Elektromechanische Systeme

Teil von Prof. Binder:
„Mathematische Analyse von Wandlern & Aktoren“

1. Einführung
2. Grundlagen
3. Formale Behandlung elektromechanischer diskreter Systeme
4. Methode der *Lagrange*-Gleichungen
5. Elektromechanische Grundsysteme
6. Dynamische Untersuchung des Wandlerverhaltens
7. Analyse ausgewählter elektromechanischer Wandler

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

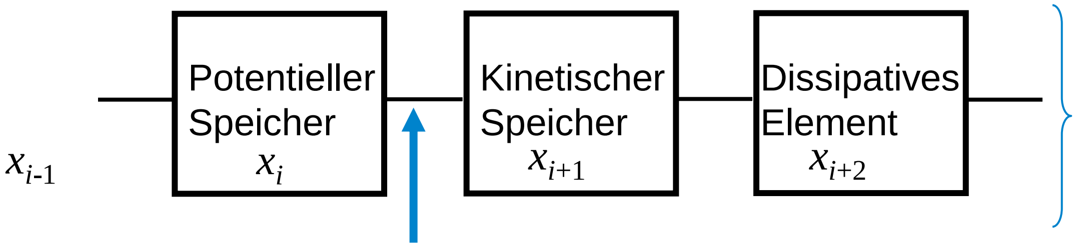
4. Methode der *Lagrange*-Gleichungen

- Verallgemeinerte unabhängige Koordinaten
- Virtuelle Verschiebungen
- Variationsrechnung anstelle der klassischen dynamischen Grundgesetze: *Lagrange*-Gleichungen
- Beispiele zum mechanischen System
- Beispiele zum elektrischen Netzwerk

Elektromechanische Systeme
4. Methode der *Lagrange*-Gleichungen

- Verallgemeinerte unabhängige Koordinaten
- Virtuelle Verschiebungen
- Variationsrechnung anstelle der klassischen dynamischen Grundgesetze: *Lagrange*-Gleichungen
- Beispiele zum mechanischen System
- Beispiele zum elektrischen Netzwerk

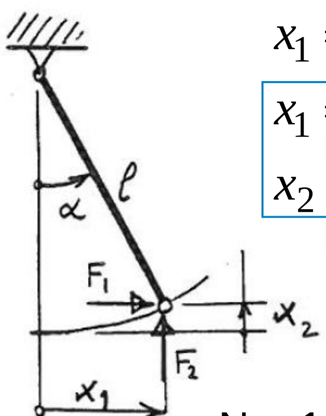
Verallgemeinerte unabhängige Koordinaten
Kinematische Verträglichkeitsbedingungen



„Schnittstelle“: Verknüpft zwei Elemente und ihre Koordinaten x_i

Durch Zusammenschalten von Systemteilen sind Koordinaten x_i i.A. <u>nicht mehr voneinander unabhängig</u>, sondern müssen „kinematische Verträglichkeitsbedingungen“ erfüllen

Beispiel 1: Mechanisches Pendel

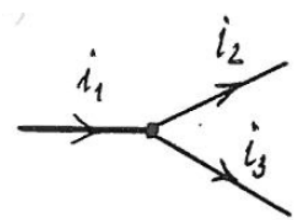


$$x_1 = x_1(x_2)$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= l \cdot \sin\alpha \\ x_2 &= l \cdot (1-\cos\alpha) \end{aligned}}$$

Nur 1 Freiheitsgrad: α

Beispiel 2: *Kirchhoff*´sche Knotengleichung



$$i_3 = i_3(i_1, i_2)$$

$$Q_3 = Q_3(Q_1, Q_2)$$

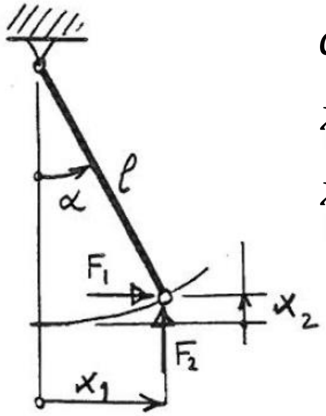
$$\boxed{\begin{aligned} i_3 &= i_1 - i_2 \\ Q_3 &= Q_1 - Q_2 \end{aligned}}$$

„kinematische Verträglichkeitsbedingungen“

Verallgemeinerte unabhängige Koordinaten
Koordinatendefinition

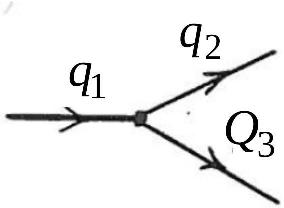
- Verallgemeinerte Koordinaten (Orts- und Ladungskoordinaten): $x_i(t) \quad i = 1,\ldots,r$
- Voneinander UNABHÄNGIGE verallgemeinerte Koordinaten: $q_i(t) \quad i = 1,\ldots,n \quad n \le r$
  = Anzahl der Freiheitsgrade des Systems *n*
- Kinematische Verträglichkeitsbedingungen: $x_i(q_1,\ldots,q_n,t) \quad i = 1,\ldots,r \quad \vec{x} = \vec{x}(\vec{q},t)$
  $\vec{x} = (x_1,\ldots,x_r) \quad \vec{q} = (q_1,\ldots,q_n)$
- Verallgemeinerte Geschwindigkeiten *v*: $\vec{v} = d\vec{q}/dt = \dot{\vec{q}} = (\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_n)$

Beispiel 1: Mechanisches Pendel



$$q_1(t) = \alpha(t):$$
$$x_1(t) = l \cdot \sin q_1(t)$$
$$x_2(t) = l \cdot (1 - \cos(q_1(t)))$$

Beispiel 2: *Kirchhoff*´sche Knotengleichung



$$Q_1(t) = q_1(t), Q_2(t) = q_2(t)$$
$$Q_3(t) = q_1(t) - q_2(t)$$

- Verallgemeinerte unabhängige Koordinaten
- Virtuelle Verschiebungen
- Variationsrechnung anstelle der klassischen dynamischen Grundgesetze: *Lagrange*-Gleichungen
- Beispiele zum mechanischen System
- Beispiele zum elektrischen Netzwerk

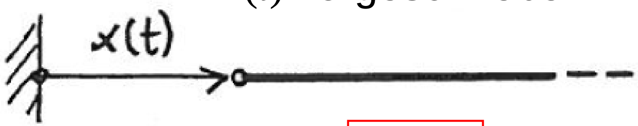
Virtuelle Verschiebungen
Definition

- Virtuelle Verschiebungen der verallgemeinerten Koordinaten x_i:
  Dienen dem energetischen Vergleich benachbarter Systemzustände.
- Momentaufnahme: Systemzustand wird zum Zeitpunkt t festgehalten.
- In DIESEM Zustand werden kleine (aber durchaus „endlich große") Verschiebungen δx_i der Koordinaten durchgeführt = „Virtuelle Verschiebungen".
- Verschiebungen δx_i sind virtuell, weil t festgehalten ist,
  während echte Verschiebungen
  eine bestimmte Zeit für ihre Durchführung benötigen.

Virtuelle Verschiebungen
Eigenschaften

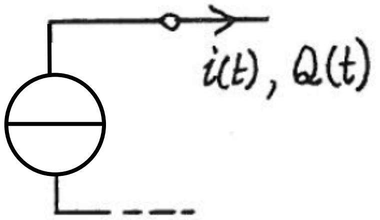
- Virtuelle Verschiebungen δx_i müssen kinematische Verträglichkeitsbedingungen einhalten.
- Durch Randbedingungen vorgegebene Bewegungen
  eines Punktes $x_i(t), v_i = \dot{x}_i(t)$
  oder
  einer Ladung $Q_i(t), i_i = \dot{Q}_i(t)$ haben wegen t = konst. KEINE virtuelle Verschiebung.

Beispiel 3: Weg-"Erregung"
$x(t)$ vorgeschrieben



$$\boxed{\delta x = 0}$$

Beispiel 4: Ideale Stromquelle:
$i(t)$ vorgeschrieben



$$\boxed{\delta Q = 0}$$

- Verallgemeinerte unabhängige Koordinaten
- Virtuelle Verschiebungen
- Variationsrechnung anstelle der klassischen dynamischen Grundgesetze: *Lagrange*-Gleichungen
- Beispiele zum mechanischen System
- Beispiele zum elektrischen Netzwerk

Variationsrechnung anstelle der klassischen dynamischen Grundgesetze: *Lagrange*-Gleichungen
Grundsatz-Überlegungen für konservative Systeme

- Konservatives System (= Energie-erhaltendes System):
  Keine Energieaustausch des Systems mit der Umgebung $\Rightarrow$ Keine Energiedissipation (= keine Verlustwärme).
  Es wird nur Energie zwischen den potentiellen & kinetischen Energie-Speichern des Systems ausgetauscht.

- Nichtkonservatives System:
  - Energieaustausch des Systems mit der Umgebung durch äußere Kräfte F,
  - Energiedissipation = bremsende (Reibungs-)Kräfte $F^{(d)}$,
  - Es wird auch Energie zwischen den pot. & kinet. Speichern des Systems ausgetauscht: Potentielle Speicherkäfte $F^{(p)}$ und „innere" Kräfte $F^{(in)}$ der kinetischen Speicher.

- Diese „Kräfte" $F_i^{(d)}, F_i^{(p)}, F_i^{(in)}$ werden in Abhängigkeit der voneinander UNABHÄNGIGEN verallgemeinerten Koordinaten q_i beschrieben.

Variationsrechnung anstelle der klassischen dynamischen Grundgesetze: *Lagrange*-Gleichungen

Kraftgleichung als Impulssatz

- Positive Zählweise der Kräfte:
- Potentielle Speicherkräfte: Verringerung der potentiellen Energie des Speichers = Erhöhung des Impulses („Beschleunigung"), $\vec{F}^{(p)}$
- Kinetische Speicherkräfte: Verringerung der kinetischen Energie des Speichers = Erhöhung des Impulses („Beschleunigung"), $\vec{F}^{(in)}$
- Dissipative Kräfte: Umsetzung von Energie in Wärmeenergie = Verringerung des Impulses („Bremsung"), $\vec{F}^{(d)}$
- Äußere Kräfte: Erhöhung des Impulses („Beschleunigung"). $\vec{F}$

$$F_i^{(in)} = -\frac{\partial W_k}{\partial q_i} = \frac{\partial W_k^*}{\partial q_i} \qquad F_i^{(p)} = -\frac{\partial W_p}{\partial q_i} \qquad i = 1,\ldots,n$$

- Impulssatz: $$\boxed{\frac{d\vec{g}(\vec{q},t)}{dt} = \vec{F} + \vec{F}^{(in)} + \vec{F}^{(p)} - \vec{F}^{(d)}}$$

Variationsrechnung anstelle der klassischen dynamischen Grundgesetze: *Lagrange*-Gleichungen

Kraftgleichung und Arbeit

- Nichtkonservatives System:
  Kräfte werden in Abhängigkeit der voneinander UNABHÄNGIGEN verallgemeinerten Koordinaten q_i beschrieben: $i = 1,\ldots,n$

$$F_i(q_1,\ldots,q_n,t) \qquad \vec{F} = \vec{F}(\vec{q},t) \qquad F_i^{(d)}(q_1,\ldots,q_n,t) \qquad \vec{F}^{(d)} = \vec{F}^{(d)}(\vec{q},t)$$

$$F_i^{(p)}(q_1,\ldots,q_n,t) \qquad \vec{F}^{(p)} = \vec{F}^{(p)}(\vec{q},t) \qquad F_i^{(in)}(q_1,\ldots,q_n,t) \qquad \vec{F}^{(in)} = \vec{F}^{(in)}(\vec{q},t)$$

- Impulssatz: $\dfrac{d\vec{g}(\vec{q},t)}{dt} = \vec{F} + \vec{F}^{(in)} + \vec{F}^{(p)} - \vec{F}^{(d)} \qquad \dfrac{dg_i(\vec{q},t)}{dt} = F_i + F_i^{(in)} + F_i^{(p)} - F_i^{(d)}$

$$g_i = \frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{q}_i} \qquad F_i^{(in)} = \frac{\partial W_k^*}{\partial q_i} \qquad F_i^{(p)} = -\frac{\partial W_p}{\partial q_i}$$

- Inkrementelle Arbeit der äußeren Kräfte: $p(t) \cdot dt = \sum_{i=1}^{n} F_i \cdot dq_i$

- Inkrementelle Arbeit der dissipativen Kräfte: $p_d(t) \cdot dt = \sum_{i=1}^{n} F_i^{(d)} \cdot dq_i$

Variationsrechnung anstelle der klassischen dynamischen Grundgesetze: *Lagrange*-Gleichungen

Nichtkonservatives System – virtuelle Verschiebungen

- Virtuelle Verschiebungen: δq_i
- Virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte: $\delta A = \sum_{i=1}^{n} F_i \cdot \delta q_i$
- Virtuelle Arbeit der dissipativen Kräfte: $\delta A_d = \sum_{i=1}^{n} F_i^{(d)} \cdot \delta q_i$

Werden nur für nichtkonservative Systeme benötigt!

- Impulssatz: $\frac{dg_i(\vec{q},t)}{dt} - F_i^{(in)} - F_i^{(p)} + F_i^{(d)} = F_i \quad g_i = \frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{q}_i} \quad F_i^{(in)} = \frac{\partial W_k^*}{\partial q_i} \quad F_i^{(p)} = -\frac{\partial W_p}{\partial q_i}$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial W_k^*}{\partial q_i} + \frac{\partial W_p}{\partial q_i} + F_i^{(d)} = F_i \quad i = 1,\ldots,n}$$

Lagrange´sche Gleichungen

- *Lagrange*-Funktion: $L(\dot{\vec{q}},\vec{q},t) = W_k^*(\dot{\vec{q}},\vec{q},t) - W_p(\vec{q},t)$
- *Lagrange*-Gleichungen: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + F_i^{(d)} = F_i \quad i = 1,\ldots,n$
- *Lagrange*-Gleichungen im konservativen System: $F_i^{(d)} = 0,\ F_i = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad i = 1,\ldots,n$

Variationsrechnung anstelle der klassischen dynamischen Grundgesetze: *Lagrange*-Gleichungen

Sonderfall: Konservatives System

- *Lagrange*-Gleichungen im konservativen System: $F_i^{(d)} = 0,\ F_i = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad i = 1,\ldots,n$

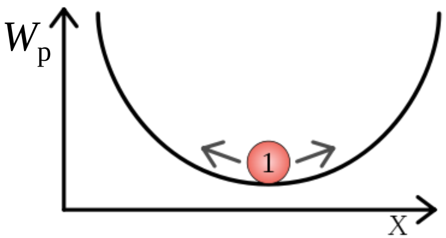
- *Lagrange*-Gleichungen für den Ruhezustand = KEINE Bewegung = kinetische Energie ist NULL $\Rightarrow$ auch kinetische Ko-Energie ist NULL!: $W_k^* = 0 : \frac{\partial W_p}{\partial q_i} = 0$

- Gleichgewichtslage des Systems *x* (= Ruhelage des Systems):
  x jener Ort, wo potentielle Energie W_p einen Extremwert annimmt (maximal od. minimal).

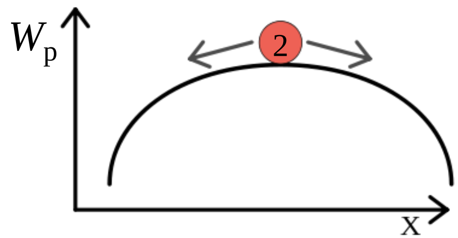
Variationsrechnung anstelle der klassischen dynamischen Grundgesetze: *Lagrange*-Gleichungen

Beispiel: Gleichgewichtslage im konservativen System

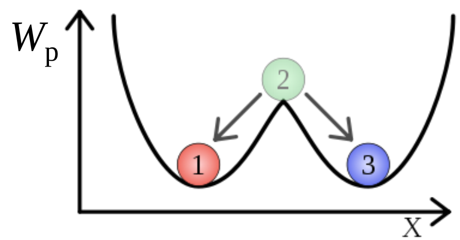
- ***Beispiel 5:***
  Mechanisches System: Kugel in Mulde oder auf Hügel: $n = 1$, $q_1 = x$



1: W_p minimal:
Stabiles Gleichgewicht



2: W_p maximal:
Instabiles Gleichgewicht



1, 3: W_p minimal:
Stabiles Gleichgewicht

2: W_p maximal:
Instabiles Gleichgewicht

Quelle: Wikipedia.de

Variationsrechnung anstelle der klassischen dynamischen Grundgesetze: *Lagrange*-Gleichungen

Bewegungsgleichungen durch Variationsrechnung (1)

- Hier: Konservatives System: Varianten der „Bewegungstrajektorien“ $\hat{q}_i(t)$
  über virtuelle Verschiebungen: $\delta q_i(t)$

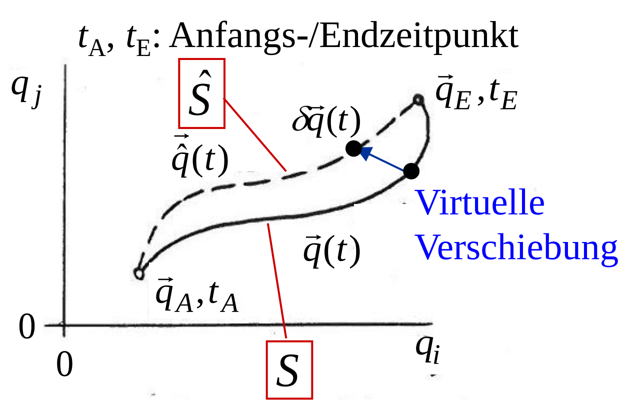
$$\hat{q}_i(t) = q_i(t) + \varepsilon \cdot \delta q_i(t) \qquad \delta q_i(t_A) = \delta q_i(t_E) = 0$$

- Definition der „Wirkung“ *S* (nach *Euler*):
  L zunächst unbekannte Funktion!

$$\boxed{S = \int_{t_A}^{t_E} L(\dot{\vec{q}}, \vec{q}, t) \cdot dt}$$

- Wir betrachten die tatsächliche Bewegung des Systems, dargestellt durch eine Kurve $\vec{q}(t)$ zwischen den Punkten $\vec{q}_A = \vec{q}(t_A), \vec{q}_E = \vec{q}(t_E)$ im Raum der verallgemeinerten Koordinaten q_i.

$$\hat{S} = \int_{t_A}^{t_E} L(d\vec{\hat{q}}/dt, \vec{\hat{q}}, t) \cdot dt$$



Variationsrechnung anstelle der klassischen dynamischen Grundgesetze: *Lagrange*-Gleichungen

Bewegungsgleichungen durch Variationsrechnung (2)

Im Vergleich mit anderen, kinematisch ebenfalls zulässigen Bewegungsvarianten $\hat{\vec{q}}(t)$ zwischen den Lagen $\vec{q}_A, \vec{q}_E$ nimmt die Wirkung *S* für die tatsächlich ausgeführte Bewegung einen Extremwert an!

Dies hat *L. Euler* gezeigt = Variationsrechnung!

$$\hat{q}_i(t) = q_i(t) + \varepsilon \cdot \delta q_i(t) \qquad \hat{S} = S(\varepsilon) = \int_{t_A}^{t_E} L(\dot{\vec{q}} + \varepsilon \cdot \delta\dot{\vec{q}}, \vec{q} + \varepsilon \cdot \delta\vec{q}, t) \cdot dt$$

$$\boxed{\delta S = \left. \frac{dS(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0}$$

- Auswertung von $\delta S = 0$ liefert nach *Euler* die Bestimmungsgleichung für *L*:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad i = 1, \ldots, n$$

  also die *Lagrange*-Gleichungen im konservativen System!

- Für *Newton´*sche Systeme ist *L* die Funktion $L(\dot{\vec{q}}, \vec{q}, t) = W_k^*(\dot{\vec{q}}, \vec{q}, t) - W_p(\vec{q}, t)$

Variationsrechnung anstelle der klassischen dynamischen Grundgesetze: *Lagrange*-Gleichungen

Mechanisches Beispiel: Freier Fall

- *Newton´s* Bewegungsgleichung

$$m \cdot \ddot{x} = F = m \cdot g$$

- *Lagrange*-Gleichung

$$W_k^*(\dot{x}, x) = W_k^*(\dot{x}) = \frac{m \cdot \dot{x}^2}{2}$$

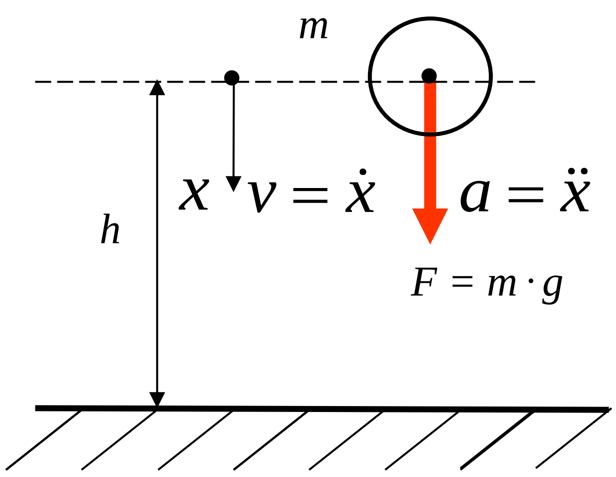
$$W_p(x) = m \cdot g \cdot (h - x)$$

$$L(\dot{x}, x) = W_k^* - W_p$$

$$n = 1 : q_1 = x$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \cdot \dot{x}, \quad \frac{\partial L}{\partial x} = m \cdot g$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad m \cdot \ddot{x} - m \cdot g = 0 \quad m \cdot \ddot{x} = m \cdot g$$



Gravitationskraft als äußere Kraft in *x*-Richtung wirksam

Bevorzugte Anwendung

- Bei einfachen Systemen mit wenigen Freiheitsgraden (*n* klein) ist die Rechnung mit
  a) der *Newton*-Bewegungsgleichung und
  b) den *Kirchhoff*-Gleichungen zum Aufstellen der Systemgleichungen schneller.

- Bei aufwändigen Systemen ist die Methode der *Lagrange*-Gleichungen übersichtlicher.
- Man muss keine Körper „freischneiden", um Kopplungen der Teilsysteme zu beschreiben.

Variationsrechnung anstelle der klassischen dynamischen Grundgesetze: *Lagrange*-Gleichungen

Vorgehensweise zum Aufstellen der Systemgleichungen

a) Feststellen der Anzahl *n* der Freiheitsgrade:

- Wahl der verallgemeinerten UNabhängigen Koordinaten q_i, $i = 1, \ldots, n$,
- Verallgem. Koordinaten q_i sind UNabhängige Verschiebungen *x*, Winkel γ, Ladungen *Q.*
- Eingeprägte Koordinatenvorgaben (Wegerregung, Stromquelle) haben vorgeschriebene Zeitfunktionen und zählen daher NICHT zu den UNabhängigen verallg. Koordinaten.
- Geometrische Bedingungen und *Kirchhoff*-Knotengleichungen müssen erfüllt sein!

b) Anschreiben der (i) kinetischen Ergänzungsenergie W_k^*
als Funktion der verallgemeinerten Geschwindigkeiten dq_i/dt und Koordinaten q_i und
der (ii) potentiellen Energie W_p als Funktion von q_i .

c) Bestimmen der verallg. dissipativen Kräfte $F_i^{(d)}$ u. äußeren Kräfte F_i als Koeffizienten der Änderungen δA_d, δA bei den virtuellen Verschiebungen δq_i bei nicht-konservativen Systemen.

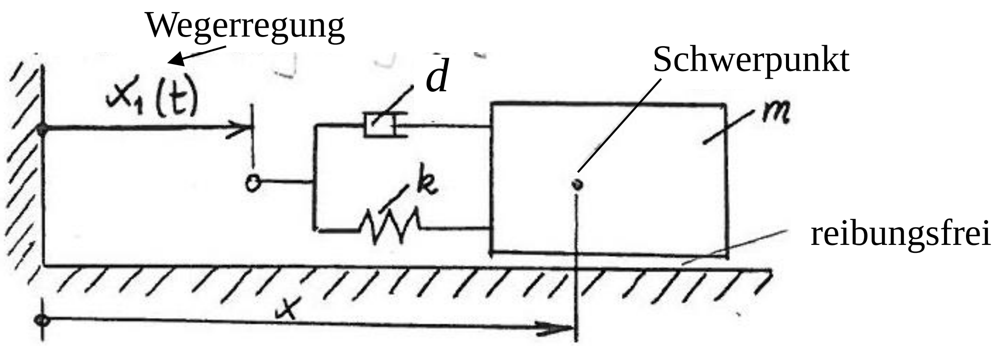
d) Einsetzen von W_k^*, W_p in die *Lagrange*-Gleichungen und Ausführen der Differentiationen liefert einen Satz von *n* unabhängigen **Systemgleichungen.**

Elektromechanische Systeme
4. Methode der *Lagrange*-Gleichungen

- Verallgemeinerte unabhängige Koordinaten
- Virtuelle Verschiebungen
- Variationsrechnung anstelle der klassischen dynamischen Grundgesetze: *Lagrange*-Gleichungen
- Beispiele zum mechanischen System (5 Beispiele)
- Beispiele zum elektrischen Netzwerk

Beispiele zum mechanischen System

Bsp. 1: Wegerregte Bewegung an der Feder *k* (mit linearer Dämpfung *d*)



- Wegerregung $x_1(t)$ an Feder vorgeschrieben (= eingeprägt):
- Dämpfer und Feder linear: $d, k =$ konst.
- Feder entspannt für $x - x_1 = l_0$ (l_0 : Länge der entspannten Feder)
- Dämpferkraft prop. zur Geschwindigkeit: $F^{(d)} = d \cdot (\dot{x} - \dot{x}_1)$

- Keine äußeren Kräfte vorhanden: $F = 0$

a) $n = 1 : q_1 = x$

b) $W_k^* = m \cdot \dot{x}^2 / 2, \quad W_p = k \cdot (x - x_1 - l_0)^2 / 2$

c) $\delta A_d = d \cdot \Delta\dot{x} \cdot \delta(\Delta x) = d \cdot (\dot{x} - \dot{x}_1) \cdot \delta(x - x_1) \quad \delta A = F \cdot \delta(x - x_1) = 0$

d) $\dfrac{\partial W_k^*}{\partial \dot{x}} = m \cdot \dot{x} \quad \dfrac{\partial W_k^*}{\partial x} = 0 \quad \dfrac{\partial W_p}{\partial x} = k \cdot (x - x_1 - l_0)$

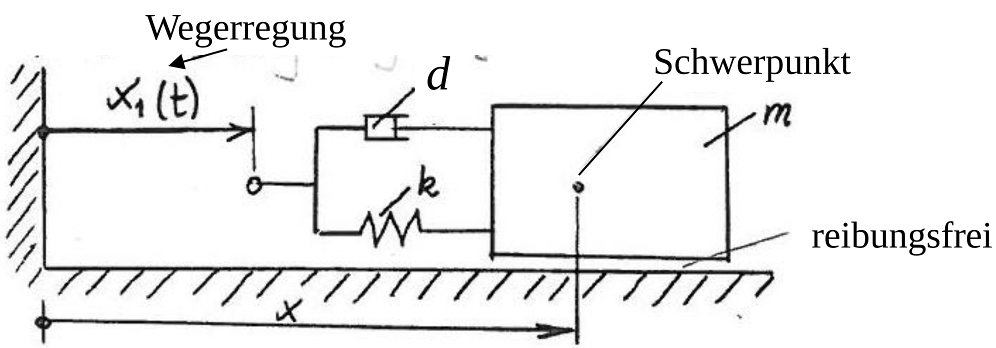
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial W_k^*}{\partial x} + \frac{\partial W_p}{\partial x} + F^{(d)} = F \Rightarrow \frac{d(m \cdot \dot{x})}{dt} - 0 + k \cdot (x - x_1 - l_0) + d \cdot (\dot{x} - \dot{x}_1) = 0$$

$$\boxed{m \cdot \ddot{x} + d \cdot \dot{x} + k \cdot x = k \cdot (x_1(t) + l_0) + d \cdot \dot{x}_1(t)}$$

Wegerregter mechanischer linearer Schwinger

Beispiele zum mechanischen System

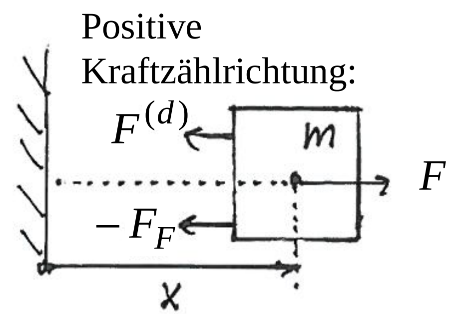
Bsp. 1: Alternativ: *Newton*´sche Bewegungsgleichung

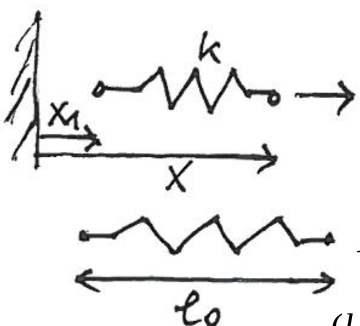


- Schwerpunktsatz: Summe aller Kräfte ergibt die Impulsänderung

$$m\cdot\ddot{x}=F-F^{(d)}+F^{(p)}=F-F^{(d)}+F_F$$

Positive Kraftzählrichtung:



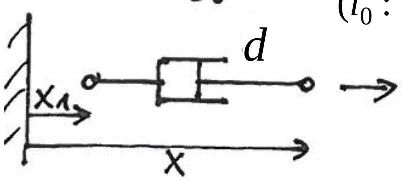


$$\rightarrow F_F=-(x-x_1-l_0)\cdot k>0,$$

$$\text{wenn z.B.}: x-x_1-l_0<0$$

$$F_F=0$$

(l_0 : Länge der entspannten Feder)



$$\rightarrow F^{(d)}=d\cdot v=d\cdot(\dot{x}-\dot{x}_1)$$

$$\text{z.B.}:\quad \dot{x}-\dot{x}_1<0$$

$$F=0: m\cdot\ddot{x}=-F^{(d)}+F_F$$

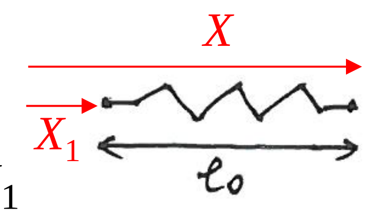
$$m\cdot\ddot{x}=-d\cdot(\dot{x}-\dot{x}_1)-k\cdot(x-x_1-l_0)$$

$$\boxed{m\cdot\ddot{x}+d\cdot\dot{x}+k\cdot x=d\cdot\dot{x}_1+(x_1+l_0)\cdot k}$$

- System 2. Ordnung = zwei Energiespeicher: Feder und Masse

Beispiele zum mechanischen System

Bsp. 1: Gleichgewicht bei Weg-erregter Bewegung



- Wegerregung (Feder-seitig): $m\cdot\ddot{x}+d\cdot\dot{x}+k\cdot x=d\cdot\dot{x}_1+(x_1+l_0)\cdot k$
- Gleichgewicht $\Rightarrow$ *d./dt* = 0: $\ddot{x}=\dot{x}=0,\quad \dot{x}_1=0\rightarrow x_1=\text{konst.}\Rightarrow x_1=X_1$
  Feder entspannt sich!

$$k\cdot x=(x_1+l_0)\cdot k=k\cdot X \qquad \boxed{X=X_1+l_0}$$

- Abweichung aus der Gleichgewichtslage: $x(t)=X+\Delta x(t)$ $\qquad x_1(t)=X_1+\Delta x_1(t)$

$$m\cdot\Delta\ddot{x}+d\cdot\Delta\dot{x}+k\cdot(\cancel{X}+\Delta x)=d\cdot\Delta\dot{x}_1+(\cancel{X_1}+\Delta x_1+\cancel{l_0})\cdot k$$

$$\dot{x}_1(t)=\dot{X}_1+\Delta\dot{x}_1(t)=\Delta\dot{x}_1(t)$$

$$\dot{x}=\Delta\dot{x},\ \ddot{x}=\Delta\ddot{x}$$

$$\boxed{m\cdot\Delta\ddot{x}+d\cdot\Delta\dot{x}+k\cdot\Delta x=d\cdot\Delta\dot{x}_1+\Delta x_1\cdot k}$$

- Sinusförmige Abweichung aus der Gleichgewichtslage: $x(t)=X+\Delta x(t)$

Erregung: $x_1(t)=X_1+\Delta x_1(t)=X_1+\hat{X}_1\cdot\cos(\omega t)$

$$\boxed{x(t)=X+\Delta x(t)=X+\hat{X}\cdot\cos(\omega t+\varphi)}$$

Beispiele zum mechanischen System

<u>*Bsp. 1:*</u> Frequenzgang bei Weg-erregter Bewegung

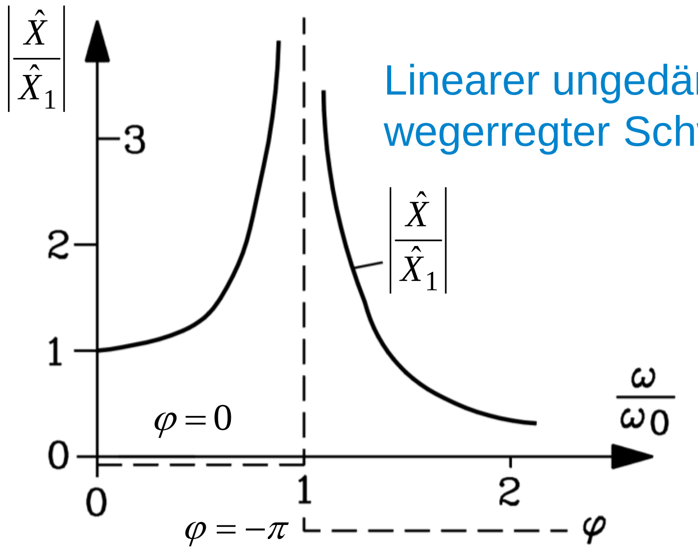
- Wegerregung (Feder-seitig): $m \cdot \Delta\ddot{x} + d \cdot \Delta\dot{x} + k \cdot \Delta x = d \cdot \Delta\dot{x}_1 + \Delta x_1 \cdot k$
- Frequenzgang: Sinusförmige Dauererregung: $\Delta x_1(t) = \hat{X}_1 \cdot \cos\omega t = \mathrm{Re}\left\{\hat{X}_1 \cdot e^{j\omega t}\right\}$

$$\Delta x(t) = \hat{X} \cdot \cos(\omega t + \varphi) = \mathrm{Re}\left\{\hat{X} \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t}\right\},\ \underline{\hat{X}} = \hat{X} \cdot e^{j\varphi}$$

$$\text{z.B.}: d = 0: m \cdot \Delta\ddot{x} + k \cdot \Delta x = \Delta x_1 \cdot k \Rightarrow (-m \cdot \omega^2 + k) \cdot \underline{\hat{X}} = k \cdot \hat{X}_1$$

$$\underline{\hat{X}} / \hat{X}_1 = \frac{k}{-m \cdot \omega^2 + k} = \frac{k/m}{(k/m) - \omega^2} = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

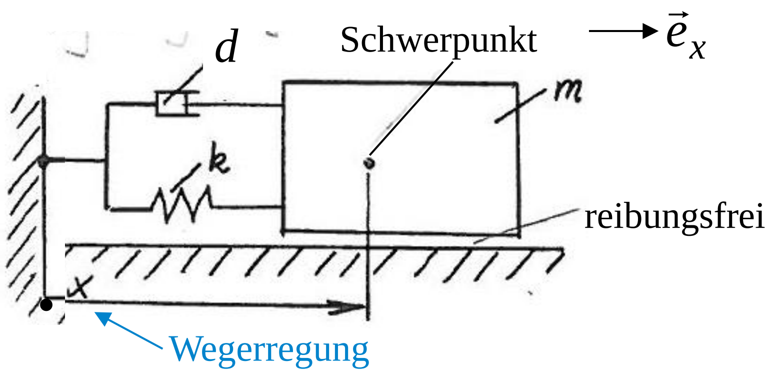
Resonanz-Kreisfrequenz: $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$



Linearer ungedämpfter wegerregter Schwinger

Beispiele zum mechanischen System

Bsp. 2: Wegerregte Bewegung an der Masse *m* (mit linearer Dämpfung *d*)



- Wegerregung $x(t)$ an der Masse vorgeschrieben
- Dämpfer und Feder linear: $d, k = \text{konst.}$
- Feder entspannt für $x = l_0$
- Dämpferkraft prop. zur Geschwindigkeit:

$$F^{(d)} = d \cdot \dot{x}$$

- Keine äußeren Kräfte vorhanden: $F = 0$

a) $n = 0:$ Keine unbekannte Variable vorhanden

b) $F = 0 : m \cdot \ddot{x} = -F^{(d)} + F_F, \quad m \cdot \ddot{x} = -d \cdot \dot{x} - k \cdot (x - l_0), \quad m \cdot \ddot{x} + d \cdot \dot{x} + k \cdot x = l_0 \cdot k$

- Keine Schwingungs-Differentialgleichung mit Unbekannter, sondern NUR eingeprägter Weg x der Masse m

- Keine Resonanz, da „geführte“ Bewegung der Masse!

- Bei entspannter Feder $x = l_0 \Rightarrow$ Feder- und Dämpfungskraft sind Null: $\dot{x} = dl_0 / dt = 0$

$$\vec{F}^{(p)} = \vec{F}_F = -k \cdot (x - l_0) \cdot \vec{e}_x = \vec{0} \qquad \vec{F}^{(d)} = -d \cdot \dot{x} \cdot \vec{e}_x = -d \cdot 0 \cdot \vec{e}_x = \vec{0}$$

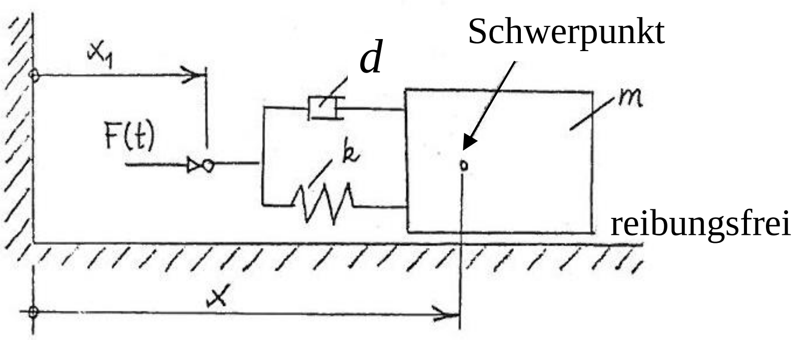
Beispiele zum mechanischen System

Übung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Bsp. 3: Krafterregte Bewegung an der Feder (1) (mit linearer Dämpfung *d*)

Anwendung der *LAGRANGE*-Gleichungen:



- Äußere Kraft $F(t)$ vorgeschrieben
- Zufolge $F(t)$ können sich x und x_1 ändern $\Rightarrow n = 2$
- Dämpfer und Feder linear: $d, k = \text{konst.}$
- Feder entspannt für $x - x_1 = l_0$
- Dämpferkraft prop. zur Geschwindigkeit:

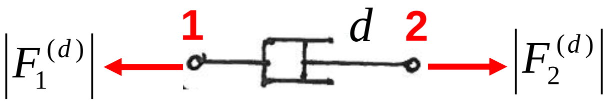
$$F^{(d)} = d \cdot (\dot{x} - \dot{x}_1)$$

a) $n = 2: q_1 = x_1, q_2 = x$

b) $W_k^* = m \cdot \dot{x}^2 / 2, \quad W_p = k \cdot (x - x_1 - l_0)^2 / 2$

c) $\delta A_d = d \cdot (\dot{x} - \dot{x}_1) \cdot \delta(x - x_1) = -d \cdot (\dot{x} - \dot{x}_1) \cdot \delta q_1 + d \cdot (\dot{x} - \dot{x}_1) \cdot \delta q_2 \Rightarrow F_1^{(d)} \cdot \delta q_1 + F_2^{(d)} \cdot \delta q_2$

$$\Rightarrow F_1^{(d)} = -F_2^{(d)} = -d \cdot (\dot{x} - \dot{x}_1)$$



$$\delta A = F \cdot \delta x_1 = F_1 \cdot \delta q_1 + F_2 \cdot \delta q_2 = F \cdot \delta q_1 + 0 \cdot \delta q_2 \Rightarrow F_1 = F(t), F_2 = 0$$

Beispiele zum mechanischen System

Übung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Bsp. 3: Krafterregte Bewegung an der Feder (2) (mit linearer Dämpfung *d*)

d) $i=1: \dfrac{\partial W_k^*}{\partial \dot{x}_1}=0 \quad \dfrac{\partial W_k^*}{\partial x_1}=0 \quad \dfrac{\partial W_p}{\partial x_1}=-k\cdot(x-x_1-l_0) \quad \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial W_k^*}{\partial \dot{x}_1}\right)-\dfrac{\partial W_k^*}{\partial x_1}+\dfrac{\partial W_p}{\partial x_1}+F_1^{(d)}=F_1$

$$0-0-k\cdot(x-x_1-l_0)-d\cdot(\dot{x}-\dot{x}_1)=F(t)$$

$i=2: \dfrac{\partial W_k^*}{\partial \dot{x}}=m\cdot\dot{x} \quad \dfrac{\partial W_k^*}{\partial x}=0 \quad \dfrac{\partial W_p}{\partial x}=k\cdot(x-x_1-l_0) \quad \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial W_k^*}{\partial \dot{x}}\right)-\dfrac{\partial W_k^*}{\partial x}+\dfrac{\partial W_p}{\partial x}+F_2^{(d)}=F_2$

$$m\cdot\ddot{x}-0+k\cdot(x-x_1-l_0)+d\cdot(\dot{x}-\dot{x}_1)=0$$

$$\left.\boxed{\begin{array}{l} -k\cdot(x-x_1-l_0)-d\cdot(\dot{x}-\dot{x}_1)=F(t) \\ m\cdot\ddot{x}+k\cdot(x-x_1-l_0)+d\cdot(\dot{x}-\dot{x}_1)=0 \end{array}}\right\} \quad m\cdot\ddot{x}=F(t)$$

Resultierende Diff.gleichung in *x*

- Zwei lineare Differentialgleichungen für die beiden Unbekannten x_1, x
- Resultierende DGL in *x* ist zweiter Ordnung = System 2. Ordnung = = Ein kinetischer und ein potentieller Energiespeicher
- ABER: <u>Keine</u> Schwingungsgleichung, weil Kraft am Feder-Dämpfer-System eingeprägt

Beispiele zum mechanischen System

Bsp. 3: Frequenzgang bei Kraft-erregter Bewegung an der Feder *k*

- Krafterregung (Feder-seitig): $m \cdot \ddot{x} = F(t)$
- Frequenzgang: Sinusförmige Dauererregung: $F(t) = \hat{F} \cdot \cos\omega t = \mathrm{Re}\{\hat{F} \cdot e^{j\omega t}\}$

$$x(t) = \hat{X} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) = \mathrm{Re}\{\hat{X} \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t}\},\ \underline{\hat{X}} = \hat{X} \cdot e^{j\varphi}$$

$$-m \cdot \omega^2 \cdot \underline{\hat{X}} = \hat{F} \Rightarrow \underline{\hat{X}} / \hat{F} = -\frac{1}{m \cdot \omega^2} \qquad \varphi = -\pi$$

- KEINE Resonanz, sondern zur Kraft *F* gegenphasige Bewegung mit bei steigender Kreis-Frequenz ω quadratisch abnehmender Amplitude
- Die Wegamplitude $\hat{X}$ der Masse *m* sinkt wegen deren Trägheit bei konstanter Kraftamplitude $\hat{F}$ mit steigender Frequenz $f = \omega/(2\pi)$!
- Bei konstanter Kraft *F* = konst.; *f* = 0 (Frequenz ist Null) wird die Masse *m* über die Feder „weggeschoben“:

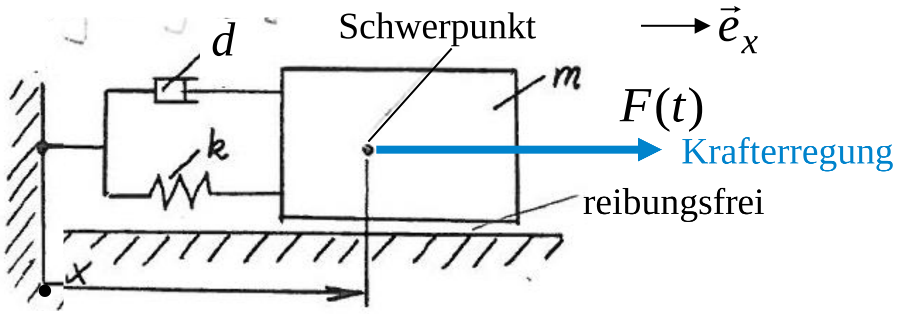
$$\ddot{x} = F/m \Rightarrow \dot{x} = (F/m) \cdot t + v(0) \Rightarrow x = (F/m) \cdot \frac{t^2}{2} + v(0) \cdot t + x(0) \Rightarrow x\big|_{t\to\infty} \to \infty$$

Beispiele zum mechanischen System

Übung

Bsp. 4: Kraft-erregte Bewegung an der Masse m (mit linearer Dämpfung d)

Zur Abwechslung:
Nicht mit *LAGRANGE*, sondern Anwendung der *NEWTON*-Bewegungsgleichung:



$$m \cdot \ddot{x} + d \cdot \dot{x} + k \cdot x = k \cdot l_0 + F(t)$$

- Schwerpunktsatz: Summe aller Kräfte ergibt die Impulsänderung

$$m \cdot \ddot{x} \cdot \vec{e}_x = \vec{F} - \vec{F}^{(d)} + \vec{F}^{(p)}$$

$$\vec{F}^{(p)} = \vec{F}_F = -k \cdot (x - l_0) \cdot \vec{e}_x$$

$$\vec{F}^{(d)} = d \cdot \dot{x} \cdot \vec{e}_x \qquad \vec{F} = F(t) \cdot \vec{e}_x$$

- Linearer Ein-Massen-Schwinger: Schwingungsdifferentialgleichung!
- Gleichgewichtslage: $d./dt = 0$: F = konst.: $x = X$: $\quad k \cdot X = k \cdot l_0 + F \Leftrightarrow F = k \cdot (X - l_0)$
- Auslenkung aus dem Gleichgewicht: $x(t) = X + \Delta x(t), F(t) = F + \Delta F(t)$
- Auslenkungen Δx, ΔF können beliebig groß sein; das System ist weiterhin linear !
- Mit Gleichgewicht $k \cdot X = k \cdot l_0 + F$ folgt mit: $\ddot{x} = \Delta\ddot{x}, \dot{x} = \Delta\dot{x}$

$$\boxed{m \cdot \Delta\ddot{x} + d \cdot \Delta\dot{x} + k \cdot \Delta x = \Delta F(t)}$$

Beispiele zum mechanischen System

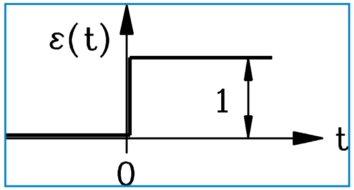
Übung

Bsp. 4: Kraft-erregte Bewegung an der Masse *m*: Sprungantwort beim Kraft-Aufschalten (1)

$$\boxed{m \cdot \Delta\ddot{x} + d \cdot \Delta\dot{x} + k \cdot \Delta x = \Delta F(t)}$$

- **Beispiel:** Sprungförmige Kraftaufschaltung $\Delta F(t) = \Delta F \cdot \varepsilon(t)$, $\quad \varepsilon(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ 1, t \geq 0 \end{cases}$

  HEAVISIDE-Sprungfunktion („Einheitssprung") $\varepsilon(t)$



- Sprungantwort $\Delta x(t)$: Lösung der Differentialgleichung 2. Ordnung z. B. mit der Methode der homogenen und partikulären Lösung Δx_h, Δx_p
- Anfangsbedingung: $\Delta x(0) = 0$, $\Delta\dot{x}(0) = 0$, schwache Dämpfung: $4 \cdot k \cdot m > d^2 \Leftrightarrow d_L < 1$ *)
- Homogene Gleichung (= rechte Seite ist Null): $\Delta\ddot{x}_h + (d/m) \cdot \Delta\dot{x}_h + (k/m) \cdot \Delta x_h = 0$

  Ansatz:

$$\Delta x_h(t) = C_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + C_2 \cdot e^{\lambda_1 t} \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{d}{2m} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4m^2} - \frac{k}{m}} = -\frac{d}{2m} \pm j \cdot \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{d^2}{4m^2}} = \underline{\lambda}_{1,2}$$

- Eigen-Kreisfrequenz des ungedämpften Schwingers: $\omega_0 = \sqrt{k/m}$
- *) *LEHR*´sches Dämpfungsmaß d_L (dimensionslos!): $d_L = \dfrac{d}{2\sqrt{k \cdot m}} \qquad \beta = \dfrac{d}{2m} = d_L \cdot \omega_0$

$$\boxed{\underline{\lambda}_{1,2} = -\beta \pm j \cdot \omega_d = \omega_0 \cdot (-d_L \pm j \cdot \sqrt{1 - d_L^2})}$$

- Eigen-Kreisfrequenz des gedämpften Schwingers: $\omega_d = \sqrt{\dfrac{k}{m} - \dfrac{d^2}{4m^2}} = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - d_L^2}$

Beispiele zum mechanischen System

Übung

<u>Bsp. 4:</u> Kraft-erregte Bewegung an der Masse *m*: Sprungantwort beim Kraft-Aufschalten (2)

$$\Delta x_h(t) = \underline{C}_1 \cdot e^{-\beta \cdot t} \cdot e^{j\omega_d \cdot t} + \underline{C}_2 \cdot e^{-\beta \cdot t} \cdot e^{-j\omega_d \cdot t} \qquad \underline{C}_1 := (D_1 - jD_2)/2 \quad \underline{C}_2 := (D_1 + jD_2)/2$$

$$\Delta x_h(t) = e^{-\beta \cdot t} \cdot \left[D_1 \cdot \frac{e^{j\omega_d \cdot t} + e^{-j\omega_d \cdot t}}{2} + D_2 \cdot \frac{e^{j\omega_d \cdot t} - e^{-j\omega_d \cdot t}}{2j} \right]$$

$$\Delta x_h(t) = e^{-\beta \cdot t} \cdot [D_1 \cdot \cos(\omega_d \cdot t) + D_2 \cdot \sin(\omega_d \cdot t)]$$

- Partikuläre Gleichung $\Delta \ddot{x}_p + (d/m) \cdot \Delta \dot{x}_p + (k/m) \cdot \Delta x_p = \Delta F / m, \quad t \geq 0$
  (= rechte Seite berücksichtigen: hier: <u>Konstante</u>!):
  Ansatz: <u>Konstante</u> als Lösung: $\Delta x_p(t) = K, \quad t \geq 0 \Rightarrow K = \Delta F / k$

- Erfüllen der Anfangsbedingung:

$$\Delta x(0) = 0 = \Delta x_h(0) + \Delta x_p(0) = D_1 + K \Rightarrow D_1 = -K$$

$$\Delta \dot{x}(0) = 0 = \Delta \dot{x}_h(0) + \Delta \dot{x}_p(0) = \omega_d \cdot D_2 - \beta \cdot D_1 \Rightarrow D_2 = (\beta / \omega_d) \cdot (-K)$$

- Sprungantwort $\Delta x(t)$: $\boxed{\Delta x(t) = (\Delta F / k) \cdot \{1 - e^{-\beta \cdot t} \cdot [\cos(\omega_d \cdot t) + (\beta / \omega_d) \cdot \sin(\omega_d \cdot t)]\}}$

Beispiele zum mechanischen System

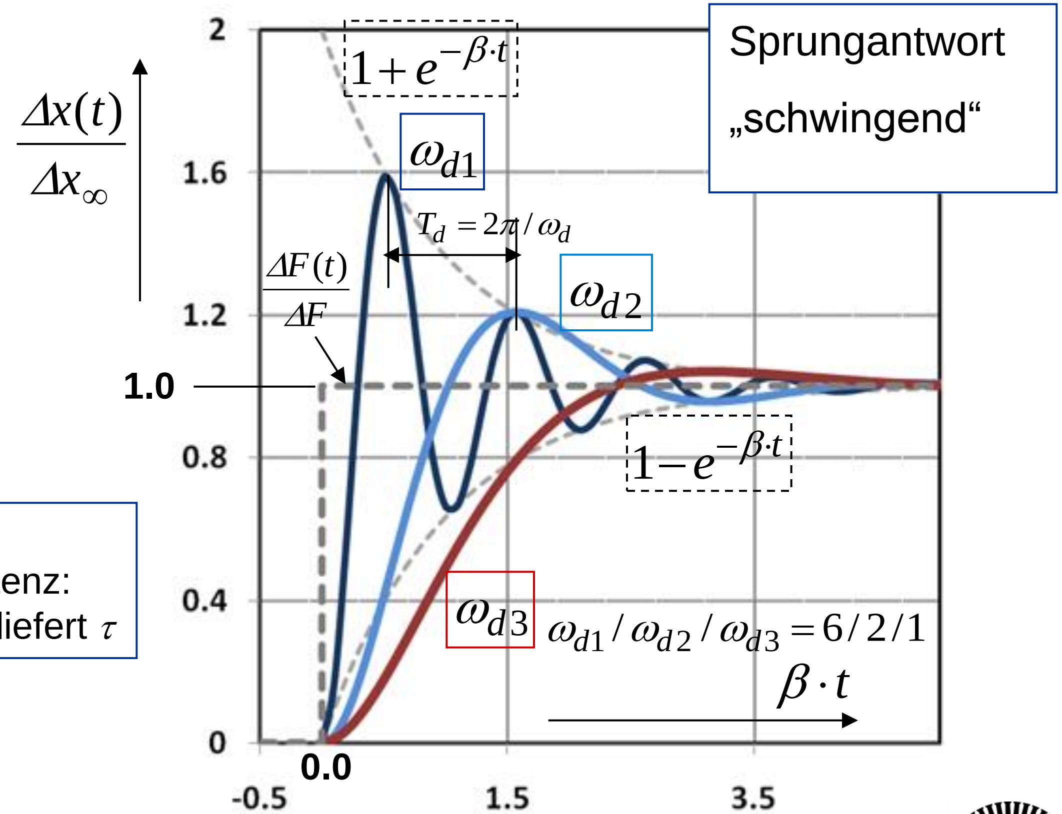
Übung

Bsp. 4: Kraft-erregte Bewegung an der Masse m: Sprungantwort beim Kraft-Aufschalten (3)

- Sprungantwort $\Delta x(t)$: $\boxed{\Delta x(t) = (\Delta F / k)\cdot\left\{1 - e^{-\beta\cdot t}\cdot\left[\cos(\omega_d\cdot t) + (\beta/\omega_d)\cdot\sin(\omega_d\cdot t)\right]\right\},\quad t \geq 0}$
- Stationärantwort $\Delta x(t\to\infty)$: Federdehnung $\Delta x_\infty = \Delta F/k$
- Mit $\sin\phi = \dfrac{1}{\sqrt{1+(\beta/\omega_d)^2}} = \sqrt{1-d_L^2}$

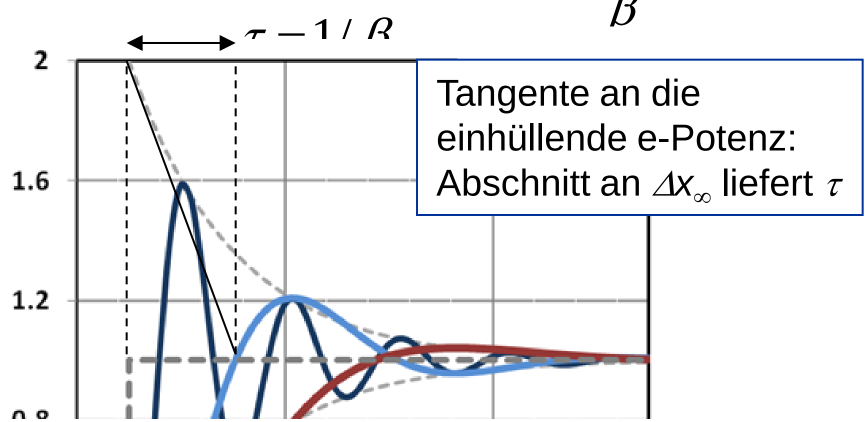
  $\phi = \arccos d_L$

$$\boxed{\frac{\Delta x(t)}{\Delta x_\infty} = 1 - e^{-\beta\cdot t}\cdot\frac{\sin(\omega_d\cdot t+\phi)}{\sin\phi}\qquad t\geq 0}$$



Quelle: Wikipedia

- Dämpfungszeitkonstante: $\tau = \dfrac{1}{\beta}$



Beispiele zum mechanischen System

Übung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Bsp. 4: Kraft-erregte Bewegung an der Masse *m*: Frequenzgang (1)

$$\boxed{m\cdot\Delta\ddot{x}+d\cdot\Delta\dot{x}+k\cdot\Delta x=\Delta F(t)}$$

- *Beispiel:* Sinusförmige Kraftanregung:

$$\Delta F(t)=\Delta\hat{F}\cdot\cos\omega t=\mathrm{Re}\left\{\Delta\hat{F}\cdot e^{j\omega t}\right\}\Rightarrow\Delta x(t)=\Delta\hat{X}\cdot\cos(\omega t+\varphi)=\mathrm{Re}\left\{\Delta\hat{X}\cdot e^{j\varphi}\cdot e^{j\omega t}\right\}$$

$$\Delta x(t)=\mathrm{Re}\left\{\Delta\underline{\hat{X}}\cdot e^{j\omega t}\right\}$$

$$(-\omega^2\cdot m+j\omega\cdot d+k)\cdot\Delta\underline{\hat{X}}=\Delta\hat{F}$$

- Frequenzgang:

$$\boxed{\frac{\Delta\underline{\hat{X}}}{\Delta\hat{F}}=\frac{1}{-\omega^2\cdot m+j\omega\cdot d+k}}\qquad\omega\to0:\Delta\underline{\hat{X}}=\Delta\hat{X}=\Delta\hat{F}/k,\quad\omega\to\infty:\Delta\underline{\hat{X}}\to\underline{0}=0+j\cdot0$$

- Amplituden-Frequenzgang: („Nachgiebigkeit“)

$$\frac{\Delta\hat{X}}{\Delta\hat{F}}=\left|\frac{\Delta\underline{\hat{X}}}{\Delta\hat{F}}\right|=\frac{1}{\sqrt{(-\omega^2\cdot m+k)^2+(\omega\cdot d)^2}}$$

- Amplitudenmaximum bei Resonanzfrequenz ω_e: $(-\omega_e^2\cdot m+k)^2+(\omega_e\cdot d)^2=\text{minimal}$

$$\frac{d}{d\omega_e^2}\left[(-\omega_e^2\cdot m+k)^2+(\omega_e\cdot d)^2\right]=0=(-2m)\cdot(-\omega_e^2\cdot m+k)+d^2\Rightarrow\boxed{\omega_e=\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{d^2}{2m^2}}}$$

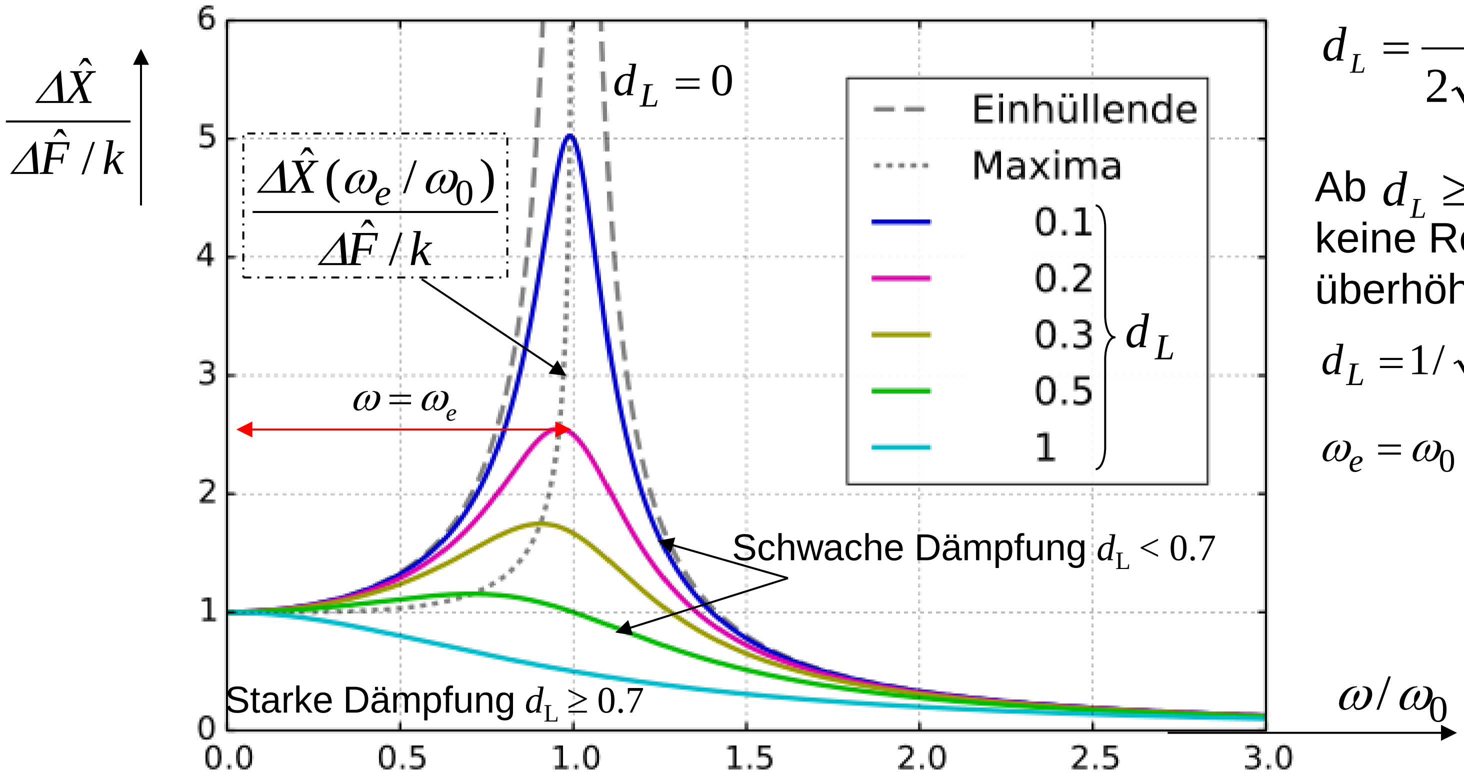
Beispiele zum mechanischen System

Übung

Bsp. 4: Kraft-erregte Bewegung an der Masse *m*: Frequenzgang (2)

$$\boxed{\frac{\Delta\hat{X}}{\Delta\hat{F}} = \left|\frac{\Delta\hat{X}}{\Delta\hat{F}}\right| = \frac{1}{\sqrt{(-\omega^2\cdot m+k)^2+(\omega\cdot d)^2}}}$$

$$\omega_e = \omega_0\cdot\sqrt{1-2d_L^2} < \omega_d = \omega_0\cdot\sqrt{1-d_L^2} < \omega_0 = \sqrt{k/m}$$



$$d_L = \frac{d}{2\sqrt{k\cdot m}} = \frac{\beta}{\omega_0}$$

Ab $d_L \geq 1/\sqrt{2} = 0.71$ keine Resonanzüberhöhung, denn:

$d_L = 1/\sqrt{2}$:

$$\omega_e = \omega_0\cdot\sqrt{1-2d_L^2} = 0$$

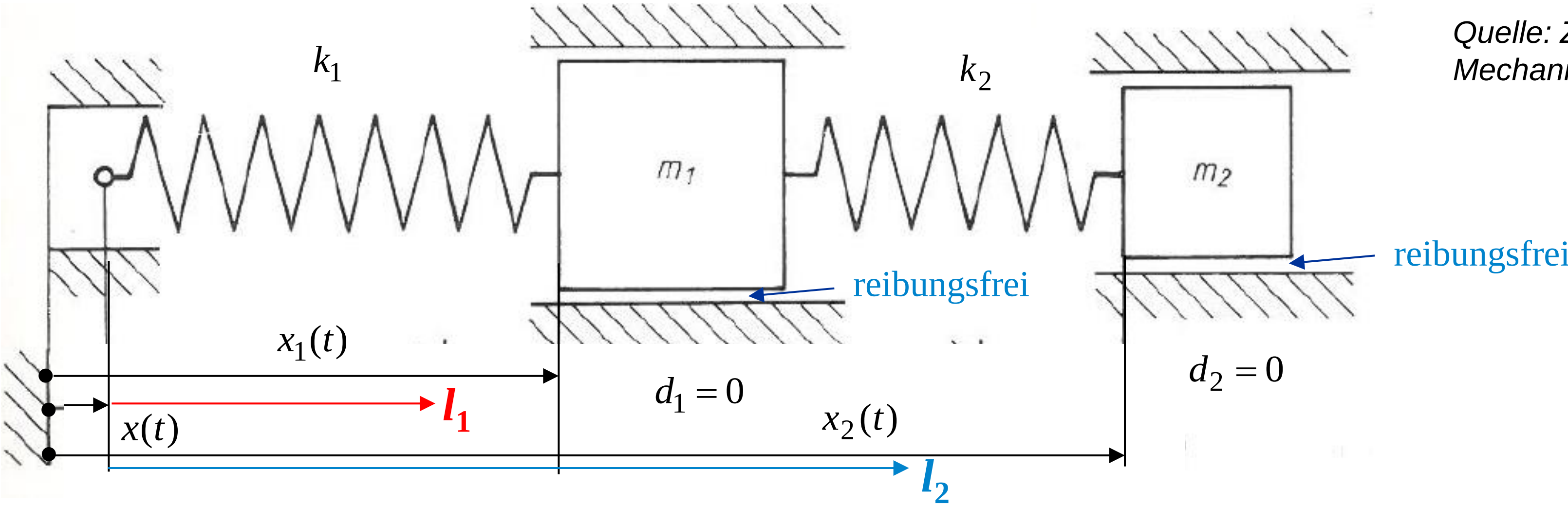
Quelle: Wikipedia

Beispiele zum mechanischen System

Bsp. 5: Weg-erregter Zweimassen-Schwinger ungedämpft (1)

Übung

Quelle: Ziegler, F.: Mechanik, Springer



- Wegerregung $x(t)$ an Feder 1 vorgeschrieben, keine äußeren Kräfte $F_1 = F_2 = 0$
- Federn linear, keine Dämpfung: $d_1 = 0$, $d_2 = 0$, k_1, k_2 jeweils konstant
- Federn entspannt bei $x_1 = l_1$ (wenn $x = 0$) und $x_2 = l_2$ (wenn $x_1 = l_1, x = 0$).

a) $n = 2 : q_1 = x_1,\ q_2 = x_2$

b) $W_k^* = \dfrac{m_1 \cdot \dot{x}_1^2}{2} + \dfrac{m_2 \cdot \dot{x}_2^2}{2}, \quad W_p = \dfrac{k_1 \cdot (x_1 - x - l_1)^2}{2} + \dfrac{k_2 \cdot (x_2 - x_1 + l_1 - l_2)^2}{2}$

c) $d_1 = d_2 = 0 \Rightarrow \delta A_d = 0 \Rightarrow F_1^{(d)} = F_2^{(d)} = 0 \quad F_1 = F_2 = 0 \Rightarrow \delta A = 0$

Beispiele zum mechanischen System

Bsp. 5: Weg-erregter Zweimassen-Schwinger ungedämpft (2)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Übung

d) $i=1: \dfrac{\partial W_k^*}{\partial \dot{x}_1} = m_1 \cdot \dot{x}_1 \quad \dfrac{\partial W_k^*}{\partial x_1} = 0 \quad \dfrac{\partial W_p}{\partial x_1} = k_1 \cdot (x_1 - x - l_1) - k_2 \cdot (x_2 - x_1 + l_1 - l_2)$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial W_k^*}{\partial x_1} + \frac{\partial W_p}{\partial x_1} + F_1^{(d)} = F_1 \Rightarrow \frac{d(m_1 \cdot \dot{x}_1)}{dt} - 0 + k_1 \cdot (x_1 - x - l_1) - k_2 \cdot (x_2 - x_1 + l_1 - l_2) + 0 = 0$$

$$i=2: \frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{x}_2} = m_2 \cdot \dot{x}_2 \quad \frac{\partial W_k^*}{\partial x_2} = 0 \quad \frac{\partial W_p}{\partial x_2} = k_2 \cdot (x_2 - x_1 + l_1 - l_2)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial W_k^*}{\partial x_2} + \frac{\partial W_p}{\partial x_2} + F_2^{(d)} = F_2 \Rightarrow \frac{d(m_2 \cdot \dot{x}_2)}{dt} - 0 + k_2 \cdot (x_2 - x_1 + l_1 - l_2) + 0 = 0$$

- Bewegungsgleichungen:

Lassen sich auf eine Diff.gl. 4. Ordg. Reduzieren ⇔ System 4. Ordnung mit 2 kinetischen und 2 potentiellen Speichern

$$\boxed{\begin{aligned} & m_1 \cdot \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2) \cdot x_1 - k_2 \cdot x_2 = k_1 \cdot (x + l_1) + k_2 \cdot (l_1 - l_2) \\ & m_2 \cdot \ddot{x}_2 + k_2 \cdot x_2 - k_2 \cdot x_1 = k_2 \cdot (l_2 - l_1) \end{aligned}}$$

- Gleichgewichtslagen: *d./dt* = 0:

$x(t) = X$ als Vorgabe

$$\begin{cases} (k_1 + k_2) \cdot X_1 - k_2 \cdot X_2 = k_1 \cdot (X + l_1) + k_2 \cdot (l_1 - l_2) \\ k_2 \cdot X_2 - k_2 \cdot X_1 = k_2 \cdot (l_2 - l_1) \end{cases}$$

$X_1 = X + l_1, \quad X_2 = X_1 + l_2 - l_1 = X + l_2$ Federn entspannt!

Beispiele zum mechanischen System

Bsp. 5: Weg-erregter Zweimassen-Schwinger ungedämpft (3)

Übung

- Zeitlich veränderliche Auslenkung $\Delta x(t)$ im Gleichgewichtspunkt X

$$x(t) = X + \Delta x(t)$$

führt auf zeitlich veränderliche Auslenkungen $\Delta x_1(t)$, $\Delta x_2(t)$ in den Gl.gw.-Punkten X_1, X_2

$$x_1(t) = X_1 + \Delta x_1(t), \quad x_2(t) = X_2 + \Delta x_2(t)$$

- Ergibt mit $\dot{x}(t) = \Delta\dot{x}(t), \ \dot{x}_1(t) = \Delta\dot{x}_1(t), \quad \dot{x}_2(t) = \Delta\dot{x}_2(t)$

die Differentialgleichungen für die Auslenkungen $\Delta x_1(t)$, $\Delta x_2(t)$:

$$m_1 \cdot \Delta\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)\cdot \Delta x_1 - k_2 \cdot \Delta x_2 + \cancel{(k_1 + k_2)\cdot X_1} - \cancel{k_2 \cdot X_2} = k_1 \cdot (\cancel{X} + \Delta x + \cancel{l_1}) + \cancel{k_2 \cdot (l_1 - l_2)}$$

$$m_2 \cdot \Delta\ddot{x}_2 + k_2 \cdot \Delta x_2 - k_2 \cdot \Delta x_1 + \cancel{k_2 \cdot X_2 - k_2 \cdot X_1} = \cancel{k_2 \cdot (l_2 - l_1)}$$

$$X_1 = X + l_1, \quad X_2 = X + l_2$$

$$m_1 \cdot \Delta\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)\cdot \Delta x_1 - k_2 \cdot \Delta x_2 = k_1 \cdot \Delta x$$

$$m_2 \cdot \Delta\ddot{x}_2 + k_2 \cdot \Delta x_2 - k_2 \cdot \Delta x_1 = 0$$

Beispiele zum mechanischen System

Bsp. 5: Weg-erregter Zweimassen-Schwinger ungedämpft (4)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Übung

- Frequenzgang: $x(t) = X + \hat{X} \cdot \cos \omega t = X + \mathrm{Re}\left\{\hat{X} \cdot e^{j\omega t}\right\}$

$$x_1(t) = X_1 + \hat{X}_1 \cdot \cos(\omega t + \varphi_1) = X_1 + \mathrm{Re}\left\{\hat{X}_1 \cdot e^{j\varphi_1} \cdot e^{j\omega t}\right\} \quad \underline{\hat{X}}_1 = \hat{X}_1 \cdot e^{j\varphi_1}$$

$$x_2(t) = X_2 + \hat{X}_2 \cdot \cos(\omega t + \varphi_2) = X_2 + \mathrm{Re}\left\{\hat{X}_2 \cdot e^{j\varphi_2} \cdot e^{j\omega t}\right\} \quad \underline{\hat{X}}_2 = \hat{X}_2 \cdot e^{j\varphi_2}$$

$$(-m_1 \cdot \omega^2 + (k_1 + k_2)) \cdot \underline{\hat{X}}_1 - k_2 \cdot \underline{\hat{X}}_2 = k_1 \cdot \hat{X} \qquad k = k_1 + k_2$$

$$(-m_2 \cdot \omega^2 + k_2) \cdot \underline{\hat{X}}_2 - k_2 \cdot \underline{\hat{X}}_1 = 0$$

Kopplungsterm

$$\begin{pmatrix} k - m_1 \cdot \omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - m_2 \cdot \omega^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{\hat{X}}_1 \\ \underline{\hat{X}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \cdot \hat{X} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad Det = \begin{vmatrix} k - m_1 \cdot \omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - m_2 \cdot \omega^2 \end{vmatrix}$$

$$Det = (k - m_1 \cdot \omega^2) \cdot (k_2 - m_2 \cdot \omega^2) - k_2^2 = m_1 m_2 \omega^4 - (m_1 k_2 + m_2 k) \cdot \omega^2 + k_1 k_2 = P(\omega)$$

- Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $P(\omega)$ 4-ter Ordnung (!) sind die Eigenfrequenzen des Systems 4-ter Ordnung. Es existieren maximal 4 Eigenfrequenzen. Wegen $P(\omega^2)$ treten zwei Doppelnullstellen auf = Nur zwei Eigenfrequenzen $\omega_{d1}, \ \omega_{d2}$

$$P(\omega^2) = P(\xi) = m_1 m_2 \cdot \xi^2 - (m_1 k_2 + m_2 k) \cdot \xi + k_1 k_2 = 0$$

Beispiele zum mechanischen System

Bsp. 5: Weg-erregter Zweimassen-Schwinger ungedämpft (5)

Übung

- Eigenkreisfrequenzen: $\xi^2 - \left(\frac{k_2}{m_2} + \frac{k}{m_1}\right) \cdot \xi + \frac{k_1}{m_1} \cdot \frac{k_2}{m_2} = 0$

$$\begin{cases} \omega_1^2 = \frac{k_1}{m_1}, \quad \omega_2^2 = \frac{k_2}{m_2}, \quad \omega_{21}^2 = \frac{k_2}{m_1} \\ \omega_3^2 = \frac{k}{m_1} = \frac{k_1 + k_2}{m_1} = \omega_1^2 + \omega_{21}^2 \end{cases}$$

$$\xi^2 - \left(\omega_2^2 + \omega_3^2\right) \cdot \xi + \omega_1^2 \cdot \omega_2^2 = 0$$

$$\xi_{1,2} = \omega_{d2,1}^2 = \frac{\omega_2^2 + \omega_3^2}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\frac{(\omega_2^2 + \omega_3^2)^2}{4} - \omega_1^2 \cdot \omega_2^2}_{>0}} > 0 \quad \text{, denn:}$$

$$\frac{(\omega_2^2 + \omega_1^2 + \omega_{21}^2)^2}{4} - \omega_1^2 \cdot \omega_2^2 = \frac{1}{4} \cdot (\omega_2^4 + \omega_1^4 + \omega_{21}^4 + 2\omega_2^2\omega_1^2 + 2\omega_2^2\omega_{21}^2 + 2\omega_1^2\omega_{21}^2) - \omega_1^2 \cdot \omega_2^2 =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot (\omega_2^4 + \omega_1^4 + \omega_{21}^4 - 2\omega_2^2\omega_1^2 + 2\omega_2^2\omega_{21}^2 + 2\omega_1^2\omega_{21}^2) = \frac{1}{4} \cdot ((\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + \omega_{21}^4 + 2\omega_2^2\omega_{21}^2 + 2\omega_1^2\omega_{21}^2) > 0$$

$$\boxed{\omega_{d1} = \sqrt{\frac{\omega_2^2 + \omega_3^2}{2} - \sqrt{\frac{(\omega_2^2 + \omega_3^2)^2}{4} - \omega_1^2 \cdot \omega_2^2}} < \omega_{d2} = \sqrt{\frac{\omega_2^2 + \omega_3^2}{2} + \sqrt{\frac{(\omega_2^2 + \omega_3^2)^2}{4} - \omega_1^2 \cdot \omega_2^2}}}$$

$$Det = P(\omega^2) = m_1 \cdot m_2 \cdot (\omega^2 - \omega_{d1}^2) \cdot (\omega^2 - \omega_{d2}^2)$$

Beispiele zum mechanischen System

Bsp. 5: Weg-erregter Zweimassen-Schwinger ungedämpft (6)

Übung

- Schwingungsamplituden:

$$\frac{\hat{X}_1}{\hat{X}_2} = 1 - \frac{\omega^2}{\omega_2^2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \underline{\hat{X}}_1 = \frac{1}{Det} \cdot \begin{vmatrix} k_1 \cdot \hat{X} & -k_2 \\ 0 & k_2 - m_2 \cdot \omega^2 \end{vmatrix} = \frac{k_1 \cdot \hat{X} \cdot (k_2 - m_2 \cdot \omega^2)}{m_1 \cdot m_2 \cdot (\omega^2 - \omega_{d1}^2) \cdot (\omega^2 - \omega_{d2}^2)} \\ \frac{\underline{\hat{X}}_1}{\hat{X}} = \frac{\hat{X}_1}{\hat{X}} = \frac{(k_1 / m_1) \cdot ((k_2 / m_2) - \omega^2)}{(\omega^2 - \omega_{d1}^2) \cdot (\omega^2 - \omega_{d2}^2)} = \frac{\omega_1^2 \cdot (\omega_2^2 - \omega^2)}{(\omega^2 - \omega_{d1}^2) \cdot (\omega^2 - \omega_{d2}^2)} \\ \underline{\hat{X}}_2 = \frac{1}{Det} \cdot \begin{vmatrix} k - m_1 \cdot \omega^2 & k_1 \cdot \hat{X} \\ -k_2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{k_1 \cdot k_2 \cdot \hat{X}}{m_1 \cdot m_2 \cdot (\omega^2 - \omega_{d1}^2) \cdot (\omega^2 - \omega_{d2}^2)} \\ \frac{\underline{\hat{X}}_2}{\hat{X}} = \frac{\hat{X}_2}{\hat{X}} = \frac{(k_1 / m_1) \cdot (k_2 / m_2)}{(\omega^2 - \omega_{d1}^2) \cdot (\omega^2 - \omega_{d2}^2)} = \frac{\omega_1^2 \cdot \omega_2^2}{(\omega^2 - \omega_{d1}^2) \cdot (\omega^2 - \omega_{d2}^2)} \end{array} \right.$$

- Die Schwingungsamplitude $\Delta x_1(t)$ ist bei $\omega = \omega_2$ Null: Durch die in Gegenphase schwingende Masse m_2 wird die über $\Delta x(t)$ erregte Schwingung der Masse m_1 „getilgt“ !

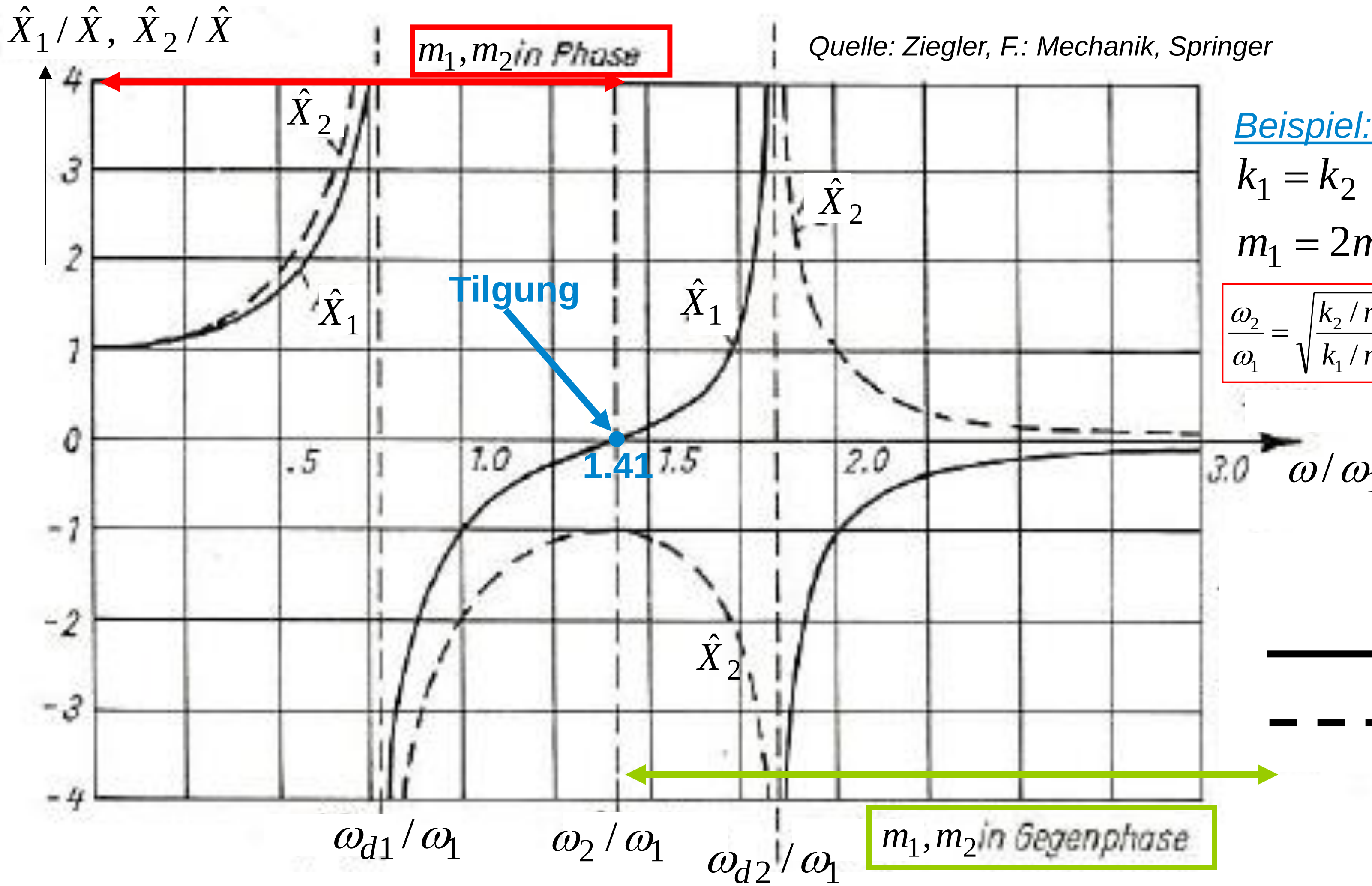
- Anwendung: **Schwingungstilger:** Die ω-frequente Schwingung einer Masse m_1 kann vermieden werden, wenn man eine zweite Masse m_2 über eine Feder k_2 ankoppelt, wobei die Bedingung $\omega = \omega_2 = \sqrt{k_2 / m_2}$ erfüllt sein muss.

Beispiele zum mechanischen System

Bsp. 5: Weg-erregter Zweimassen-Schwinger ungedämpft (7)

Übung

Quelle: Ziegler, F.: Mechanik, Springer



Beispiel:

$k_1 = k_2$

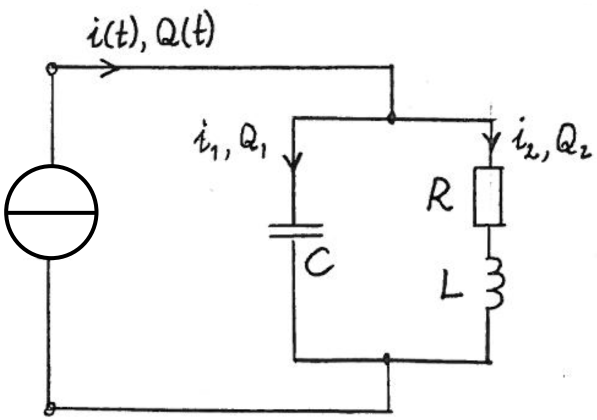
$m_1 = 2m_2$

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \sqrt{\frac{k_2/m_2}{k_1/m_1}} = \sqrt{2} = 1.41$$

- Verallgemeinerte unabhängige Koordinaten
- Virtuelle Verschiebungen
- Variationsrechnung anstelle der klassischen dynamischen Grundgesetze: *Lagrange*-Gleichungen
- Beispiele zum mechanischen System
- Beispiele zum elektrischen Netzwerk (7 Beispiele)

Beispiele zum elektrischen Netzwerk
Bsp. 1: Lineares stromgespeistes Netzwerk

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT



- $i(t)$ durch $Q(t)$ vorgeschrieben: Ideale Stromquelle, Innenwiderstand: ∞
- KEINE äußere Spannung = Keine „äußere Kraft“: $F = 0$

a) $n = 1: q_1 = Q_2 \quad (Q_1 = Q - Q_2)$

b) $W_k^* = L \cdot \dot{Q}_2^2 / 2, \quad W_p = (Q - Q_2)^2 / (2C)$

c) $\delta A_d = F^{(d)} \cdot \delta q_1 = (R \cdot i_2) \cdot \delta Q_2 \qquad \delta A = F \cdot \delta q_1 = 0$

d) $\dfrac{\partial W_k^*}{\partial \dot{Q}_2} = L \cdot \dot{Q}_2 = L \cdot i_2 \qquad \dfrac{\partial W_k^*}{\partial Q_2} = 0 \qquad \dfrac{\partial W_p}{\partial Q_2} = -(Q - Q_2)/C \qquad F^{(d)} = R \cdot i_2 \qquad F = 0$

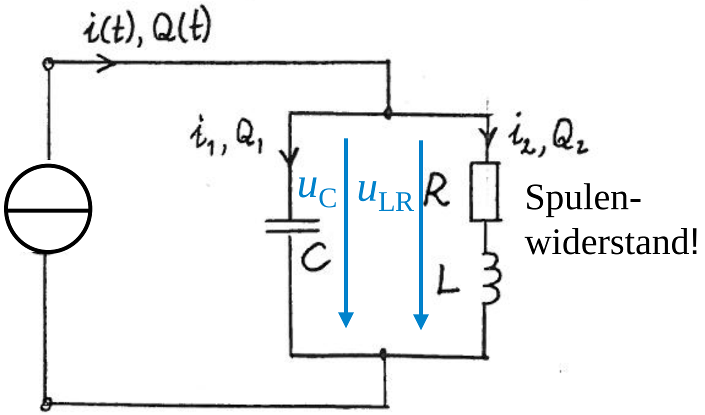
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{Q}_2}\right) - \frac{\partial W_k^*}{\partial Q_2} + \frac{\partial W_p}{\partial Q_2} + F^{(d)} = F \Rightarrow \frac{d(L \cdot i_2)}{dt} - 0 - \frac{Q - Q_2}{C} + R \cdot i_2 = 0$$

$$L \cdot \frac{di_2}{dt} - \frac{Q - Q_2}{C} + R \cdot i_2 = 0 \Rightarrow \Big|_{d./dt} \Rightarrow \boxed{L \cdot \frac{di_2^2}{dt^2} + R \cdot \frac{di_2}{dt} + \frac{i_2}{C} = \frac{i(t)}{C}}$$

Stromerregter elektr. linearer Schwingkreis

Beispiele zum elektrischen Netzwerk

Bsp. 1: Alternativ: *Kirchhoff´*sche Maschengleichung

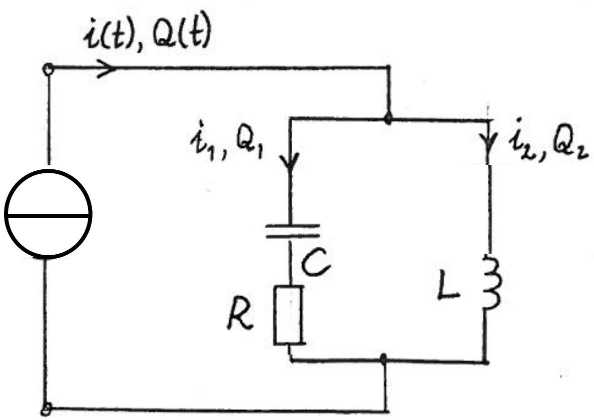


$$u_C(t) = u_{LR}(t) \begin{cases} u_C(t) = \dfrac{1}{C} \cdot \int\limits_0^t i_1 \cdot dt \\ u_{LR}(t) = R \cdot i_2 + L \cdot di_2 / dt \quad i_1 = i - i_2 \end{cases}$$

$$\frac{1}{C} \cdot \int\limits_0^t i \cdot dt = \frac{1}{C} \cdot \int\limits_0^t i_2 \cdot dt + R \cdot i_2 + L \cdot di_2 / dt$$

- Differentialgleichung 2. Ordnung, weil zwei Energiespeicher *L* und *C* im Austausch!

$$\boxed{L \cdot \frac{di_2^2}{dt^2} + R \cdot \frac{di_2}{dt} + \frac{i_2}{C} = \frac{i(t)}{C}}$$



- Vergleiche: Mechanisch wegerregtes Schwingsystem:

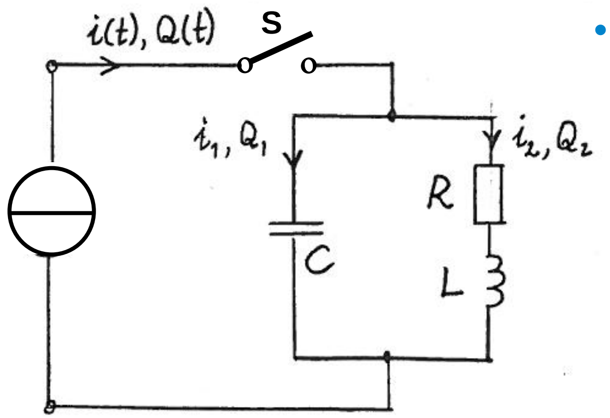
$$m \cdot \ddot{x} + d \cdot \dot{x} + k \cdot x = k \cdot x_1(t) + d \cdot \dot{x}_1(t)$$

- Elektrische „Entsprechung“:

$$L \cdot \frac{di_2^2}{dt^2} + R \cdot \frac{di_2}{dt} + \frac{i_2}{C} = \frac{i(t)}{C} + R \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

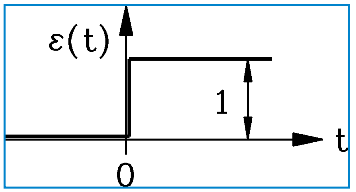
Beispiele zum elektrischen Netzwerk

Bsp. 1: „Einschalten“ der Stromquelle mit Schalter S (1)



- ***Beispiel:*** Sprungförmige Stromeinschaltung mit *HEAVISIDE*-Sprungfunktion („Einheitssprung“) $\varepsilon(t)$

$$i(t) = I\cdot\varepsilon(t), \quad \varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ 1, & t\geq 0 \end{cases}$$



$$L\cdot\frac{di_2^2}{dt^2} + R\cdot\frac{di_2}{dt} + \frac{i_2}{C} = \frac{i(t)}{C}$$

Ansatz: $i_2(t) = i_{2\mathrm{h}}(t) + i_{2\mathrm{p}}(t)$

$$\frac{di_{2h}^2}{dt^2} + \frac{R}{L}\cdot\frac{di_{2h}}{dt} + \frac{i_{2h}}{L\cdot C} = 0, \qquad \frac{di_{2p}^2}{dt^2} + \frac{R}{L}\cdot\frac{di_{2p}}{dt} + \frac{i_{2p}}{L\cdot C} = \frac{i(t)}{L\cdot C} = \frac{I}{L\cdot C}, \boxed{t\geq 0: i_{2p} = I}$$

Für schwache Dämpfung: $R < \frac{2\cdot\sqrt{L}}{\sqrt{C}}$: $\quad i_{2h}(t) = \underline{C}_1\cdot e^{\underline{\lambda}_1 t} + \underline{C}_2\cdot e^{\underline{\lambda}_1 t} \Rightarrow \underline{\lambda}_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm j\cdot\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$

$$\underline{\lambda}_{1,2} = -\frac{1}{\sqrt{LC}}\cdot\frac{R\sqrt{C}}{2\sqrt{L}} \pm j\cdot\frac{1}{\sqrt{LC}}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{R\sqrt{C}}{2\sqrt{L}}\right)^2} = \boxed{-\omega_0\cdot d_L \pm j\cdot\omega_0\cdot\sqrt{1-d_L^2} = -\beta \pm j\cdot\omega_d}$$

- Beim Einschalten von Stromquelle $i(t)$ bei schwacher Dämpfung schwingen $i_1(t)$, $i_2(t)$ wegen Energieaustausch zwischen den beiden Energiespeichern *L* und *C* gedämpft mit Eigenkreisfrequenz ω_d !

Beispiele zum elektrischen Netzwerk
Bsp. 1: Dimensionsloses *Lehr´*sches Dämpfungsmaß d_L

- Gedämpftes „Ein“schwingen wird beschrieben durch *LEHR´*sches Dämpfungsmaß d_L:

$$\boxed{0 \le d_L = \frac{R \cdot \sqrt{C}}{2 \cdot \sqrt{L}} < 1}$$

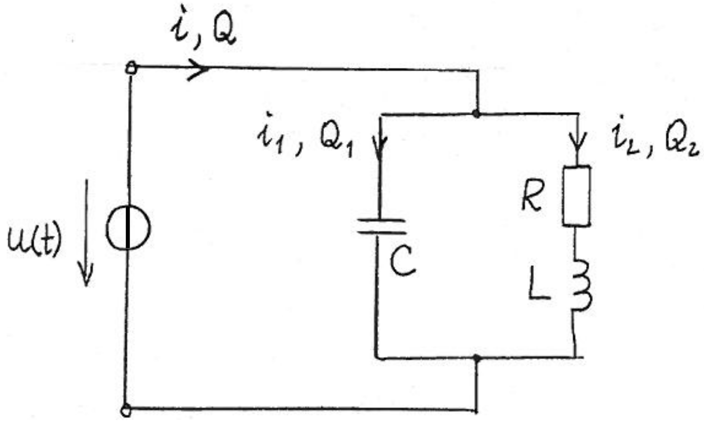
- Zeitkonstante des Einschwingens: $T = 2L/R = 1/\beta = 1/(\omega_0 d_L)$
- Kreisfrequenz des gedämpften Einschwingens: $\omega_d = \omega_0 \cdot \sqrt{1-d_L^2}$
- Kreisfrequenz des ungedämpften Einschwingens ($d_L = 0$): $\omega_d = \omega_0 = 1/\sqrt{L \cdot C}$

- Vergleiche: Mechanisch wegerregtes Schwingsystem: $m \cdot \ddot{x} + d \cdot \dot{x} + k \cdot x = k \cdot x_1(t) + d \cdot \dot{x}_1(t)$
- Eigen-Kreisfrequenz des ungedämpften Schwingers: $\omega_0 = \sqrt{k/m}$
- *Lehr´*sches Dämpfungsmaß d_L: $d_L = \dfrac{d}{2\sqrt{k \cdot m}}$
- Eigen-Kreisfrequenz des gedämpften Schwingers: $\omega_d = \sqrt{\dfrac{k}{m} - \dfrac{d^2}{4m^2}} = \omega_0 \cdot \sqrt{1-d_L^2}$

Beispiele zum elektrischen Netzwerk

Bsp. 2: Lineares spannungsgespeistes Netzwerk (1)

Selbststudium



- $u(t)$ vorgeschrieben: Ideale Spannungsquelle, Innenwiderstand = 0
- Äußere Spannung u = „Äußere Kraft“: $„F“ = u$

a) $n = 2: q_1 = Q_1,\ q_2 = Q_2 \quad (Q = Q_1 + Q_2)$

b) $W_k^* = L \cdot i_2^2 / 2, \quad W_p = Q_1^2 / (2C)$

c) $\delta A_d = F_1^{(d)} \cdot \delta q_1 + F_2^{(d)} \cdot \delta q_2 = F_1^{(d)} \cdot \delta Q_1 + F_2^{(d)} \cdot \delta Q_2 = R \cdot i_2 \cdot \delta Q_2 \Rightarrow F_1^{(d)} = 0,\ F_2^{(d)} = R \cdot i_2$

$\delta A = F_1 \cdot \delta Q_1 + F_2 \cdot \delta Q_2 = u \cdot \delta Q = u \cdot \delta Q_1 + u \cdot \delta Q_2 \Rightarrow F_1 = u(t),\ F_2 = u(t)$

d) $i = 1: \dfrac{\partial W_k^*}{\partial \dot{Q}_1} = 0 \quad \dfrac{\partial W_k^*}{\partial Q_1} = 0 \quad \dfrac{\partial W_p}{\partial Q_1} = \dfrac{Q_1}{C} \quad F_1^{(d)} = 0 \quad F_1 = u$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{Q}_1}\right) - \frac{\partial W_k^*}{\partial Q_1} + \frac{\partial W_p}{\partial Q_1} + F_1^{(d)} = F_1 \Rightarrow 0 - 0 + \frac{Q_1}{C} = u(t)$$

$$\boxed{\frac{Q_1}{C} = u(t)} \quad i_1 = \dot{Q}_1, \ \ i = i_1 + i_2$$

Beispiele zum elektrischen Netzwerk

Bsp. 2: Lineares spannungsgespeistes Netzwerk (2)

Selbststudium

d) $i=2: \dfrac{\partial W_k^*}{\partial \dot{Q}_2} = L \cdot i_2 \quad \dfrac{\partial W_k^*}{\partial Q_2} = 0 \quad \dfrac{\partial W_p}{\partial Q_2} = 0 \quad F_2^{(d)} = R \cdot i_2 \quad F_2 = u$

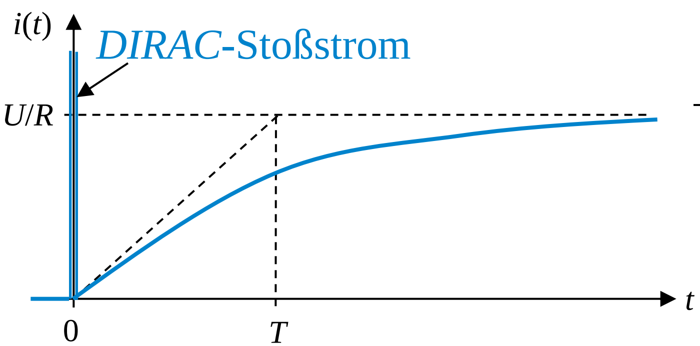
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{Q}_2}\right) - \frac{\partial W_k^*}{\partial Q_2} + \frac{\partial W_p}{\partial Q_2} + F_2^{(d)} = F_2 \Rightarrow L\frac{di_2}{dt} - 0 + 0 + R \cdot i_2 = u(t) \qquad \boxed{L\frac{di_2}{dt} + R \cdot i_2 = u(t)}$$

- Die beiden Energiespeicher *L* und *C* werden parallel und damit unabhängig voneinander spannungsgespeist → Zwei Systeme 1. Ordnung! Kein „Einschwingen“!

- ***Beispiel:*** Spannungssprung: $u(t) = U \cdot \varepsilon(t): \quad u = 0\ (t<0), u = U\ (t \geq 0) \qquad i_1(0) = i_2(0) = 0$

$i_1(t) = C \cdot du/dt = "I_1 \cdot \delta(t)"$ *DIRAC*-Stoßstrom zur (unendlich schnellen) Kondensatoraufladung!

$\dfrac{di_2}{dt} + (R/L) \cdot i_2 = u(t)/L \Rightarrow i_2(t) = \dfrac{U}{R} \cdot \left(1 - e^{-t/T}\right)$ Aufladen von *L* mit Zeitkonstante $T = L/R$



$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi) \cdot d\xi = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} i_1(t) \cdot dt = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{T_1 \cdot I_1}_{Q_1} \cdot \delta(\xi) \cdot d\xi = Q_1 = C \cdot U$$

$$\xi = t/T_1,\ I_1 = Q_1/T_1$$

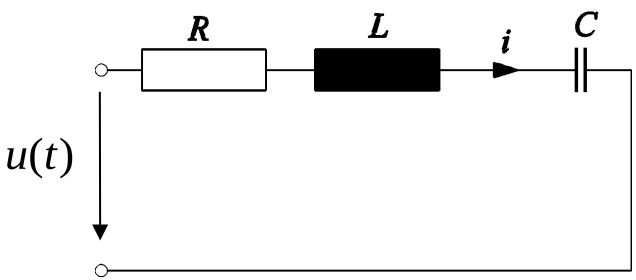
$$i = i_1 + i_2 = \begin{cases} = 0 & t < 0 \\ = "I_1 \cdot \delta(t)" + \dfrac{U}{R} \cdot \left(1 - e^{-t/T}\right) & t \geq 0 \end{cases}$$

Beispiele zum elektrischen Netzwerk

Übung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Bsp. 3: Lineares spannungsgespeistes Netzwerk (1)



- $u(t)$ vorgeschrieben: Ideale Spannungsquelle,
  Innenwiderstand = 0
- Äußere Spannung u = „Äußere Kraft": „F" $= u$

- Linearer elektrischer Serienschwingkreis: R, L, C konstant
- Anfangsbedingungen: $i(0), \dot{i}(0)$

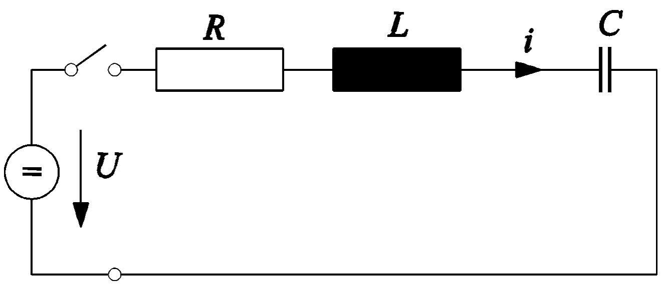
$$\boxed{L \cdot \frac{d^2 i}{dt^2} + R \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \cdot i = \frac{du(t)}{dt}}$$

- Aufgabe: Selbst mit *LAGRANGE*-Gleichungen die dynamischen Gleichungen aufstellen!
- Hinweis: In Aufgabensammlung ist das Beispiel mit *KIRCHHOFF*-Gesetzen berechnet!
- Zwei Energiespeicher L, C im Austausch = System 2. Ordnung =
  = Differentialgleichung 2. Ordnung!

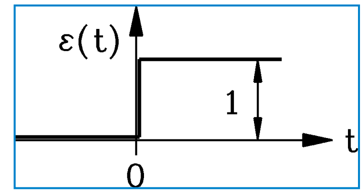
Beispiele zum elektrischen Netzwerk

Bsp. 3: Lineares spannungsgespeistes Netzwerk (2)

Beispiel: Aufschalten einer Gleichspannung $u(t) = U$ bei $t = 0$



$$u(t) = U \cdot \varepsilon(t)$$



$$i(t) = \frac{U}{\omega_d L} \cdot e^{-t/T} \cdot \sin \omega_d t$$

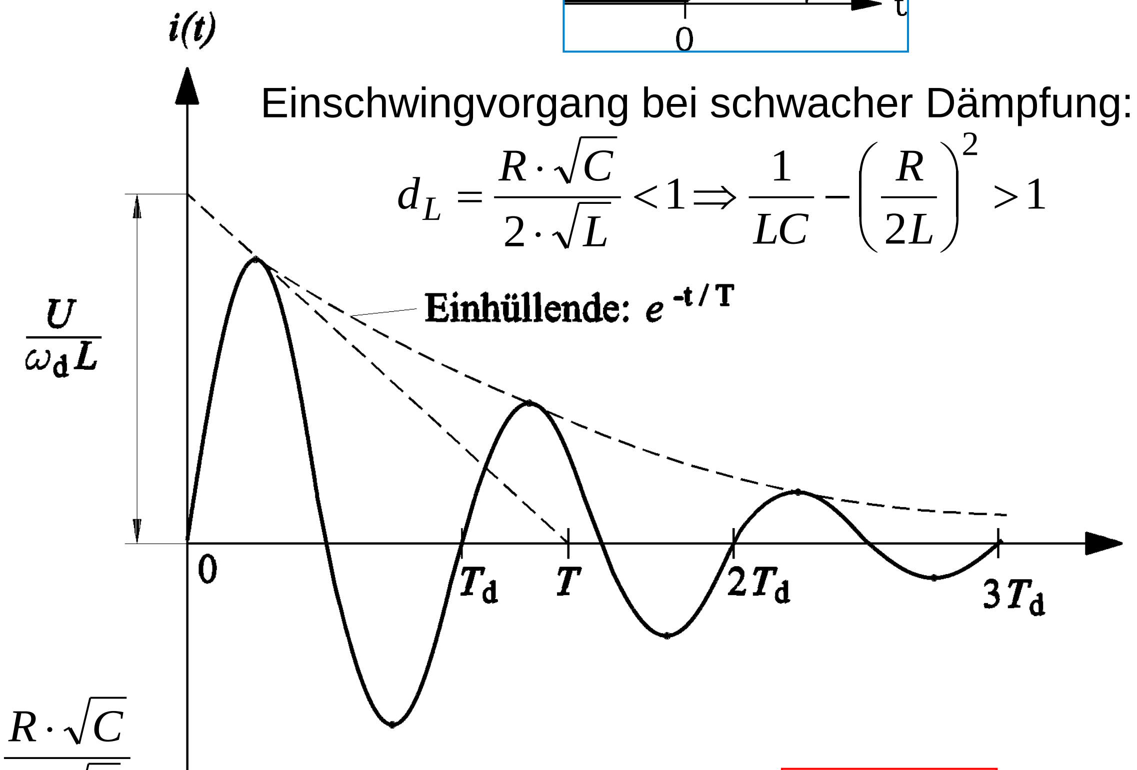
$$\boxed{f_d = \frac{\omega_d}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}}$$

$$\boxed{\omega_d = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot \sqrt{1 - \frac{R^2 C}{4L}} = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{R^2 C}{4L}}}$$

$$T = 2L/R \qquad \boxed{\omega_d = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - d_L^2}}$$

Einschwingvorgang bei schwacher Dämpfung:

$$d_L = \frac{R \cdot \sqrt{C}}{2 \cdot \sqrt{L}} < 1 \Rightarrow \frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2 > 1$$



LEHR´sches Dämpfungsmaß: $d_L = \frac{R \cdot \sqrt{C}}{2 \cdot \sqrt{L}}$

Anmerkung: Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Schwingkreises (R = 0): $\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$

Beispiele zum elektrischen Netzwerk

Bsp. 3: Lineares spannungsgespeistes Netzwerk (3)

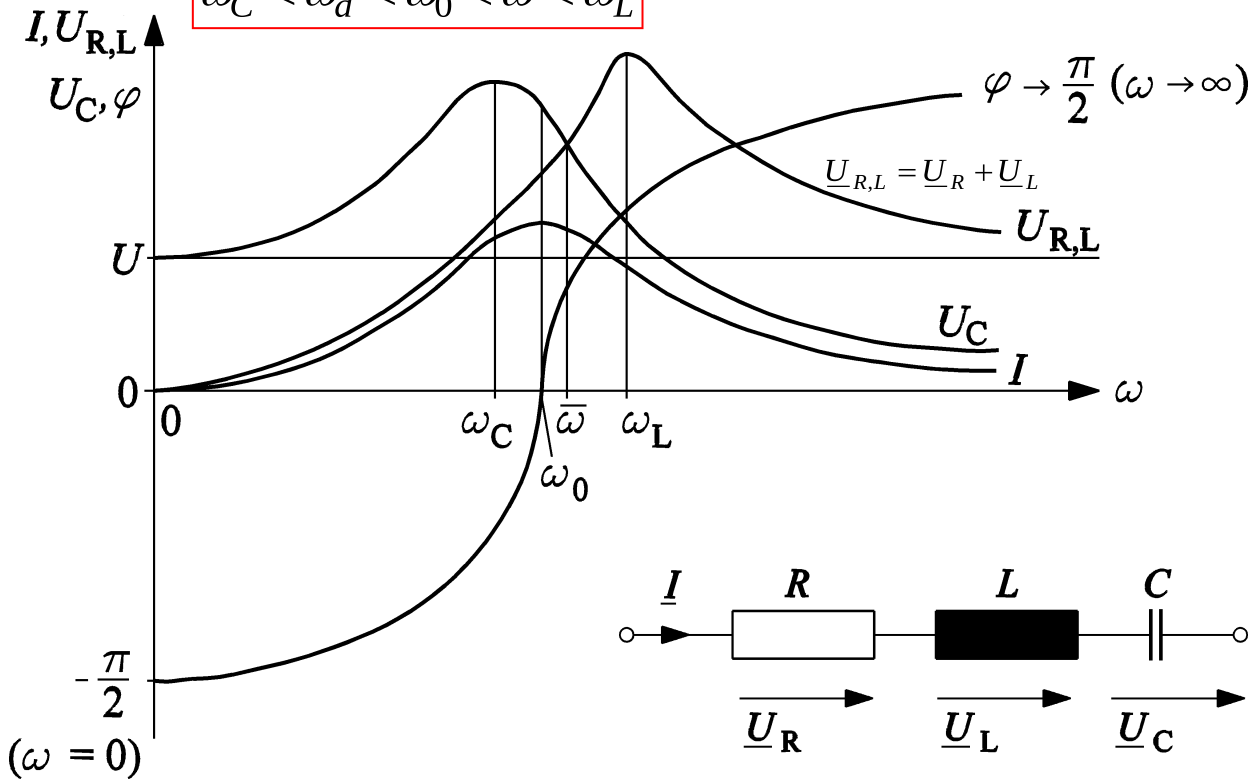
Beispiel: Frequenzgang bei schwacher Dämpfung $\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2 > 1$

$$u(t) = U \cdot \sqrt{2} \cdot \cos \omega t$$

$$i(t) = I \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(\omega t - \varphi)$$

Eigen-Kreisfrequenz ohne Dämpfung: $R = 0 : \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$$\omega_C < \omega_d < \omega_0 < \overline{\omega} < \omega_L$$



$$\overline{\omega} = \omega_0 \cdot \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{R^2}{2} \cdot \frac{C}{L}\right)^2} - \frac{R^2}{2} \cdot \frac{C}{L}}$$

$$\omega_L = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{1 + \sqrt{1 + 2R^2 \cdot \frac{C}{L}}}$$

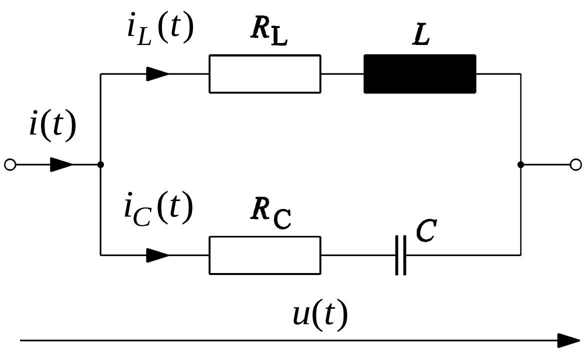
$$\omega_C = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{R^2 C}{2L}}$$

$$I(\omega) = \frac{U}{\sqrt{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2}}$$

Übung

Beispiele zum elektrischen Netzwerk

Bsp. 4: Lineares spannungsgespeistes Parallel-Netzwerk

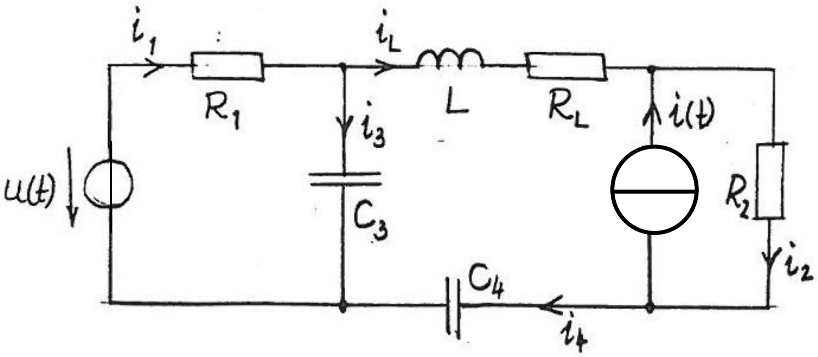


- $u(t)$ vorgeschrieben: Ideale Spannungsquelle, Innenwiderstand = 0
- Äußere Spannung u = „Äußere Kraft": „F" $= u$

- Elektrischer gedämpfter Parellelschwingkreis
- Anfangsbedingungen: $i(0), \dot{i}(0)$
- Aufgabe: Selbst mit *LAGRANGE*-Gleichungen die dynamischen Gleichungen aufstellen!
- Hinweis: In Aufgabensammlung ist der **Frequenzgang** mit den *KIRCHHOFF*-Gesetzen berechnet!

- Die beiden Energiespeicher L und C werden parallel und damit unabhängig voneinander spannungsgespeist $\rightarrow$ Zwei Systeme 1. Ordnung! Kein „Einschwingen"!
- Frage: Wie sieht der Strom $i(t)$ bei einem Spannungssprung aus? $u(t) = U \cdot \varepsilon(t)$ (Hinweis: Vergleiche Bsp. 2!)

Beispiele zum elektrischen Netzwerk
Bsp. 5: Lineares vermaschtes Netzwerk (1)



$$i_1 = i_3 + i_L,\, i_2 = i_L + i,\, i_4 = i_2 - i$$

- $u(t)$ vorgeschrieben: Ideale Spannungsquelle, Innenwiderstand = 0
- $i(t)$ vorgeschrieben: Ideale Stromquelle, $i = dQ/dt,\, \delta Q = 0$ Innenwiderstand = ∞
- 6 Zweige, 4 Knoten $\Rightarrow$ 3 unabhängige Knotengleichungen $\Rightarrow$ 3 unabhängige Ströme ?: Nein, da $i(t)$ vorgeschrieben $\Rightarrow$ 2 unabh. Ströme n = 2

a) $n = 2 : q_1 = Q_1,\, q_2 = Q_2 \quad (Q_L = Q_2 - Q,\, Q_3 = Q_1 - Q_2 + Q,\, Q_4 = Q_2 - Q)$

b) $W_k^* = L \cdot i_L^2 / 2 = L \cdot (i_2 - i)^2 / 2, \quad W_p = ((Q_3^2 / C_3) + (Q_4^2 / C_4))/2 \Rightarrow$

$$W_p = \frac{(Q_1 - Q_2 + Q)^2}{2C_3} + \frac{(Q_2 - Q)^2}{2C_4}$$

Virtuelle Verschiebung $\delta Q = 0$, da $Q(t)$ eingeprägt!

c) $\delta A_d = F_1^{(d)} \cdot \delta Q_1 + F_2^{(d)} \cdot \delta Q_2 = R_1 \cdot i_1 \cdot \delta Q_1 + R_2 \cdot i_2 \cdot \delta Q_2 + R_L \cdot i_L \cdot \delta Q_L \quad \delta Q_L = \delta(Q_2 - Q) = \delta Q_2$

$$\delta A_d = R_1 \cdot i_1 \cdot \delta Q_1 + R_2 \cdot i_2 \cdot \delta Q_2 + R_L \cdot (i_2 - i) \cdot \delta Q_2 = R_1 \cdot i_1 \cdot \delta Q_1 + (R_2 \cdot i_2 + R_L \cdot (i_2 - i)) \cdot \delta Q_2$$

$\Rightarrow F_1^{(d)} = R_1 \cdot i_1,\, F_2^{(d)} = R_2 \cdot i_2 + R_L \cdot (i_2 - i) \qquad \delta A = F_1 \cdot \delta Q_1 + F_2 \cdot \delta Q_2 = u \cdot \delta Q_1 \Rightarrow F_1 = u(t),\, F_2 = 0$

Beispiele zum elektrischen Netzwerk

Bsp. 5: Lineares vermaschtes Netzwerk (2)

d) $i=1: \frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{Q}_1} = \frac{\partial W_k^*}{\partial i_1} = 0 \quad \frac{\partial W_k^*}{\partial Q_1} = 0 \quad \frac{\partial W_p}{\partial Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2 + Q}{C_3} \quad F_1^{(d)} = R_1 \cdot i_1 \quad F_1 = u$

$i=2: \frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{Q}_2} = \frac{\partial W_k^*}{\partial i_2} = L \cdot (i_2 - i) \quad \frac{\partial W_k^*}{\partial Q_2} = 0 \quad \frac{\partial W_p}{\partial Q_2} = -\frac{Q_1 - Q_2 + Q}{C_3} + \frac{Q_2 - Q}{C_4}$

$F_2^{(d)} = R_2 \cdot i_2 + R_L \cdot (i_2 - i) \quad F_2 = 0$

$$i=1: \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{Q}_1}\right) - \frac{\partial W_k^*}{\partial Q_1} + \frac{\partial W_p}{\partial Q_1} + F_1^{(d)} = F_1 \Rightarrow 0 - 0 + \frac{Q_1 - Q_2 + Q}{C_3} + R_1 \cdot i_1 = u(t)$$

$$i=2: \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{Q}_2}\right) - \frac{\partial W_k^*}{\partial Q_2} + \frac{\partial W_p}{\partial Q_2} + F_2^{(d)} = F_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L \cdot \frac{d(i_2 - i)}{dt} - 0 - \frac{Q_1 - Q_2 + Q}{C_3} + \frac{Q_2 - Q}{C_4} + R_2 \cdot i_2 + R_L \cdot (i_2 - i) = 0$$

$$\frac{d.}{dt}: \frac{i_1 - i_2 + i}{C_3} + R_1 \cdot \frac{di_1}{dt} = \frac{du(t)}{dt} \qquad L \cdot \frac{d^2(i_2 - i)}{dt^2} - \frac{i_1 - i_2 + i}{C_3} + \frac{i_2 - i}{C_4} + R_2 \cdot \frac{di_2}{dt} + R_L \cdot \left(\frac{di_2}{dt} - \frac{di}{dt}\right) = 0$$

Zwei Differentialgleichungen (1.Ordnung u. 2. Ordnung) für die beiden Unbekannten i_1, i_2 !

Beispiele zum elektrischen Netzwerk

Übung

Bsp. 5: Lineares vermaschtes Netzwerk (3)

$$(1):\quad R_1\cdot\frac{di_1}{dt}+\frac{i_1}{C_3}-\frac{i_2}{C_3}=\frac{du}{dt}-\frac{i}{C_3}$$

$$(2):\quad -\frac{i_1}{C_3}+\underbrace{L\cdot\frac{d^2i_2}{dt^2}+(R_2+R_L)\cdot\frac{di_2}{dt}+i_2\cdot(\frac{1}{C_3}+\frac{1}{C_4})}_{f(i_2)}=\underbrace{L\cdot\frac{d^2i}{dt^2}+R_L\cdot\frac{di}{dt}+i\cdot(\frac{1}{C_3}+\frac{1}{C_4})}_{F(i)}$$

$$(2):\quad i_1=C_3\cdot[f(i_2)-F(i)]\quad \dot{i}_1=C_3\cdot\left[\dot{f}(i_2)-\dot{F}(i)\right]$$

$$(1):\quad R_1\cdot C_3\cdot\left[\dot{f}(i_2)-\dot{F}(i)\right]+f(i_2)-F(i)-\frac{i_2}{C_3}=\dot{u}-\frac{i}{C_3}$$

$$\boxed{\begin{aligned}(1):\quad & R_1C_3L\cdot\dddot{i}_2+(R_1C_3\cdot(R_2+R_L)+L)\cdot\ddot{i}_2+(R_1\cdot(1+\frac{C_3}{C_4})+R_2+R_L)\cdot\dot{i}_2+\frac{i_2}{C_4}=\\ & =\dot{u}+R_1C_3L\cdot\dddot{i}+(R_1R_LC_3+L)\cdot\ddot{i}+(R_1\cdot(1+\frac{C_3}{C_4})+R_L)\cdot\dot{i}+i\cdot(\frac{1}{C_3}+\frac{1}{C_4})\end{aligned}}$$

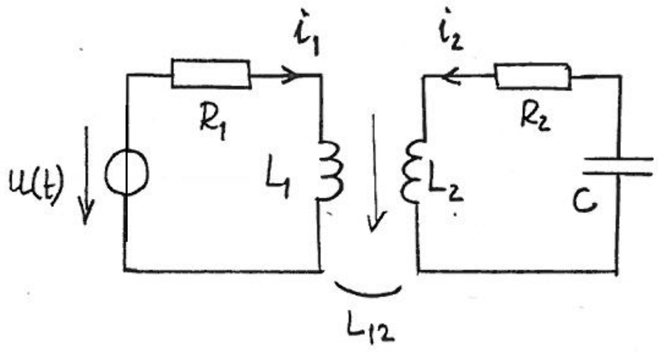
Drei gekoppelte Energiespeicher im System (L, C_3, C_4) $\Rightarrow$ **Eine** Diff.gleichung 3.Ordnung

oder

drei Diff.-gleichungen erster Ordnung für i_1, i_2 und z. B. $i_4 \Rightarrow$ numerische Lösung mit *RUNGE-KUTTA* oder analytisch z. B. mit *LAPLACE*-Transformation

Beispiele zum elektrischen Netzwerk

Bsp. 6: Induktive Kopplung mit Spannungsquelle (1)



- $u(t)$ vorgeschrieben: Ideale Spannungsquelle, Innenwiderstand = 0

a) $n = 2 : q_1 = Q_1,\ q_2 = Q_2$

b) $W_k^* = \frac{L_1}{2} \cdot i_1^2 + \frac{L_{12}}{2} \cdot i_1 i_2 + \frac{L_2}{2} \cdot i_2^2 + \frac{L_{12}}{2} \cdot i_1 i_2$

$$W_k^* = \frac{L_1}{2} \cdot i_1^2 + \frac{L_2}{2} \cdot i_2^2 + L_{12} \cdot i_1 i_2 \qquad W_p = Q_2^2 / (2C)$$

c) $\delta A_d = F_1^{(d)} \cdot \delta Q_1 + F_2^{(d)} \cdot \delta Q_2 = R_1 \cdot i_1 \cdot \delta Q_1 + R_2 \cdot i_2 \cdot \delta Q_2 \Rightarrow F_1^{(d)} = R_1 \cdot i_1,\ F_2^{(d)} = R_2 \cdot i_2$

$$\delta A = F_1 \cdot \delta Q_1 + F_2 \cdot \delta Q_2 = u \cdot \delta Q_1 \Rightarrow F_1 = u(t),\ F_2 = 0$$

d) $i = 1: \frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{Q}_1} = \frac{\partial W_k^*}{\partial i_1} = L_1 i_1 + L_{12} i_2 \quad \frac{\partial W_k^*}{\partial Q_1} = 0 \quad \frac{\partial W_p}{\partial Q_1} = 0 \quad F_1^{(d)} = R_1 \cdot i_1 \quad F_1 = u$

$$i = 2: \frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{Q}_2} = \frac{\partial W_k^*}{\partial i_2} = L_2 i_2 + L_{12} i_1 \quad \frac{\partial W_k^*}{\partial Q_2} = 0 \quad \frac{\partial W_p}{\partial Q_2} = Q_2 / C \quad F_2^{(d)} = R_2 \cdot i_2 \quad F_2 = 0$$

Übung

Beispiele zum elektrischen Netzwerk

Bsp. 6: Induktive Kopplung mit Spannungsquelle (2)

$$\left.\begin{aligned}
&(1): i=1: \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{Q}_1}\right) - \frac{\partial W_k^*}{\partial Q_1} + \frac{\partial W_p}{\partial Q_1} + F_1^{(d)} = F_1 \Rightarrow L_1\dot{i}_1 + L_{12}\dot{i}_2 - 0 + 0 + R_1 \cdot i_1 = u \\
&(2): i=2: \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{Q}_2}\right) - \frac{\partial W_k^*}{\partial Q_2} + \frac{\partial W_p}{\partial Q_2} + F_2^{(d)} = F_2 \Rightarrow L_2\dot{i}_2 + L_{12}\dot{i}_1 + \frac{Q_2}{C} + R_2 \cdot i_2 = 0
\end{aligned}\right\}$$

$$(2): \frac{d.}{dt}: L_2\ddot{i}_2 + L_{12}\ddot{i}_1 + \frac{i_2}{C} + R_2 \cdot \dot{i}_2 = 0$$

Zwei Diff.-gleichungen für die zwei Unbekannten i_1, i_2

(1) + (2) können auf **eine** Differentialgleichung 3.Ordnung gebracht werden:

$$(2): \ddot{i}_1 = -(L_2\ddot{i}_2 + R_2 \cdot \dot{i}_2 + i_2/C)/L_{12} \Rightarrow \dddot{i}_1 = -(L_2\dddot{i}_2 + R_2 \cdot \ddot{i}_2 + \dot{i}_2/C)/L_{12} \Rightarrow (1): d^2./dt^2$$

$$\boxed{(1): (L_1L_2 - L_{12}^2) \cdot \dddot{i}_2 + (R_2L_1 + R_1L_2) \cdot \ddot{i}_2 + \left(\frac{L_1}{C} + R_1R_2\right) \cdot \dot{i}_2 + \frac{R_1}{C} \cdot i_2 = L_{12} \cdot \frac{d^2u}{dt^2}}$$

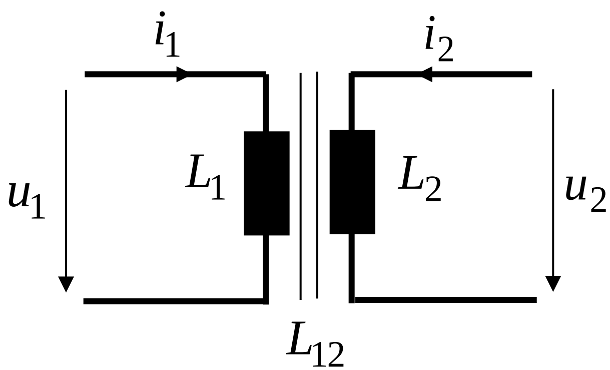
Eine Differentialgleichung 3.Ordnung bedeutet drei gekoppelte Energiespeicher im System!

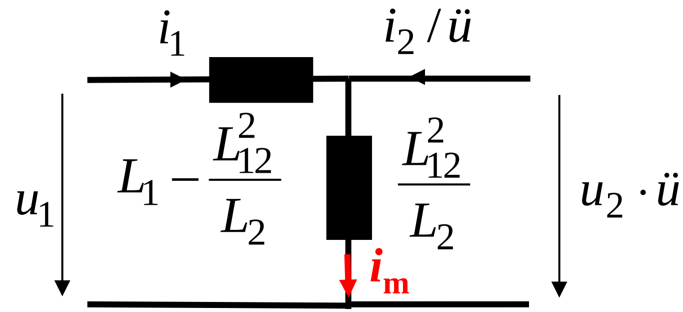
Das ist zunächst verwunderlich, denn man zählt vier: L_1, L_2, L_{12}, C; tatsächlich sind es aber wegen des induktiv gekoppelten Systems nur DREI Speicher (2 induktiv, 1 kapazitiv), was mit einem geeigneten Übersetzungsverhältnis z. B. $ü = L_{12}/L_2$ sichtbar wird.

Beispiele zum elektrischen Netzwerk

Übung

Bsp. 6: Induktive Kopplung mit Spannungsquelle (3)





$\boxed{\ddot{u} = L_{12}/L_2}$ Ersatzschaltbild

$i_m := (i_2/\ddot{u}) + i_1$

$$u_1 = L_1 \cdot \dot{i}_1 + L_{12} \cdot \dot{i}_2 = L_1 \cdot \dot{i}_1 + L_{12} \cdot \ddot{u} \cdot (\dot{i}_2/\ddot{u})$$

$$u_2 = L_2 \cdot \dot{i}_2 + L_{12} \cdot \dot{i}_1 \Rightarrow u_2 \cdot \ddot{u} = \ddot{u}^2 \cdot L_2 \cdot (\dot{i}_2/\ddot{u}) + L_{12} \cdot \ddot{u} \cdot \dot{i}_1$$

$$\boxed{\ddot{u}^2 \cdot L_2 := L_{12} \cdot \ddot{u} \Rightarrow \ddot{u} = L_{12}/L_2} \rightarrow u_2 \cdot \ddot{u} = (\ddot{u}^2 \cdot L_2) \cdot ((\dot{i}_2/\ddot{u}) + \dot{i}_1) = (\ddot{u} \cdot L_{12}) \cdot \overbrace{((\dot{i}_2/\ddot{u}) + \dot{i}_1)}^{:= di_m/dt}$$

Definition von *ü*

$$u_1 = (L_1 - L_{12} \cdot \ddot{u}) \cdot \dot{i}_1 + L_{12} \cdot \ddot{u} \cdot (\dot{i}_1 + (\dot{i}_2/\ddot{u}))$$

Speicher 1

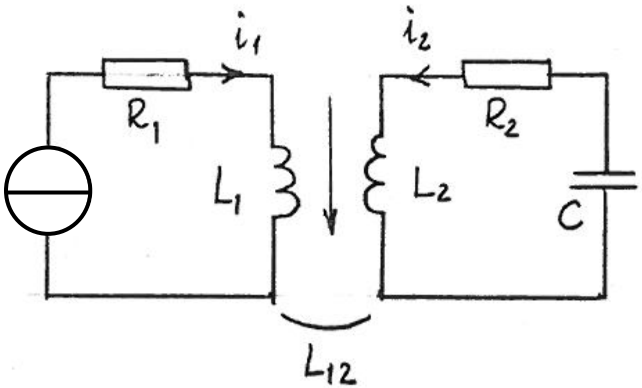
Speicher 2

$$\left.\begin{array}{l} u_2 \cdot \ddot{u} = (\ddot{u} \cdot L_{12}) \cdot \dot{i}_m \\ u_1 = (L_1 - L_{12} \cdot \ddot{u}) \cdot \dot{i}_1 + L_{12} \cdot \ddot{u} \cdot \dot{i}_m \end{array}\right\} \rightarrow \text{Ersatzschaltbild}$$

Ein einfach induktiv gekoppelter Kreis enthält nur **zwei unabhängige Energiespeicher !**

Beispiele zum elektrischen Netzwerk

Bsp. 7: Induktive Kopplung mit Stromquelle (1)



- $i_1(t)$, $Q_1(t)$ vorgeschrieben: Ideale Stromquelle, Innenwiderstand = ∞

a) $n=1: q_1 = Q_2 \Rightarrow \delta Q_1 = 0$, weil Q_1 eingeprägt!

b) $W_k^* = \frac{L_1}{2}\cdot i_1^2 + \frac{L_{12}}{2}\cdot i_1 i_2 + \frac{L_2}{2}\cdot i_2^2 + \frac{L_{12}}{2}\cdot i_1 i_2$

$W_k^* = \frac{L_1}{2}\cdot i_1^2 + \frac{L_2}{2}\cdot i_2^2 + L_{12}\cdot i_1 i_2 \quad W_p = Q_2^2/(2C)$

c) $R_1\cdot i_1\cdot \delta Q_1 = 0 \Rightarrow \delta A_d = F_1^{(d)}\cdot \delta q_1 = F_1^{(d)}\cdot \delta Q_2 = R_2\cdot i_2\cdot \delta Q_2 \Rightarrow F_1^{(d)} = R_2\cdot i_2$

$\delta A = u\cdot \delta Q_1 = 0\cdot 0 = 0 \Rightarrow F_1 = 0$

d) $i=1: \frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{Q}_2} = \frac{\partial W_k^*}{\partial i_2} = L_2 i_2 + L_{12} i_1 \quad \frac{\partial W_k^*}{\partial Q_2} = 0 \quad \frac{\partial W_p}{\partial Q_2} = Q_2/C \quad F_1^{(d)} = R_2\cdot i_2 \quad F_1 = 0$

$i=1: \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{Q}_2}\right) - \frac{\partial W_k^*}{\partial Q_2} + \frac{\partial W_p}{\partial Q_2} + F_1^{(d)} = 0 \Rightarrow L_2 \dot{i}_2 + \frac{Q_2}{C} + R_2\cdot i_2 = -L_{12}\dot{i}_1$

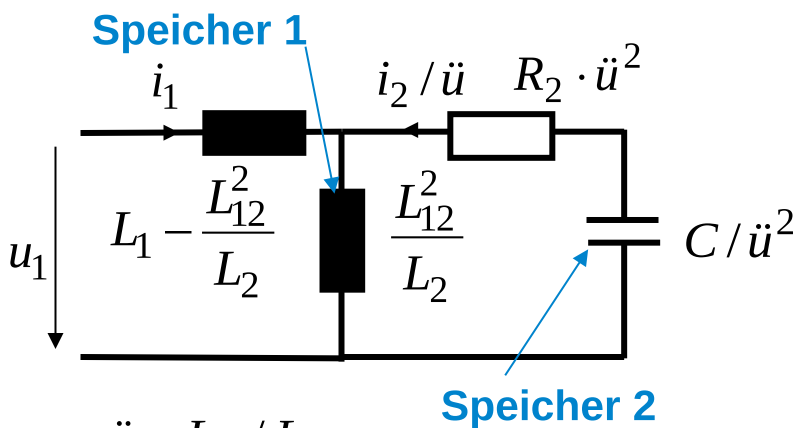
$$\boxed{\frac{d.}{dt} \Rightarrow L_2\cdot \ddot{i}_2 + R_2\cdot \dot{i}_2 + \frac{i_2}{C} = -L_{12}\cdot \ddot{i}_1}$$

Eine Differentialgleichung 2.Ordnung für die Unbekannte i_2

Übung

Beispiele zum elektrischen Netzwerk
Bsp. 7: Induktive Kopplung mit Stromquelle (2)

- Eine Differentialgleichung 2.Ordnung $\Rightarrow$ Zwei Energiespeicher für den Energieaustausch
- Die induktive Kopplung wird durch zwei induktive Energiespeicher beschrieben. Hinzu kommt die Kapazität *C*. Das wären drei Energiespeicher. Wieso nur DGL 2. Ordng.?



$$ü = L_{12} / L_2$$

$$u_{R2} = R_2 \cdot i_2 \rightarrow ü \cdot u_{R2} = \underbrace{ü^2 \cdot R_2}\cdot (i_2 / ü)$$

$$u_{C2} = \int i_2 \cdot dt / C \rightarrow ü \cdot u_{C2} = \int (i_2 / ü) \cdot dt \cdot \underbrace{ü^2 / C}$$

- Die primäre Induktivität wird vom eingeprägten Strom i_1 bestromt und nimmt daher nicht am Energieaustausch z. B. beim Einschwingvorgang teil (siehe Ersatzschaltbild!).
- Daher nur Differentialgleichung 2.Ordnung
- Dies zeigt auch die Diff.gleichung selbst. In ihr kommt L_1 nicht vor!

$$\boxed{L_2 \cdot \ddot{i}_2 + R_2 \cdot \dot{i}_2 + \frac{i_2}{C} = -L_{12} \cdot \ddot{i}_1}$$

Zusammenfassung:

- Allgemeine UNABHÄNGIGE Koordinaten (Lage, el. Ladungen) bilden *n*-dimensionalen Raum $n \le r$
- Über virtuelle Verschiebungen werden benachbarte Systemzustände energetisch betrachtet (= die Systemkoordinaten werden „variiert“).
- Die *EULER*´sche Variationsrechnung führt auf die *EULER*´schen Variationsgleichungen, wenn bei Änderung der System-Trajektorie von A nach B eine bestimmte „Wirkung“ *S* des Systems *extremal* ist (z. B. die dabei verstrichene Zeit *T* ist minimal).
- Für die Wandlersystemgleichungen ist *S* das Zeitintegral der *Lagrange*-Funktion *L*, die die Differenz aus kin. Ergänzungsenergie und pot. Energie des Systems ist.

$$L = W_k^* - W_p$$

- Mit diesem *L* heißen die *n* EULER´schen Variationsgleichungen die *Lagrange*-Gleichungen.
- Bei „komplizierten“ Systemen verwendet man mit Vorteil anstelle der klassischen dynamischen Grundgesetze (*NEWTON*, *KIRCHHOFF*) diese *Lagrange*-Gleichungen für die Aufstellung der dynamischen Systemgleichungen.