Elektromechanische Systeme

Teil von Prof. Binder:
„Mathematische Analyse von Wandlern & Aktoren“

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

1. Einführung
2. Grundlagen
3. Formale Behandlung elektromechanischer diskreter Systeme
4. Methode der *Lagrange*-Gleichungen
5. Elektromechanische Grundsysteme
6. Dynamische Untersuchung des Wandlerverhaltens
7. Analyse ausgewählter elektromechanischer Wandler

Elektromechanische Systeme

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

3. Formale Behandlung elektromechanischer diskreter Systeme

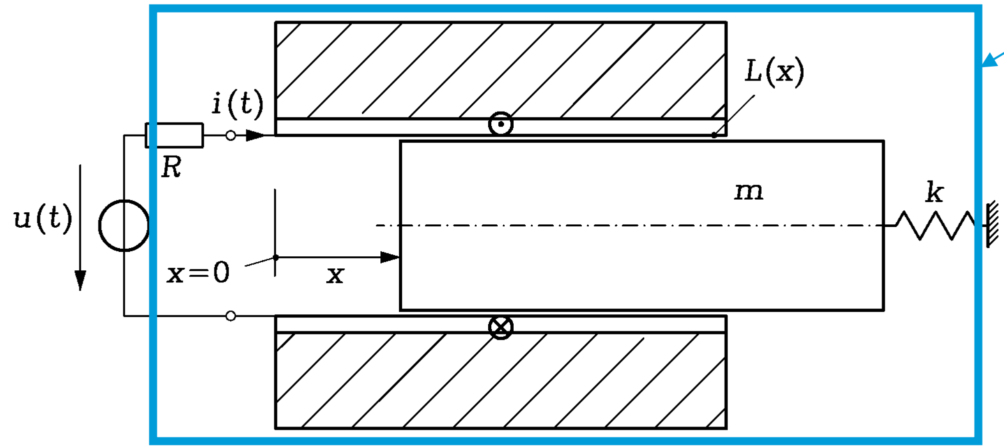
- Bezugspfeile, Leistungsfluss, Energiefluss
- Potentielle Energiespeicher
- Beispiel:
  Beweglicher Plattenkondensator
- Kinetische Energiespeicher
- Beispiel:
  Bewegliche gekoppelte Spulen
- Energiedissipation
- Elektrische Ersatzelemente

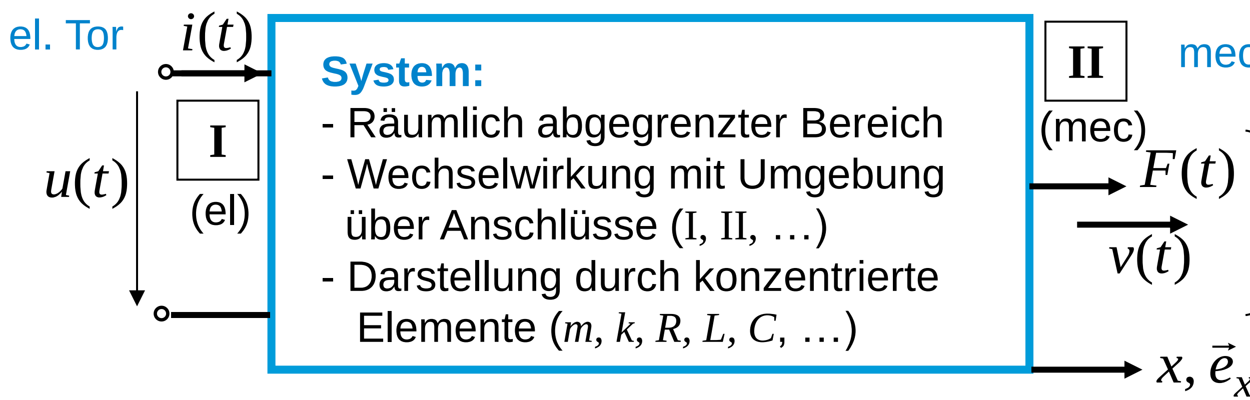
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Bezugspfeile, Leistungsfluss, Energiefluss
- Potentielle Energiespeicher
- Beispiel:
  Beweglicher Plattenkondensator
- Kinetische Energiespeicher
- Beispiel:
  Bewegliche gekoppelte Spulen
- Energiedissipation
- Elektrische Ersatzelemente

Bezugspfeile, Leistungsfluss, Energiefluss

Systemabgrenzung





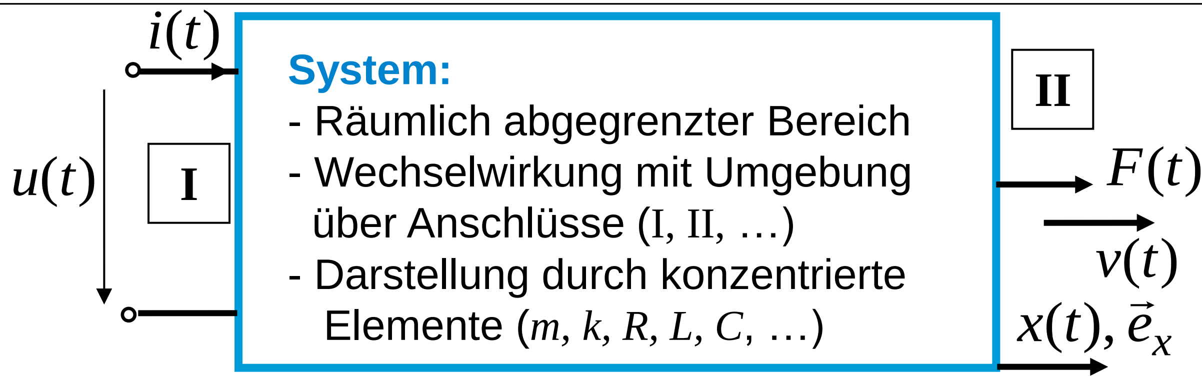
Äußere Kraft F und Geschwindigkeit v in positive x-Richtung positiv gezählt

Beispiel: Wandler aus Kap. 2 „Grundlagen“: Wechselwirkung mit Umgebung über ZWEI Anschlüsse I, II („Tore“): Ein elektrischer (el) und ein mechanischer (mec) Anschluss!

Bezugspfeile, Leistungsfluss, Energiefluss
Leistungs- und Energiezufuhr (1)

$$i = \frac{dQ}{dt}$$

Äußere (angelegte) Spannung



$$v = \frac{dx}{dt}$$

Äußere (angelegte) Kraft

Q: Dem System zugeführte el. Ladungsmenge

Nomenklatur	*el*	*mec*
Systemgröße	Q	x
Flussgröße	i	v
Potentialgröße	u	F

- Zum Zeitpunkt t zugeführte Momentan-Leistung $p(t)$:

$$p(t) = p_{el}(t) + p_{mec,außen}(t) = u(t) \cdot i(t) + F(t) \cdot v(t)$$

- Verbraucher-Zählpfeilsystem: Dem System zugeführte Leistung $p(t)$ wird POSITIV gezählt.

$$u > 0, i > 0 \Rightarrow p_{el} > 0 \qquad F > 0, v > 0 \Rightarrow p_{mec,außen} > 0$$

- Im Zeitintervall dt zugeführte Energie dW (t … $t + dt$):

$$dW(t) = dW_{el}(t) + dW_{mec,außen}(t) = u(t) \cdot \underbrace{i(t) \cdot dt}_{dQ} + F(t) \cdot \underbrace{v(t) \cdot dt}_{dx}$$

$$dW(t) = u(t) \cdot dQ + F(t) \cdot dx$$

Bezugspfeile, Leistungsfluss, Energiefluss
Leistungs- und Energiezufuhr (2)

Zugeführte Energie *dW* wird
a) im System gespeichert („potentielle“ und „kinetische“ Energieformen)
oder
b) in andere Energieformen umgewandelt (z. B. Wärmeenergie durch Verluste).

$$dW_{el} + dW_{mec,außen} = \underbrace{dW_e + dW_p + dW_F}_{} + \cdots + \underbrace{dW_m + dW_k}_{} + \cdots + dW_d$$

„Potentielle“ Energieformen:
- el.-statische Energie
- Lageenergie im Schwerefeld
- Elast. Federenergie

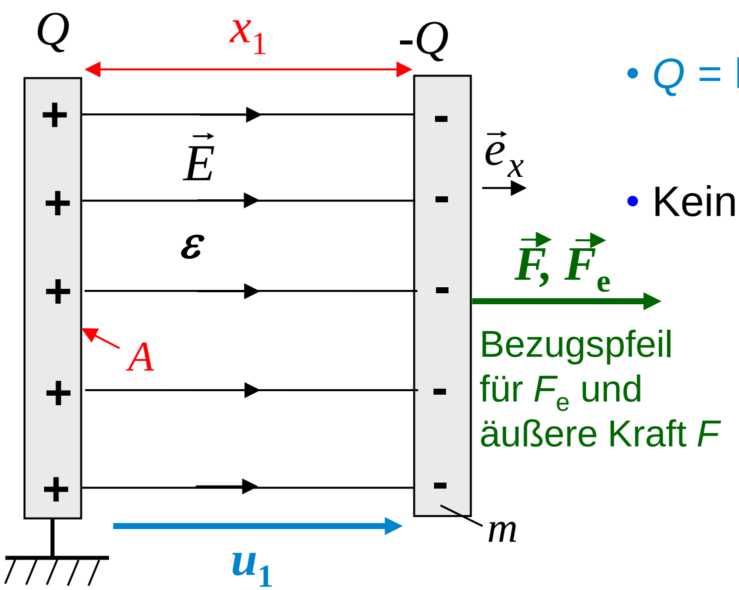
„Kinetische“ Energieformen:
- magn.-statische Energie
- Bewegungs-energie

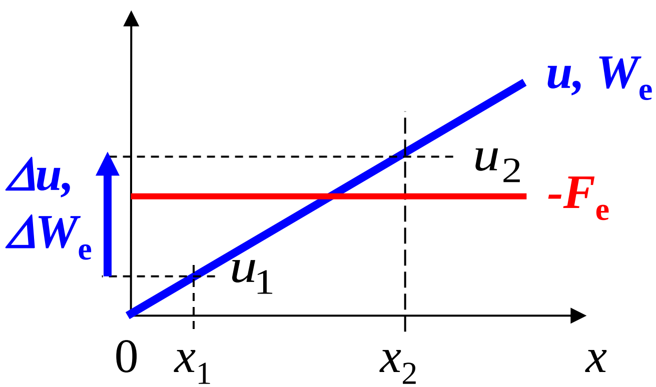
Verlustenergieformen: (Wärme!)
- Plast. Verformung („innere“ Reibung)
- „Äußere“ Reibung
- Stromwärme
- Magn. Hystereseverluste
- Dielektrische Verluste (el. Hystereseverluste) dch. Umpolarisierung!

Bezugspfeile, Leistungsfluss, Energiefluss

Beispiel 1: Energiezufuhr am Kondensator (1)

Wiederholung





- Q = konst.: Platten sind von Spannungsquelle getrennt! Plattenabstand x variabel von x_1 auf $x_2 > x_1$
- Keine Zufuhr el. Energie: $dQ = 0 : dW_{el} = u \cdot dQ = 0$

$$dW_{el} + dW_{mec,außen} = 0 + dW_{mec,außen} = dW_e$$

$$m \cdot \ddot{x} \cdot \vec{e}_x = \vec{F} + \vec{F}_e \Rightarrow \text{Bei } x = \text{konst.}: \vec{F} = -\vec{F}_e$$

$$F_e = -\frac{D \cdot E}{2} \cdot A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dW_{mec,außen} = F \cdot dx = -F_e \cdot dx = \frac{D \cdot E}{2} \cdot A \cdot dx$$

$$dW_{mec,außen} = \underbrace{\frac{D \cdot E}{2}}_{w_e} \cdot \underbrace{A \cdot dx}_{dV} = w_e \cdot dV = dW_e$$

$$\Delta W_{mec,außen} = \int_{x_1}^{x_2} F(x) \cdot dx = -\int_{x_1}^{x_2} \underbrace{F_e(x)}_{<0} \cdot dx = \Delta W_e > 0$$

Bezugspfeile, Leistungsfluss, Energiefluss
Beispiel 1: Energiezufuhr am Kondensator (2)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Es muss über eine äußere Kraft $F = -F_e > 0$ (in positiver x-Richtung) dem System mech. Arbeit $\Delta W_{\text{mec,außen}}$ zur Plattenabstandsvergrößerung zugeführt werden!
- $\Delta W_{\text{mec,außen}}$ wird in erhöhter Feldenergie ΔW_e gespeichert!
- Im Kapitel 2 hatten wir nur die el. Spannungsquelle betrachtet und geschrieben:

$$dW_{el} = dW_e + dW_{mec} = dW_e + F_e \cdot dx$$

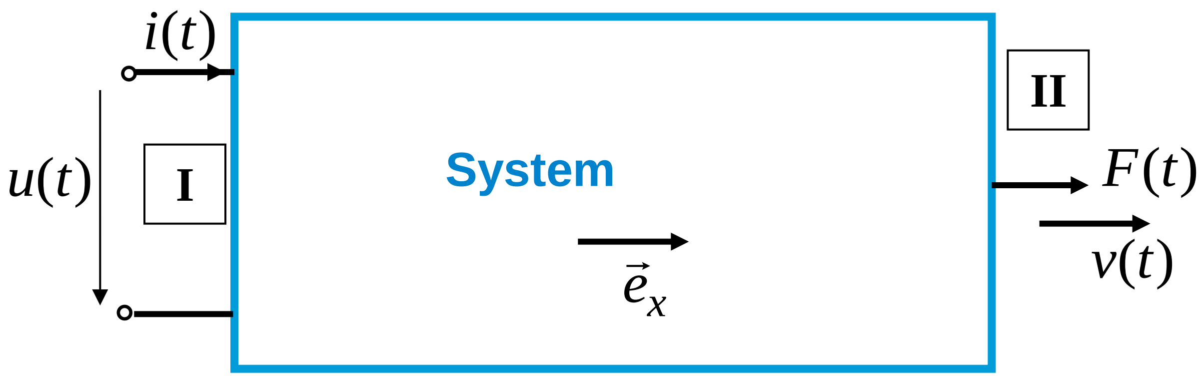
- Hier verallgemeinern wir el. und mech. Energiequellen: Daher schreiben wir:

$$dW_{el} + dW_{mec,außen} = dW_e \qquad dW_{mec,außen} = -dW_{mec} \Rightarrow F \cdot dx = -F_e \cdot dx$$

- Es wird dem System zugeführte mechanische Arbeit $W_{\text{mec,außen}}$ mit F positiv gezählt. Dabei ist vom System verrichtete Arbeit W_{mec} mit $F_e = -F$ negativ („generatorisch“)!
- Umgekehrt ist vom System verrichtete mech. Arbeit W_{mec} mit F_e positiv („motorisch“). Dabei ist $W_{\text{mec,außen}}$ mit $F = -F_e$ negativ! Dem Aktor zugeführte el. Arbeit W_{el} muss positiv sein, wenn kein Abbau gespeicherter Energien für W_{mec} genutzt wird!
- Aktorwirkungsgrad „motorisch“: $\boxed{\eta = P_{\text{mec}} / P_{\text{el}}}$, „Effizienz“: $\boxed{\varepsilon = W_{\text{mec}} / W_{\text{el}}}$

Bezugspfeile, Leistungsfluss, Energiefluss
Verallgemeinerte Koordinaten, Geschwindigkeiten, Kräfte

$$i = \frac{dQ}{dt}$$



$$v = \frac{dx}{dt}$$

Verbraucher-Zählpfeilsystem (VZS): *u* wirkt in Richtung i, *F* wirkt in Richtung v

„Koordinaten“ („Systemgrößen“)	x, Q	„Koordinatenvektor“ $\vec{x} = (x, Q)$
„Geschwindigkeiten“ („Flussgrößen“)	v, i	„Geschwindigkeiten-Vektor“ $\vec{v} = \mathrm{d}\vec{x}/\mathrm{d}t = (\mathrm{d}x/dt, \mathrm{d}Q/dt) = (v, i)$
„Kräfte“ („Potentialgrößen“)	F, u	„Kräfte-Vektor“ $\Rightarrow$ Leistungssumme $\vec{F} = (F, u) \Rightarrow p = \vec{F} \cdot \vec{v} = (F, u) \cdot (v, i) = F \cdot v + u \cdot i$

Bezugspfeile, Leistungsfluss, Energiefluss
Verallgemeinerte Koordinaten, Geschwindigkeiten, Kräfte

„Koordinaten“ $x_i\ , i = 1, \ldots, r$:
,

Lagekoordinaten x,
Verschiebungen Δx (bei Linearbewegung),
Winkel γ (bei Rotationsbewegung),
el. Ladungen *Q.*

„Geschwindigkeiten“ $v_i = dx_i / dt$:

mech. Geschwindigkeiten dx/dt, $\mathrm{d}\Delta x/dt$,
mech. Winkelgeschwindigkeiten $d\gamma/dt$,
el. Ströme $i = dQ/dt$.

„Kräfte“ F_i :

mech. Kräfte *F*,
mech. Drehmomente *M*,
el. Spannungen *u*.

Momentan-Leistung: $p(t) = \sum_{i=1}^{r} F_i \cdot v_i$

Energie-Zuwachs („Inkrement“): $p(t) \cdot dt = \sum_{i=1}^{r} F_i \cdot v_i \cdot dt = \sum_{i=1}^{r} F_i \cdot dx_i$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Bezugspfeile, Leistungsfluss, Energiefluss
- Potentielle Energiespeicher
- Beispiel:
  Beweglicher Plattenkondensator
- Kinetische Energiespeicher
- Beispiel:
  Bewegliche gekoppelte Spulen
- Energiedissipation
- Elektrische Ersatzelemente

Potentieller Energiespeicher
Speicherung „potentieller“ Energie

- **Speicher „potentieller“ Energie:**

  1) Mechanisch:

  1a) Elastische Strukturelemente = „Federn“:

  Energie der Lage der beiden Feder-Enden $\rightarrow$

  Feder: $F = k \cdot \Delta x$ Drehfeder: $M = k \cdot \Delta\gamma$

  1b) Gravitation: hier vereinfacht:

  Energie der Lage einer Masse

  im (quasi homogenen) Schwerefeld der Erde.

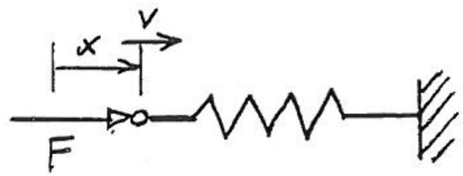
  2) Elektrisch: Ladungsspeicher = „Kondensatoren“ (C):

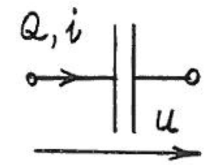
  Lageenergie einer el. Ladung im *E*-Feld andrer Ladungen.

Potentieller Energiespeicher

Speicherung verallg. „potentieller“ Energie W_p

Gegenüberstellung:
(GLEICHE Struktur,
KEINE Analogiebetrachtung)

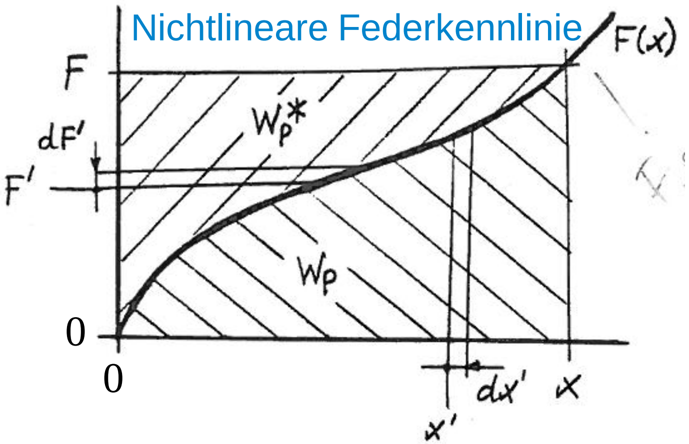




Beschreibende Gleichung:	$F = F(x)$		$u = u(Q)$
Sonderfall: *k*, *C* = konst.:	$F = k \cdot x$	$k \Leftrightarrow \frac{1}{C}$	$u = Q/C$
Aufgenommene Leistung:	$p = F \cdot v$		$p = u \cdot i$
Inkrementelle Energiezufuhr:	$p \cdot dt = F(x) \cdot dx$		$p \cdot dt = u(Q) \cdot dQ$
Potentielle Energie:	$W_p(x) = \int_0^x F(x') \cdot dx'$		$W_p(Q) = \int_0^Q u(Q') \cdot dQ'$
	$0 \le x' \le x$		$0 \le Q' \le Q$

Sonderfall: *k*, *C* = konst.: $W_p(x) = \int_0^x k \cdot x' \cdot dx' = \frac{k \cdot x^2}{2}$ $\quad W_p(Q) = \int_0^Q Q'/C \cdot dQ' = \frac{Q^2}{2C}$

Potentieller Energiespeicher
“Potentielle“ Ergänzungsenergie W_p^*



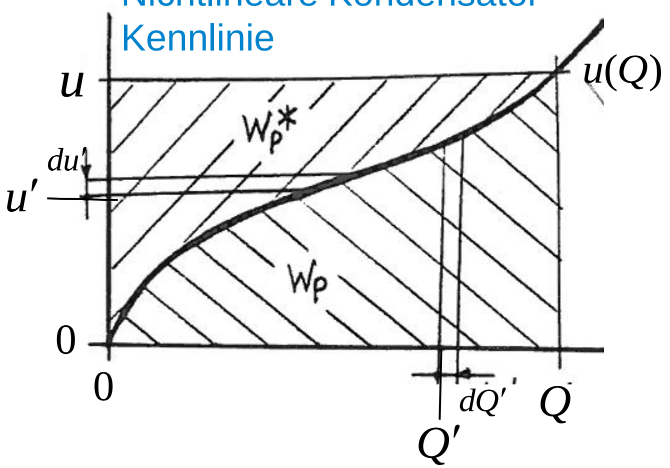
Äußere Kraft F wirkt gegen Federkraft F_F: $F = -F_F$

- Potentielle Ergänzungsenergie („Ko-Energie“):

Definition: $W_p^*(F) = F \cdot x - W_p(x) = \int_0^F x(F') \cdot dF'$

Aus $W_p(x) = \int_0^x F(x') \cdot dx'$ folgt: $F(x) = \dfrac{dW_p(x)}{dx}$

Aus $W_p^*(F) = \int_0^F x(F') \cdot dF'$ folgt: $x(F) = \dfrac{dW_p^*(F)}{dF}$



- Potentielle Ergänzungsenergie für Kondensatoren:

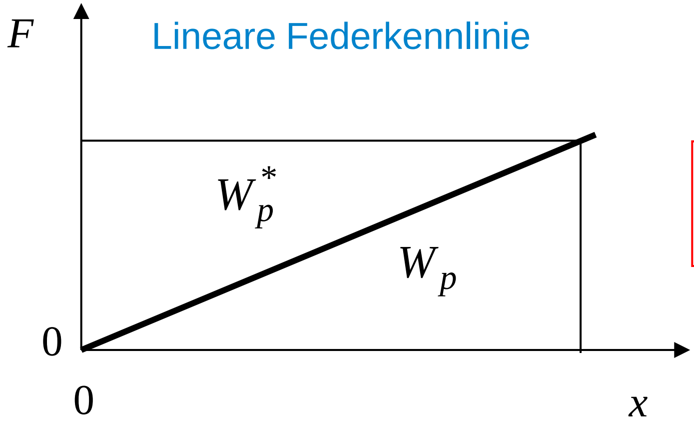
$$W_p^*(u) = u \cdot Q - W_p(Q) = \int_0^u Q(u') \cdot du'$$

$$u(Q) = \frac{dW_p(Q)}{dQ} \qquad Q(u) = \frac{dW_p^*(u)}{du}$$

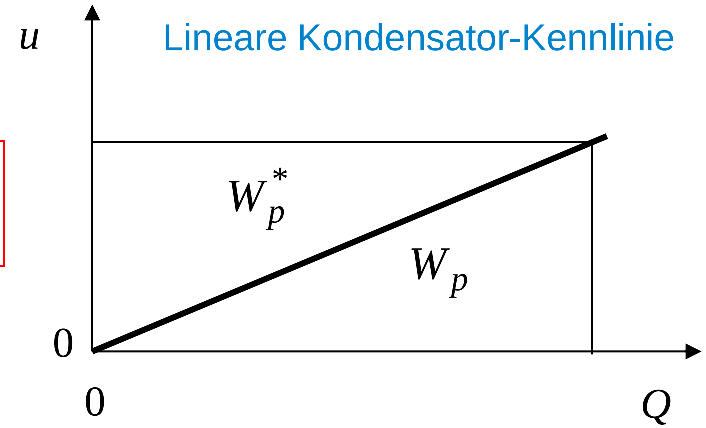
ACHTUNG: Wegen $F = -F_e$ gilt (Kap. 2:)

$$F_e = -dW_p / dx = -dW_e / dx \quad F = dW_e / dx$$

Potentieller Energiespeicher
Lineare Kennlinie: Pot. Ergänzungsenergie W_p^*



$$\boxed{k \Leftrightarrow \frac{1}{C}}$$



$$W_p(x) = \int_0^x k \cdot x' \cdot dx' = \frac{k \cdot x^2}{2}$$

$$W_p(Q) = \int_0^Q Q'/C \cdot dQ' = \frac{Q^2}{2C}$$

$$W_p^*(F) = \int_0^F \frac{1}{k} \cdot F' \cdot dF' = \frac{F^2}{2k}$$

$$W_p^*(u) = \int_0^u C \cdot u' \cdot du' = \frac{C \cdot u^2}{2}$$

Im Zahlenwert sind $W_p(x), W_p^*(F)$ gleich groß, aber nicht gleich in ihren Funktionen, denn:

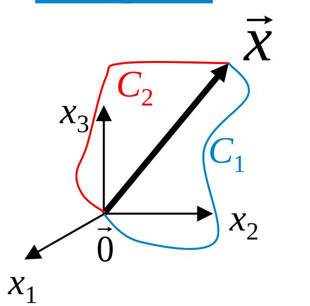
$$W_p(\Diamond) = \frac{k \cdot \Diamond^2}{2} \neq W_p^*(\Diamond) = \frac{\Diamond^2}{2k}$$

$$W_p(\Diamond) = \frac{\Diamond^2}{2C} \neq W_p^*(\Diamond) = \frac{C \cdot \Diamond^2}{2}$$

Potentieller Energiespeicher
Allgemeine Formulierung der pot. Energie

- r „Koordinaten“ $\Rightarrow$ r Kräfte: $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_r) \quad F_i(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_r) \quad i = 1, \ldots, r$
- „r-dimensionaler Vektorraum“ $\vec{F} = (F_1, \ldots, F_i, \ldots, F_r) = \vec{F}(\vec{x})$
- Arbeit der Kräfte: $W(\vec{x}) = \int\limits_{\vec{0}}^{\vec{x}} \vec{F}(\vec{x}') \cdot d\vec{x}' = \int\limits_0^{x_1} \cdots \int\limits_0^{x_r} F_1 dx_1' + \ldots + F_r dx_r' = \int\limits_0^{x_1} F_1 dx_1' + \ldots + \int\limits_0^{x_r} F_r dx_r'$

Beispiel: $r = 3$



$W(\vec{x}) = \int\limits_{C_1} \vec{F}(\vec{x}') \cdot d\vec{x}' = \int\limits_{C_2} \vec{F}(\vec{x}') \cdot d\vec{x}'$

Wenn W unabhängig vom Integrationsweg C ist (= unabhängig davon, welches der Teilintegrale zuerst ausgeführt wird), nennt man $W(\vec{x}) = W_p(\vec{x})$ eine **„Zustandsfunktion“;** z. B.: keine Hysterese!

Dann ist $\vec{F}(\vec{x})$ ein Gradientenfeld: $F_i = \dfrac{\partial W_p}{\partial x_i} \Rightarrow \vec{F}(\vec{x}) = \nabla W_p$

$$\nabla = \left(\frac{\partial .}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial .}{\partial x_i}, \ldots, \frac{\partial .}{\partial x_r}\right) \quad \text{„Nabla“}$$

- Für Gradientenfelder F ist die „Rotation“ Null: $\mathrm{rot}(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = \nabla \times (\nabla W_p) = \underbrace{(\nabla \times \nabla)}_{0} W_p = 0$

Daher gelten die „Integrabilitätsbedingungen“: $\boxed{\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial F_j}{\partial x_i} \quad i, j = 1, \ldots, r}$

Potentieller Energiespeicher

Ergänzung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Beispiel 2: Integrabilitätsbedingungen

Beispiel 2: $r = 3$ $\quad W_p$ ist eine **„Zustandsfunktion"**,

es gelten die Integrabilitätsbedingungen $\quad \frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \quad i, j = 1, 2, 3$

$$\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} = 0$$

$$\mathrm{rot}\vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial .}{\partial x_1} & \frac{\partial .}{\partial x_2} & \frac{\partial .}{\partial x_3} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \vec{e}_1 \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \right)}_{0} + \vec{e}_2 \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \right)}_{0} + \vec{e}_3 \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right)}_{0} = \vec{0}$$

- *F* ist ein Gradientenfeld:

$$\vec{F}(\vec{x}) = \nabla W_p = \mathrm{grad} W_p = \left(\frac{\partial W_p}{\partial x_1}, \frac{\partial W_p}{\partial x_2}, \frac{\partial W_p}{\partial x_3} \right) = \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial W_p}{\partial x_i} \cdot \vec{e}_i \qquad |\vec{e}_i| = 1$$

Potentieller Energiespeicher
Allg. Formulierung der pot. Ergänzungsenergie

- r „Koordinaten“ $\Rightarrow$ r Kräfte: $\vec{x} = (x_1, ..., x_i, ..., x_r) \quad F_i(x_1, ..., x_i, ..., x_r) \quad i = 1, ..., r$
- „r-dimensionaler Vektorraum“: $\vec{F} = (F_1, ..., F_i, ..., F_r) = \vec{F}(\vec{x})$
- Potentielle Ergänzungsenergie: Definition: $W_p^*(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{x} - W_p(\vec{x})$

$$W_p^*(\vec{F}) = \sum_{i=1}^{r} F_i \cdot x_i - W_p(\vec{x})$$

- Inkrementelle Änderung der potentielle Ergänzungsenergie:

$$dW_p^*(\vec{F}) = \sum_{i=1}^{r} d(F_i \cdot x_i) - dW_p(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{r} (dF_i \cdot x_i + F_i \cdot dx_i) - \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial W_p}{\partial x_i} \cdot dx_i$$

$$\left.\begin{aligned} dW_p^*(\vec{F}) &= \sum_{i=1}^{r} \Big(dF_i \cdot x_i + \cancel{\frac{\partial W_p}{\partial x_i} \cdot dx_i}\Big) - \sum_{i=1}^{r} \cancel{\frac{\partial W_p}{\partial x_i} \cdot dx_i} = \sum_{i=1}^{r} dF_i \cdot x_i \\ dW_p^*(\vec{F}) &= \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial W_p^*}{\partial F_i} \cdot dF_i \end{aligned}\right\} \quad \boxed{x_i = \frac{\partial W_p^*}{\partial F_i}}$$

- ***Beispiel:*** $i = 1: x_1 = Q,\ F_1 = u,\ W_p^* = W_e^* \Rightarrow x_1 = \dfrac{\partial W_p^*}{\partial F_1} \Leftrightarrow Q = \dfrac{\partial W_e^*}{\partial u}$

Potentieller Energiespeicher
Beispiel 3: Lineare Zug-/Druckfeder

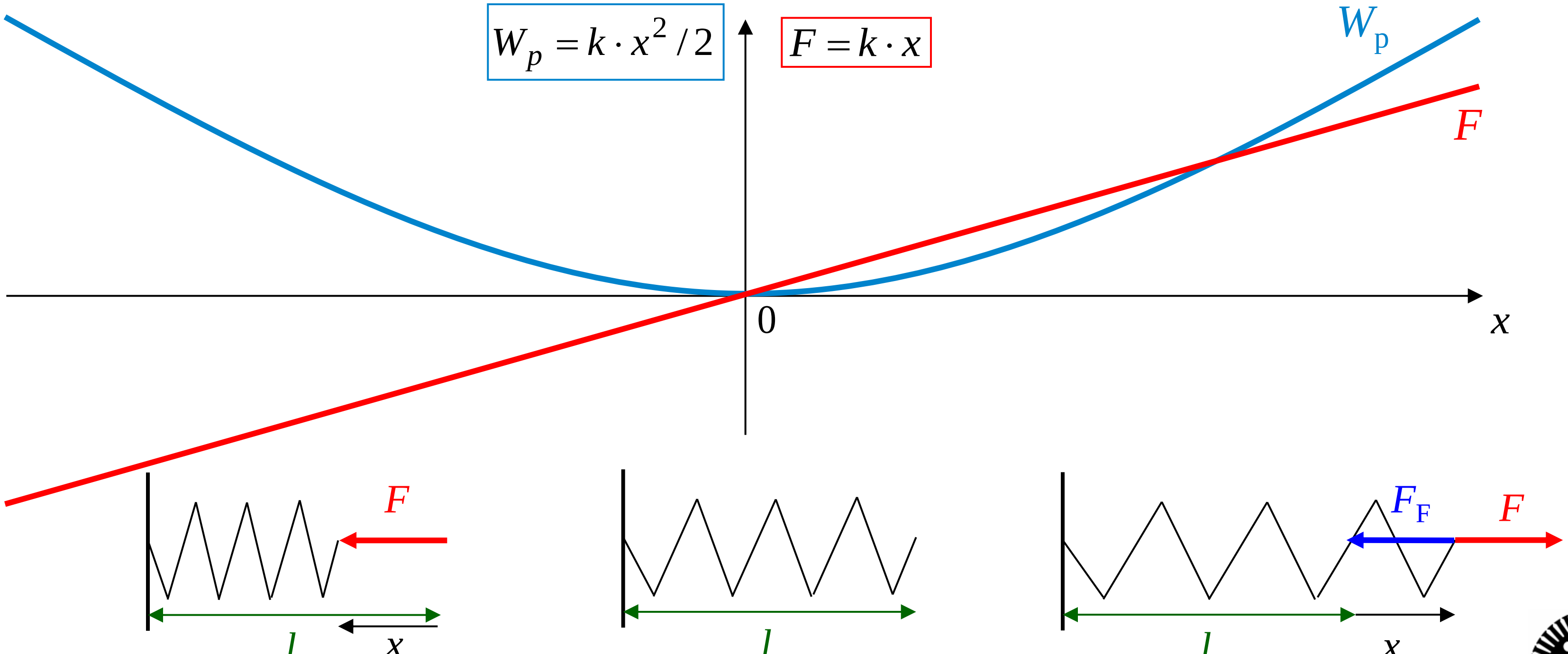
$$\boxed{F(x) = \frac{dW_p(x)}{dx}} \qquad F_F(x) = -\frac{dW_p(x)}{dx}$$

Äußere Kraft F und Federkraft F_F in x-Richtung positiv gezählt!

Feder bei $x = 0$ entspannt!

- Bei positiven Werten: Die (von außen aufgebrachte) Kraft F wirkt in Richtung der Koordinate x im Sinne einer Erhöhung der gespeicherten potentiellen Energie W_p.

Äußere Kraft F wirkt gegen Federkraft F_F: Gleichgewicht: $F + F_F = 0$.



Potentieller Energiespeicher – *Beispiel 4*

Potentielle Energie im Schwerefeld einer Punktmasse m_1

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wiederholung

- Kugelkoordinaten: $\nabla = \left(\frac{\partial .}{\partial r}, \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial .}{\partial \vartheta}, \frac{1}{r \cdot \sin\vartheta} \cdot \frac{\partial .}{\partial \varphi} \right)$
- Kugelsymmetrie: $\boxed{F(r) = \frac{dW_p(r)}{dr}}$ $\quad F_G(r) = -\frac{dW_p(r)}{dr}$

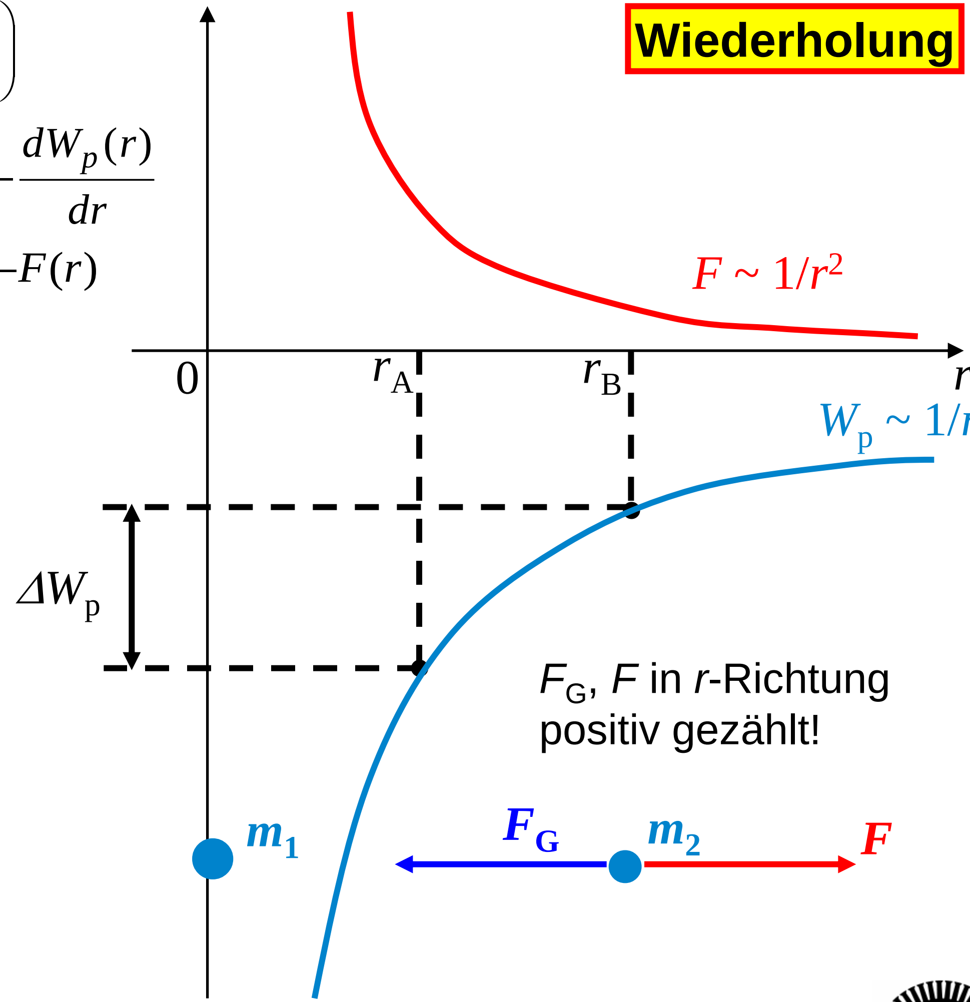
$$F_G(r) = -F(r)$$

$$W_p(r) = -\frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{r}$$

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}^3/(\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^2)$$

$$F(r) = \frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

- Die (von außen aufgebrachte) Kraft F wirkt in Richtung der Koordinate r im Sinne einer Erhöhung der gespeicherten potentiellen Energie W_p.
- Die Gravitationskraft F_G wirkt gegen F anziehend, also gegen r im Sinne einer Abnahme von W_p.

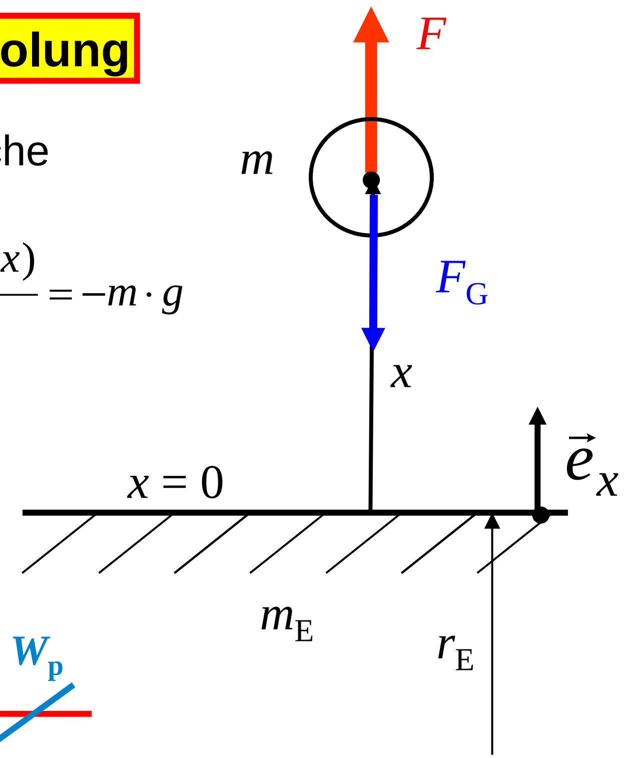


Potentieller Energiespeicher – *Beispiel 5*
Potentielle Energie an der Erdoberfläche

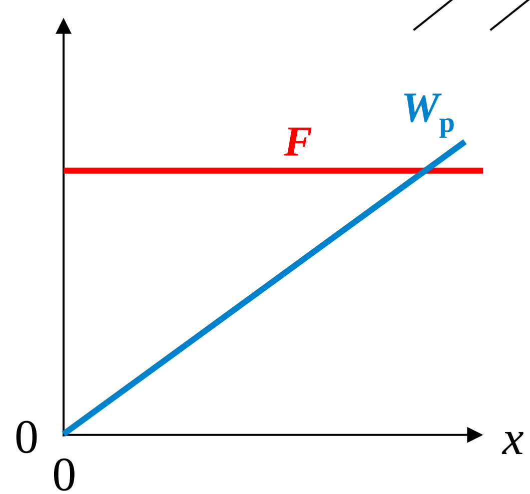
Wiederholung

- Näherung:
  Erdradius r_E >> Abstand x des Körpers m von der Erdoberfläche (Erdmasse m_E)

$$W_p(x) = m \cdot g \cdot x \qquad \boxed{F(x) = \frac{dW_p(x)}{dx} = m \cdot g} \qquad F_G(x) = -\frac{dW_p(x)}{dx} = -m \cdot g$$



- Die (von außen aufgebrachte) Kraft F wirkt in Richtung x zur Erhöhung der gespeicherten potentiellen Energie W_p.
- Die Gravitationskraft F_G wirkt gegen F !
- F_G, F in x-Richtung positiv gezählt!



Potentieller Energiespeicher – *Beispiel 6*

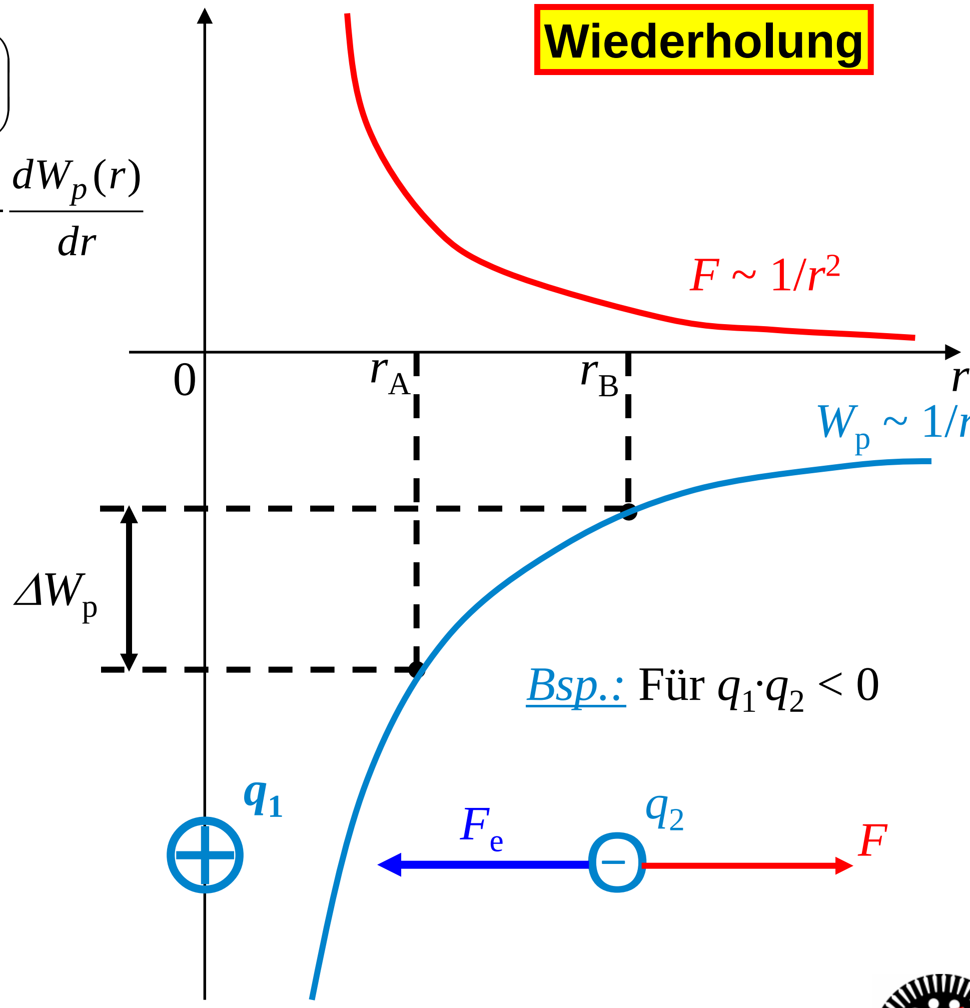
Elektrische Kraft und potentielle el. Energie einer Punktladung $q_1 > 0$ bzgl. Punktladung $q_2 < 0$

Wiederholung

- Kugelkoordinaten: $\nabla = \left(\frac{\partial .}{\partial r}, \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial .}{\partial \vartheta}, \frac{1}{r \cdot \sin\vartheta} \cdot \frac{\partial .}{\partial \varphi} \right)$
- Kugelsymmetrie: $\boxed{F(r) = \frac{dW_p(r)}{dr}}$ $\quad F_e(r) = -\frac{dW_p(r)}{dr}$

$$W_p(r) = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r} \qquad F(r) = -\frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2}$$

- Die (von außen aufgebrachte) Kraft F wirkt in Richtung der Koordinate r im Sinne einer Erhöhung der gespeicherten potentiellen Energie W_p.
- Die COULOMB-Kraft F_e wirkt gegen F anziehend, also gegen r im Sinne einer Abnahme von W_p.
- F_e, F in r-Richtung positiv gezählt!

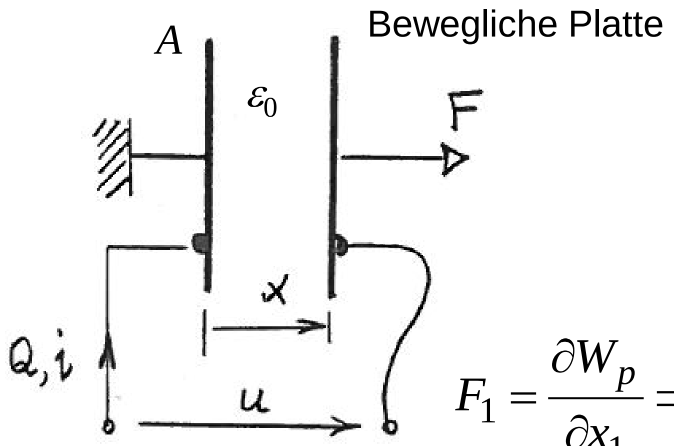


Bsp.: Für $q_1 \cdot q_2 < 0$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Bezugspfeile, Leistungsfluss, Energiefluss
- Potentielle Energiespeicher
- Beispiel:
  Beweglicher Plattenkondensator
- Kinetische Energiespeicher
- Beispiel:
  Bewegliche gekoppelte Spulen
- Energiedissipation
- Elektrische Ersatzelemente

<u>*Beispiel 7:*</u> Beweglicher Plattenkondensator
Annahme: Plattenladung *Q* vorgegeben



Wiederholung

<u>Geg.:</u> *Q*, *C*(*x*): $Q = C(x) \cdot u$

<u>Ges.:</u> Wie ändert sich äußere *F*(*x*) mit variablem *x*?

Zwei Koordinaten $r = 2$: $x_1 = Q$, $x_2 = x$

Zwei Kräfte: $F_1 = u$ (gesucht), $F_2 = F$ (gesucht)

$$F_1 = \frac{\partial W_p}{\partial x_1} \Rightarrow u = \frac{\partial W_p}{\partial Q} = \frac{Q}{C(x)} \Rightarrow W_p = \int_0^Q \frac{Q'}{C(x)} \cdot dQ' = \frac{Q^2}{2C(x)} + \Phi(x)$$

Integrationskonstante: $\Phi(x)$

$$F_2 = \frac{\partial W_p}{\partial x_2} \Rightarrow F = \frac{\partial W_p}{\partial x} = \frac{d}{dx}\left(\frac{Q^2}{2C(x)} + \Phi(x)\right) = \boxed{\frac{Q^2}{2} \cdot \frac{d}{dx}\frac{1}{C(x)} + \Phi'(x) = F(Q,x)}$$

<u>***Beispiel:***</u> Wenn *Q* = 0, dann soll auch *F* = 0 sein:

$$F(0,x) = \frac{0^2}{2} \cdot \frac{d}{dx}\frac{1}{C(x)} + \Phi'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad \Phi'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad \Phi(x) = \text{konst.} = \Phi = 0,$$

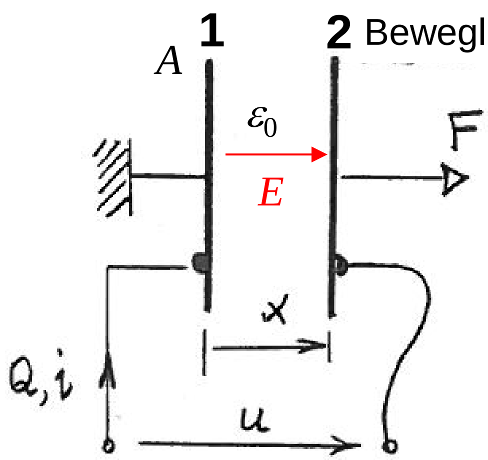
da sonst: $W_p(u=0) = \Phi \neq 0$

$$\boxed{F(Q,x) = \frac{Q^2}{2} \cdot \frac{d}{dx}\frac{1}{C(x)}}$$

Beispiel 7: Beweglicher Plattenkondensator

Annahme: Homogenes Kondensatorfeld *E*

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT



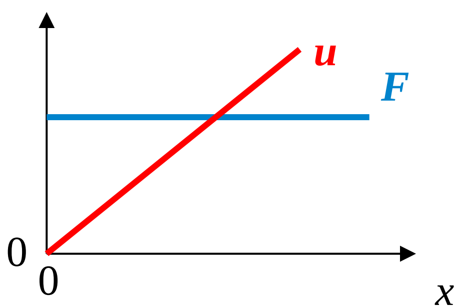
$$F(Q,x) = \frac{Q^2}{2} \cdot \frac{d}{dx} \frac{1}{C(x)}$$

Wiederholung

Homogenes Kondensatorfeld $E = E_x = \text{konst.}$

$$C(x) = \frac{\varepsilon_0 A}{x} \Rightarrow F(Q,x) = \frac{Q^2}{2} \cdot \frac{d}{dx} \frac{x}{\varepsilon_0 A} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A} = \text{konst.}$$

$$u = \frac{Q}{C(x)} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A} \cdot x$$



Bei konstanter Plattenladung *Q* und homogenem Feld *E* = konst. zwischen den Platten

a) ist die gegen die anziehende elektrostatische Kraft aufzubringende Kraft *F* UNabhängig vom Plattenabstand *x*.

b) nimmt die Spannung *u* zwischen den Platten mit *x* zu!

$$u(x) = \int_0^x \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_0^x E_x \cdot dx = E_x \cdot x \qquad Q = \oint_{A=\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{A} = D_x \cdot A = \varepsilon_0 E_x \cdot A \Rightarrow E_x = \frac{Q}{\varepsilon_0 A} \qquad u(x) = \frac{Q \cdot x}{\varepsilon_0 A}$$

*Maxwell´*sche Zugspannung auf Platte 2:

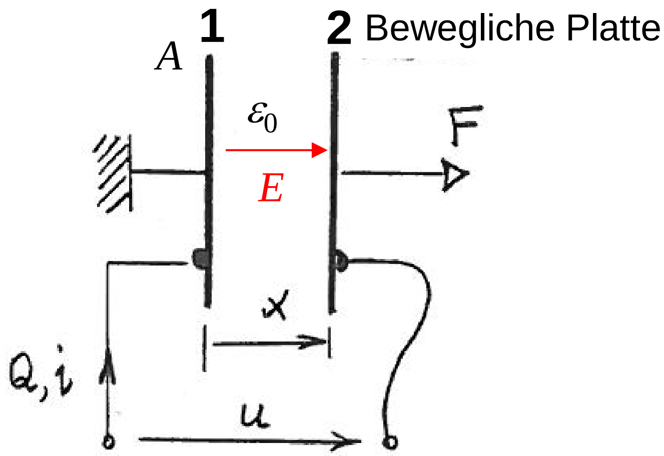
$$p_e(x) = -\frac{D_x \cdot E_x}{2} = -\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A^2} \Rightarrow F = -F_e = -p_e A = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A}$$

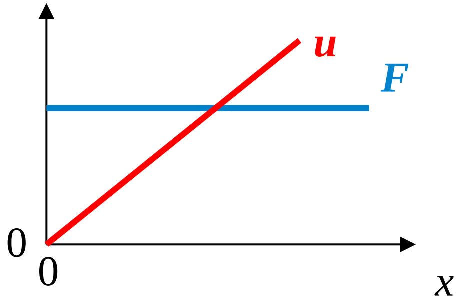
Beispiel 7: Beweglicher Plattenkondensator

Kontrolle: Kraftberechung aus virtueller Verschiebung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wiederholung





Unabhängige Variable: *Q*, *x*

$$\boxed{u = \frac{\partial W_e(Q,x)}{\partial Q} \qquad F_e = -\frac{\partial W_e(Q,x)}{\partial x}}$$

$$W_e = \frac{Q^2}{2C(x)} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A} \cdot x \qquad u = \frac{\partial W_e}{\partial Q} = \frac{Q}{C(x)} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A} \cdot x$$

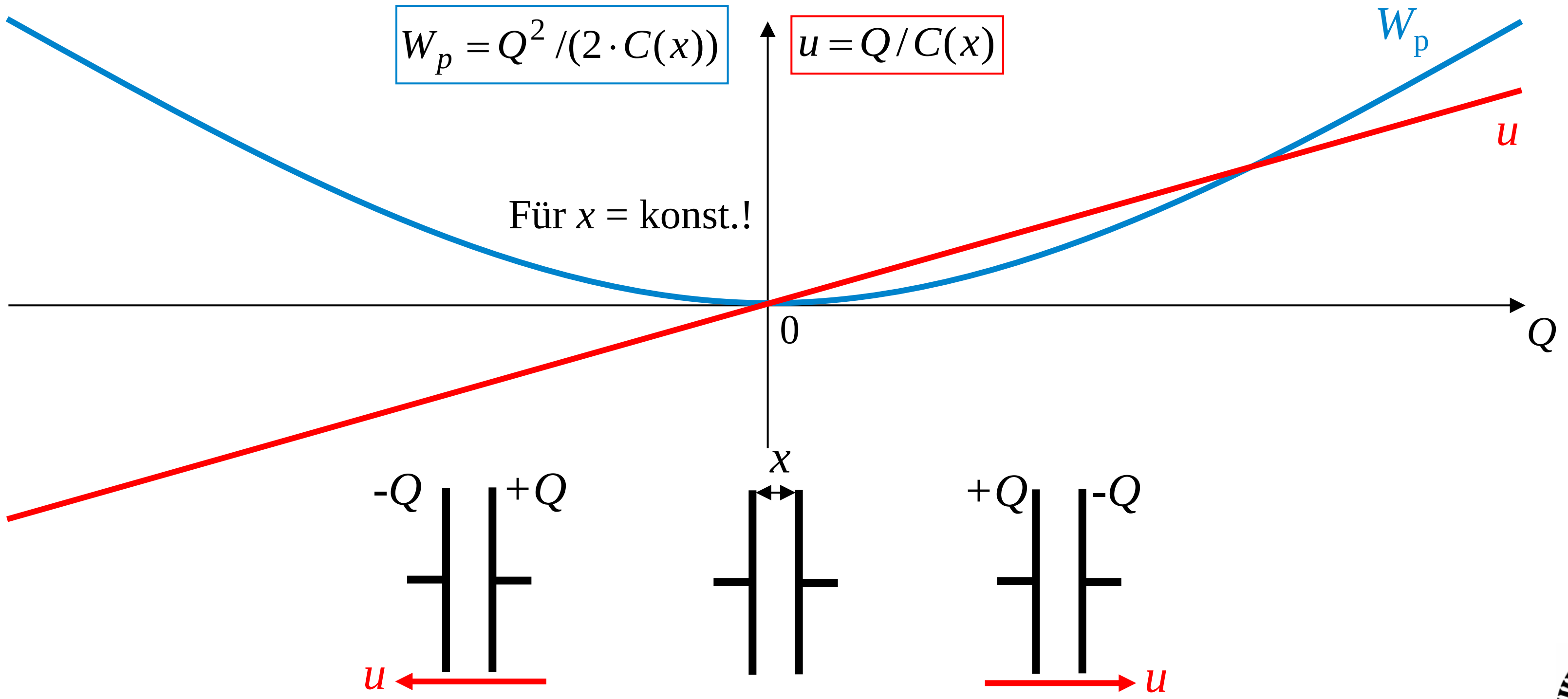
$$F_e = -\frac{\partial W_e(Q,x)}{\partial x} = -\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A} = -F$$

*Maxwell´*sche Zugspannung auf Platte 2 wirkt nach links!

Potentieller Energiespeicher
Beispiel 7: Plattenkondensator, ε = konst. (1)

$$u(Q) = \frac{dW_p(Q,x)}{dQ}$$

- Bei u > 0: Die von außen aufgebrachte Spannung u wirkt in Richtung von positiver zu negativer Ladung Q im Sinne einer Erhöhung dieser Ladung und damit der Erhöhung der gespeicherten potentiellen Energie W_p (= W_e).

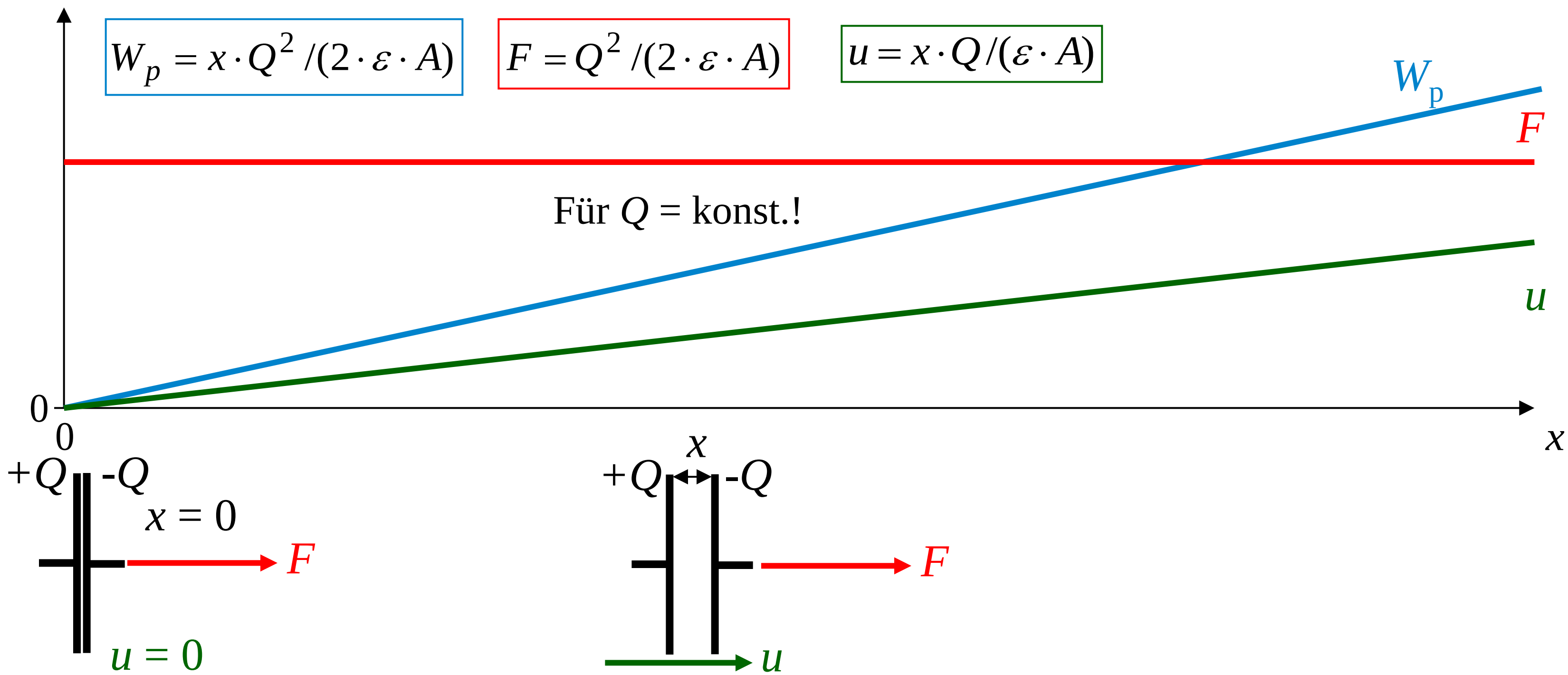


Potentieller Energiespeicher

Beispiel 7: Plattenkondensator, ε = konst. (2)

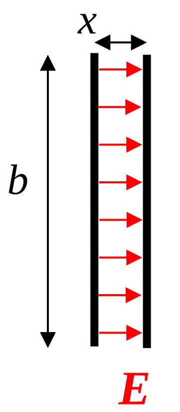
$$F(x) = \frac{dW_p(Q,x)}{dx} \qquad F_e(x) = -\frac{dW_e(Q,x)}{dx} = -\frac{dW_p(Q,x)}{dx} = -F(x)$$

- Bei $F > 0$: Die von außen aufgebrachte Kraft F wirkt in Richtung der Koordinate x im Sinne einer Erhöhung der gespeicherten potentiellen Energie W_p.
- Die el. Kraft F_e wirkt gegen F anziehend, also gegen x im Sinne einer Abnahme von W_p.

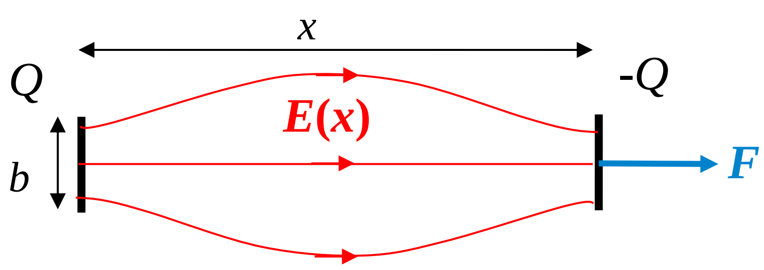


Beispiel: Beweglicher Plattenkondensator
Kritik an der Annahme „Homogenes Feld *E*“

- Annahme des homogenen Kondensatorfelds $E = E_x = \mathrm{konst.}$ nur sinnvoll bei gegenüber den Plattenabmessungen b, l kleinem Plattenabstand x. $(A = b \cdot l)$



Bei gegenüber Plattenabmessungen b, l großem Plattenabstand x darf das „ausufernde“ Randfeld nicht vernachlässigt werden und bestimmt maßgeblich das Feld zwischen den Platten, so dass $E(x)$ zwischen den Platten ein Minimum hat!



- *C*(*x*) sinkt dann stärker als mit 1/*x*; die Kraft *F* nimmt mit zunehmendem *x* ab!

- **Abschätzung für *x* >> *b*:**
  E-Feld zwischen zwei Punktladungen Q, $-Q$: *Coulomb*-Formel:

$$F(x) = \frac{Q^2}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot x^2} \sim \frac{1}{x^2}$$

- Bezugspfeile, Leistungsfluss, Energiefluss
- Potentielle Energiespeicher
- Beispiel:
  Beweglicher Plattenkondensator
- Kinetische Energiespeicher
- Beispiel:
  Bewegliche gekoppelte Spulen
- Energiedissipation
- Elektrische Ersatzelemente

Potentieller Energiespeicher
Speicherung „kinetischer“ Energie

- **Speicher „kinetischer“ Energie:**

  1) Mechanisch: Bewegte Massen & Drehmassen („Schwungmassen“)

  Masse: m & Drehmassen: Polares Trägheitsmoment J

  2) Elektromagnetisch: Magnetische Fluss-Speicher = „Induktivitäten“ (L, M)

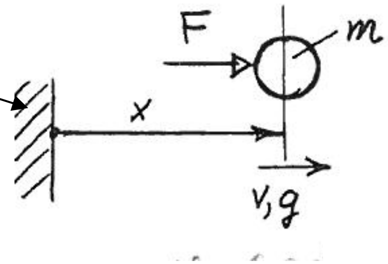
- Magnetfelder werden erregt durch Ströme (auch atomare Elementarströme) $i = dQ/dt$.

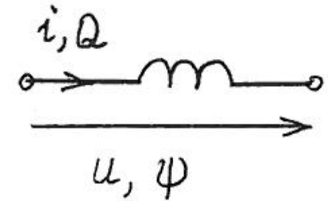
- Magnetfelder sind auch bei $i = I$ = konst. wegen dQ/dt nicht den statischen Strukturen der „potentiellen“ Energiespeicher zuzurechnen, sondern sie sind „kinetisch“!

Kinetische Energiespeicher

Speicherung verallgemeinerter „kinetischer“ Energie (1)

Inertialsystem





Gegenüberstellung:
(KEINE Analogiebetrachtung)

„Impuls“: (auch: Flussverkettung ψ) $\quad g = g(v) \quad v = v(g) \qquad \psi = \psi(i) \quad i = i(\psi)$

Sonderfall: nicht-relativistisch: $\quad g = m \cdot v,\ D = J(\omega_m) \cdot \omega_m \qquad$ (ohne Hysterese): $L(i)$

Sonderfall: linear: J, L = konst. $\quad g = m \cdot v,\ D = J \cdot \omega_m \qquad \psi = L \cdot i$

Dynamische Gleichung: *NEWTON*: $\quad F = dg/dt,\ M = dD/dt \qquad u = d\psi/dt$

FARADAY: $u + u_i = 0 : u_i = -d\psi/dt$

Aufgenommene Leistung: $\quad p = v \cdot F = v \cdot \dot{g} \qquad p = i \cdot u = i \cdot \dot{\psi}$

Inkrementelle Energiezufuhr: $p \cdot dt = v \cdot \dfrac{dg}{dt} \cdot dt = v \cdot dg, \quad p \cdot dt = i \cdot \dfrac{d\psi}{dt} \cdot dt = i \cdot d\psi$

Kinetische Energiespeicher

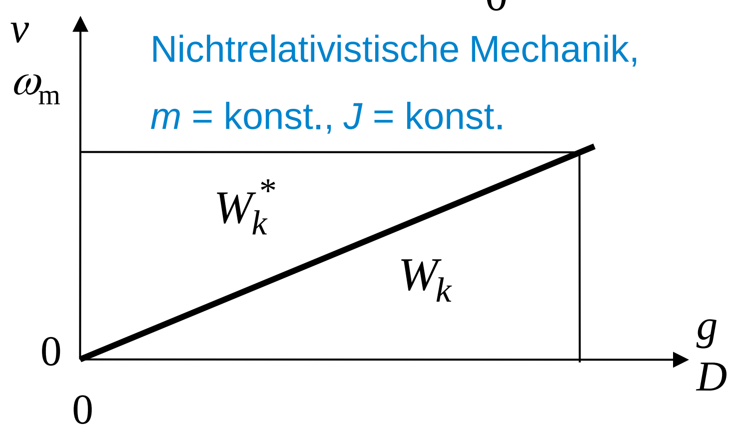
Speicherung verallgemeinerter „kinetischer" Energie (2)

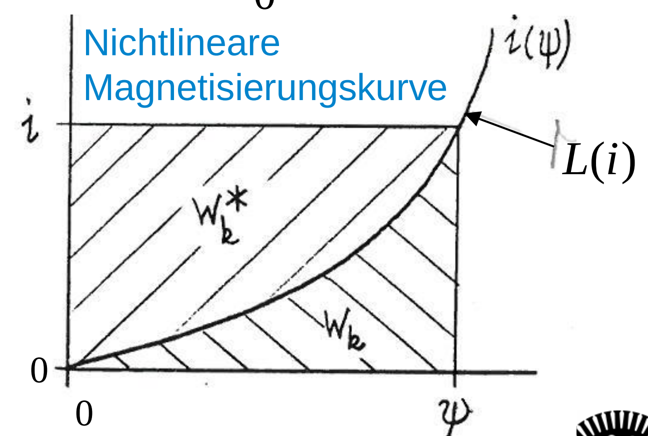
Inkrementelle Energiezufuhr: $p \cdot dt = v \cdot dg$ $\quad$ $p \cdot dt = i \cdot d\psi$

„Kinetische" Energie: $W_k(g) = \int_0^g v(g') \cdot dg'$ $\quad$ $W_k(\psi) = \int_0^\psi i(\psi') \cdot d\psi'$

„Kinetische" Ergänzungsenergie: $W_k^*(v) = v \cdot g - W_k$ $\quad$ $W_k^*(i) = i \cdot \psi - W_k$
(auch: Ko-Energie genannt)

$$W_k^*(v) = \int_0^v g(v') \cdot dv' \qquad W_k^*(i) = \int_0^i \psi(i') \cdot di'$$





Kinetische Energiespeicher

Speicherung verallgemeinerter „kinetischer“ Energie (3)

$$W_k(g)=\int_0^g v(g')\cdot dg' \Rightarrow v(g)=\frac{dW_k(g)}{dg}$$

$$W_k(\psi)=\int_0^\psi i(\psi')\cdot d\psi' \Rightarrow i(\psi)=\frac{dW_k(\psi)}{d\psi}$$

$$W_k^*(v)=\int_0^v g(v')\cdot dv' \Rightarrow g(v)=\frac{dW_k^*(v)}{dv}$$

$$W_k^*(i)=\int_0^i \psi(i')\cdot di' \Rightarrow \psi(i)=\frac{dW_k^*(i)}{di}$$

Lineares System: $\boxed{g=m\cdot v,\, D=J\cdot\omega_m}$ $\boxed{\psi=L\cdot i}$

$$W_k(g)=\int_0^g \frac{g'}{m}\cdot dg'=\frac{g^2}{2m}\Rightarrow v(g)=\frac{d(g^2/(2m))}{dg}=\frac{g}{m}$$

$$W_k(\psi)=\int_0^\psi \frac{\psi'}{L}\cdot d\psi'=\frac{\psi^2}{2L}$$

$$W_k(D)=\int_0^D \frac{D'}{J}\cdot dD'=\frac{D^2}{2J}\Rightarrow \omega_m(D)=\frac{d(D^2/(2J))}{dD}=\frac{D}{J}$$

$$\Rightarrow i(\psi)=\frac{d(\psi^2/(2L))}{d\psi}=\frac{\psi}{L}$$

$$W_k^*(v)=\int_0^v m\cdot v'\cdot dv'=\frac{m\cdot v^2}{2},\quad W_k^*(\omega_m)=\frac{J\cdot\omega_m^2}{2}$$

$$W_k^*(i)=\int_0^i L\cdot i'\cdot di'=\frac{L\cdot i^2}{2}$$

$$g(v)=\frac{d(m\cdot v^2/2)}{dv}=m\cdot v,\quad D(\omega_m)=\frac{d(J\cdot\omega_m^2/2)}{d\omega_m}=J\cdot\omega_m$$

$$\psi(i)=\frac{d(L\cdot i^2/2)}{di}=L\cdot i$$

Kinetische Energiespeicher
Äußere Kräfte F u. innere Kräfte $F^{(\mathrm{in})}$

- **Das System** ist als räumlich abgegrenzter Bereich über „äußere Kräfte“ über Anschlüsse (I, II, …) in Wechselwirkung mit seiner Umgebung.
- Die einzelnen Systemteile sind durch konzentrierte Elemente (allgemein: *m, k, R, L, C*, … hier: „kinetisch“: *m*, *L*) gegeben.

- Auf das System wirken

a) von außen aufgeprägte **„äußere Kräfte“ *F*** (z. B. angelegte Kraft, el. Spannung)

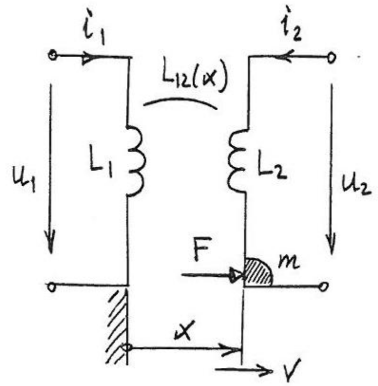
und

b) zwischen einzelnen Teilen des Systems (z. B. Spulen-Masse-Anordnung) **„innere Kräfte“ $F^{(in)}$** (hier: z. B. magnetische Kräfte).

Kinetische Energiespeicher
Innere Kräfte $F^{(\mathrm{in})}$

- Die „inneren Kräfte“ hängen von der Lage (Koordinaten x_i) der i = 1, …, r einzelnen Systemteile ab.
  Beispiel: Spule 1 bewegt sich von Spule 2 weg: $x_1 = x \rightarrow$ ändert magnetische Energie!

$$F_i^{(in)}(x_1,\ldots,x_r) = F_i^{(in)}(\vec{x})$$



- Koordinaten der einzelnen r Systemteile (z. B. Lage, el. Ladung) als Vektor: $\vec{x} = (x_1,\ldots,x_r)$
- Impulse der einzelnen Systemteile als Vektor: $\vec{g} = (g_1,\ldots,g_r)$
- Über die „inneren“ Kräfte $F^{(\mathrm{in})}$ wird Energie mit den kinetischen Speichern des Systems ausgetauscht!

Kinetische Energiespeicher
Dynamisches Kraftgesetz für allgemeines System

- Dynamisches Kraftgesetz (für mech. Systemteile: *NEWTON´sches Gesetz*):
  Die Summe aus „äußeren“ und „inneren“ Kräften je Systemteil
  ergibt dessen verallgemeinerte „Impulsänderung“,
  so dass sich die gesamte „Impulsänderung“ des Systems als Vektorgleichung ergibt.

$$\boxed{\vec{F} + \vec{F}^{(in)}(\vec{x}) = \frac{d\vec{g}}{dt}} \qquad \vec{F} = (F_1, \ldots, F_r) \quad \vec{F}^{(in)} = (F_1^{(in)}, \ldots, F_r^{(in)})$$

- Kraftgesetz gilt hier für den Sonderfall

  a) OHNE dissipative Kräfte
  und
  b) ohne potentielle Energiespeicher!

Kinetische Energiespeicher

Kinetische Energie W_k für allgemeines System

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Von außen durch die „äußeren" Kräfte dem System zugeführte Momentanleistung $p(t)$:

$$p(t) = \sum_{i=1}^{r} F_i \cdot v_i = \vec{F} \cdot \vec{v} = \left(\frac{d\vec{g}}{dt} - \vec{F}^{(in)}(\vec{x}) \right) \cdot \vec{v}$$

- Zugehörige inkrementelle Energiezufuhr =
  = Impulsänderungsarbeit – Arbeit der inneren Kräfte

$$dW = p(t) \cdot dt = \left(\vec{v} \cdot \frac{d\vec{g}}{dt} - \vec{F}^{(in)} \cdot \vec{v} \right) \cdot dt = \vec{v} \cdot \frac{d\vec{g}}{dt} \cdot dt - \vec{F}^{(in)}(\vec{x}) \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot dt = \vec{v} \cdot d\vec{g} - \vec{F}^{(in)}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} \qquad (1)$$

- Energiezufuhr bedingt Erhöhung der gespeicherten kinetischen Energie: $dW = dW_k$

  Wegen $\vec{F}^{(in)}(\vec{x})$ hängt W_k nicht nur von $\vec{g}$, sondern auch von $\vec{x}$ ab.

$$W_k = W_k(\vec{g}, \vec{x}) = W_k(g_1, \ldots, g_r, x_1, \ldots, x_r) \Rightarrow dW_k = \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial W_k}{\partial g_i} \cdot dg_i + \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial W_k}{\partial x_i} \cdot dx_i \qquad (2)$$

- Koeffizientenvergleich (1) mit (2):

$$(1): \quad dW_k = \vec{v} \cdot d\vec{g} - \vec{F}^{(in)}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = \sum_{i=1}^{r} v_i \cdot dg_i - \sum_{i=1}^{r} F_i^{(in)} \cdot dx_i \Rightarrow \boxed{v_i = \frac{\partial W_k}{\partial g_i} \qquad F_i^{(in)} = -\frac{\partial W_k}{\partial x_i}}$$

Kinetische Energiespeicher
Kinetische Ergänzungsenergie für allgemeines System

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Kinetische Ergänzungsenergie (Definition): $W_k^*(\vec{v},\vec{x}) = \vec{g}\cdot\vec{v} - W_k(\vec{g},\vec{x})$
- Deren Änderung ist: $dW_k^* = d(\vec{g}\cdot\vec{v}) - dW_k = \sum_{i=1}^{r} d(g_i\cdot v_i) - \sum_{i=1}^{r}\left(\frac{\partial W_k}{\partial g_i}\cdot dg_i + \frac{\partial W_k}{\partial x_i}\cdot dx_i\right)$

(a) $dW_k^* = \sum_{i=1}^{r}\left(\cancel{dg_i\cdot v_i} + g_i\cdot dv_i - \underbrace{\frac{\partial W_k}{\partial g_i}}_{v_i}\cdot \cancel{dg_i} - \frac{\partial W_k}{\partial x_i}\cdot dx_i\right)$

(b) $dW_k^*(\vec{v},\vec{x}) = \sum_{i=1}^{r}\left(\frac{\partial W_k^*}{\partial v_i}\cdot dv_i + \frac{\partial W_k^*}{\partial x_i}\cdot dx_i\right)$

$$\boxed{g_i = \frac{\partial W_k^*}{\partial v_i} \qquad F_i^{(in)} = -\frac{\partial W_k}{\partial x_i} = \frac{\partial W_k^*}{\partial x_i}}$$

Koeffizienten-vergleich von (a) mit (b)

Vergleiche mit Kap. 2: $r=1: F_m = -\frac{\partial W_m}{\partial x} = \frac{\partial W_m^*}{\partial x} \Rightarrow F_m = F^{(in)} = -\frac{\partial W_k}{\partial x} = \frac{\partial W_k^*}{\partial x}$

- Inkrement der kinetischen Ergänzungsenergie:

$$dW_k^*(\vec{v},\vec{x}) = \sum_{i=1}^{r}(g_i\cdot dv_i + F_i^{(in)}\cdot dx_i) = \vec{g}(\vec{v},\vec{x})\cdot d\vec{v} + \vec{F}^{(in)}(\vec{v},\vec{x})\cdot d\vec{x}$$

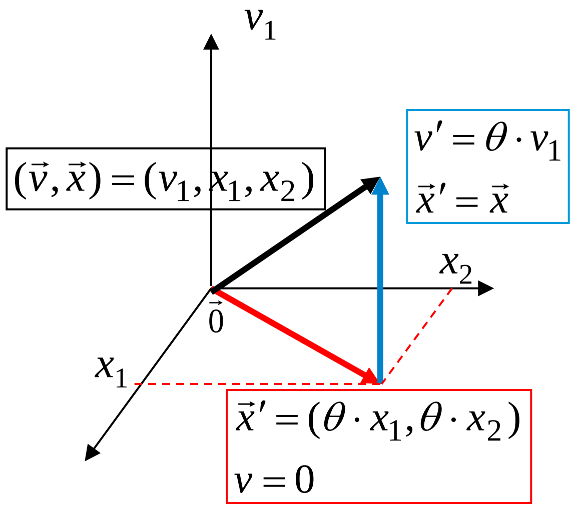
Kinetische Energiespeicher

Berechnung der kinetischen Ergänzungsenergie W_k^*

$$dW_k^*(\vec{v},\vec{x}) = \vec{g}(\vec{v},\vec{x})\cdot d\vec{v} + \vec{F}^{(in)}(\vec{v},\vec{x})\cdot d\vec{x}$$

- Berechnung der kinetische Ergänzungsenergie durch Integration im Raum $(\vec{v},\vec{x})$ vom Ursprung $\vec{0} = (\vec{v}=0, \vec{x}=0)$ aus entlang irgend eines Wegs
  z. B.
  zuerst $\vec{v}'=0, \vec{x}'=\theta\cdot\vec{x}, 0\le\theta\le 1$ und dann $\vec{v}'=\theta\cdot\vec{v}, \vec{x}'=\vec{x}, 0\le\theta\le 1$

  Es ist: $d\vec{x}' = d(\theta\cdot\vec{x}) = \vec{x}\cdot d\theta$ $\quad d\vec{v}' = d(\theta\cdot\vec{v}) = \vec{v}\cdot d\theta$



$$W_k^*(\vec{v},\vec{x}) = \int dW_k^* = \underbrace{\int_0^1 \vec{F}^{(in)}(\vec{0},\theta\cdot\vec{x})\cdot\vec{x}\cdot d\theta}_{W_{k0}^*(\vec{x})\text{: Hängt nur von } x\text{, nicht von } v \text{ ab}} + \int_0^1 \vec{g}(\theta\cdot\vec{v},\vec{x})\cdot\vec{v}\cdot d\theta$$

$$\boxed{W_k^*(\vec{v},\vec{x}) = W_{k0}^*(\vec{x}) + \int_0^1 \vec{g}(\theta\cdot\vec{v},\vec{x})\cdot\vec{v}\cdot d\theta}$$

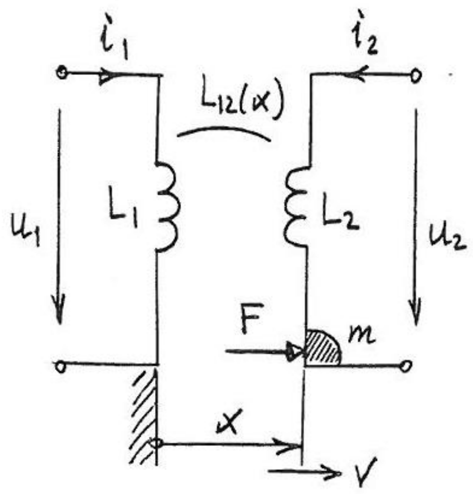
- Anteil $W_{k0}^*(\vec{x})$: $v_i = 0 \Rightarrow i = 0, v = 0$
  Berücksichtigt magnetische Energie von Dauermagneten (*B*-Feld bei $i = 0$);
  Ist sonst Null!

$$\boxed{W_k^*(\vec{v})\Big|_{W_{k0}^*=0} = \int_0^1 \vec{g}(\theta\cdot\vec{v})\cdot\vec{v}\cdot d\theta}$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Bezugspfeile, Leistungsfluss, Energiefluss
- Potentielle Energiespeicher
- Beispiel:
  Beweglicher Plattenkondensator
- Kinetische Energiespeicher
- Beispiel:
  Bewegliche gekoppelte Spulen
- Energiedissipation
- Elektrische Ersatzelemente

Beispiel 8:
Bewegliche gekoppelte Spulen
Berechnung der kinetischen Ergänzungsenergie (1)



Zwei magnetisch gekoppelte ($M = L_{12} = L_{21}$) lineare Spulen (L_1, L_2)

Spule 2 hat Masse m und ist verschiebbar (x, v) (L_1, L_2 = konst.)

Geg.: Funktion $L_{12}(x)$, Ströme $i_1(t)$, $i_2(t)$, $x(t)$. Keine Verluste: $R = 0$.

Ges.: Kraft $F(x)$, Spannungen $u_1(t)$, $u_2(t)$

Drei Koordinaten: $x_1 = Q_1, x_2 = Q_2, x_3 = x$

Drei „Geschwindigkeiten": $v_1 = \dot{Q}_1 = i_1, v_2 = \dot{Q}_2 = i_2, v_3 = \dot{x}_3 = \dot{x} = v$

Drei „Kräfte": $F_1 = u_1, F_2 = u_2, F_3 = F$

Drei „Impulse": $g_1 = \psi_1, g_2 = \psi_2, g_3 = g$

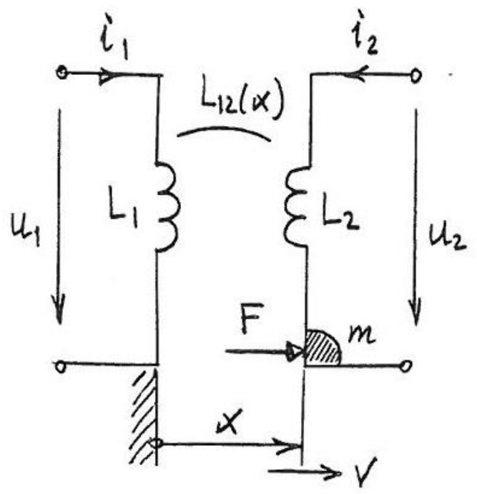
Impulsgleichungen: $\psi_1 = L_1 \cdot i_1 + L_{12}(x) \cdot i_2, \psi_2 = L_2 \cdot i_2 + L_{21}(x) \cdot i_1 = L_2 \cdot i_2 + L_{12}(x) \cdot i_1, g = m \cdot v$

Kinet. Ergänzungsenergie: KEINE Dauermagnete: $\psi_1(i_1 = 0, i_2 = 0) = 0, \psi_2(i_1 = 0, i_2 = 0) = 0$

$$W_{k0}^*(\vec{x}) = 0$$

$$W_k^*(i_1, i_2, v) = \int_0^1 \vec{g}(\theta \cdot \vec{v}) \cdot \vec{v} \cdot d\theta = \int_0^1 \psi_1(\theta \cdot \vec{v}) \cdot i_1 \cdot d\theta + \int_0^1 \psi_2(\theta \cdot \vec{v}) \cdot i_2 \cdot d\theta + \int_0^1 g(\theta \cdot \vec{v}) \cdot v \cdot d\theta$$

Beispiel 8:
Bewegliche gekoppelte Spulen
Berechnung der kinetischen Ergänzungsenergie (1)



Zwei magnetisch gekoppelte ($M = L_{12} = L_{21}$) lineare Spulen (L_1, L_2)

Spule 2 hat Masse m und ist verschiebbar (x, v) (L_1, L_2 = konst.)

Geg.: Funktion $L_{12}(x)$, Ströme $i_1(t)$, $i_2(t)$, $x(t)$. Keine Verluste: $R = 0$.

Ges.: Kraft $F(x)$, Spannungen $u_1(t)$, $u_2(t)$

Drei Koordinaten: $x_1 = Q_1,\ x_2 = Q_2,\ x_3 = x$

Drei „Geschwindigkeiten“: $v_1 = \dot{Q}_1 = i_1,\ v_2 = \dot{Q}_2 = i_2,\ v_3 = \dot{x}_3 = \dot{x} = v$

Drei „Kräfte“: $F_1 = u_1,\ F_2 = u_2,\ F_3 = F$

Drei „Impulse“: $g_1 = \psi_1,\ g_2 = \psi_2,\ g_3 = g$

Impulsgleichungen: $\psi_1 = L_1 \cdot i_1 + L_{12}(x) \cdot i_2,\ \psi_2 = L_2 \cdot i_2 + L_{21}(x) \cdot i_1 = L_2 \cdot i_2 + L_{12}(x) \cdot i_1,\ g = m \cdot v$

Kinet. Ergänzungsenergie: KEINE Dauermagnete: $\psi_1(i_1 = 0, i_2 = 0) = 0,\ \psi_2(i_1 = 0, i_2 = 0) = 0$

$$W_{k0}^*(\vec{x}) = 0$$

$$W_k^*(i_1, i_2, v) = \int_0^1 \vec{g}(\theta \cdot \vec{v}) \cdot \vec{v} \cdot d\theta = \int_0^1 \psi_1(\theta \cdot \vec{v}) \cdot i_1 \cdot d\theta + \int_0^1 \psi_2(\theta \cdot \vec{v}) \cdot i_2 \cdot d\theta + \int_0^1 g(\theta \cdot \vec{v}) \cdot v \cdot d\theta$$

Beispiel 8:
Bewegliche gekoppelte Spulen
Berechnung der kinetischen Ergänzungsenergie (2)

$$W_k^*(i_1,i_2,v) = \int_0^1 \psi_1(\theta\cdot\vec{v})\cdot i_1\cdot d\theta + \int_0^1 \psi_2(\theta\cdot\vec{v})\cdot i_2\cdot d\theta + \int_0^1 g(\theta\cdot\vec{v})\cdot v\cdot d\theta$$

$$\boxed{\int_0^1 \theta\cdot d\theta = \left.\frac{\theta^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}}$$

$$W_k^* = \int_0^1 (L_1\cdot\theta\cdot i_1 + L_{12}(x)\cdot\theta\cdot i_2)\cdot i_1\cdot d\theta + \int_0^1 (L_2\cdot\theta\cdot i_2 + L_{12}(x)\cdot\theta\cdot i_1)\cdot i_2\cdot d\theta + \int_0^1 m\cdot\theta\cdot v\cdot v\cdot d\theta$$

$$\boxed{W_k^*} = L_1\cdot\frac{i_1^2}{2} + L_{12}(x)\cdot\frac{i_1 i_2}{2} + L_2\cdot\frac{i_2^2}{2} + L_{12}(x)\cdot\frac{i_1 i_2}{2} + m\cdot\frac{v^2}{2} = \boxed{L_1\cdot\frac{i_1^2}{2} + L_2\cdot\frac{i_2^2}{2} + L_{12}(x)\cdot i_1 i_2 + m\cdot\frac{v^2}{2}}$$

Dynamische Gleichungen: $\vec{F} = \frac{d\vec{g}}{dt} - \vec{F}^{(in)}(\vec{x})$ mit $g_i = \frac{\partial W_k^*}{\partial v_i}$ $\quad F_i^{(in)} = -\frac{\partial W_k}{\partial x_i} = \frac{\partial W_k^*}{\partial x_i}$

$$\dot{g}_1 = \dot{\psi}_1 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W_k^*}{\partial i_1}\right) = \frac{d}{dt}\left(L_1 i_1 + L_{12}(x)\cdot i_2\right) = L_1\cdot\frac{di_1}{dt} + L_{12}(x)\cdot\frac{di_2}{dt} + i_2\cdot\frac{dL_{12}(x(t))}{dt}$$

$$\frac{dL_{12}(x(t))}{dt} = \frac{dL_{12}(x)}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{dL_{12}(x)}{dx}\cdot v = L'_{12}(x)\cdot v$$

$$\dot{\psi}_1 = L_1\cdot\frac{di_1}{dt} + L_{12}(x)\cdot\frac{di_2}{dt} + i_2\cdot L'_{12}(x)\cdot v$$

$$\dot{g}_2 = \dot{\psi}_2 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W_k^*}{\partial i_2}\right) = \frac{d}{dt}\left(L_2 i_2 + L_{12}(x)\cdot i_1\right) = L_2\cdot\frac{di_2}{dt} + L_{12}(x)\cdot\frac{di_1}{dt} + i_1\cdot L'_{12}(x)\cdot v$$

Beispiel 8:
Bewegliche gekoppelte Spulen
Berechnung der allgemeinen Kräfte u_1, u_2, F

$$F_1 = \dot{g}_1 - F_1^{(in)} = u_1 \qquad F_1^{(in)} = \frac{\partial W_k^*}{\partial x_1} = \frac{\partial W_k^*}{\partial Q_1} = 0$$ denn Ko-Energie hängt NICHT von Q_1 ab!

$$F_2 = \dot{g}_2 - F_2^{(in)} = u_2 \qquad F_2^{(in)} = \frac{\partial W_k^*}{\partial x_2} = \frac{\partial W_k^*}{\partial Q_2} = 0$$ denn Ko-Energie hängt NICHT von Q_2 ab!

$$u_1 = \dot{g}_1 = \dot{\psi}_1 \qquad u_2 = \dot{g}_2 = \dot{\psi}_2$$

$$\boxed{u_1 = \dot{\psi}_1 = \underbrace{L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} + L_{12}(x) \cdot \frac{di_2}{dt}}_{\text{Ruhinduktion}} + \underbrace{i_2 \cdot L'_{12}(x) \cdot v}_{\text{Bewegungsinduktion}}}$$

$$\boxed{u_2 = \underbrace{L_2 \cdot \frac{di_2}{dt} + L_{12}(x) \cdot \frac{di_1}{dt}}_{\text{Ruhinduktion}} + \underbrace{i_1 \cdot L'_{12}(x) \cdot v}_{\text{Bewegungsinduktion}}}$$

$$F_3 = \dot{g}_3 - F_3^{(in)} = \dot{g}_3 - \frac{\partial W_k^*}{\partial x_3} = \frac{d}{dt}\frac{\partial W_k^*}{\partial v} - \frac{\partial W_k^*}{\partial x} = \frac{d(m \cdot v)}{dt} - L'_{12}(x) \cdot i_1 \cdot i_2 = F = \frac{d(m \cdot v)}{dt} - F_m$$

$$F_m = \frac{\partial W_m^*}{\partial x}$$

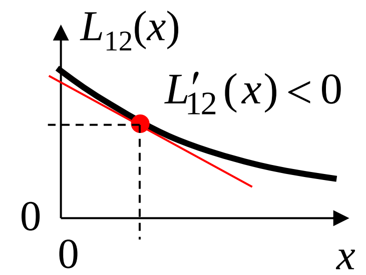
$$\boxed{F = \underbrace{m \cdot \frac{dv}{dt}}_{\text{Trägheitskraft}} \underbrace{- L'_{12}(x) \cdot i_1 \cdot i_2}_{\text{Magnetkraft } F_m}}$$

- Magnetkraft F_m ist „innere“ Kraft und hängt vom Vorzeichen der beiden Ströme i_1, i_2 ab!

Beispiel 8:
Bewegliche gekoppelte Spulen
Magnetkraft F_m

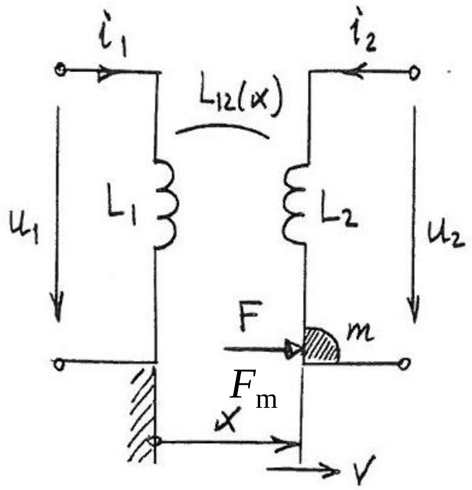
$$F_m = L'_{12}(x) \cdot i_1 \cdot i_2$$

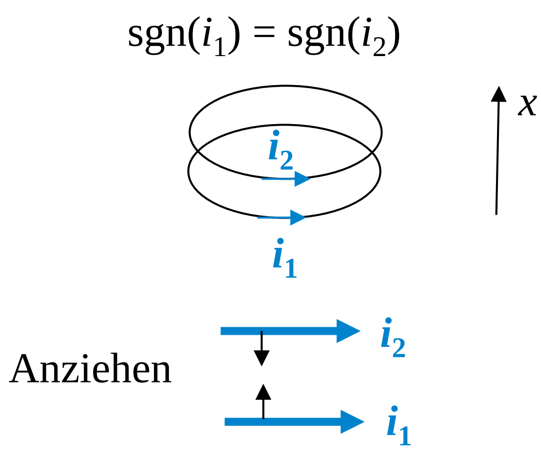
Kraftzählpfeil IN Richtung von *x* !

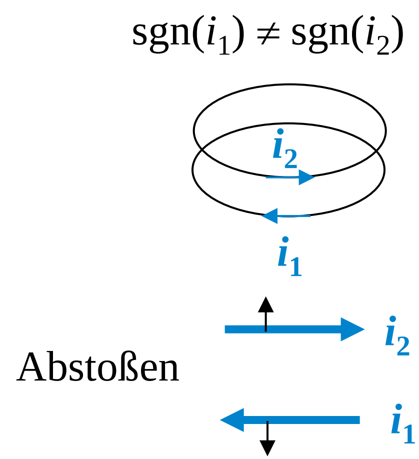


- Magnetische Kopplung L_{12} nimmt mit steigendem Abstand *x* <u>ab</u>!
- Magnetkraft $F_m < 0$, wenn beide Ströme i_1, i_2 GLEICHES Vorzeichen:
  $\Rightarrow$ Spulen ziehen einander an!
- Magnetkraft $F_m > 0$, wenn beide Ströme i_1, i_2 UNGLEICHES Vorzeichen:
  $\Rightarrow$ Spulen stoßen einander ab!

Koaxiale Spulen,
gleicher Wickelsinn







Beispiel 8:
Bewegliche gekoppelte Spulen
Mechanische und magnetische Energie

- Im Beispiel tritt nur „kinetische“ Energie auf (Bewegungsenergie, magn. Energie)
- Es tritt KEINE potentielle Energie auf, weil keine Potential-Speicher (Feder, Kondensator) vorhanden sind
- Die Spulen sind linear (L = konst.), die Mechanik ist nicht-relativistisch:
  Daher liefern „kinetische“ Energie und „kinetische“ Ergänzungsenergie
  IDENTISCHE Werte!
  ABER: Die Formulierung mit i, v ist Ko-Energie, die Formulierung mit ψ, g ist Energie!

$$\boxed{W_k^* = L_1 \cdot \frac{i_1^2}{2} + L_2 \cdot \frac{i_2^2}{2} + L_{12}(x) \cdot i_1 i_2 + m \cdot \frac{v^2}{2} = "W_k"}$$

$$\left.\begin{aligned} \psi_1 &= L_1 i_1 + L_{12} i_2 \\ \psi_2 &= L_2 i_2 + L_{12} i_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} i_1 = \dfrac{1}{\sigma \cdot L_1} \cdot \left(\psi_1 - \dfrac{L_{12}}{L_2} \cdot \psi_2 \right) \\ i_2 = \dfrac{1}{\sigma \cdot L_2} \cdot \left(\psi_2 - \dfrac{L_{12}}{L_1} \cdot \psi_1 \right) \end{cases}$$

***BLONDEL*-Streuziffer:** $\sigma = 1 - \dfrac{L_{12}^2}{L_1 \cdot L_2}$

σ = 1: KEINE Kopplung

σ = 0: VOLLSTÄNDIGE Kopplung

$$\boxed{W_k = \frac{\psi_1^2}{2\sigma \cdot L_1} + \frac{\psi_2^2}{2\sigma \cdot L_2} - \frac{L_{12}}{\sigma \cdot L_1 L_2} \cdot \psi_1 \cdot \psi_2 + \frac{g^2}{2m}}$$

Beispiel 8: Bewegliche gekoppelte Spulen

Magnetische Kopplung

$$W_k^* = L_1 \cdot \frac{i_1^2}{2} + L_2 \cdot \frac{i_2^2}{2} + L_{12}(x) \cdot i_1 i_2 + m \cdot \frac{v^2}{2} \qquad W_k = \overbrace{\frac{\psi_1^2}{2\sigma \cdot L_1} + \frac{\psi_2^2}{2\sigma \cdot L_2} - \frac{L_{12}}{\sigma \cdot L_1 L_2} \cdot \psi_1 \cdot \psi_2}^{>0} + \frac{g^2}{2m}$$

***BLONDEL*-Streuziffer:** $\sigma = 1 - L_{12}^2 / (L_1 \cdot L_2)$ $\boxed{L_1 = L_{1\sigma} + L_{12} \quad L_2 = L_{2\sigma} + L_{12}}$

a) σ = 1: KEINE Kopplung $L_{12} = 0$

Die Selbstinduktivitäten sind „reine" Streuinduktivitäten $\Rightarrow$

Die magnetischen Energien sind je Spule getrennt existent, $F_m = 0$

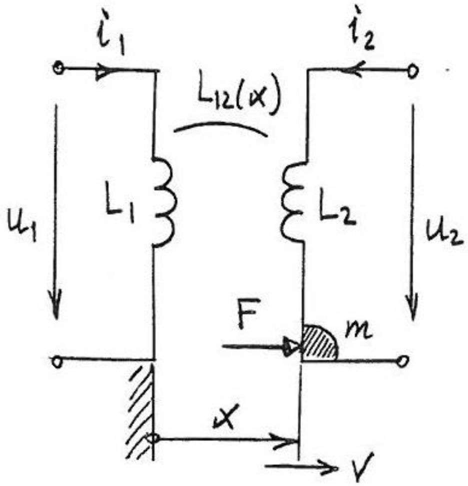
$$W_k^* = L_1 \cdot \frac{i_1^2}{2} + L_2 \cdot \frac{i_2^2}{2} + m \cdot \frac{v^2}{2} \qquad W_k = \frac{\psi_1^2}{2 \cdot L_1} + \frac{\psi_2^2}{2 \cdot L_2} + \frac{g^2}{2m}$$

b) σ = 0: VOLLSTÄNDIGE Kopplung $L_1 = L_{12} = L_2 \quad L_{1\sigma} = 0 \quad L_{2\sigma} = 0$

Es treten KEINE Streuinduktivitäten auf $\psi_1 = L_{12} \cdot (i_1 + i_2) = \psi_2$

$$W_k^* = \frac{L_{12}}{2} \cdot (i_1 + i_2)^2 + m \cdot \frac{v^2}{2} \qquad W_k = \frac{\psi_1^2}{2L_{12}} + \frac{g^2}{2m} = \frac{\psi_2^2}{2L_{12}} + \frac{g^2}{2m}$$

Beispiel 8: Bewegliche gekoppelte Spulen
Kontrolle: Kraftberechung aus virtueller Verschiebung



Unabhängige Variable: i_1, i_2, x

$$\boxed{\psi = \frac{\partial W_m^*(i,x)}{\partial i} \qquad F_m = \frac{\partial W_m^*(i,x)}{\partial x}}$$

$$W_m^* = L_1 \cdot \frac{i_1^2}{2} + L_2 \cdot \frac{i_2^2}{2} + L_{12}(x) \cdot i_1 i_2$$

$$\psi_1 = \frac{\partial W_m^*(i_1,i_2,x)}{\partial i_1} = L_1 \cdot i_1 + L_{12}(x) \cdot i_2 \qquad \psi_2 = \frac{\partial W_m^*(i_1,i_2,x)}{\partial i_2} = L_2 \cdot i_2 + L_{12}(x) \cdot i_1$$

$$F_m = \frac{\partial W_m^*(i_1,i_2,x)}{\partial x} = L'_{12}(x) \cdot i_1 i_2 \qquad L'_{12}(x) < 0$$

- Magnetkraft F_m < 0, wenn beide Ströme i_1, i_2 GLEICHES Vorzeichen:
  $\Rightarrow$ Spulen ziehen einander an!
- Magnetkraft F_m > 0, wenn beide Ströme i_1, i_2 UNGLEICHES Vorzeichen:
  $\Rightarrow$ Spulen stoßen einander ab!

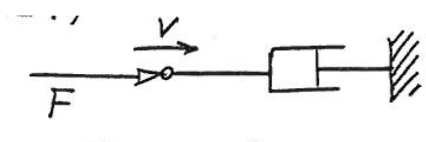
- Bezugspfeile, Leistungsfluss, Energiefluss
- Potentielle Energiespeicher
- Beispiel:
  Beweglicher Plattenkondensator
- Kinetische Energiespeicher
- Beispiel:
  Bewegliche gekoppelte Spulen
- Energiedissipation
- Elektrische Ersatzelemente

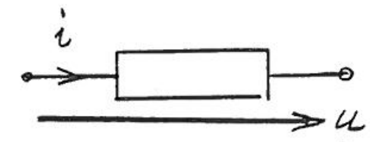
Energiedissipation
Dissipative Elemente

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Mechanische Reibungs- und Dämpfungselemente (Bewegung: $v \Rightarrow$ Gleitreibung oder z. B. bewegter Flügel in Flüssigkeit (hydraulischer Dämpfer) oder plastische Verformung)
- Elektrische Widerstände (Stromfluss i: z. B.: *OHM´* sches Gesetz)
- Verlustmechanismen in Halbleiterbauelemente (Diode, Heißleiter, Kaltleiter, …)

Gegenüberstellung:
(KEINE Analogiebetrachtung)





Beschreibende Gleichung: $F = F(v) \quad v \neq 0$ | $u = u(i) \quad i \neq 0$

z. B. Diodenkennlinie

Aufgenommene Leistung: $p = F(v) \cdot v = F(v) \cdot \dfrac{dx}{dt}$ | $p = u(i) \cdot i = u(i) \cdot \dfrac{dQ}{dt}$

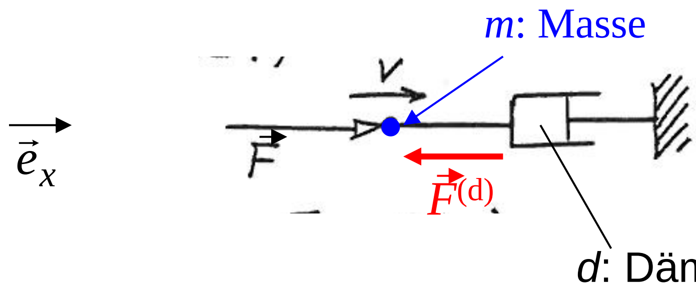
Inkrementelle Energiezufuhr: $dW = p \cdot dt = F(v) \cdot v \cdot dt$ | $p \cdot dt = u(i) \cdot i \cdot dt$

$dW = F(v) \cdot dx$ | $dW = u(i) \cdot dQ$

Arbeit der Reibungskraft | Verlustwärme

Energiedissipation

Beispiel 9: Mechanisches dissipatives Element



$$\vec{F}^{(d)} = d \cdot v \cdot \vec{e}_x$$
$$\vec{F}^{(d)} = F^{(d)} \cdot \vec{e}_x$$
$$F^{(d)} = d \cdot v$$

- Dämpfungskraft $F^{(\mathrm{d})}$ ist eine Reaktionskraft.
- Sie wirkt bremsend = gegen die Bewegungsrichtung v (die positiv in x-Richtung gezählt wird) Daher wird sie in der Bewegungsgleichung als bremsend in Abzug gebracht!

$$m \cdot \ddot{x} \cdot \vec{e}_x = \vec{F} - \vec{F}^{(d)} \Rightarrow m \cdot \ddot{x} = F - F^{(d)} = F - d \cdot v = F - d \cdot \dot{x}$$

- Bei $v = \text{konst.}$: $m \cdot \ddot{x} = m \cdot \dot{v} = 0 = F - F^{(d)} \Rightarrow F = F^{(d)}$
- Die äußere Kraft muss die Dämpfungskraft $F^{(\mathrm{d})}$ überwinden, um die Bewegung v aufrecht zu erhalten!

Energiedissipation
Dissipative Elemente – Allgemeine Form

- Allgemeine dissipative Kräfte F_i (Reibungskräfte, el. Spannungsfälle):
  Hängen von „allgemeinen Geschwindigkeiten“ v_i, fallweise zusätzlich auch vom Ort x_i ab

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{v},\vec{x}) = (F_1,\ldots,F_i,\ldots,F_r) \quad i = 1,\ldots,r \qquad F_i = (v_1,\ldots,v_r,x_1,\ldots,x_r)$$

- Energiezufuhr: $dW = p \cdot dt = \vec{F}(\vec{v},\vec{x}) \cdot d\vec{x} = \sum_{i=1}^{r} F_i(\vec{v},\vec{x}) \cdot dx_i$

Beispiel 10: *OHM´*sches Gesetz: $u(i) = R \cdot i \qquad p = u(i) \cdot i = R \cdot i^2 = u^2 / R$

Beispiel 11: Geschwindigkeitsproportionale Dämpfungskraft (= laminare („zähe“) Strömung)

$F = F(v) = d \cdot v$ Dämpfungsbeiwert: d $\qquad p = F \cdot v = d \cdot v^2$

Beispiel 12: Geschwindigkeitsabhängige Dämpfungskraft
bei turbulenter („verwirbelter“) Strömung

$F = F(v) = d \cdot v^2$ Dämpfungsbeiwert: d $\qquad p = F \cdot v = d \cdot v^3$

- Bezugspfeile, Leistungsfluss, Energiefluss
- Potentielle Energiespeicher
- Beispiel:
  Beweglicher Plattenkondensator
- Kinetische Energiespeicher
- Beispiel:
  Bewegliche gekoppelte Spulen
- Energiedissipation
- Elektrische Ersatzelemente

Elektrische Ersatzelemente
Elektrische Ersatzelemente für das mechanische System

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Vor dem Einsatz leistungsfähiger Digitalrechner wurden in den 1960 … 1980-er Jahren elektronische Analogrechner eingesetzt, um Differentialgleichungen zu integrieren.
- Für mechanische Ausgleichsvorgänge wurden äquivalente elektrische Ersatzsysteme verwendet, die das gleiche dynamische Verhalten haben.
- Daraus abgeleitet haben sich elektrische Ersatzelemente für die Beschreibung mechanischer Systeme fallweise erhalten.
- Bei elektromechanischen Systemen werden so die ohnehin vorhandenen elektrischen Gleichungen (auf Basis der *KIRCHHOFF*-Gesetze) um weitere, mit ihnen gekoppelte elektrische Gleichungen (für das gekoppelte mechanische System) erweitert.
- Die Beschreibung des dynamischen Kleinsignal-Verhaltens des (linearisierten) Wandlers in einem Arbeitspunkt erfolgt dann ausschließlich über die Lösung elektrischer Netzwerke.
- Es gibt zwei elektrische Äquivalenzsysteme zum mechanischen System:
  a) Kraft-Spannungs-System,
  b) Kraft-Strom-System

Elektrische Ersatzelemente
Gegenüberstellung der Ersatzelemente

Leistungsgleichung: $F \cdot v \Leftrightarrow u \cdot i$

a) Kraft-Spannungs-System:

$$F \Leftrightarrow u$$

$$v \Leftrightarrow i$$

$$F/v = d = \boxed{R_{mec} \Leftrightarrow R} = u/i$$

$$F = m \cdot \frac{dv}{dt} : \boxed{m \Leftrightarrow L} : u = L \cdot \frac{di}{dt}$$

$$v = \frac{1}{k} \cdot \frac{dF}{dt} : \boxed{\frac{1}{k} \Leftrightarrow C} : i = C \cdot \frac{du}{dt}$$

$$\underbrace{\text{Kraft bedingt Bewegung} \Leftrightarrow \text{Spannung bedingt Strom}}_{\text{Physikalisch gleichartige Kausalität}}$$

Physikalisch gleichartige Kausalität

b) Kraft-Strom-System:

$$F \Leftrightarrow i$$

$$v \Leftrightarrow u$$

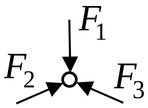
$$F/v = d = \boxed{R_{mec} \Leftrightarrow G} = i/u$$

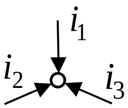
$$F = m \cdot \frac{dv}{dt} : \boxed{m \Leftrightarrow C} : i = C \cdot \frac{du}{dt}$$

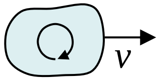
$$v = \frac{1}{k} \cdot \frac{dF}{dt} : \boxed{\frac{1}{k} \Leftrightarrow L} : u = L \cdot \frac{di}{dt}$$

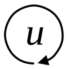
$$\underbrace{\text{Mechanische Struktur} \Leftrightarrow \text{elektrische Struktur}}_{\text{Analogie}}$$

Analogie

Knoten: $\sum_j F_j = 0$ 

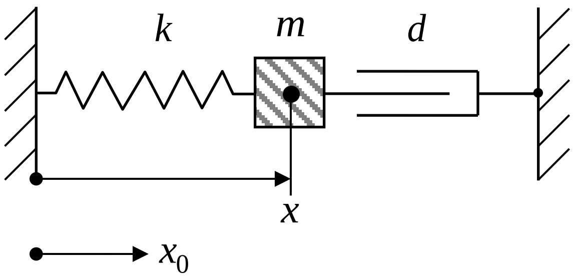
$\sum_j i_j = 0$ 

Masche: $\sum_j v_j = 0$ 

$\sum_j u_j = 0$ 

Elektrische Ersatzelemente

Beispiel 13: Linearer gedämpfter Schwinger (1)



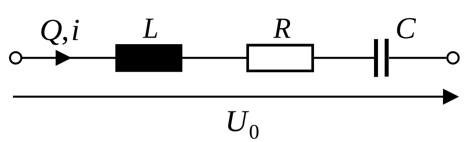
$$m\cdot\ddot{x} = -k(x-x_0) - d\cdot\dot{x}$$

Kraft-Spannungs-System

$$F \Leftrightarrow u,\quad v \Leftrightarrow i$$
$$x \Leftrightarrow Q$$
$$\dot{x} \Leftrightarrow i$$
$$m \Leftrightarrow L$$
$$d \Leftrightarrow R$$
$$k \Leftrightarrow 1/C$$

$$\underbrace{u_L = L\cdot\dot{i},\ u_R = R\cdot i,\ \tilde{u}_C = \frac{Q}{C} - \frac{Q_0}{C} = u_C - U_0}$$

$$u_L + u_R + \tilde{u}_C = 0 \Rightarrow u_L + u_R + u_C = U_0$$

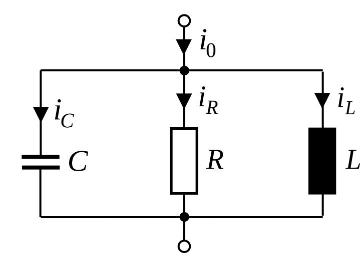


Kraft-Strom-System

$$F \Leftrightarrow i,\quad v \Leftrightarrow u$$
$$\sum_j F_j = 0 \Leftrightarrow \sum_j i_j = 0$$
$$m \Leftrightarrow C$$
$$d \Leftrightarrow 1/R$$
$$k \Leftrightarrow 1/L$$

$$\underbrace{i_C = C\cdot\frac{du}{dt},\quad i_R = u/R,\quad \tilde{i}_L = \overbrace{\frac{1}{L}\cdot\int u\,dt}^{i_L} - i_0}$$

$$i_C + i_R + \tilde{i}_L = 0 \Rightarrow i_C + i_R + i_L = i_0$$



$$m\cdot\ddot{x} + d\cdot\dot{x} + k\cdot x = k\cdot x_0 = F_0$$

$$L\cdot\ddot{Q} + R\cdot\dot{Q} + \frac{1}{C}\cdot Q = U_0 = \frac{Q_0}{C}$$

$$m\cdot\frac{dv}{dt} + d\cdot v + k\cdot\int v\,dt = F_0$$

$$m\cdot\ddot{v} + d\cdot\dot{v} + k\cdot v = 0$$

$$L\cdot\frac{di}{dt} + R\cdot i + \frac{1}{C}\int i\,dt = U_0$$

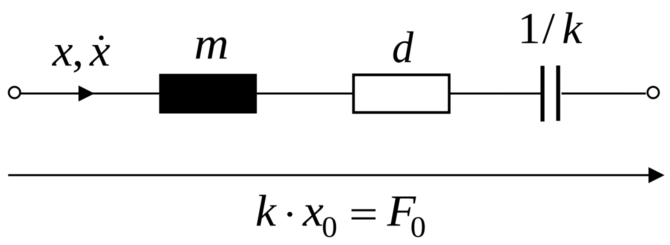
$$L\cdot\ddot{i} + R\cdot\dot{i} + \frac{1}{C}\cdot i = 0$$

$$C\cdot\frac{du}{dt} + \frac{u}{R} + \frac{1}{L}\cdot\int u\,dt = i_0$$

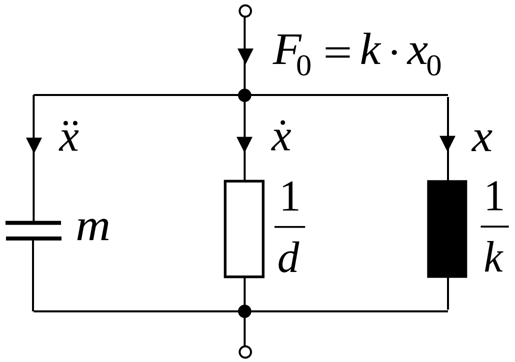
$$C\cdot\ddot{u} + \frac{1}{R}\cdot\dot{u} + \frac{1}{L}\cdot u = 0$$

Elektrische Ersatzelemente
Beispiel 13: Linearer gedämpfter Schwinger (2)

Kraft-Spannungs-System



Kraft-Strom-System



- *Fazit:*
  Es existieren zwei äquivalente elektrische Systeme:
  a) Serien- bzw. b) Parallelschwingkreis
  für das eine mechanische System (den linearen gedämpften Einmassen-Schwinger)
- Das Kraft-Strom-System wurde bevorzugt bei Analogrechnern eingesetzt.
- **ACHTUNG:** Das Kraft-Strom-System ist nicht „impedanztreu“:
  Mechanischen Impedanzen (Widerstände) R_{mec} entsprechen elektrische Leitwerte G!

Elektrische Ersatzelemente
Verwendung der Ersatzsysteme

- Verwendung des Kraft-Strom-Systems für den mechanischen Teil:
  z. B. in den Lehrbüchern von Ballas / Pfeifer / Werthschützky

- In dieser Vorlesung wird das Kraft-Spannungs-System verwendet
  oder
  gar KEIN Ersatzsystem, sondern direkt die physikalisch bedingten mechanischen und elektrischen Gleichungen.
  (wie z. B. in den Lehrbüchern von Woodson / Melcher / Meisel)

Zusammenfassung:

- Allgemeine Koordinaten (Lage, el. Ladungen)
- Allgemeine Geschwindigkeiten (Bewegung, el. Ströme)
- Allgemeine Kräfte (mech. Kräfte, el. Spannungen)
- Allgemeine potentielle Energie (Lageenergie, elektrostat. Energie)
- Allgemeine kinetische Energie (Bewegungsenergie, magnetische Energie)
- Berechnung der Kräfte aus den Ko-Energien
- r-dimensionaler Raum der allgemeinen Koordinaten