq \vec{0}$, wenn zumindest zwei Gleichungszeilen im Gleichungssystem voneinander linear abhängig sind, wenn also die Koeffizientendeterminante *Det* des Gleichungssystems Null ist.

$$(\underline{\lambda}_i\cdot(E)-(A))\cdot\vec{C}_i = (B)\cdot\vec{C}_i = \vec{0} \Rightarrow \vec{C}_i \neq \vec{0} \Leftrightarrow \det\{(B)\} = 0 \qquad \boxed{Det = \det\{\underline{\lambda}_i\cdot(E)-(A)\} = 0}$$

Kleinsignalverhalten

Wiederholung

Darstellung als Differentialgleichungssystem (2)

- Die Gleichung $Det = \det\{\underline{\lambda}\cdot(E)-(A)\}=0$ ist eine algebraische Gleichung *m*-ten Grades mit den konstanten Koeffizienten b_i, i = 1, …, *m* („charakteristisches Polynom“)

$$p(\underline{\lambda}) = b_m \cdot \underline{\lambda}^m + b_{m-1}\cdot\underline{\lambda}^{m-1} + \ldots + b_1\cdot\underline{\lambda} + b_0 = 0$$

- Diese Gleichung bestimmt die *m* möglichen Werte von $\underline{\lambda}$ als $\underline{\lambda}_i$, *i* = 1, …, *m*.

- Zu jedem Eigenwert $\underline{\lambda}_i$ gehört gemäß $\underline{\lambda}_i\cdot(E)\cdot\vec{C}_i-(A)\cdot\vec{C}_i=\vec{0}$ ein Satz von Zahlen

  $$\vec{C}_i = (C_{i1},\ldots,C_{i,m}) \qquad \vec{C}_i = C_{i1}\cdot(1, K_{i1},\ldots,K_{i,m-1})$$

  als „Eigenvektor“ $\vec{C}_i$ zum *i*-ten „Eigenwert“ $\underline{\lambda}_i$,
  die bis auf einen gemeinsamen konstanten Faktor C_{i1} bestimmt sind.

- Die allgemeine Lösung von $\vec{y}(t)=(A)\cdot\vec{y}(t)$ ist daher: $\vec{y}(t)=\vec{C}_1\cdot e^{\underline{\lambda}_1 t}+\ldots+\vec{C}_m\cdot e^{\underline{\lambda}_m t}$

- Numerisch wird dieses Differentialgleichungssystem aus *m* Gleichungen 1. Ordnung mit dem *RUNGE-KUTTA*-Verfahren vorteilhaft gelöst.

Kleinsignalverhalten
Lineares Differentialgleichungssystem

Resultat:

Die Lösung eines linearen Differentialgleichungssystems mit *m* Gleichungen 1. Ordnung kann entweder

a) durch Rückführung auf EINE Diff.-gleichung *m*-ter höherer Ordnung für eine der *m* -1 unbekannten Funktionen erfolgen

oder

b) über die Eigenwertgleichung der *m* x *m*-Systemmatrix (*A*) als Linearkombination aller *m* unabhängigen Eigenvektoren $\vec{C}_i$.

$$\vec{C}_i = \begin{pmatrix} C_{i1} \\ C_{i2} \\ \dots \\ C_{i,m} \end{pmatrix} \quad i = 1,\dots,m$$

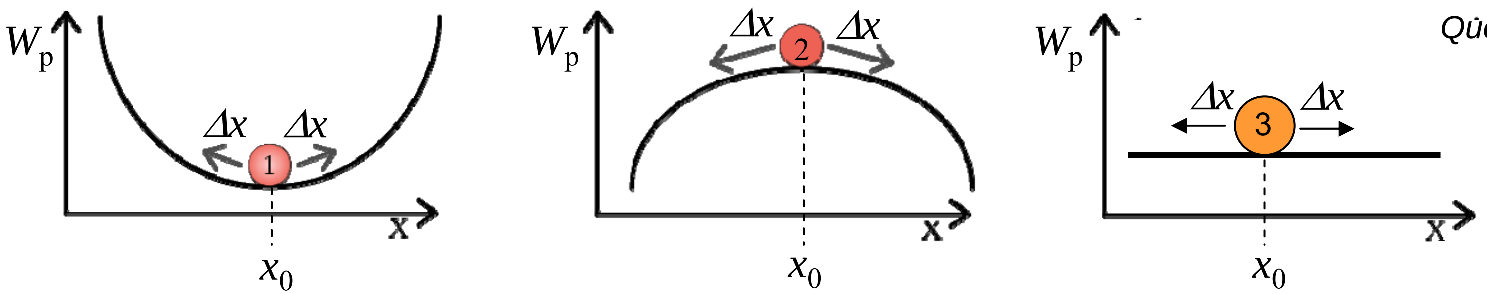
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Gleichgewicht
- Linearisierung
- Kleinsignalverhalten
- Stabilität
- Statische Stabilität
- Dynamische Stabilität
- Lineares System mit konstanten Koeffizienten: Beispiel

Stabilität

Stabilität vs. Instabilität

- Wird ein System aus einer Gleichgewichtslage x_0 um Δx ausgelenkt und kehrt von selbst wieder zu x_0 zurück, ist es in x_0 asymptotisch stabil!
- Bleibt es nach der Auslenkung innerhalb eines begrenzten Bereichs $x_0 \pm x_\varepsilon$, ist es in x_0 zwar stabil, aber nicht asymptotisch stabil.
- Entfernt es sich nach der Auslenkung weiter weg von x_0 (monoton oder schwingend), ist es in x_0 instabil.



Quelle: Wikipedia.de

1: Asymptotisch stabil

2: Instabil

3: Stabil: „Indifferentes“ Gleichgewicht

- Damit 3 stabil ist, sind nur Auslenkungen Δx, aber keine Auslenkungsgeschwindigkeiten Δv für die Stabilitätsuntersuchung zugelassen!

Stabilität
Grundsätzliches

- Nichtlineares System:

a) Linearisiertes System:
Stabilitätsuntersuchung für „kleine Auslenkungen“ $|\Delta x/x_0| << 1$.

b) Bei größeren Auslenkungen:
Stabilitätsuntersuchung muss auch nichtlineare Terme berücksichtigen.
(z. B. mit *Lyapunov*-Theorie der Stabilitätsuntersuchung).

- Lineares System:

Beliebig große Auslenkungen Δx sind bei Stabilitätsuntersuchung möglich.

Stabilität
Linearisiertes od. lineares System

- Die homogene Lösung $y_h(t)$ der lin. Diff.-gleichung beschreibt den transienten (flüchtigen) Ausgleichsvorgang als Systemantwort auf eine Störung (Anregung) in einem bestimmten Betriebspunkt (Gleichgewichtspunkt, „Arbeitspunkt“).
- Die partikuläre Lösung $y_p(t)$ der lin. Diff.-gleichung beschreibt das stationäre (dauernde) Betriebsverhalten des Systems aufgrund der Störung (Anregung), z. B. durch eine Veränderung des Arbeitspunkts.
- Wenn die Größe $y_h(t)$ mit der Zeit abklingt und verschwindet, ist das System im betreffenden Arbeitspunkt asymptotisch STABIL.
- Es müssen daher a) die reellen Eigenwerte $\lambda_k < 0$ bzw.
  b) die Realteile $\alpha_k = \mathrm{Re}(\underline{\lambda}_k) < 0$ der komplexen Eigenwerte $\underline{\lambda}_k$
  sämtlich negativ sein, damit $y_h(t)$ abklingt.
- Bei $\lambda_k = 0$ bzw. $\alpha_k = 0$ verbleibt eine dauernde Abweichung (z. B. Dauerschwingung): Ist stabil, aber nicht asymptotisch stabil.

Beispiel 4: Stabilität der Lösungen

Beispiel 4:

n = 1: Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$T \cdot \ddot{y} + D \cdot \dot{y} + K \cdot y = 0$$

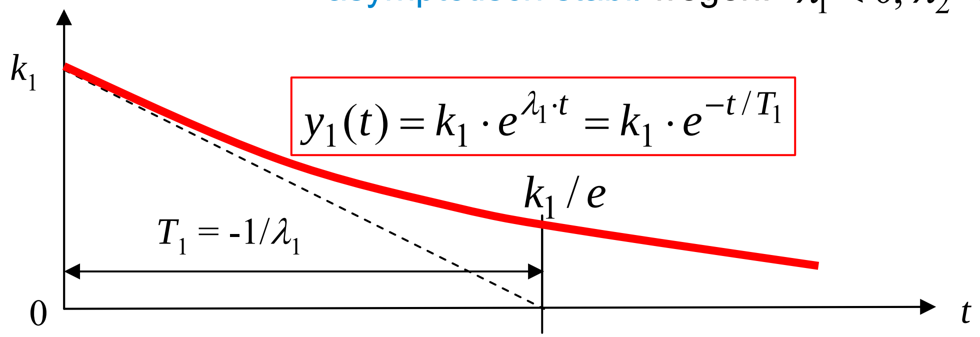
$$y_1(t) = k_1 \cdot e^{\lambda_1 t} \qquad y_2(t) = k_2 \cdot e^{\lambda_2 t}$$

$$p(\lambda) = T \cdot \lambda^2 + D \cdot \lambda + K = 0 = (\lambda - \underline{\lambda}_1) \cdot (\lambda - \underline{\lambda}_2)$$

$$\underline{\lambda}_{1,2} = -\frac{D}{2T} \pm \sqrt{\left(\frac{D}{2T}\right)^2 - \frac{K}{T}} \quad \text{Falls} \left(\frac{D}{2T}\right)^2 > \frac{K}{T} = 0 \Rightarrow \underline{\lambda}_1 = \lambda_1, \underline{\lambda}_2 = \lambda_2 \text{ reell}$$

$$y_1(t) = k_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t}, \; y_2(t) = k_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t}$$

Für $D/T > 0$ ist System im betrachteten Arbeitspunkt asymptotisch stabil wegen: $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$



Stabilität

Kriterium von *HURWITZ* für Stabilität

- Die algebraische Gleichung $p(\lambda) = b_m \cdot \lambda^m + b_{m-1} \cdot \lambda^{m-1} + \ldots + b_1 \cdot \lambda + b_0 = 0$
  a) mit reellen Koeffizienten b_i
  b) und $b_0 > 0$ (ggf. Multiplikation von $p(\lambda)$ mit -1)
  besitzt genau dann nur Wurzeln (Lösungen) λ_i mit negativem Realteil,
  wenn die m Determinanten D_i alle positiv sind.
  Dabei sind die Koeffizienten $b_r = 0$ zu setzen, wenn $r > m$ ist.

$$D_1 = b_1 \quad D_2 = \begin{vmatrix} b_1 & b_0 \\ b_3 & b_2 \end{vmatrix} \quad D_3 = \begin{vmatrix} b_1 & b_0 & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 \\ b_5 & b_4 & b_3 \end{vmatrix}, \quad \ldots \quad, D_m = \begin{vmatrix} b_1 & b_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & \ldots & 0 \\ b_5 & b_4 & b_3 & b_2 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & \ldots & . \\ . & . & . & . & \ldots & . \\ \underbrace{b_{2m-1}}_{0} & \underbrace{b_{2m-2}}_{0} & \underbrace{b_{2m-3}}_{0} & . & \ldots & b_m \end{vmatrix}$$

- **Stabilitätskriterium von *Adolf HURWITZ* (Deutsches Kaiserreich, 1895):**

$$D_1 > 0,\ D_2 > 0, \ldots, D_m > 0 \Rightarrow \mathrm{Re}\{\underline{\lambda}_i\} < 0$$

Der entsprechende Betriebspunkt ist asymptotisch STABIL !

Stabilität

Beispiel 5:

HURWITZ-Kriterium für Differentialgleichung 2. Ordnung

1) Gegeben: Lineare homogene Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

$$L(y_1) = T \cdot \ddot{y}_1 + D \cdot \dot{y}_1 + K = 0 \qquad L(y_1) = b_2 \cdot \ddot{y}_1 + b_1 \cdot \dot{y}_1 + b_0 \cdot y_1 = 0 \qquad b_0 = K > 0$$

2) Anwendung des *HURWITZ*-Kriteriums:

$$D_1 = b_1 = D > 0 \qquad D_2 = \begin{vmatrix} b_1 & b_0 \\ b_3 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & b_0 \\ 0 & b_2 \end{vmatrix} = b_1 b_2 = T \cdot D > 0$$

3) Vergleichsrechnung: Bestimmung der Eigenwerte mit *VIETA*:

Wenn $D > 0$ und $T \cdot D > 0$, dann ist auch $D/T > 0$ und daher bei $K > 0$: $\boxed{\mathrm{Re}\{\underline{\lambda}_{1,2}\} < 0}$

a) $$\mathrm{Re}\{\underline{\lambda}_{1,2}\} = \mathrm{Re}\left\{-\frac{D}{2T} \pm \sqrt{\left(\frac{D}{2T}\right)^2 - \frac{K}{T}}\right\} = -\frac{D}{2T} \pm \sqrt{\left(\frac{D}{2T}\right)^2 - \frac{K}{T}} < 0 \qquad \text{Falls} \left(\frac{D}{2T}\right)^2 - \frac{K}{T} \geq 0$$

b) $$\mathrm{Re}\{\underline{\lambda}_{1,2}\} = \mathrm{Re}\left\{-\frac{D}{2T} \pm \sqrt{\left(\frac{D}{2T}\right)^2 - \frac{K}{T}}\right\} = -\frac{D}{2T} < 0 \qquad \text{Falls} \left(\frac{D}{2T}\right)^2 - \frac{K}{T} < 0$$

Fazit: Die homogene Lösung ist asymptotisch STABIL (abklingend), wenn *T*, *D*, *K* > 0!

Stabilität

Beispiel 6:

Stabilität für Differentialgleichung 2. Ordnung (1)

$\boxed{T\cdot\ddot{y}+D\cdot\dot{y}+K\cdot y=0 \quad T>0}$ Gleichgewichtslage: *d./dt* = 0 $K\cdot y=0\Rightarrow y=0$

Wir erteilen dem System eine Anfangsstörung = Auslenkung aus der Gleichgewichtslage:

$y(t=0)=y_0,\ \dot{y}(t=0)=v_0$ Stabilitätsuntersuchungen werden dann für $v_0 = 0$ gemacht!

Fallunterscheidung:

1) $D^2 > 4\cdot T\cdot K$: Nicht-oszillierende STABILE ($\beta > \alpha$) oder INSTABILE ($\beta < \alpha$) Bewegung:

$$\lambda_{1,2}=-\frac{D}{2T}\pm\frac{1}{2T}\cdot\sqrt{D^2-4\cdot K\cdot T}=-\beta\pm\alpha \qquad \beta=\frac{D}{2T} \quad \alpha=\frac{1}{2T}\cdot\sqrt{D^2-4\cdot K\cdot T}>0$$

Ausgleichsvorgang: $\boxed{y(t)=e^{-\beta\cdot t}\cdot\left\{\frac{v_0+\beta\cdot y_0}{\alpha}\cdot\mathrm{sh}(\alpha\cdot t)+y_0\cdot\mathrm{ch}(\alpha\cdot t)\right\}}$

$$\begin{matrix}\mathrm{sh}(\alpha\cdot t)\\ \mathrm{ch}(\alpha\cdot t)\end{matrix}=\frac{1}{2}\cdot\left(e^{\alpha\cdot t}\mp e^{-\alpha\cdot t}\right)$$

INSTABIL: $\begin{cases}\beta<\alpha\Rightarrow D<\sqrt{D^2-4\cdot T\cdot K}\Rightarrow D>0\wedge K<0\\ \beta<\alpha\Rightarrow D<\sqrt{D^2-4\cdot T\cdot K}\Rightarrow D<0\wedge(K>0,K<0,\text{ so dass }D^2>4\cdot T\cdot K)\end{cases}$

STABIL: $\beta>\alpha\Rightarrow D>\sqrt{D^2-4\cdot T\cdot K}\Rightarrow K>0\wedge D>2\cdot\sqrt{T\cdot K}$

$$\left.\begin{matrix}1a) & K<0,\ D\ \text{beliebig}, & \text{d.h. }\alpha>|\beta|>0\\ 1b) & K>0,\ D<-2\cdot\sqrt{T\cdot K}, & \text{d.h. }-\beta>\alpha>0\end{matrix}\right\}\ \text{INSTABIL}$$

$$1c) \quad K>0,\ D>2\cdot\sqrt{T\cdot K}, \quad \text{d.h. }\beta>\alpha>0 \qquad \text{STABIL}$$

Stabilität

Beispiel 6:

Stabilität für Differentialgleichung 2. Ordnung (2)

2) $D^2 < 4 \cdot T \cdot K \Rightarrow K > 0$: Oszillierende STABILE ($\beta > 0$) oder INSTABILE ($\beta < 0$) Bewegung:

$$\underline{\lambda}_{1,2} = -\frac{D}{2T} \pm \frac{j}{2T} \cdot \sqrt{4 \cdot K \cdot T - D^2} = -\beta \pm j \cdot \omega \qquad \beta = \frac{D}{2T} \quad \omega = \frac{1}{2T} \cdot \sqrt{4 \cdot K \cdot T - D^2} > 0$$

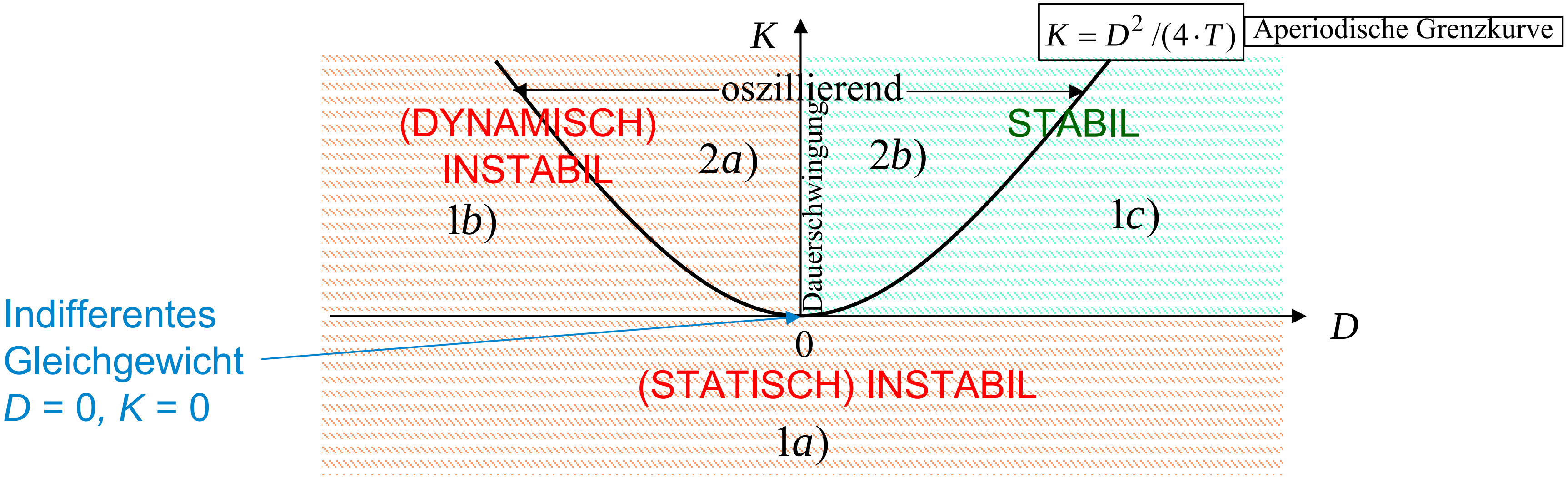
Ausgleichsvorgang: $\boxed{y(t) = e^{-\beta \cdot t} \cdot \left\{ \frac{v_0 + \beta \cdot y_0}{\omega} \cdot \sin(\omega \cdot t) + y_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) \right\}}$

$$2a) \quad K > 0, -2 \cdot \sqrt{T \cdot K} < D < 0 \ , \text{d.h. } \beta < 0$$ INSTABIL

$$2b) \quad K > 0, 2 \cdot \sqrt{T \cdot K} > D > 0, \quad \text{d.h. } \beta > 0$$ STABIL

$$\begin{matrix} \mathrm{sh}(j\omega \cdot t) \\ \mathrm{ch}(j\omega \cdot t) \end{matrix} = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{j\omega \cdot t} \mp e^{-j\omega \cdot t} \right) = \begin{matrix} \mathrm{j} \cdot \sin(\omega \cdot t) \\ \cos(\omega \cdot t) \end{matrix}$$

Beispiel 6:
Stabilität für Differentialgleichung 2. Ordnung (3)



- Dauerschwingung: Stabil, aber nicht asymptotisch $D = 0$, $K > 0$:

$$T \cdot \ddot{y} + \underbrace{D}_{0} \cdot \dot{y} + K \cdot y = 0, \quad T, K > 0: \quad T \cdot \ddot{y} + K \cdot y = 0 \rightarrow y(t) = y_0 \cdot \cos \omega_0 t, \quad \omega_0 = \sqrt{K/T}$$

- Indifferentes Gleichgewicht $D = 0$, $K = 0$:

$$T \cdot \ddot{y} + \underbrace{D}_{0} \cdot \dot{y} + \underbrace{K}_{0} \cdot y = 0, \quad T > 0: \quad T \cdot \ddot{y} = 0 \rightarrow y(t) = \underbrace{v_0}_{0} t + y_0 = y_0$$

- Gleichgewicht
- Linearisierung
- Kleinsignalverhalten
- Stabilität
- Statische Stabilität
- Dynamische Stabilität
- Lineares System mit konstanten Koeffizienten: Beispiel

Statische Stabilität
Im Arbeitspunkt: Linearisierung (1)

- Nichtlineare Differentialgleichung 2. Ordnung: $\boxed{\mu(\dot{y},y)\cdot\ddot{y}+\kappa(\dot{y},y)=f=konst.}$
- Gleichgewichtslage y_0: $d./dt=0:\ddot{y}=0,\dot{y}=0\Rightarrow\kappa(0,y_0)=f$
- Linearisierung: $y=y_0+\Delta y,\ \Delta y/y_0<<1:\quad \dot{y}=\Delta\dot{y},\ \ddot{y}=\Delta\ddot{y}\Rightarrow\mu(\dot{y}_0,y_0)=\mu(0,y_0),\ \kappa(\dot{y}_0,y_0)=\kappa(0,y_0)$

$$\mu(\Delta\dot{y},y_0+\Delta y)=\mu(0,y_0)+\frac{\partial\mu}{\partial\Delta\dot{y}}\cdot\Delta\dot{y}+\frac{\partial\mu}{\partial\Delta y}\cdot\Delta y\qquad \kappa(\Delta\dot{y},y_0+\Delta y)=\kappa(0,y_0)+\frac{\partial\kappa}{\partial\Delta\dot{y}}\cdot\Delta\dot{y}+\frac{\partial\kappa}{\partial\Delta y}\cdot\Delta y$$

$$\mu(\Delta\dot{y},y_0+\Delta y)\cdot\Delta\ddot{y}=\mu(0,y_0)\cdot\Delta\ddot{y}+\cancel{\frac{\partial\mu}{\partial\Delta\dot{y}}\cdot\Delta\dot{y}\cdot\Delta\ddot{y}}+\cancel{\frac{\partial\mu}{\partial\Delta y}\cdot\Delta y\cdot\Delta\ddot{y}}\approx\mu(0,y_0)\cdot\Delta\ddot{y}$$

$$\mu(0,y_0)\cdot\Delta\ddot{y}+\cancel{\kappa(0,y_0)}+\frac{\partial\kappa}{\partial\Delta\dot{y}}\cdot\Delta\dot{y}+\frac{\partial\kappa}{\partial\Delta y}\cdot\Delta y=\cancel{f}$$

$$\boxed{\begin{gathered}\underbrace{\mu(0,y_0)}_{T}\cdot\Delta\ddot{y}+\underbrace{\frac{\partial\kappa}{\partial\Delta\dot{y}}(0,y_0)}_{D}\cdot\Delta\dot{y}+\underbrace{\frac{\partial\kappa}{\partial\Delta y}(0,y_0)}_{K}\cdot\Delta y=0\\ T\cdot\ddot{y}+D\cdot\dot{y}+K\cdot y=0\end{gathered}}$$

Statische Stabilität
Im Arbeitspunkt: Linearisierung (2)

$$\boxed{\begin{gathered}\underbrace{\mu(0,y_0)}_{T}\cdot\Delta\ddot{y}+\underbrace{\frac{\partial\kappa}{\partial\Delta\dot{y}}(0,y_0)}_{D}\cdot\Delta\dot{y}+\underbrace{\frac{\partial\kappa}{\partial\Delta y}(0,y_0)}_{K}\cdot\Delta y=0\\ T\cdot\ddot{y}+D\cdot\dot{y}+K\cdot y=0\end{gathered}}$$

$$T=\mu(0,y_0)\quad D=\frac{\partial\kappa}{\partial\Delta\dot{y}}(0,y_0)\quad K=\frac{\partial\kappa}{\partial\Delta y}(0,y_0)$$

- Für $T > 0$ ist bei $K < 0$ die Ausgleichsbewegung nicht-oszillierend aufklingend (Fall 1a)) = INSTABIL.

- Aus dem Anstieg der statischen Gleichgewichtskurve $\boxed{\kappa(0,y_0)=f}$ kann gemäß $\boxed{\frac{\partial\kappa}{\partial\Delta y}(0,y_0)<0}$

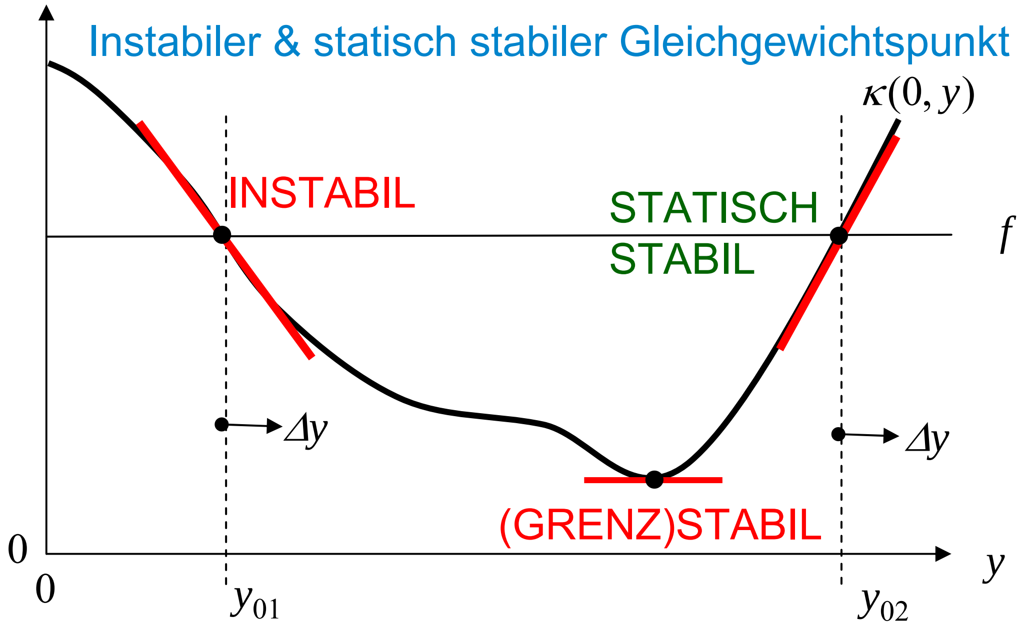
  für jeden Gleichgewichtspunkt y_0 die (statische) Instabilität überprüft werden.

- Instabil: $\frac{\partial\kappa}{\partial\Delta y}(0,y_0)<0$ asymptotisch stabil: $\frac{\partial\kappa}{\partial\Delta y}(0,y_0)>0$ (grenz)stabil: $\frac{\partial\kappa}{\partial\Delta y}(0,y_0)=0$

Statische Stabilität
Statische Gleichgewichtskurve „gibt Auskunft“

- Statische Gleichgewichtskurve: Gleichgewichtspunkt y_0: $\kappa(0, y_0) = f$

$$\boxed{K = \frac{\partial \kappa}{\partial \Delta y}(0, y_0) < 0}$$ Instabilität für $f = \text{konst.}$



- Zur Ermittlung der statischen Instabilität muss die Linearisierung der nichtlinearen Differentialgleichung nicht durchgeführt werden.
  Es genügt, die statische Wandler-Kennlinie $\kappa(0, y)$ zu betrachten.

Statische Stabilität
Begrenzte Aussagekraft

- ACHTUNG:
  Der „statisch stabile“ Punkt y_{02} hat die notwendige Bedingung $K > 0$.
  Sie ist aber nicht hinreichend, da für $D < 0$ „dynamisch“ Instabilität auftritt
  (= negative Dämpfung).

- Formen der dynamischen Instabilität können mit diesem „statischen Test“
  NICHT entdeckt werden.

Statische Stabilität
Warum der Begriff „Statisch"?

- In elektromechanischen Wandlern/Aktoren werden häufig Gleichgewichtslagen betrachtet.
- In einer stabilen Gleichgewichtslage RUHT das bewegliche Wandlerteil (x = konst.). Sein Ort x ist statisch = alle Zeitänderungen sind Null ($d./dt = 0$). Deshalb ist die stabile Ruhelage statisch stabil!
- Die Kurven der statischen Gleichgewichtslagen geben durch ihre räumlichen Anstiege im betrachteten Gleichgewichtspunkt $d./dx$ Auskunft über die statische Stabilität.
- Bei rotierenden elektromechanischen Wandlern (= elektrische Maschinen) gilt als „Gleichgewichtspunkt" ein stabiler Betrieb mit konstanter Drehzahl n und Drehmoment M. Diesen Betrieb bezeichnet man als STATIONÄR ($n = (d\gamma/dt)/(2\pi)$ = konst.), nicht statisch, da der mechanische Drehwinkel γ dabei ständig zunimmt: $\gamma(t) = 2\pi \cdot n \cdot t + \gamma(t=0)$
- Die Stabilität des Gleichgewichtspunkts (antreibendes Motormoment = bremsendes Lastmoment) wird ebenfalls mit der hier beschriebenen Methode für kleine Drehzahlstörungen Δn untersucht.
- Man nennt solche stabilen Punkte quasistatisch stabil (korrekt wäre: stationär stabil); häufig auch vereinfacht „statisch stabil", obwohl die Rotation kein statischer Zustand ist!

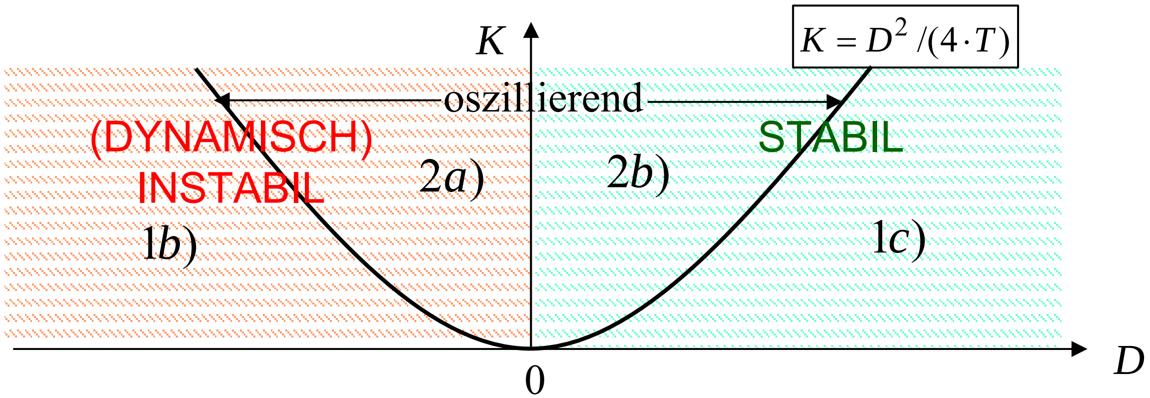
- Gleichgewicht
- Linearisierung
- Kleinsignalverhalten
- Stabilität
- Statische Stabilität
- Dynamische Stabilität
- Lineares System mit konstanten Koeffizienten: Beispiel

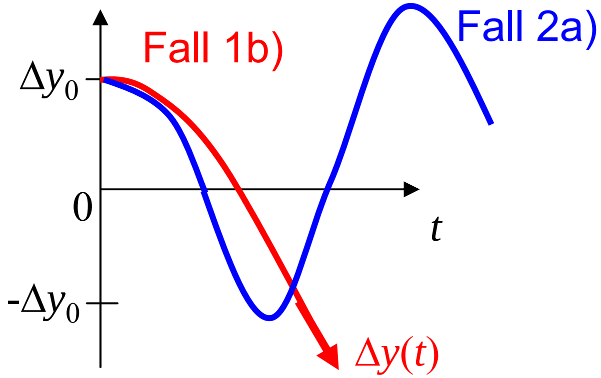
Dynamische Stabilität
Stabilitätsuntersuchung

- Dynamische Instabilität kommt wegen $D < 0$ durch „negative Dämpfung" zustande.
- Die aufklingende Bewegung kann oszillierend (Fall 2a)) oder nicht-oszillierend (Fall 1b)) sein
- **Beispiel 6:** $T \cdot \Delta\ddot{y} + D \cdot \Delta\dot{y} + K \cdot \Delta y = 0 \quad T > 0, K > 0, D < 0 \qquad \Delta y(t=0) = \Delta y_0 > 0, \Delta\dot{y}(t=0) = 0$

$t = 0$: $\Delta\ddot{y}(0) = -\Delta y(0) \cdot K / T$ System wird zu Beginn gegen Δy_0 beschleunigt.
Mit wachsender Geschwindigkeit steigt wegen $D < 0$ die (nun antreibende) Dämpfungs-Kraft.
Das System wird über den Punkt $-\Delta y_0$ beschleunigt und kehrt im Fall 1b) nicht mehr um.

Bei hinreichend großer Rückstellkraft ($K > D^2/(4T)$) kehrt das System zwar immer wieder um (Fall 2b, „oszillierend"), aber die Abstände der Umkehrpunkte von der Ruhelage $\Delta y = 0$ nehmen immer mehr zu.





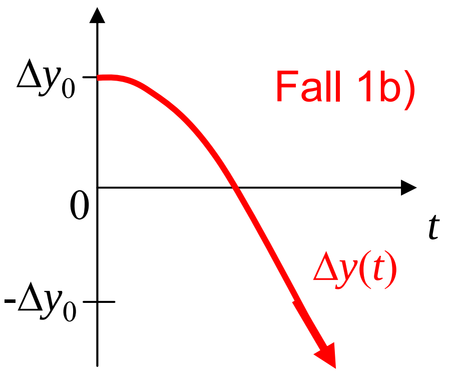
Dynamische Stabilität
<u>Beispiel:</u> Fall 1b) Nicht-oszillierend $0 < K < D^2/(4T)$

- **<u>Beispiel 6:</u>** $T \cdot \Delta\ddot{y} + D \cdot \Delta\dot{y} + K \cdot \Delta y = 0 \quad T > 0, K > 0, D < 0 \qquad \Delta\ddot{y} + \frac{D}{T} \cdot \Delta\dot{y} + \frac{K}{T} \cdot \Delta y = 0$

$$\lambda_1 = \underbrace{-\frac{D}{2T}}_{>0} + \frac{1}{2T} \cdot \sqrt{\underbrace{D^2 - 4 \cdot K \cdot T}_{>0}} > \lambda_2 = -\frac{D}{2T} - \frac{1}{2T} \cdot \sqrt{D^2 - 4 \cdot K \cdot T} > 0$$

Für $\Delta y(t=0) = \Delta y_0 > 0, \Delta\dot{y}(t=0) = 0$ folgt die Lösung: $\Delta y(t) = \frac{\Delta y_0}{1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \cdot \left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + e^{\lambda_2 \cdot t} \right)$

Dominant wegen $\lambda_1 > \lambda_1$



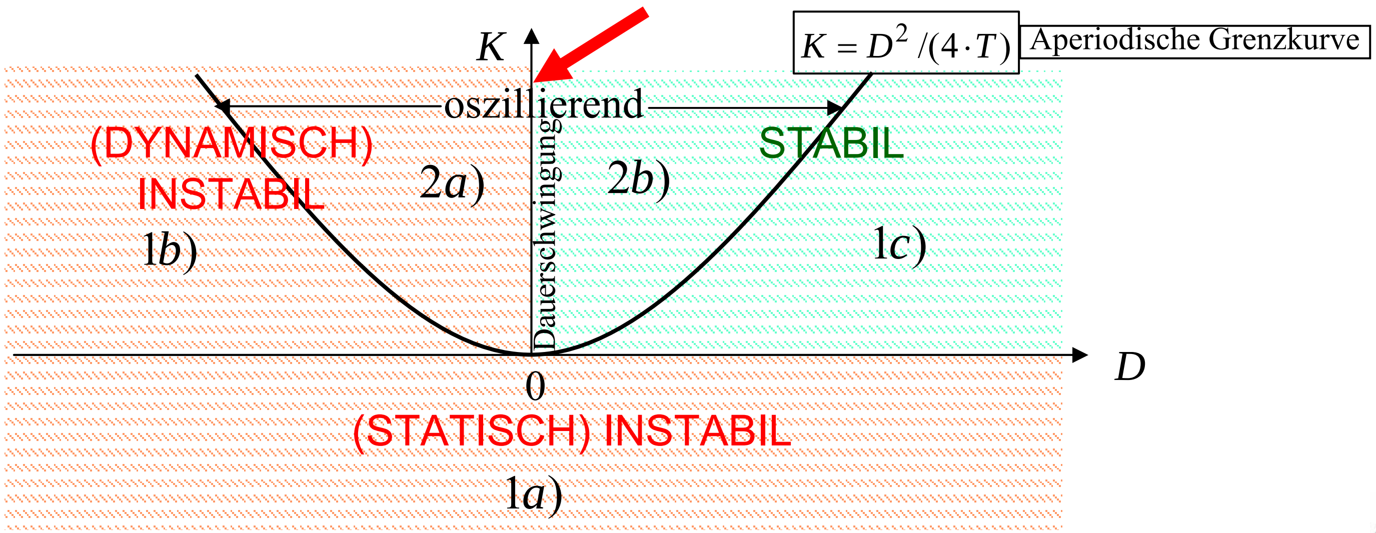
- Zu Beginn: System wird wegen
  $T \cdot \Delta\ddot{y}(0) = -D \cdot \Delta\dot{y}(0) - K \cdot \Delta y(0) = -K \cdot \Delta y_0 < 0$
  gegen $\Delta y = 0$ (= -y-Richtung) beschleunigt.
- Mit wachsender Geschwindigkeit $\Delta\dot{y}$ steigt wegen $D < 0$
  die (nun in -y-Richtg. antreibende) Dämpfungs-Kraft $-D \cdot \Delta\dot{y} < 0$
- Das System wird über den Punkt -Δy_0 beschleunigt
  und kehrt nicht mehr um $\Rightarrow$ INSTABIL.

Dynamische Stabilität
Ungedämpft statisch stabil $D = 0, K > 0$

$$T \cdot \Delta\ddot{y} + D \cdot \Delta\dot{y} + K \cdot \Delta y = 0 \quad T > 0, K > 0, D = 0 \qquad \Delta\ddot{y} + \frac{K}{T} \cdot \Delta y = 0$$

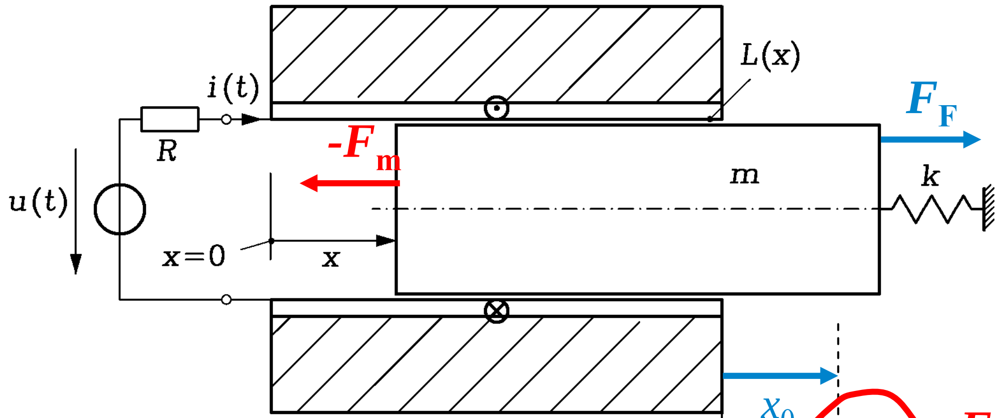
$$\lambda_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{-4 \cdot K \cdot T}}{2T} = \pm j \cdot \frac{\sqrt{4 \cdot K \cdot T}}{2T} = \pm j \cdot \sqrt{K/T} = \pm j \cdot \omega \qquad \boxed{\Delta y(t) = \frac{\Delta\dot{y}_0}{\omega} \cdot \sin(\omega \cdot t) + \Delta y_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)}$$

- Es tritt eine ungedämpfte Dauerschwingung um den Gleichgewichtspunkt auf !
  Prinzipiell stabiles Verhalten, aber technisch unbrauchbar.
  Dämpfung ist nötig, um in den Ausgangszustand asymptotisch zurückzukehren!



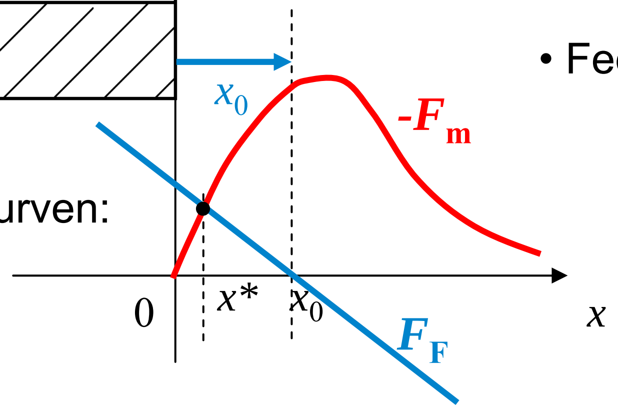
- Gleichgewicht
- Linearisierung
- Kleinsignalverhalten
- Stabilität
- Statische Stabilität
- Dynamische Stabilität
- Lineares System mit konstanten Koeffizienten: Beispiel

Lineares System mit konstanten Koeffizienten
Beispiel 7: Magnet und Feder



- Konstanter Strom $i(t) = I$
- Feder entspannt bei $x = x_0$
- Magnetkraft: $F_m(x) = \frac{I^2}{2} \cdot \frac{dL(x)}{dx}$
- Federkraft: $F_F(x) = -k \cdot (x - x_0)$

- Statische Kraftkurven:



$$m \cdot \ddot{x} = F_F + F_m \Rightarrow m \cdot \ddot{x} - F_F(x) - F_m(x) = 0, \qquad m \cdot \ddot{x} + k \cdot (x - x_0) - \frac{I^2}{2} \cdot \frac{dL(x)}{dx} = 0$$

- Gleichgewichtslage x^*: $F_F(x^*) = -F_m(x^*)$
- Ist Gleichgewichtslage x^* stabiler Arbeitspunkt bei einer kleinen „Störung“ $\Delta x = x - x^*$?

Lineares System mit konstanten Koeffizienten

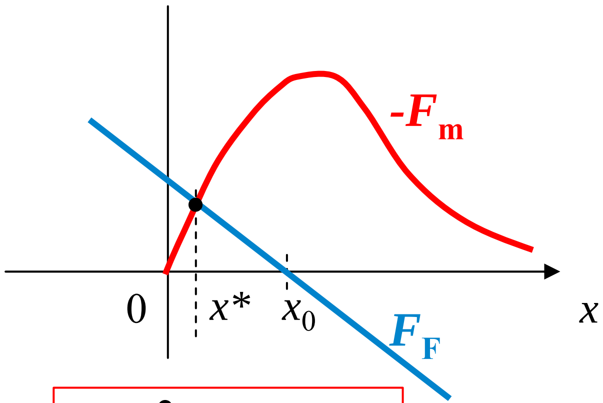
Beispiel 7: Statische Stabilität (ohne Dämpfung)

$$\mu(0,y)\cdot\ddot{y}+\kappa(0,y)-f=0 \longrightarrow m\cdot\ddot{x}+k\cdot x-\frac{I^2}{2}\cdot\frac{dL(x)}{dx}-k\cdot x_0=0$$

$$\underbrace{\mu(0,y^*)}_{T}\cdot\Delta\ddot{y}+\underbrace{\frac{\partial\kappa}{\partial\Delta y}(0,y^*)}_{K}\cdot\Delta y=0 \longrightarrow m\cdot\Delta\ddot{x}+\left(-\left.\frac{dF_F}{dx}\right|_{x^*}-\left.\frac{dF_m}{dx}\right|_{x^*}\right)\cdot\Delta x=0$$

$$m\cdot\Delta\ddot{x}+(k-k_m)\cdot\Delta x=0$$

$$T\cdot\Delta\ddot{y}+K\cdot\Delta y=0$$



$$\boxed{K=\frac{\partial\kappa}{\partial\Delta y}(0,y_0)>0}$$

- „Magnetische Federkonstante" $k_m(x^*)=dF_m/dx$ bei x^* :

$$k_m(x^*)=\left.\frac{dF_m}{dx}\right|_{x^*}=\frac{I^2}{2}\cdot\left.\frac{d^2L(x)}{dx^2}\right|_{x^*}$$

- Resultierende Steifigkeit $k_{res}(x^*)$:

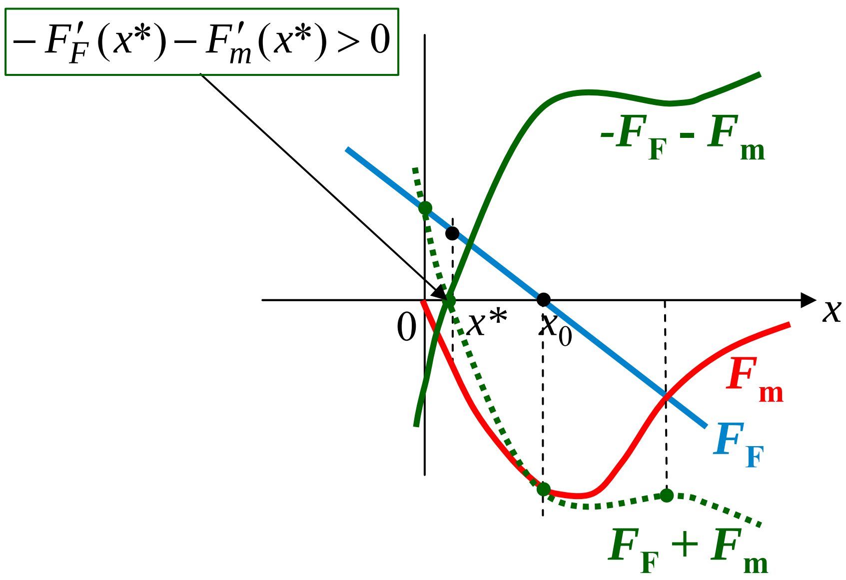
$$K(x^*)=\underbrace{-\left.\frac{dF_F}{dx}\right|_{x^*}}_{k>0}\underbrace{-\left.\frac{dF_m}{dx}\right|_{x^*}}_{-k_m(x^*)>0}=k-k_m(x^*)=k_{res}(x^*)$$

- Gleichgewichtslage x^* ist ein asymptotisch stabiler Arbeitspunkt.

Lineares System mit konstanten Koeffizienten
Beispiel 7: Graphisch: Statische Stabilität

$$\kappa(0,y)-f \Leftrightarrow -F_F(x)-F_m(x)$$

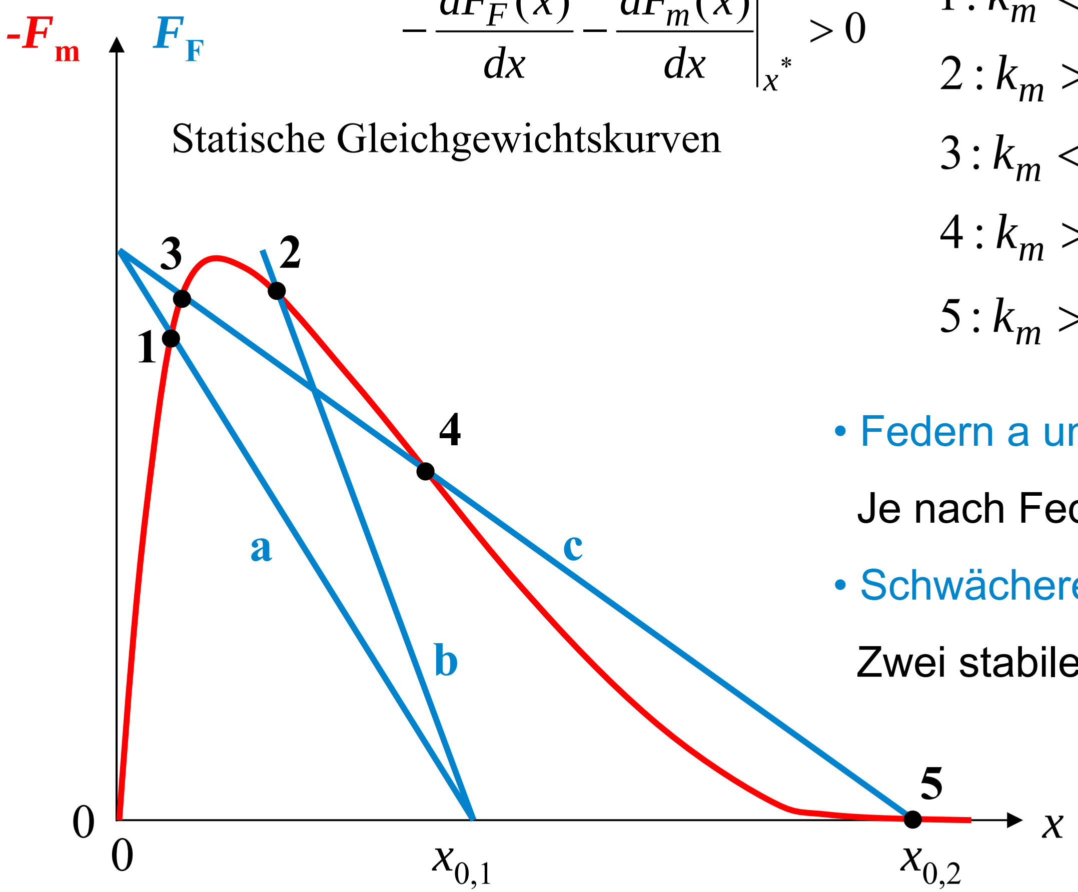
$$K=\frac{\partial\kappa}{\partial\Delta y}(0,y_0)>0 \qquad -F_F'(x^*)-F_m'(x^*)>0 \qquad k-k_m(x^*)>0$$



- Statisch stabil: Positive Tangentenneigung von $\kappa(0,y)-f=-F_F(x)-F_m(x)$ im Arbeitspunkt x^*.

Lineares System mit konstanten Koeffizienten

Beispiel 7: Magnet und Feder: Statische Stabilität



STABIL $\boxed{k - k_m > 0}$

$$-\frac{dF_F(x)}{dx} - \frac{dF_m(x)}{dx}\bigg|_{x^*} > 0$$

k stets > 0

$1: k_m < 0 \Rightarrow k - k_m > 0 \Rightarrow$ stabil

$2: k_m > 0, |k_m| < k \Rightarrow k - k_m > 0 \Rightarrow$ stabil

$3: k_m < 0 \Rightarrow k - k_m > 0 \Rightarrow$ stabil

$4: k_m > 0, |k_m| > k \Rightarrow k - k_m < 0 \Rightarrow$ instabil

$5: k_m > 0, |k_m| < k \Rightarrow k - k_m > 0 \Rightarrow$ stabil

- Federn a und b, entspannt bei $x_{0,1}$:

  Je nach Federkonstante k: Punkt 1 und 2: STABIL

- Schwächere Feder c, entspannt bei $x_{0,2}$:

  Zwei stabile Arbeitspunkte 3 und 5 möglich

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Zusammenfassung:

- Vereinfachte dynamische Untersuchung durch Linearisierung des i. A. nichtlinearen Systems in einem Arbeitspunkt
- Wegen dieser Vereinfachung bei nichtlin. System nur Kleinsignalverhalten untersuchbar in der lokalen Umgebung um den Arbeitspunkt
- Statische Stabilitätsuntersuchung eines Systems im Arbeitspunkt anhand statischer Kennlinien bei Vernachlässigung der Dämpfung
- „Magnetische Federkonstante" $k_m = dF_m/dx$, wenn Zählweise: $m \cdot \ddot{x} \uparrow, F_m \uparrow$ bzw. $k_m = -dF_m/dx$, wenn Zählweise: $m \cdot \ddot{x} \uparrow, F_m \downarrow$
- „Elektrische Federkonstante" $k_e = dF_e/dx$, wenn Zählweise: $m \cdot \ddot{x} \uparrow, F_e \uparrow$
- Dynamische Stabilitätsuntersuchung eines linearisierten Systems im Arbeitspunkt bei Berücksichtigung der Dämpfung
- Bei negativer Dämpfung: „Dynamische Instabilität"