

Elektromechanische Systeme

Teil von Prof. Binder:

„Mathematische Analyse von Wandlern & Aktoren“



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

1. Einführung
2. Grundlagen
3. Formale Behandlung elektromechanischer diskreter Systeme
4. Methode der *Lagrange*-Gleichungen
5. Elektromechanische Grundsysteme
6. Dynamische Untersuchung des Wandlerverhaltens
7. Analyse ausgewählter elektromechanischer Wandler





5. Elektromechanische Grundsysteme

- Magnetisches Grundsystem
Stationäres Verhalten: Beispiele
- Elektrisches Grundsystem
Stationäres Verhalten: Beispiele



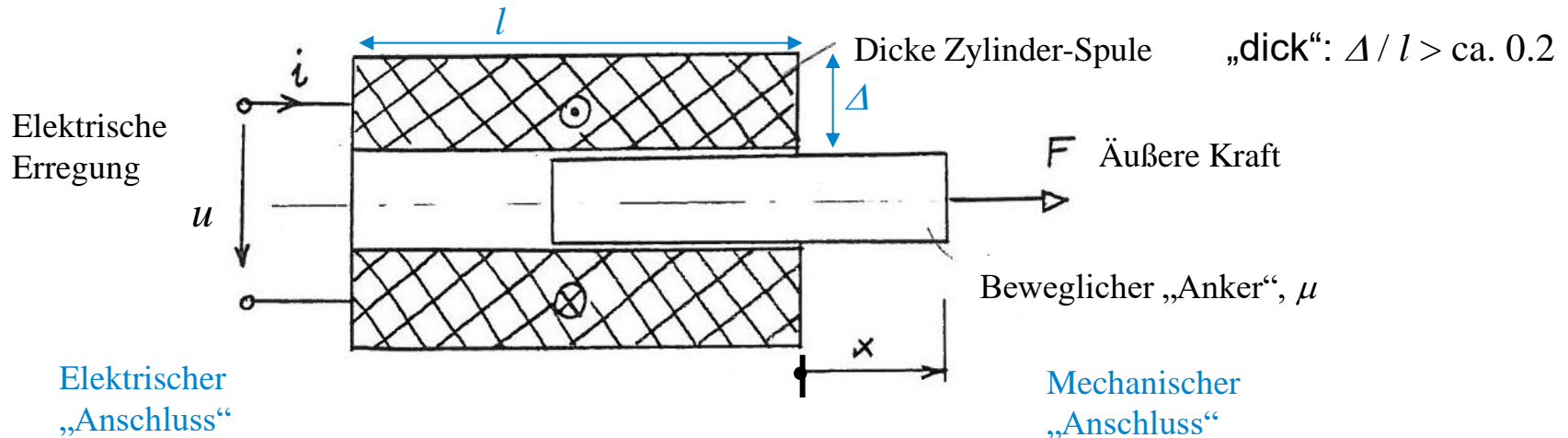
Elektromechanische Systeme

5. Elektromechanische Grundsysteme

- Magnetisches Grundsystem
Stationäres Verhalten: Beispiele
- Elektrisches Grundsystem
Stationäres Verhalten: Beispiele

Magnetisches Grundsystem

Bsp. 1: Schematische Anordnung

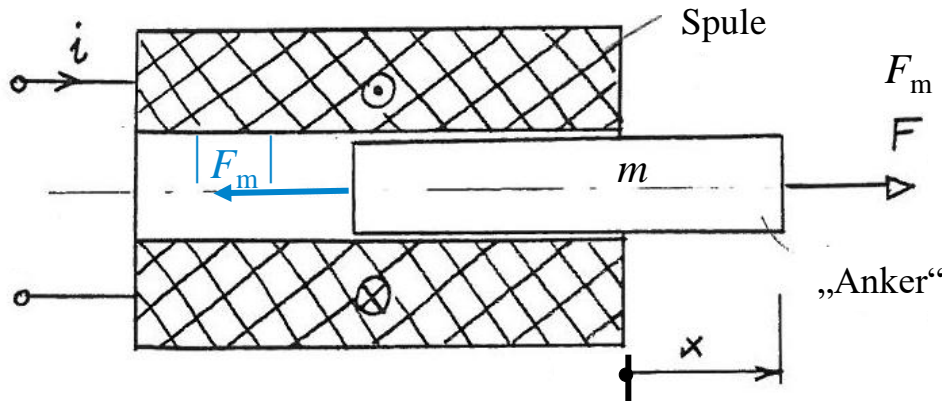


- Die **Spulenflussverkettung** ψ hängt vom Strom i und bei magnetisierbarem Anker AUCH von der Anker-Lage x ab: $\psi(i; x) = L(i; x) \cdot i$, amagnetischer Anker: $\psi(i) = L(i) \cdot i = L \cdot i$
- Magnetischer Anteil der kinetischen Ergänzungsenergie: $W_k^*(i, x) = W_{k0}^*(x) + \int_0^1 \psi(\theta \cdot i, x) \cdot i \cdot d\theta$
- **Häufig:** OHNE Remanenz & Dauermagnete $W_{k0}^*(x) = 0$
- **Sonderfall:** Linear-magnetisch = Permeabilitäten $\mu = \text{konst.} \Rightarrow$ z. B. keine Eisensättigung

$$\psi(i; x) = L(x) \cdot i \Rightarrow W_k^*(i, x) = \int_0^1 L(x) \cdot i \cdot \theta \cdot i \cdot d\theta = L(x) \cdot i^2 / 2$$

Magnetisches Grundsystem

Bsp. 1: Lineares Magnet-Grundsystem mit Stromspeisung



• $i(t)$, $Q(t)$ vorgeschrieben:
Ideale Stromquelle, Innenwiderstand = ∞

• Kein „äußere“ Spannung u ;
jedoch induzierte Spannung $u_i = -d\psi/dt$

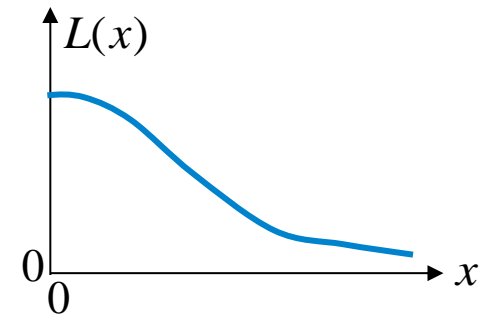
a) $n = 1: q_1 = x \Rightarrow \delta Q = 0, \delta i = 0$

b) $W_k^* = \frac{m \cdot \dot{x}^2}{2} + \frac{L(x)}{2} \cdot i^2 \quad W_p = 0$

c) $\delta A_d = R \cdot i \cdot \delta Q = 0 \cdot i \cdot 0 = 0 \Rightarrow F^{(d)} = 0 \quad u = 0: u \cdot \delta Q = 0 \cdot 0 = 0 \quad \delta A = F \cdot \delta x \Rightarrow F_1 = F$

d) $\frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{x}} = m \cdot \dot{x} \quad \frac{\partial W_k^*}{\partial x} = \frac{L'(x)}{2} \cdot i^2 \quad \frac{\partial W_p}{\partial x} = 0 \quad F_1^{(d)} = 0 \quad F_1 = F$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial W_k^*}{\partial x} + \frac{\partial W_p}{\partial x} + F_1^{(d)} = F_1 \Rightarrow m \cdot \ddot{x} - \frac{L'(x)}{2} \cdot i^2 = F$$



Gesucht:

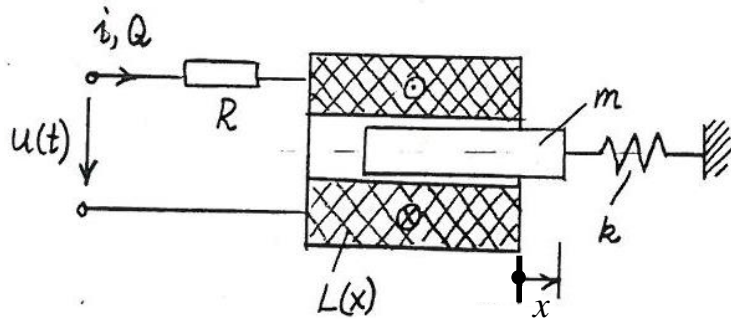
Wie groß ist die Kraft F , um den Anker bei $x > 0$ im Gleichgewicht ($x = \text{konst.}$) zu halten?

$x = \text{konst.}: \dot{x} = 0, \ddot{x} = 0: -\frac{L'(x)}{2} \cdot i^2 = F > 0, \text{ da } L'(x) < 0 \quad F + F_m = 0; F = -F_m = -dW_k^* / dx$



Magnetisches Grundsystem

Bsp. 2: Lineares Magnet-Grundsystem mit Spannungspeisung, Feder, keine äußere Kraft $F = 0$ (1)



- $u(t)$ vorgeschrieben: Ideale Spannungsquelle, Innenwiderstand = 0, keine äußere Kraft: $F = 0$!
- Feder entspannt bei $x = 0$

a) $n = 2: q_1 = Q, q_2 = x$

b) $W_k^* = \frac{m \cdot \dot{x}^2}{2} + \frac{L(x)}{2} \cdot i^2 \quad W_p = k \cdot x^2 / 2$

c) $\delta A_d = R \cdot i \cdot \delta Q \Rightarrow F_1^{(d)} = R \cdot i, \quad \delta A = u \cdot \delta Q \Rightarrow F_1 = u, \quad F_2 = F = 0$

d) $i = 1: \frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{Q}} = \frac{\partial W_k^*}{\partial i} = L(x) \cdot i \quad \frac{\partial W_k^*}{\partial Q} = 0 \quad \frac{\partial W_p}{\partial Q} = 0 \quad F_1^{(d)} = R \cdot i \quad F_1 = u$

$i = 2: \frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{x}} = m \cdot \dot{x} \quad \frac{\partial W_k^*}{\partial x} = \frac{L'(x)}{2} \cdot i^2 \quad \frac{\partial W_p}{\partial x} = k \cdot x \quad F_2^{(d)} = 0 \quad F_2 = 0$

$i = 1: \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{Q}} \right) - \frac{\partial W_k^*}{\partial Q} + \frac{\partial W_p}{\partial Q} + F_1^{(d)} = F_1 \Rightarrow \frac{d}{dt} (L(x) \cdot i) - 0 + 0 + R \cdot i = u$

$i = 2: \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial W_k^*}{\partial x} + \frac{\partial W_p}{\partial x} + F_2^{(d)} = F_2 \Rightarrow m \cdot \ddot{x} - \frac{L'(x)}{2} \cdot i^2 + k \cdot x + 0 = 0$



Magnetisches Grundsystem

Bsp. 2: Lineares Magnet-Grundsystem mit Spannungspeisung, Feder, keine äußere Kraft $F = 0$ (2)



$$\underbrace{\frac{d}{dt}(L(x) \cdot i)} + R \cdot i = u$$

Nichtlinearer Term

$$m \cdot \ddot{x} - \underbrace{\frac{L'(x)}{2} \cdot i^2} + k \cdot x = 0$$

Nichtlinearer Term

Nichtlineares gekoppeltes Differentialgleichungssystem in x und $i \Rightarrow$ ergibt in x bzw. i
EINE Differentialgleichung 3. Ordnung = drei Energiespeicher im Austausch (L , m , k)

Sonderfall: Amagnetischer Zylinder: $L = \text{konst.}$ unabhängig von x :
Kopplung zwischen mech. und el. System verschwindet:

$$L \cdot \dot{i} + R \cdot i = u$$

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot x = 0$$

- El. System: DGL 1. Ordnung = ein Energiespeicher (Induktivität!):
Nicht schwingungsfähig mit $i(t)$!
- Mech. System: DGL 2. Ordnung = zwei Energiespeicher (Masse und Feder):
Schwingungsfähig mit $x(t)$!



Magnetisches Grundsystem

Bsp. 2: Lineares Magnet-Grundsystem mit Spannungspeisung, Feder, keine äußere Kraft $F = 0$ (3)



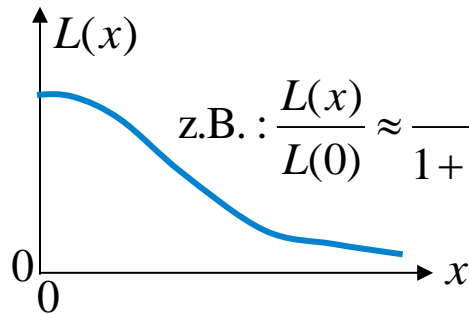
- Gleichgewichtsbedingung des nichtlinearen gekoppelten Systems: $d./dt = 0$

$$\frac{d}{dt}(L(x) \cdot i) + R \cdot i = u$$

$$m \cdot \ddot{x} - \frac{L'(x)}{2} \cdot i^2 + k \cdot x = 0$$

$$R \cdot i = u = U$$

$$\frac{L'(x)}{2} \cdot i^2 = k \cdot x \Rightarrow x = X = \frac{L'(x)}{2k} \cdot \left(\frac{U}{R}\right)^2$$



$$\text{z.B.: } \frac{L(x)}{L(0)} \approx \frac{1}{1 + (x/(2s_a))^2}$$

$$L'(x) = -L(0) \cdot \frac{2x/(2s_a)^2}{(1 + (x/(2s_a))^2)^2}$$

$$x = \frac{-L(0)}{2k} \cdot \frac{2x/(2s_a)^2}{(1 + (x/(2s_a))^2)^2} \cdot \left(\frac{U}{R}\right)^2$$

- **Reelle Lösung** der Gleichung nur für $X = 0 \Rightarrow$ Daher Gleichgewichtslage: $X = 0$!
- $X = 0$: Feder ist entspannt \Rightarrow Federkraft = 0; Anker liegt mittig \Rightarrow Magnetkraft ist Null!



Magnetisches Grundsystem

Bsp. 2: Lineares Magnet-Grundsystem mit Spannungs- speisung, Feder, keine äußere Kraft $F = 0$ (4)



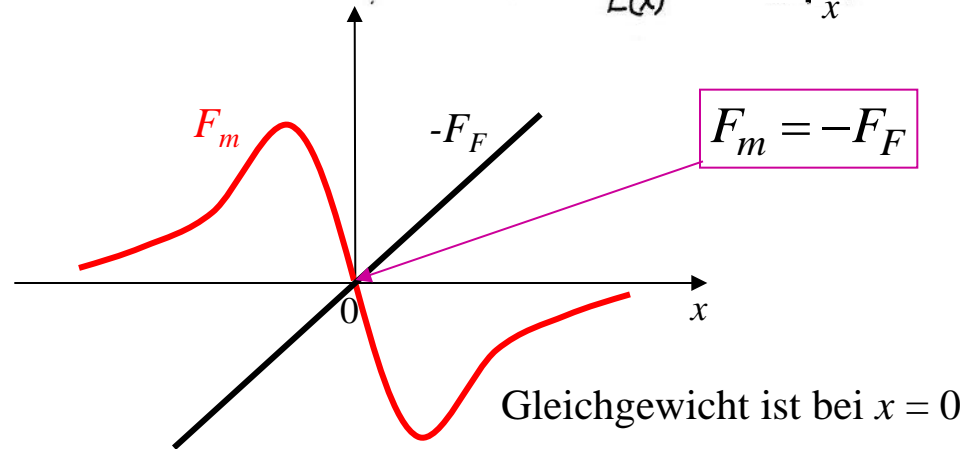
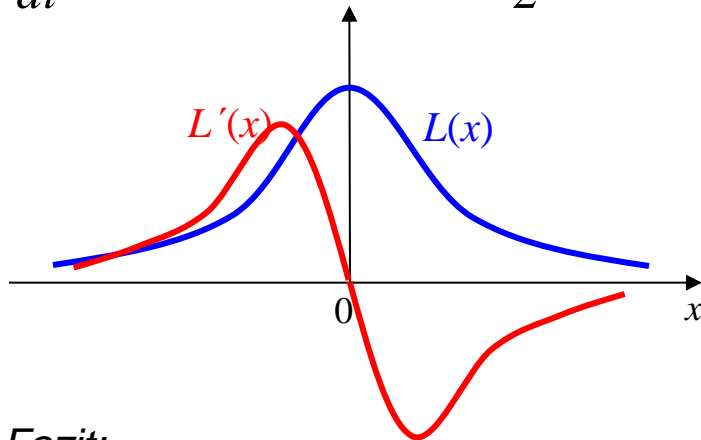
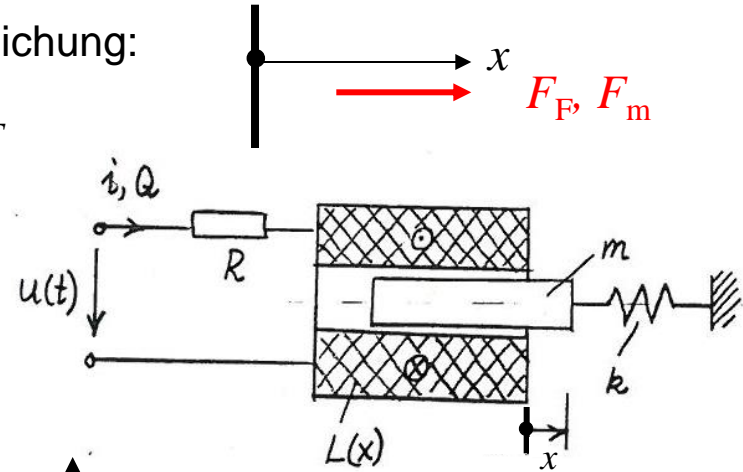
- Alternative Rechnung: NEWTON'sche Bewegungsgleichung:

Positive Kraftzählung in x -Richtung: $m \cdot \ddot{x} = F_m + F_F$

$$\vec{F}_m = \frac{dW_k^*}{dx} \cdot \vec{e}_x = \frac{L'(x) \cdot i^2}{2} \cdot \vec{e}_x \quad \vec{F}_F = -k \cdot x \cdot \vec{e}_x$$

- Gleichgewicht:

$$\frac{d}{dt} = 0 \rightarrow F_m + F_F = \frac{L'(x) \cdot i^2}{2} - k \cdot x = 0$$



- Fazit:

Damit sich Zylinder bei $u \neq 0$ aus $x = 0$ fortbewegen kann,
muss Feder bei $x \neq 0$ entspannt sein!

Elektromechanische Systeme

5. Elektromechanische Grundsysteme



- Magnetisches Grundsystem
Stationäres Verhalten: Beispiele
- Elektrisches Grundsystem
Stationäres Verhalten: Beispiele



Elektrisches Grundsystem

Keine kinetische Ergänzungsenergie & kein $F^{(d)}$ bei elektrostatische Anordnungen



- Elektrostatische Energie ist potentielle Energie W_p .
- Statisch = Geschwindigkeit $v = 0 \Rightarrow$ keine kinetische mechanische Ergänzungsenergie W_k^* .
- Elektrostatik: $d./dt = 0 \Rightarrow$ kein Stromfluss: $i = dQ/dt = 0 \Rightarrow$ kein Magnetfeld.
- Magnetische Energie ist Null \Rightarrow keine kinetische magnetische Ergänzungsenergie W_k^* .

$$W_k^* = 0$$

- $v = 0 \Rightarrow$ keine Reibungskraft, $i = 0 \Rightarrow$ keine Stromwärmeverluste:
Dissipative verallgemeinerte Kräfte sind Null! $\Rightarrow F^{(d)} = 0$.
- Lagrange-Gleichungen vereinfachen sich:

~~$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial W_k^*}{\partial q_i} + \frac{\partial W_p}{\partial q_i} + F_i^{(d)} = F_i \quad i = 1, \dots, n \Rightarrow \frac{\partial W_p}{\partial q_i} = F_i \Rightarrow$$~~

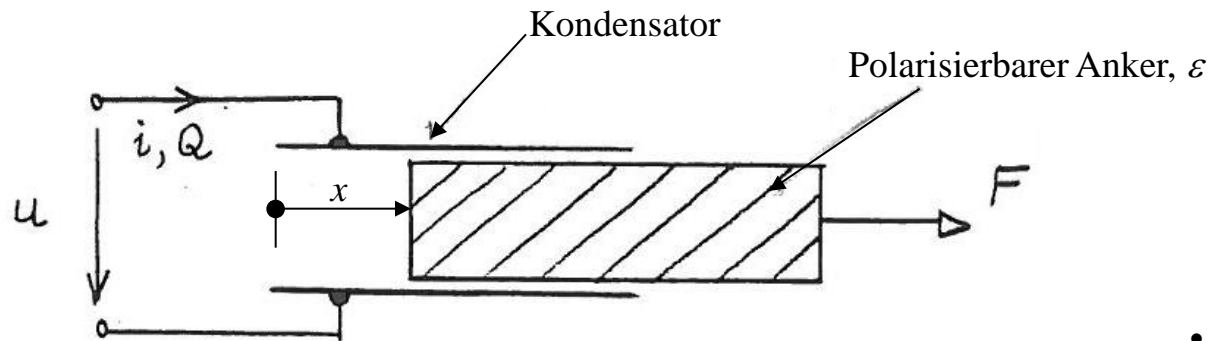
$$\Rightarrow \vec{F}(\vec{q}) = (\partial W_p / \partial q_1, \partial W_p / \partial q_2, \dots, \partial W_p / \partial q_n) = \nabla W_p = \text{grad}(W_p)$$

- Dieses Ergebnis wurde bereits in Kapitel 3 hergeleitet!



Elektrisches Grundsystem

Bsp. 1: Schematische Anordnung (1)



$$\vec{F}(\vec{q}) = \vec{F}(Q, x) = (u, F)$$

- Potentielle Energie:

$$W_p(\vec{q}) = \int_0^1 \vec{F}(\theta \cdot \vec{q}) \cdot \vec{q} \cdot d\theta$$

- $n = 2$ Freiheitsgrade Q und x

- Die **Kondensatorladung** Q hängt von der Spannung u und bei polarisierbarem Anker $\varepsilon(u)$ AUCH von der Anker-Lage x ab: $Q(u; x) = C(u; x) \cdot u$, unpolarisierbarer Anker: $Q(u) = C \cdot u$

Elektrischer Anteil der potentiellen Energie: $W_p(Q, x) = \underbrace{\int_0^1 F(0, \theta \cdot x) \cdot x \cdot d\theta}_{W_{p0}(x)} + \int_0^1 u(\theta \cdot Q, x) \cdot Q \cdot d\theta$

- Bei Werkstoffen **mit Remanenz-Polarisierung** (a) „Elektrete“, b) Ferro-Elektrizität) tritt auch OHNE el. Spannung u und OHNE Ladung Q eine el. Kraft $F = -F_e$ auf!

$$W_{p0}(x) = \int_0^1 F(0, \theta \cdot x) \cdot x \cdot d\theta$$

Elektrisches Grundsystem

Elektrete

- **Elektret:** („eingefrorene el. Ladung“)

Elektrisch isolierendes Material,
enthält

a) permanent gespeicherte elektrische Ladungen Q
oder

b) permanent ausgerichtete elektrische Dipole (Dipolmomente $p = Q \cdot l$)

- **Elektrete** erzeugen ein permanentes elektrisches Feld (el. Remanenz-Polarisation P_R)

- **Elektretmaterial:**

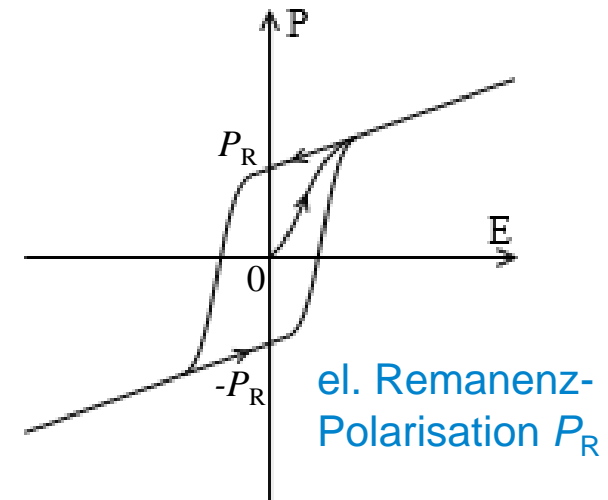
Meist aus Polymeren hergestellt wie z. B. aus

Polytetrafluorethylen,
Polytetrafluorethylenpropylen,
Polypropylen,
Polyethylenterephthalat,
Polyvinylidenfluorid, ...

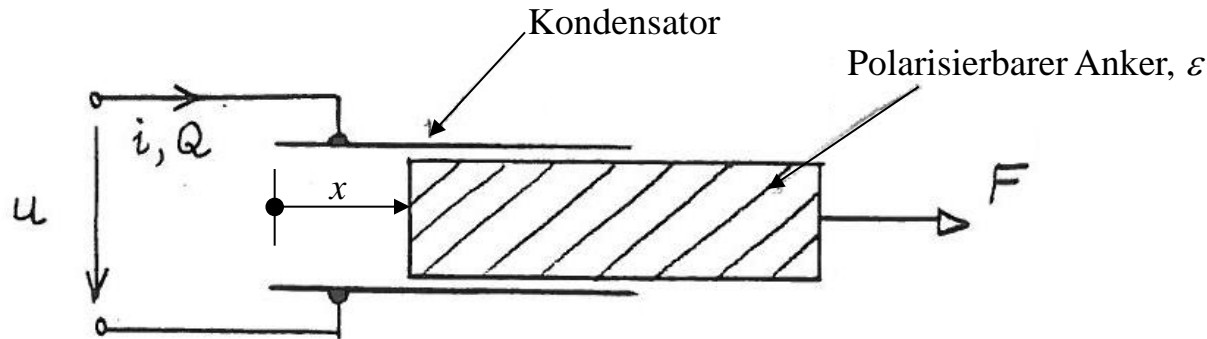
Elektrisches Grundsystem

Ferro-Elektrizität

- **Ferro-Elektrizität:**
Spontane Polarisierung im externen E -Feld:
Hysterese-Schleife $D(E)$ bzw. $P(E)$
- „Spontane“ Polarisierung mit „Weiss’schen Bezirken“
- Materialien
z. B.: PbZr/TiO_3 , BaTiO_3 , PbTiO_3
- Auch unmetallische Dielektrika als Ferro-Elektrika,
z. B.: Siliziumdioxid (Quarz), Siliziumnitrid



Quelle: Wikipedia.de



- Bei Anordnungen **OHNE Remanenz-Polarisation** = KEINE Elektrete oder Ferro-Elektrizität:

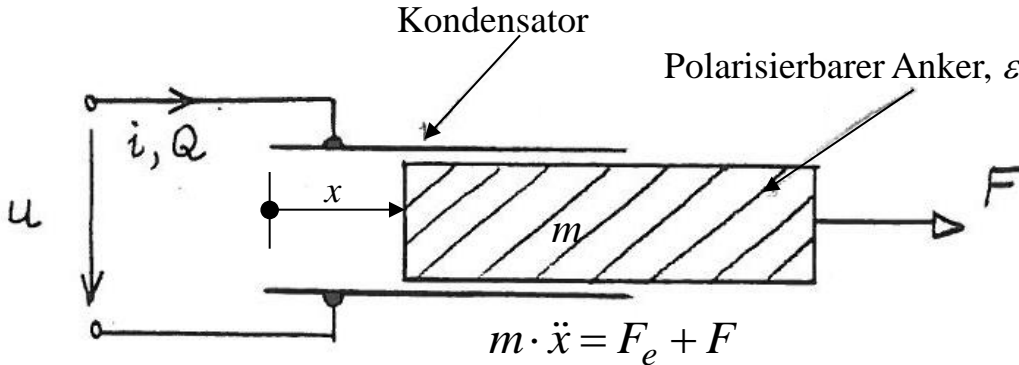
$$F = -F_e = 0, \text{ wenn } Q = 0: W_{p0}(x) = 0$$

- **Sonderfall:** Linear polarisierbar: Permittivität $\varepsilon = \text{konst.}$: $Q(u; x) = C(x) \cdot u \Rightarrow u(Q, x) = \frac{Q}{C(x)}$

$$W_p(Q, x) = \int_0^1 u(\theta \cdot Q, x) \cdot Q \cdot d\theta = \int_0^1 \frac{\theta \cdot Q}{C(x)} \cdot Q \cdot d\theta = \frac{Q^2}{2C(x)}$$

Elektrisches Grundsystem

Bsp. 1: Berechnung der verallg. Kräfte u, F



A) Vereinfachte LAGRANGE-Gleichungen:

$$\vec{F}(\vec{q}) = \vec{F}(Q, x) = (F_1, F_2) = (u, F)$$

$$\vec{F} = \nabla W_p = \left(\frac{\partial W_p}{\partial Q}, \frac{\partial W_p}{\partial x} \right)$$

$$u = \frac{\partial W_p}{\partial Q}, \quad F = \frac{\partial W_p}{\partial x} \quad \bullet n = 2: Q, x$$

B) LAGRANGE-Gleichungen nach „Rezept“ von Kap. 4:

$$\text{a) } n = 2: q_1 = Q, q_2 = x, \quad \text{b) } W_k^* = 0, \quad W_p(Q, x) = \frac{Q^2}{2C(x)},$$

$$\text{c) } \delta A_d = 0 \Rightarrow F^{(d)} = 0, \quad \delta A = u \cdot \delta Q + F \cdot \delta x \Rightarrow F_1 = u, F_2 = F,$$

$$\text{d) } i = 1: \frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{Q}} = 0, \quad \frac{\partial W_k^*}{\partial Q} = 0, \quad \frac{\partial W_p}{\partial Q} = \frac{Q}{C(x)}, \quad F_1 = u: \quad \frac{Q}{C(x)} = u, u = \frac{\partial W_p}{\partial Q},$$

$$i = 2: \frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{x}} = 0, \quad \frac{\partial W_k^*}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial W_p}{\partial x} = -\frac{Q^2}{2C^2(x)} \cdot C'(x) = -\frac{u^2}{2} \cdot C'(x), \quad F_2 = F:$$

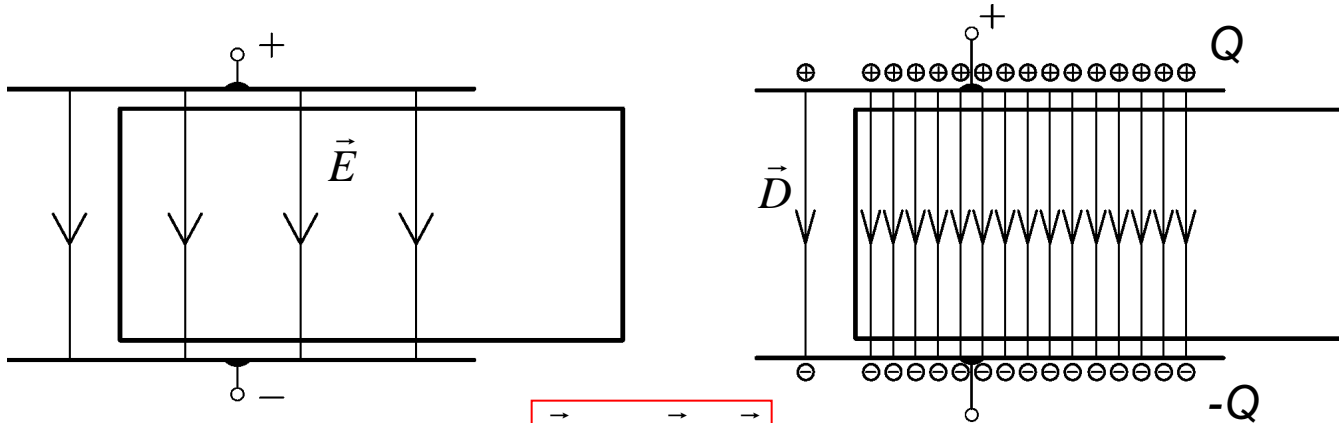
$$F = -\frac{u^2}{2} \cdot C'(x), \quad F = \frac{\partial W_p}{\partial x},$$

Fazit: A) führt schneller zum Ergebnis als B)

Elektrisches Grundsystem

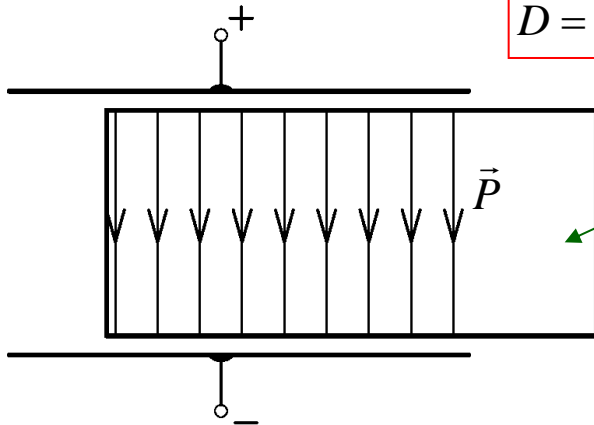
Wiederholung

Bsp. 1: Elektrische Feldverläufe bei $P_R = 0$

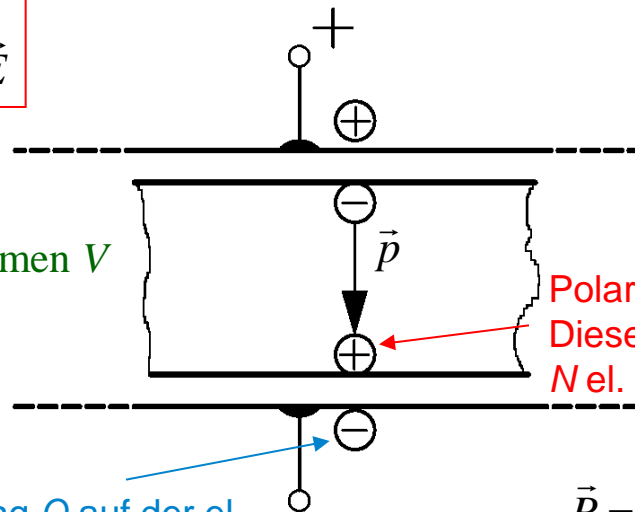


$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \cdot \vec{E}$$



Volumen V



Polarisationsladung (ortsfest):
Diese Ladungspaare bilden
 N el. Dipolmomente p

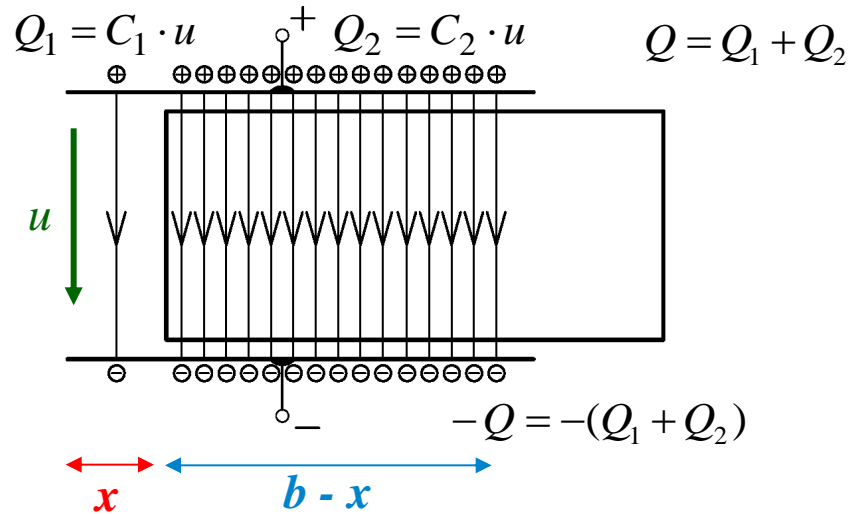
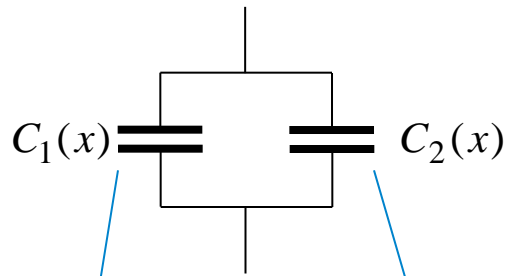
„Wahre“ (verschiebbare) Ladung Q auf der el.
leitfähigen Platte = Quelle (Senke) von D

$$\vec{P} = \frac{1}{V} \cdot \sum_{k=1}^N \vec{p}_k$$





Bsp. 1: Vereinfachte Berechnung der Kapazität $C(x)$ (1)



$$A_1 = x \cdot l$$

$$A_2 = (b - x) \cdot l$$

$$D_1 = \frac{Q_1}{A_1} = \frac{C_1 \cdot u}{A_1}$$

$$D_2 = \frac{Q_2}{A_2} = \frac{C_2 \cdot u}{A_2}$$

$$= \frac{\epsilon_0 A_1}{d} \cdot \frac{u}{A_1} = \frac{\epsilon_0 \cdot u}{d}$$

$$= \frac{\epsilon_0 \epsilon_r A_2}{d} \cdot \frac{u}{A_2} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r \cdot u}{d}$$

$$Q_2 = C_2 \cdot u = \frac{C_2}{C_1} \cdot C_1 \cdot u = \frac{C_2}{C_1} \cdot Q_1 = \frac{\epsilon_r \cdot (b - x)}{x} \cdot Q_1$$

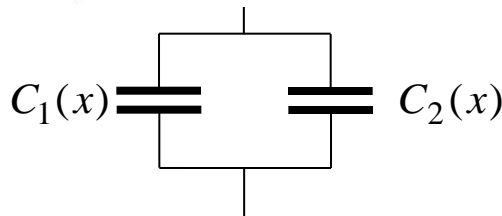
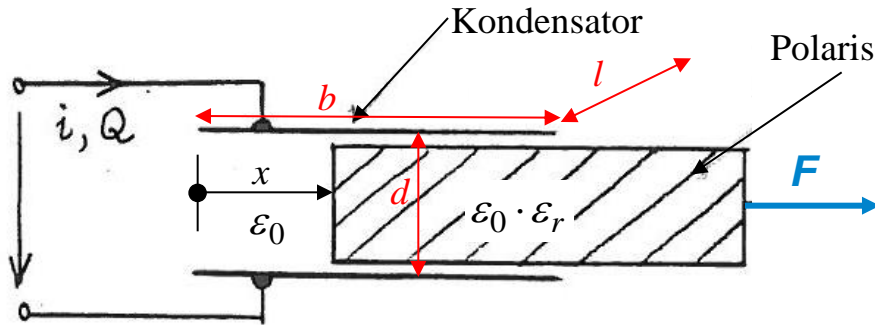
$$E_1 = \frac{D_1}{\epsilon_0} = \frac{u}{d}$$

$$E_2 = \frac{D_2}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{u}{d} = E_1$$



Elektrisches Grundsystem

Bsp. 1: Vereinfachte Berechnung der Kapazität $C(x)$ (2)



Vereinfachte Berechnung:
Homogenes Feld,
Vernachlässigtes Randstreufeld
 $\epsilon_r = \text{konst.} \geq 1$

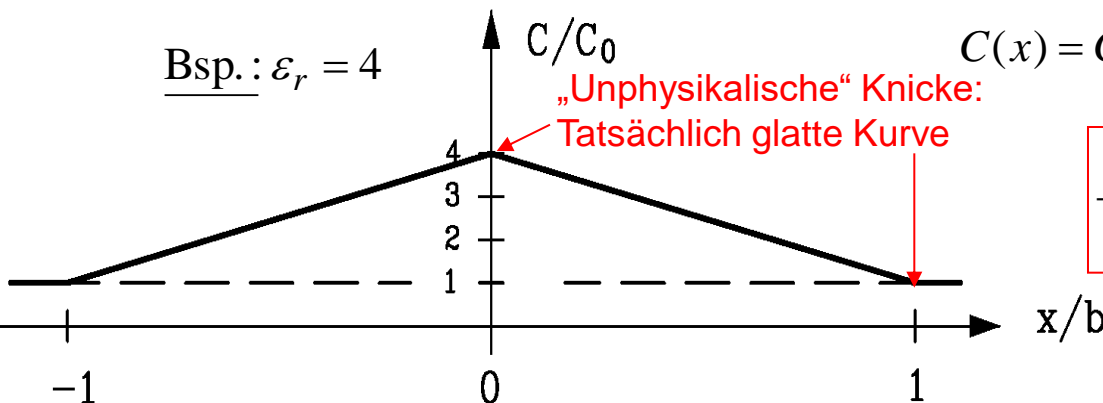
$$0 \leq x \leq b:$$

$$C_1(x) = \epsilon_0 \cdot \frac{x \cdot l}{d}, \quad C_2(x) = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \frac{(b-x) \cdot l}{d}$$

$$C(x) = C_1(x) + C_2(x) = \epsilon_0 \cdot \frac{b \cdot l}{d} \cdot \left(\frac{x}{b} + \epsilon_r \cdot \left(1 - \frac{x}{b} \right) \right)$$

$$C(x) = C_0 \cdot \left((1 - \epsilon_r) \cdot \frac{x}{b} + \epsilon_r \right) \quad C_0 = \epsilon_0 \cdot \frac{b \cdot l}{d}$$

Bsp.: $\epsilon_r = 4$



$$-b \leq x \leq b: C(x) = C_0 \cdot \left((1 - \epsilon_r) \cdot \frac{|x|}{b} + \epsilon_r \right)$$

$$|x| \geq b: C(x) = C_0$$

Elektrisches Grundsystem

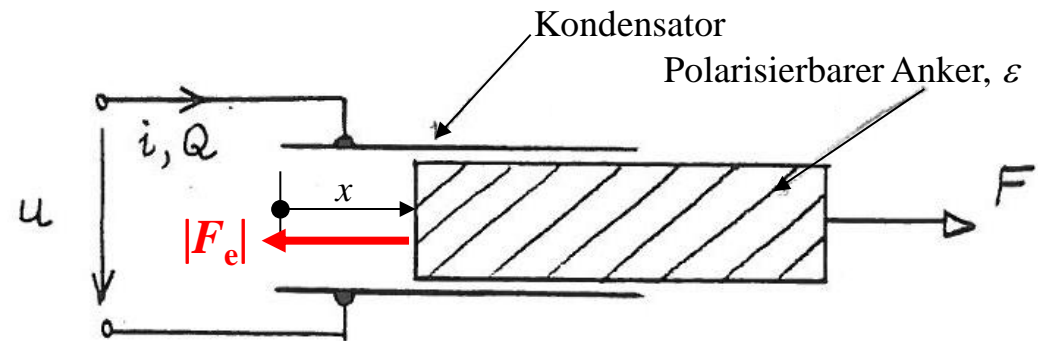
Bsp. 1: Haltekraft $F(x)$

Haltekraft F : $F = -\frac{u^2}{2} \cdot C'(x)$

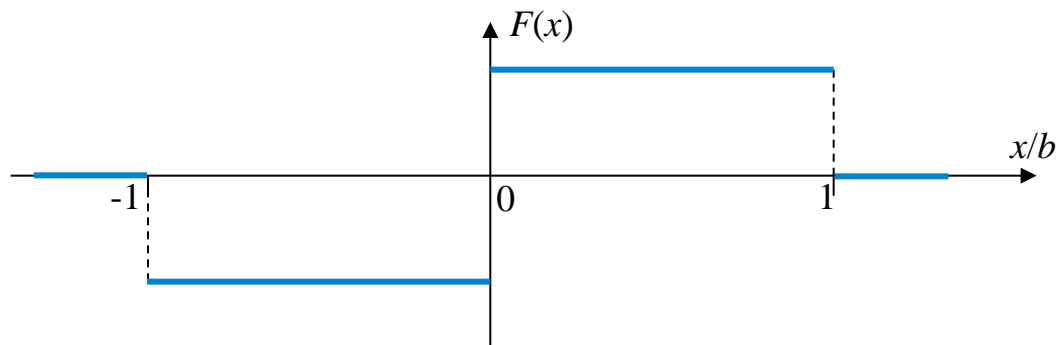
$$0 < x \leq b: C'(x) = (1 - \epsilon_r) \cdot \frac{C_0}{b} \leq 0$$

Haltekraft F wirkt **gegen** el. Kraft F_e :

$$F = \frac{u^2}{2} \cdot (\epsilon_r - 1) \cdot \frac{C_0}{b} > 0$$



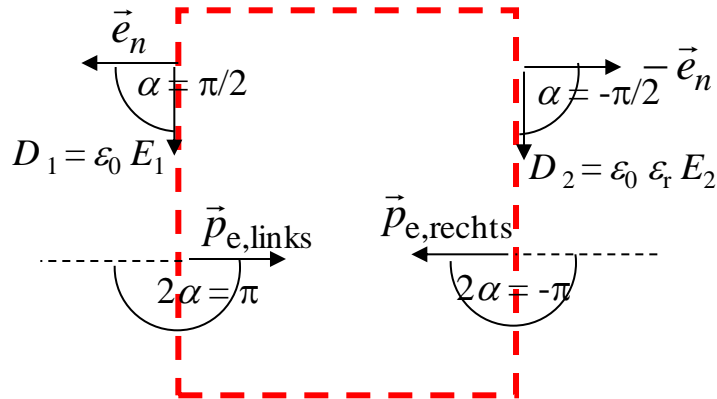
Äußere Haltekraft F ist UNabhängig von x konstant \Rightarrow linearer Wandler, ähnlich wie „Wandler 4“ (Kap. 7)!



Elektrisches Grundsystem

Bsp. 1: Kraft über MAXWELL'schen Zug

- MAXWELL'scher Züge oben und unten heben sich auf!
- Linke & rechte Seitenfläche: $A = d \cdot l$



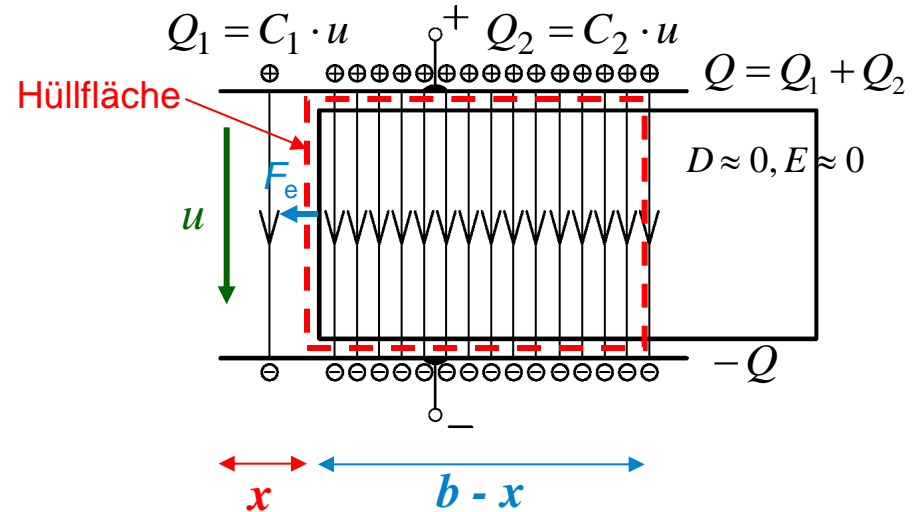
$$\vec{p}_{e,links} = -\frac{D_1 E_1}{2} \cdot \vec{e}_n \quad \vec{p}_{e,rechts} = \frac{D_2 E_2}{2} \cdot \vec{e}_n$$

$$E_1 = \frac{u}{d} = E_2 \quad D_1 = \frac{\epsilon_0 \cdot u}{d} \quad D_2 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r \cdot u}{d}$$

$$\vec{F}_e = A \cdot (\vec{p}_{e,links} + \vec{p}_{e,rechts})$$

$$\vec{F}_e = d \cdot l \cdot \left(\frac{D_2 E_2}{2} - \frac{D_1 E_1}{2} \right) \cdot \vec{e}_n = \frac{l \cdot \epsilon_0 \cdot u^2}{2d} \cdot (\epsilon_r - 1) \cdot \vec{e}_n = \frac{C_0 \cdot u^2}{2 \cdot b} \cdot (\epsilon_r - 1) \cdot \vec{e}_n$$

$$C_0 = \epsilon_0 \cdot \frac{b \cdot l}{d}$$



- Identisches Ergebnis für die Kraft F_e !

Elektrisches Grundsystem

Bsp. 1: Vereinfachte Kapazität $C(x)$ (1)

Vereinfacht: Homogenes Feld, Vernachlässigung des Randstreufelds

$$-b \leq x \leq b: C(x) = C_0 \cdot \left((1 - \varepsilon_r) \cdot \frac{|x|}{b} + \varepsilon_r \right) \quad |x| \geq b: C(x) = C_0$$

Kritik am Ergebnis $C(x)$:

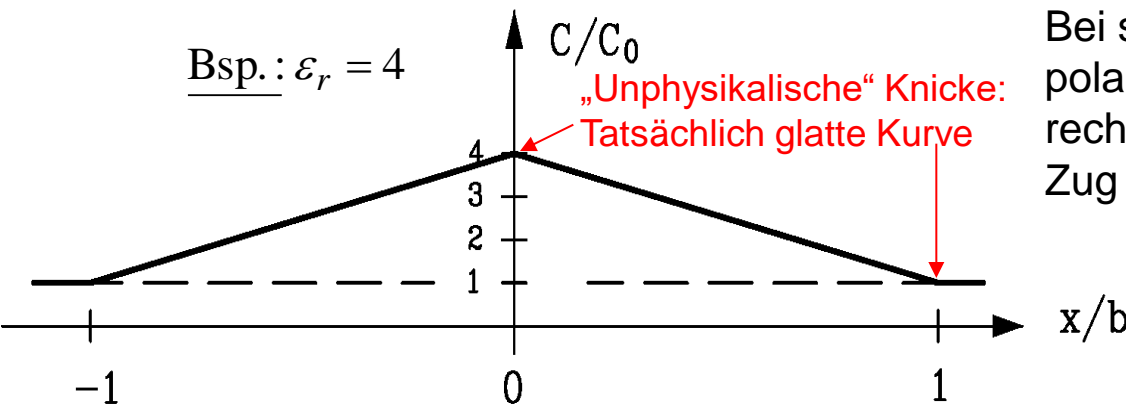
Bei symmetrischer Lage des polarisierbaren Ankers $x = 0$ verschwindet rechnerisch die Halbkraft F gegen den el. Zug nicht (wie sie sollte):

$$F = -\frac{u^2}{2} \cdot C'(x)$$

$$F(x = 0+) = \frac{u^2}{2} \cdot (\varepsilon_r - 1) \cdot \frac{C_0}{b} > 0$$

$$F(x = 0-) = -\frac{u^2}{2} \cdot (\varepsilon_r - 1) \cdot \frac{C_0}{b} < 0$$

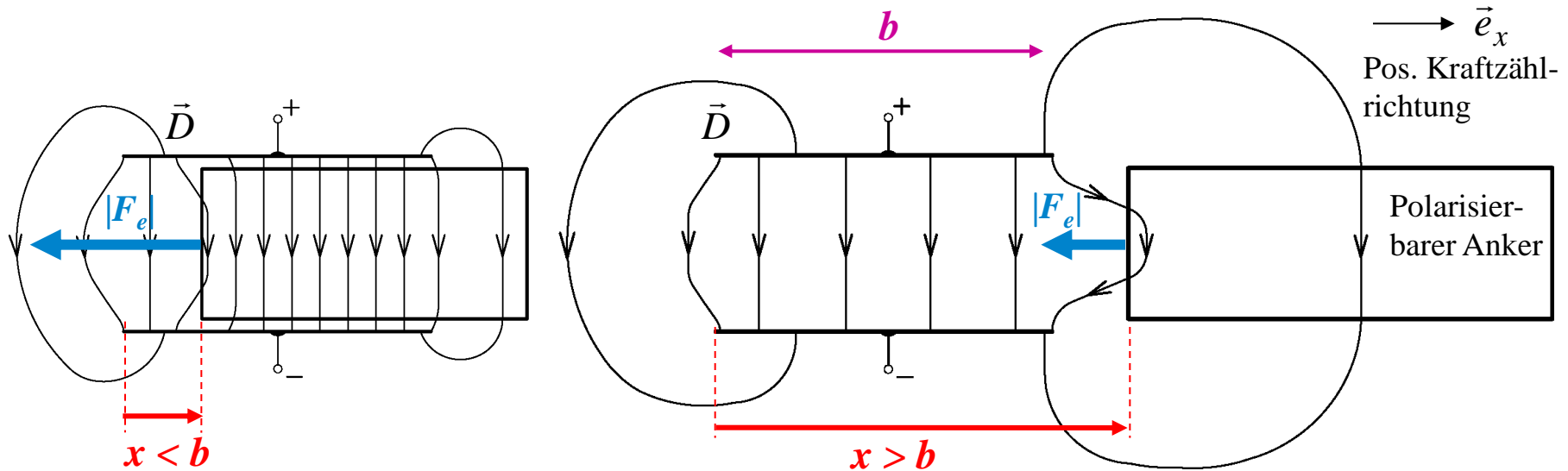
Bsp.: $\varepsilon_r = 4$



Erkenntnis:

Eine genauere (2D)-Berechnung des el. Felds mit Berücksichtigung der Randstreufelder ist erforderlich, um $C(x)$ annähernd korrekt zu bestimmen, so dass bei $x = 0$ die Haltekraft F verschwindet.

Dann ist $C(x)$ -Kurve „glatt“ (ohne Knicke) und hat horizontale Tangente bei $x = 0 \Rightarrow F(0) = 0!$



- Das **2D-Feld** wird hier qualitativ abgeschätzt.
- Durch die 2D-Betrachtung entsteht ein zusätzlicher **sichtbar nach links gerichteter MAXWELL'scher Zug** als Gegenkraft zur Haltekraft F .
- Auch bei $x > b$ (**Anker außerhalb der Kondensatorplatten**) entsteht auf Grund des Randstreufelds noch eine kleine nach links gerichtete el. Kraft $F_e < 0$, die mit zunehmendem Abstand des Ankers vom Kondensator rasch abnimmt.

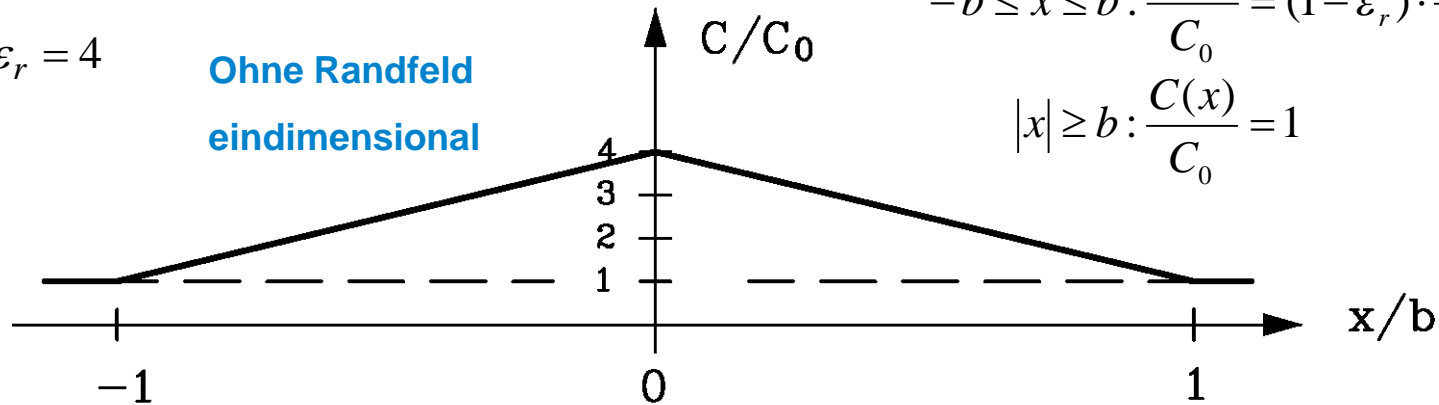
Elektrisches Grundsystem

Bsp. 1: Kapazität mit Randfeldern $C(x)$ (1)



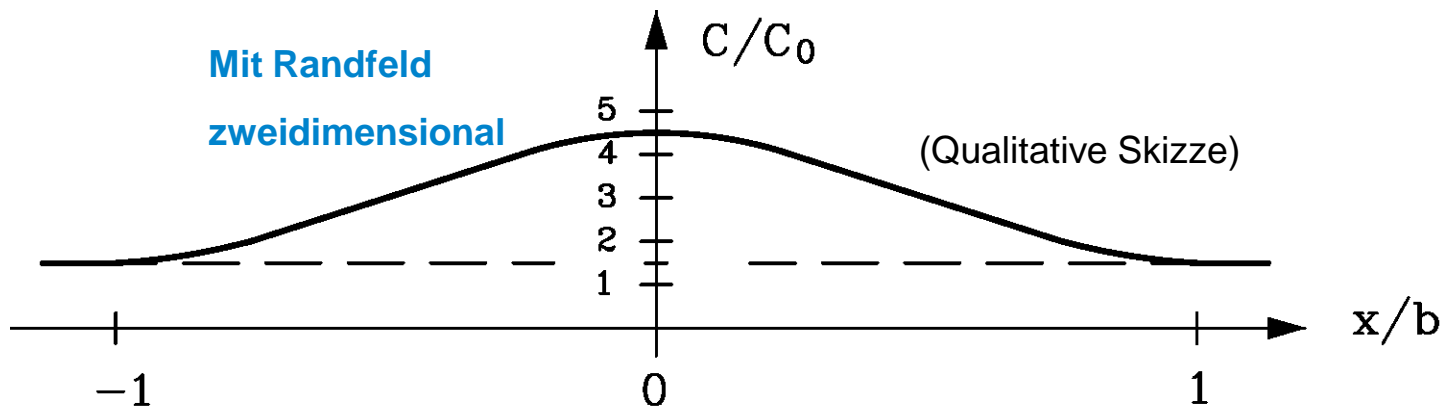
Bsp.: $\epsilon_r = 4$

Ohne Randfeld
eindimensional



$$-b \leq x \leq b: \frac{C(x)}{C_0} = (1 - \epsilon_r) \cdot \frac{|x|}{b} + \epsilon_r$$
$$|x| \geq b: \frac{C(x)}{C_0} = 1$$

Mit Randfeld
zweidimensional

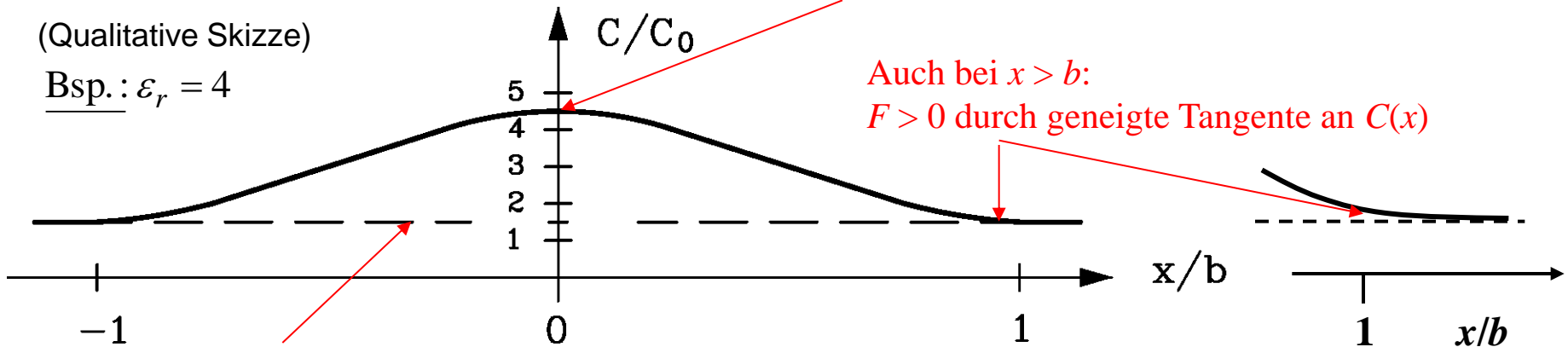


Mit Randfeld

zweidimensional

(Qualitative Skizze)

Bsp.: $\varepsilon_r = 4$



$$F(x=0) = -\frac{u^2}{2} \cdot C'(x=0) = -\frac{u^2}{2} \cdot 0 = 0$$

$$F(x > b) = -\frac{u^2}{2} \cdot C'(x > b) > 0$$

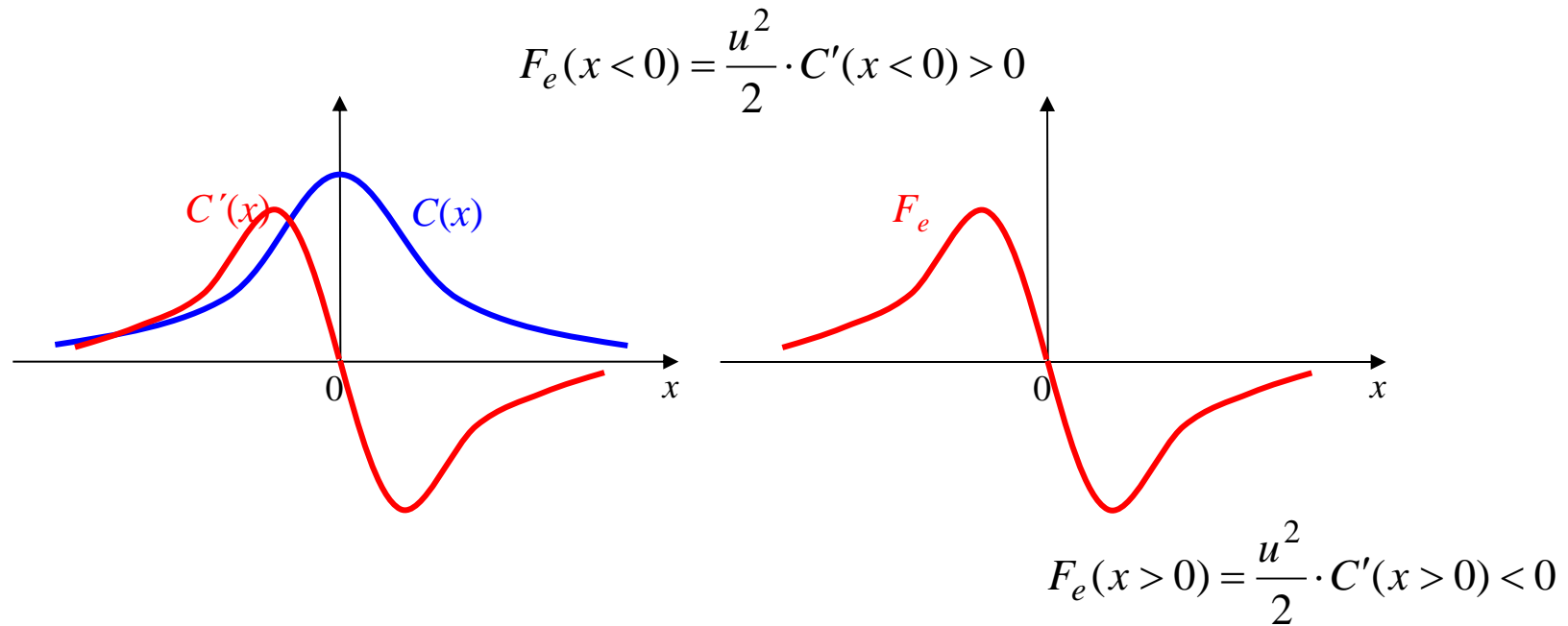
$$F(x < -b) = -\frac{u^2}{2} \cdot C'(x < -b) < 0$$

Elektrisches Grundsystem

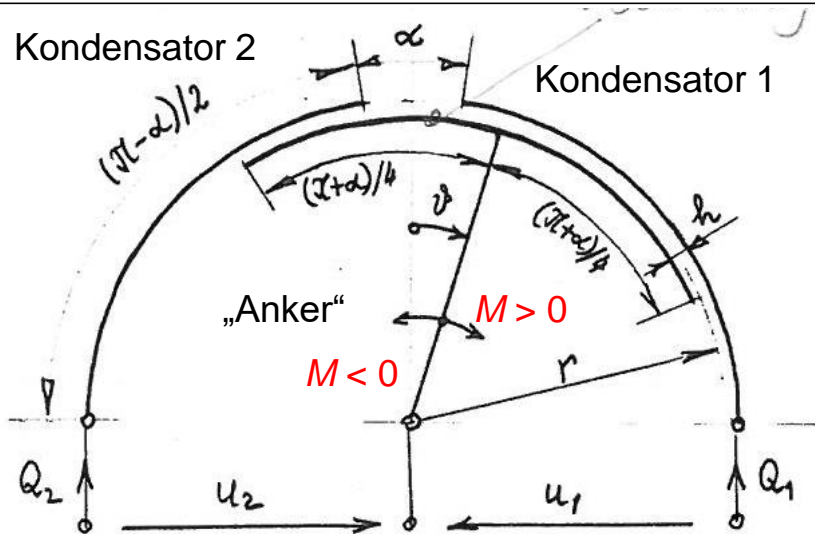
Bsp. 1: Kraft mit Randfeldern $F_e(x) = -F(x)$



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT



Bsp. 2: Zwei el. gekoppelte lineare Kondensatoren (1)



**ACHTUNG: Drehbewegung:
Drehmoment M tritt auf!**

- Zwei „Luft“-Kondensatoren: ϵ_0 , axiale Länge l
- Abhängig von der Stellung des Ankers (Winkel $\Delta\gamma = \vartheta$) verändern sich gleichzeitig die Kapazitätswerte der beiden Kondensatoren 1 u. 2
- Vereinfachte Feldberechnung mit radialem Feld ohne Streufelder
- Spaltweite $h \ll$ Radius $r \Rightarrow$ „Radiales E -Feld“ annähernd homogen = es variiert längs Spaltweite h nicht!
- **Gesucht:** Drehmoment $M(u_1, u_2, \vartheta)$

- a) $n = 3: q_1 = Q_1, q_2 = Q_2, q_3 = \vartheta$ b) $W_k^* = 0, W_p(Q_1, Q_2, \vartheta) = \frac{Q_1^2}{2C_1(\vartheta)} + \frac{Q_2^2}{2C_2(\vartheta)}$
- c) $\delta A_d = 0 \Rightarrow F^{(d)} = 0 \quad \delta A = u_1 \cdot \delta Q_1 + u_2 \cdot \delta Q_2 + M \cdot \delta \vartheta \Rightarrow F_1 = u_1, F_2 = u_2, F_3 = M$
- d) $\vec{F}(\vec{q}) = \vec{F}(Q_1, Q_2, \vartheta) = (u_1, u_2, M) = \left(\frac{\partial W_p}{\partial Q_1}, \frac{\partial W_p}{\partial Q_2}, \frac{\partial W_p}{\partial \vartheta} \right)$



- Drehmomentberechnung:

$$W_p = \frac{Q_1^2}{2C_1(\mathcal{G})} + \frac{Q_2^2}{2C_2(\mathcal{G})}$$

$$u_1 = \frac{\partial W_p}{\partial Q_1} = \frac{Q_1}{C_1(\mathcal{G})} \quad u_2 = \frac{\partial W_p}{\partial Q_2} = \frac{Q_2}{C_2(\mathcal{G})}$$

$$M = \frac{\partial W_p}{\partial \mathcal{G}} = -\frac{Q_1^2}{2C_1^2(\mathcal{G})} \cdot C_1'(\mathcal{G}) - \frac{Q_2^2}{2C_2^2(\mathcal{G})} \cdot C_2'(\mathcal{G}) = -\frac{u_1^2}{2} \cdot C_1'(\mathcal{G}) - \frac{u_2^2}{2} \cdot C_2'(\mathcal{G})$$

$$M = -\frac{u_1^2}{2} \cdot C_1'(\mathcal{G}) - \frac{u_2^2}{2} \cdot C_2'(\mathcal{G})$$





Kapazitätsberechnung: Elektroden-Winkelüberdeckung bei Mittelstellung $\vartheta = 0$:

Links und rechts symmetrisch: $\vartheta = 0: \frac{\pi + \alpha}{4} - \frac{\alpha}{4} = \frac{\pi - \alpha}{4} := \vartheta_m$

Maximaler Verdrehwinkel: $\vartheta_{\max} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi - \alpha}{4} = \frac{\pi - \alpha}{4} = \vartheta_m$

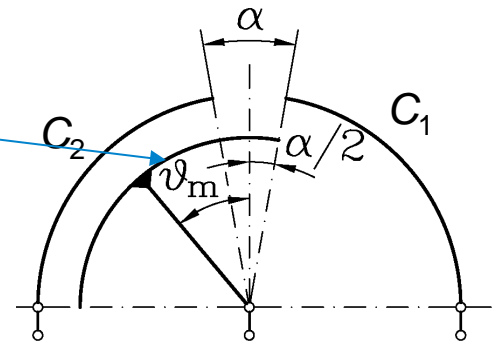
C_1 : Elektroden-Überdeckung bei: $-\vartheta_{\max} = -\vartheta_m \leq \vartheta \leq \vartheta_{\max} = \vartheta_m$

$$\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4} + \vartheta = \frac{\pi - \alpha}{4} + \vartheta = \vartheta_m + \vartheta$$

C_2 : Elektroden-Überdeckung:

$$\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4} - \vartheta = \frac{\pi - \alpha}{4} - \vartheta = \vartheta_m - \vartheta$$

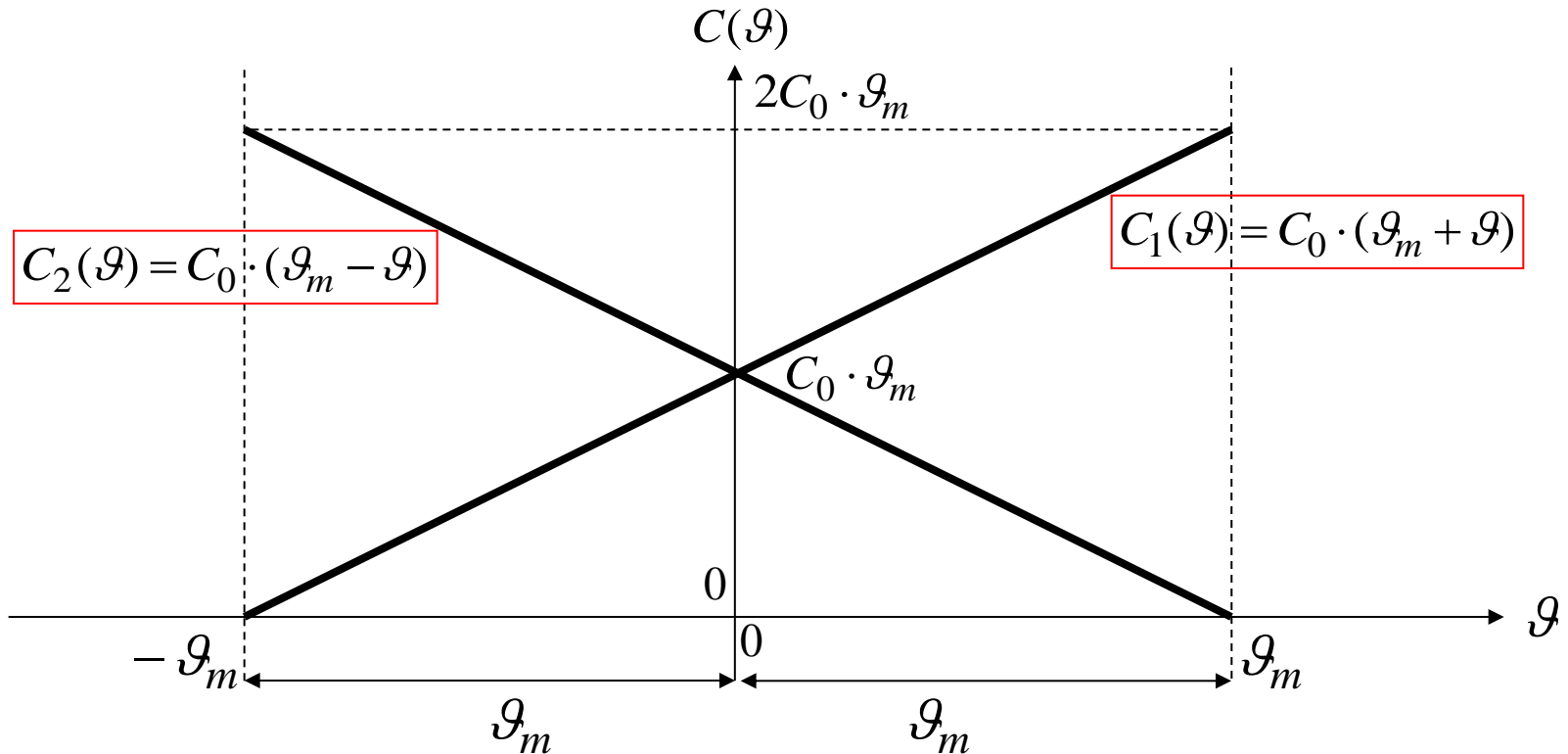
Hilfsgröße: $C_0 := \varepsilon_0 \cdot \frac{r \cdot l}{h}$



$$Q_1 = C_1 \cdot u_1 = \varepsilon_0 \cdot \frac{(\vartheta_m + \vartheta) \cdot r \cdot l}{h} \cdot u_1 = C_0 \cdot (\vartheta_m + \vartheta) \cdot u_1$$

$$Q_2 = C_2 \cdot u_2 = \varepsilon_0 \cdot \frac{(\vartheta_m - \vartheta) \cdot r \cdot l}{h} \cdot u_2 = C_0 \cdot (\vartheta_m - \vartheta) \cdot u_2$$

$$C_1(\vartheta) = C_0 \cdot (\vartheta_m + \vartheta) \quad C_2(\vartheta) = C_0 \cdot (\vartheta_m - \vartheta)$$



- Drehmoment M : $C_1'(\varphi) = (C_0 \cdot (\varphi_m + \varphi))' = C_0$ $C_2'(\varphi) = (C_0 \cdot (\varphi_m - \varphi))' = -C_0$
$$M = -\frac{u_1^2}{2} \cdot C_1'(\varphi) - \frac{u_2^2}{2} \cdot C_2'(\varphi) = \frac{C_0}{2} \cdot (u_2^2 - u_1^2)$$



Elektrisches Grundsystem

Bsp. 2: Zwei el. gekoppelte lineare Kondensatoren (5)

Übung



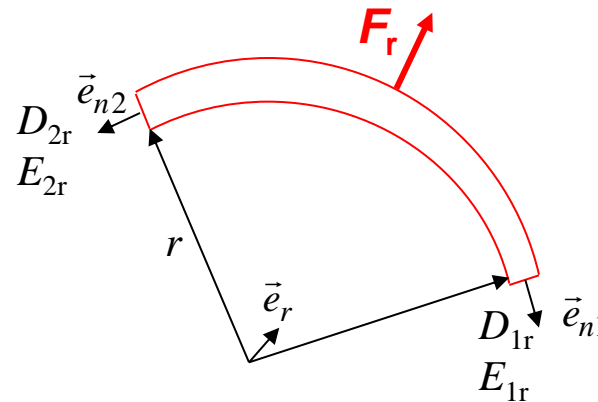
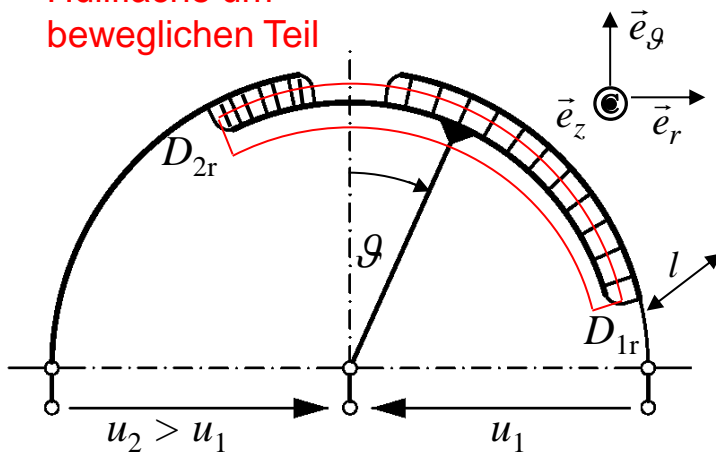
TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

$$D = \varepsilon_0 \cdot E = \varepsilon_0 \cdot u/h$$

$$\vec{p}_{e,1} = \frac{D_{1r}E_{1r}}{2} \cdot \vec{e}_{n1} = -\frac{D_{1r}E_{1r}}{2} \cdot \vec{e}_g$$

$$\vec{p}_{e,2} = \frac{D_{2r}E_{2r}}{2} \cdot \vec{e}_{n2} = \frac{D_{2r}E_{2r}}{2} \cdot \vec{e}_g$$

Hüllfläche um
beweglichen Teil



$$C_0 := \varepsilon_0 \cdot \frac{r \cdot l}{h}$$

$$\vec{M}_e = r\vec{e}_r \times (\vec{F}_{e,2} + \vec{F}_{e,1}) = A \cdot r \cdot \vec{e}_r \times (\vec{p}_{e,2} + \vec{p}_{e,1}) = \vec{e}_z \cdot h \cdot l \cdot r \cdot \left(\frac{D_{2r}E_{2r}}{2} - \frac{D_{1r}E_{1r}}{2} \right)$$

$$\vec{M}_e = \vec{e}_z \cdot \frac{h \cdot l \cdot r \cdot \varepsilon_0}{2} \cdot \left(\frac{u_2^2}{h^2} - \frac{u_1^2}{h^2} \right) = M \cdot (-\vec{e}_z) \Rightarrow M = \frac{C_0}{2} \cdot (u_2^2 - u_1^2)$$

- Identisches Ergebnis für das Haltedrehmoment M , positiv gezählt im Uhrzeigersinn!
- Radiale MAXWELL-Zugkraft F_r auf den Anker wird vom Drehlager aufgenommen!



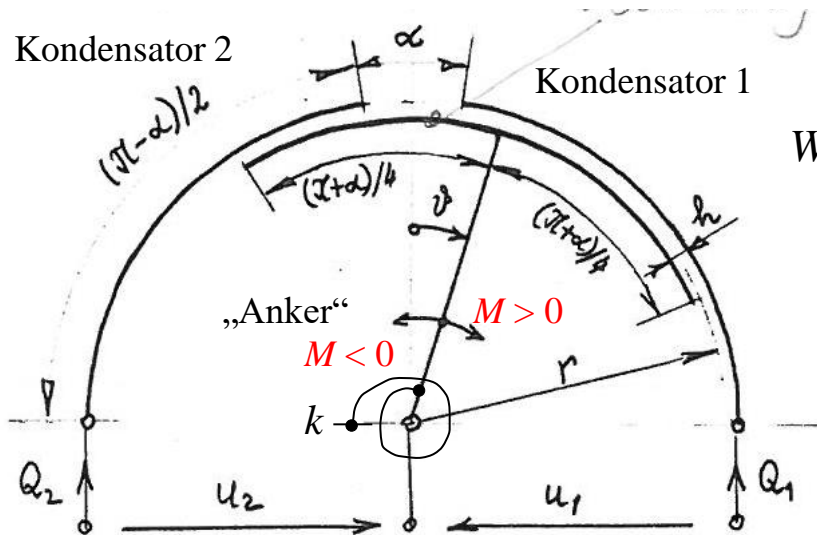


Bsp. 2: Zwei el. gekoppelte lineare Kondensatoren (6)

Haltedrehmoment:
$$M = -\frac{u_1^2}{2} \cdot C_1'(\vartheta) - \frac{u_2^2}{2} \cdot C_2'(\vartheta) = \frac{C_0}{2} \cdot (u_2^2 - u_1^2)$$

- Bei $u_2 = u_1$ ist **UNABHÄNGIG** von der Ankerstellung ϑ das Haltemoment $M = 0$, denn dann sind die Radialfelder D_{1r} , D_{2r} und Tangentialfelder $D_{1\vartheta}$, $D_{2\vartheta}$ identisch!
- Daher heben sich die tangentialen *MAXWELL*-Züge nach links und rechts auf den Anker auf $\Rightarrow M = 0$.
- Wenn $u_2 > u_1$, dann ist z. B. bei zunächst Mittenstellung $\vartheta = 0$ und daher $C_1 = C_2$, so dass $Q_2 > Q_1$.
- Der Anker wird mit M_e wegen des tangentialen *MAXWELL*-Zugs nach links gezogen, so dass das Haltemoment M nach rechts wirken muss: $M > 0$!





• Drehfeder $M_F = k \cdot \mathcal{G}$

$$W_{pF}(\mathcal{G}) = \int_0^1 M(\theta \cdot \mathcal{G}) \cdot \mathcal{G} \cdot d\theta = \int_0^1 (k \cdot \theta \cdot \mathcal{G}) \cdot \mathcal{G} \cdot d\theta = \frac{k \cdot \mathcal{G}^2}{2}$$

$$W_p = \frac{Q_1^2}{2C_1(\mathcal{G})} + \frac{Q_2^2}{2C_2(\mathcal{G})} + \frac{k \cdot \mathcal{G}^2}{2}$$

$$M = \frac{\partial W_p}{\partial \mathcal{G}} = -\frac{u_1^2}{2} \cdot C_1'(\mathcal{G}) - \frac{u_2^2}{2} \cdot C_2'(\mathcal{G}) + k \cdot \mathcal{G}$$

$$M = -M_e + k \cdot \mathcal{G}$$

• Gleichgewichtslage \mathcal{G}^* : Resultierendes Moment M auf Anker ist Null: $M = 0$

$$0 = -M_e + k \cdot \mathcal{G}^* \Rightarrow \mathcal{G}^* = M_e / k$$

$$M_e = \frac{C_0}{2} \cdot (u_1^2 - u_2^2)$$

$$\mathcal{G}^* = \frac{C_0}{2k} \cdot (u_1^2 - u_2^2)$$

$$u_1 > u_2 : \mathcal{G}^* > 0$$

$$u_2 > u_1 : \mathcal{G}^* < 0$$

$$-\mathcal{G}_m \leq \mathcal{G}^* \leq \mathcal{G}_m$$

Elektromechanische Systeme

5. Elektromechanische Grundsysteme

Zusammenfassung:

- Beim **magnetischen Grundsystem** treten verallgemeinerte kinetische Energie W_k und mechanische potentielle Energie W_p auf.
- Es sind daher die **Lagrange-Gleichungen** für das Aufstellen der Systemgleichungen nötig.
- Beim **elektrischen Grundsystem** tritt nur verallg. potentielle Energie W_p auf, da keine Bewegungen betrachtet werden ($v = 0, i = 0$).
- Es werden daher als **Sonderfall** die verallgemeinerte Kräfte F, u , als Gradienten der verallgemeinerten potentiellen Energie W_p bestimmt (= **verkürzte Rechnung**).