# Elektromechanische Systeme

## Teil von Prof. Binder:
## „Mathematische Analyse von Wandlern & Aktoren“

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

1. Einführung
2. Grundlagen
3. Formale Behandlung elektromechanischer diskreter Systeme
4. Methode der *Lagrange*-Gleichungen
5. Elektromechanische Grundsysteme
6. Dynamische Untersuchung des Wandlerverhaltens
7. Analyse ausgewählter elektromechanischer Wandler

# Elektromechanische Systeme

## 2. Grundlagen

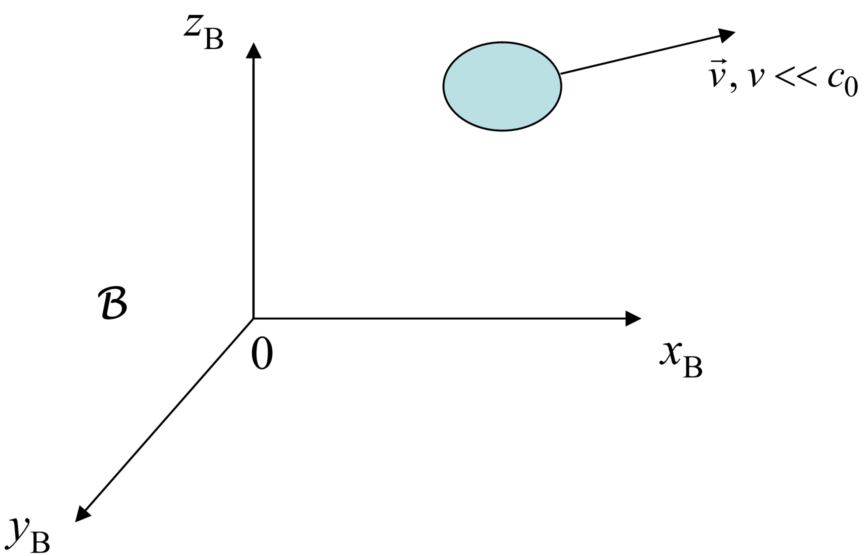
- Dynamische Grundgesetze der Mechanik und Elektromagnetik
- Materialgesetze
- Kraftgesetze
- Energiebegriffe
- Einführendes Beispiel:
  Kopplung eines mechanischen mit einem el.-magn. System

# Elektromechanische Systeme
# 2. Grundlagen

- Dynamische Grundgesetze der Mechanik und Elektromagnetik
- Materialgesetze
- Kraftgesetze
- Energiebegriffe
- Einführendes Beispiel:
  Kopplung eines mechanischen mit einem el.-magn. System

## Dynamische Grundgesetze der Mechanik und Elektromagnetik
## Mechanische Grundgleichungen (1)

- Die mechanischen Grundgleichungen geben Bewegungen von massebehafteten Körpern durch Kräfte und Drehmomente bezüglich eines Beobachters $\mathcal{B}$ (der das Bezugssystem darstellt) wieder
- Wenn die Geschwindigkeit $v$ der Bewegung bezüglich $\mathcal{B}$ KLEIN gegenüber der Vakuumlichtgeschwindigkeit $c_0 \cong 3 \cdot 10^8$ m/s ist, gelten die drei NEWTON´schen Gesetze



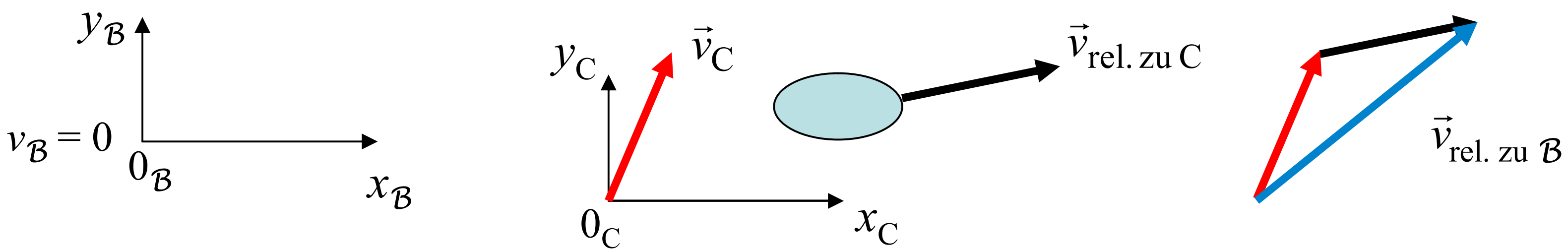
# Dynamische Grundgesetze der Mechanik und Elektromagnetik

## Mechanische Grundgleichungen (2)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Bei hohen Geschwindigkeiten $v$ müssen mit den Gesetzen der speziellen Relativitätstheorie diese NEWTON´schen Gesetze korrigiert werden $\Rightarrow$ Die Umrechnung der NEWTON-Gesetze von bewegtem System zum ruhenden Bezugssystem $\mathcal{B}$ erfolgt mit der LORENTZ-Transformation, wobei sich die „Formeln" ändern
  $\Rightarrow$ Bewegte Körper erscheinen von $\mathcal{B}$ aus in Bewegungsrichtung verkürzt, die Zeit im bewegten System vergeht aus Sicht von $\mathcal{B}$ aus langsamer.
  $\Rightarrow$ Der Formelapparat für das bewegte System ändert sich bezüglich Beobachter $\mathcal{B}$

- **Elektromechanische Wandler:**
  Kleine Geschwindigkeiten $v \Rightarrow$ Statt LORENTZ-Transformation kann näherungsweise GALILEI-Transformation (= Geschwindigkeitsaddition) verwendet werden
  $\Rightarrow$ Abmessungen bewegter Körper bleiben bzgl. $\mathcal{B}$ erhalten,
  $\Rightarrow$ Einheitliche Zeit bzgl. Beobachter $\mathcal{B}$ in allen Systemen
  $\Rightarrow$ Einheitlicher Formelapparat für ruhende und bewegte Systeme



# Dynamische Grundgesetze der Mechanik und Elektromagnetik
## Nichtrelativistische mechanische Grundgleichungen (1)

- Die **mechanischen Grundgleichungen** („Bewegungsgleichungen“) können auf zwei Arten formuliert werden:

- a) Mit Verwendung der **NEWTON´schen Axiome,**
  b) Mit Verwendung des **LAGRANGE-Formalismus**

a) Mit Verwendung der **NEWTON´schen Axiome:**

1. Ein kräftefreier Körper bleibt in Ruhe oder bewegt sich geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit.
2. Kraft ist gleich Masse mal Beschleunigung.
3. Eine Kraft von Körper **A** auf Körper **B** verursacht immer eine gleich große, aber entgegen gerichtete Kraft von Körper **B** auf Körper **A**

# Dynamische Grundgesetze der Mechanik und Elektromagnetik
## Nichtrelativistische mechanische Grundgleichungen (2)

- b) Mit Verwendung des **LAGRANGE-Formalismus**:
  1. Die Dynamik eines Systems wird durch eine einzige skalare (LAGRANGE)-Funktion beschrieben.
  2. Aus der LAGRANGE-Funktion werden die Bewegungsgleichungen mit den EULER-LAGRANGE-Gleichungen der Variationsrechnung aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung bestimmt.

- **Vorteil von b) gegenüber a):**

  Bei Systemen mit vielen unterschiedlich bewegten Körpern (Mehrkörpersystemen) können die Bewegungsgleichungen leichter angegeben werden

  $\Rightarrow$ das Freischneiden der einzelnen Körper mit dem Aufstellen des Kräftegleichgewichts je Körper (mit Einführung von Zwangskräften zwischen den Körpern) entfällt.

## Dynamische Grundgesetze der Mechanik und Elektromagnetik

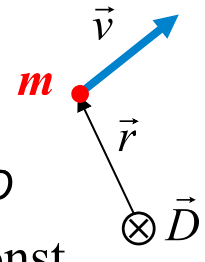
**Wiederholung**

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

## 2. NEWTON-Gesetz für Linear- und Drehbewegung

### Mechanik: Impulserhaltungssatz:

Der Gesamtimpuls in einem abgeschlossenen System ist konstant:




Konstanz des Impulses *g*

$$\vec{g} = m \cdot \vec{v} = \text{konst.}$$

Konstanz des Drehimpulses *D*

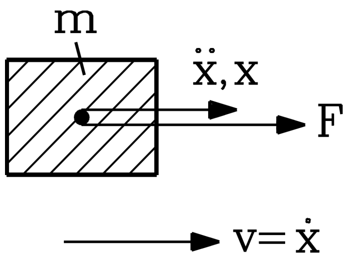
$$\vec{D} = \vec{r} \times \vec{g} = m \cdot (\vec{r} \times \vec{v}) = \text{konst.}$$

Trägheits-Kraft = Impulsänderung

$$\vec{F} = d\vec{g} / dt$$

Trägheits-Drehmoment = Drehimpulsänderung

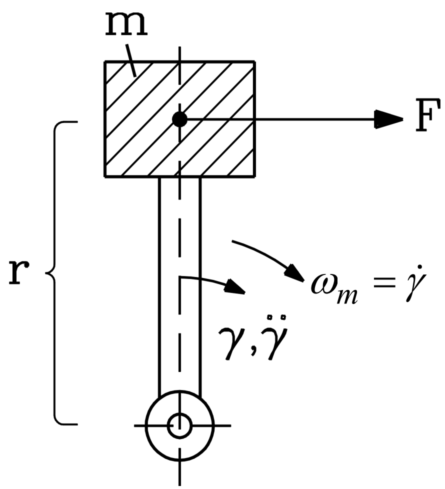
$$\vec{M} = d\vec{D} / dt$$




$$m = \text{konst}:$$

$$\vec{F} = m \cdot d\vec{v} / dt$$

$$\boxed{F = m \cdot \ddot{x}}$$




***Beispiel:*** **Drehbewegung:** *r* = konst.

Drehwinkel $\gamma$, Winkelgeschwindigkeit $\omega_m = \dot{\gamma}$

Drehzahl $n = \omega_m/(2\pi)$

$$x = r \cdot \gamma : \quad \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \Rightarrow M = r \cdot F$$

$$M = r \cdot m \cdot \ddot{x} = r \cdot m \cdot r \cdot \ddot{\gamma} = \underbrace{m \cdot r^2}_{J} \cdot \dot{\omega}_m$$

$$\boxed{M = J \cdot \dot{\omega}_m}$$

Polares Trägheitsmoment $J = m \cdot r^2$

# Dynamische Grundgesetze der Mechanik und Elektromagnetik
## Elektromagnetische Grundgleichungen (1)

- Die elektromagnetischen Grundgleichungen geben die gekoppelt
  - elektrischen und
  - magnetischen Vorgänge

  im Vakuum,
  in elektrisch geladenen,
  in stromdurchflossenen,
  in polarisierbaren bzw. magnetisierbaren Körpern
  bezüglich eines Beobachters $\mathcal{B}$ (der das Bezugssystem darstellt) wieder
- Unabhängig, ob die Geschwindigkeit $v$ der Bewegung bezüglich Beobachter $\mathcal{B}$ KLEIN gegenüber der Vakuumlichtgeschwindigkeit $c_0 \cong 3 \cdot 10^8$ m/s ist oder nicht, gelten die vier MAXWELL´schen Gesetze.
- Die MAXWELL-Gesetze sind LORENTZ-invariant!:
  Bei der Umrechnung der MAXWELL-Gesetze vom bewegtem System zum ruhenden Bezugssystem $\mathcal{B}$ mit der LORENTZ-Transformation ändern sich die Gesetze nicht!

# Dynamische Grundgesetze der Mechanik und Elektromagnetik

## Elektromagnetische Grundgleichungen (2)

- Bei der Umrechnung der MAXWELL-Gesetze vom bewegtem System zum ruhenden Bezugssystem $\mathcal{B}$ mit der LORENTZ-Transformation ändern sich nicht die MAXWELL-Gesetze, ABER die elektromagnetischen Größen $D$, $E$, $B$, $H$ !

- z. B.:

a) Ein bewegtes magnetisches System ($B$, $H$) hat aus der Sicht vom ruhenden Beobachter $\mathcal{B}$ nun geänderte Werte $B´$, $H´$ und zusätzliche elektrische Größen $D´$, $E´$ („Bewegungsinduktion!“: Ist ein <u>großer</u> Effekt!)

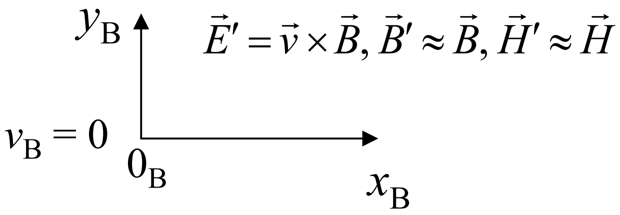
b) Ein bewegtes elektrisches System ($D$, $E$) hat aus der Sicht vom ruhenden Beobachter $\mathcal{B}$ nun geänderte Werte $D´$, $E´$ und zusätzliche magnetische Größen $B´$, $H´$ (RÖNTGEN-Effekt und ROWLAND-Effekt ! Dies sind aber <u>kleine</u> Effekte!)

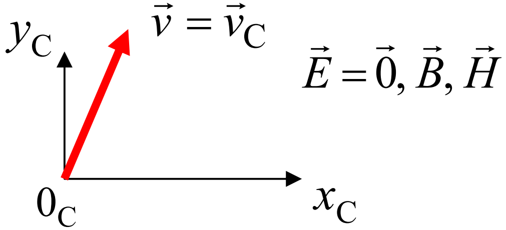
## Dynamische Grundgesetze der Mechanik und Elektromagnetik
## Bewegungsinduktion

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Elektromechanische Wandler: Kleine Geschwindigkeiten $v \Rightarrow$
  Zwar ändern sich die elektromagnetischen Größen $D, E, B, H$ in $D', E', B', H'$, aber
  1. Die auftretenden magnetischen Größenänderungen sind vernachlässigbar klein: $B \approx B', H \approx H'$,
  2. JEDOCH die zusätzliche Größe $E' - E$ muss berücksichtigt werden („Bewegungsinduktion").

Für $v << c_0$ gilt: $\vec{E}' \cong \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \Rightarrow \vec{E}_b = \vec{v} \times \vec{B}$



**Wiederholung**

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

## Elektromagnetische Grundgesetze (ohne Relativbewegung *v*)

- **Elektromagnetische Grundgesetze (*MAXWELL*-Gleichungen in integraler Form):**

$$\oint_{C=\partial A} \vec{H}\cdot d\vec{s} = \Theta + \frac{\partial \Phi_e}{\partial t}$$

*Ampere-Maxwell*-Gesetz

$$\oint_{C=\partial A} \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

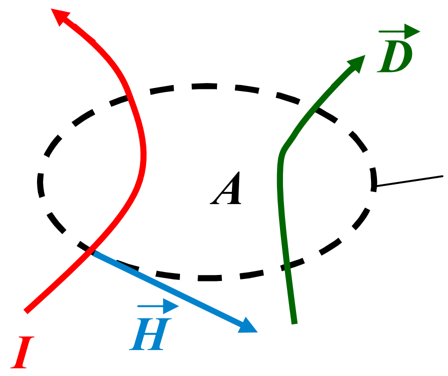
*Faraday*-Gesetz

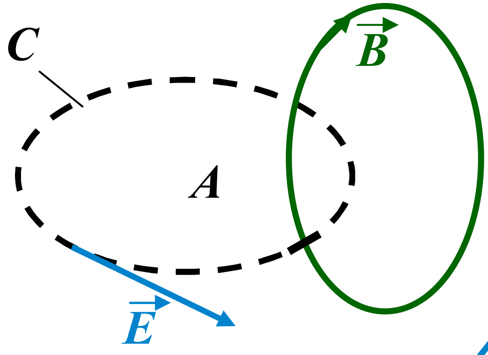
$$\Phi = \oint_{A,\,\partial A=0} \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0$$

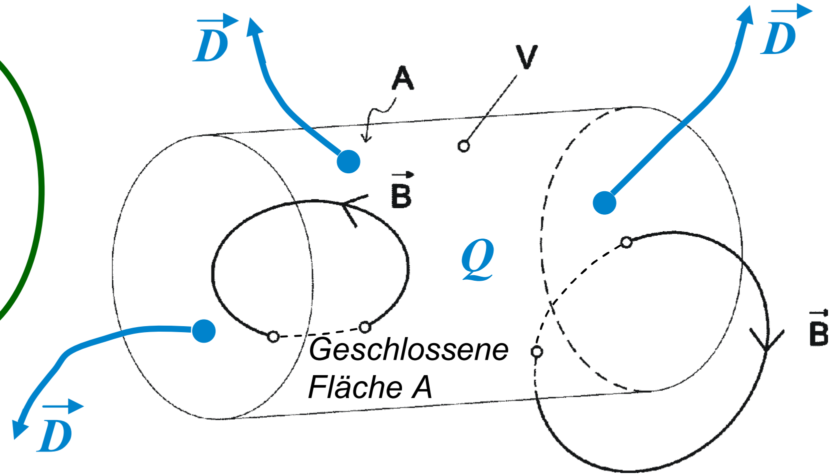
Magn. Hüllenfluss

$$\Phi_e = \oint_{A,\,\partial A=0} \vec{D}\cdot d\vec{A} = Q$$

El. Hüllenfluss




$$\Theta = \sum_k N_k I_k$$

El. Durchflutung

$$\int_A \vec{B}\cdot d\vec{A} = \Phi$$

Magnetischer Fluss

$$\int_A \vec{D}\cdot d\vec{A} = \Phi_e$$

Elektrischer Fluss

$C = \partial A$: (geschlossene) Randkurve der Fläche $A$

Wiederholung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

# El.-magn. Grundgesetze für kleine Frequenzen

- **Elektromagnetische Grundgesetze in integraler Form: (ohne Relativbewegung *v*)**

*Ampere-Maxwell*-Gesetz → *Ampere*-Gesetz

$$\oint\limits_{C=\partial A} \vec{H}\cdot d\vec{s} = \Theta + \frac{\partial \Phi_e}{\partial t} \qquad \Theta >> \frac{\partial \Phi_e}{\partial t} \qquad \oint\limits_{C=\partial A} \vec{H}\cdot d\vec{s} \approx \Theta$$

**Gilt streng nur bei statischen Feldern**

$$\oint\limits_{C=\partial A} \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}$$ *Faraday*-Gesetz

$$\Phi = \oint\limits_{A,\,\partial A=0} \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0$$ Magn. Hüllenfluss

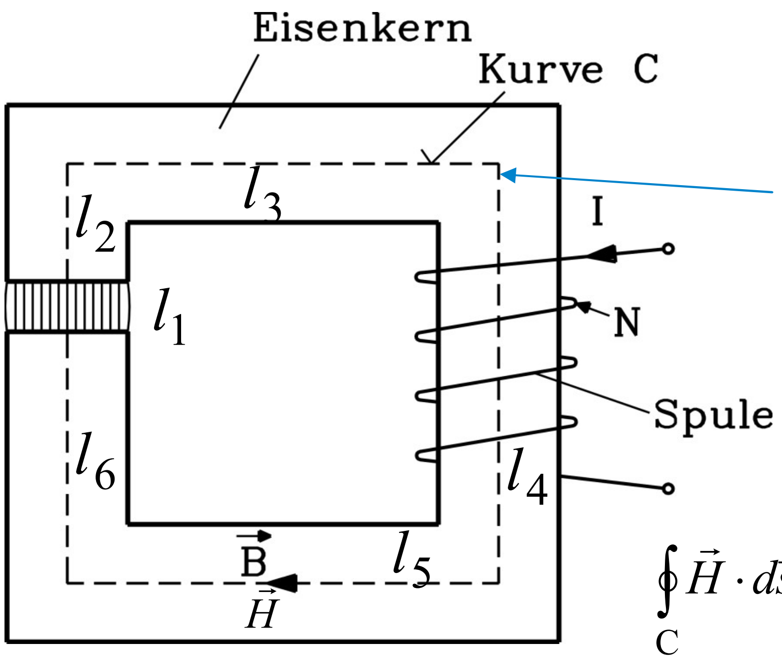
$$\Phi_e = \oint\limits_{A,\,\partial A=0} \vec{D}\cdot d\vec{A} = Q$$ El. Hüllenfluss

**Gelten weiterhin allgemein**

# Dynamische Grundgesetze der Mechanik und Elektromagnetik
## AMPERE'scher Durchflutungssatz

**Wiederholung**

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT




Im Bild: $n = 6$ Abschnitte

**Gültig für <u>kleine</u> Frequenzen:**

Geschlossene Kurve $C$ = z. B. Feldlinie von $H$,
Strom $I$, Spulenwindungszahl $N$ (= 4 im Bild)

| | |
|---|---|
| Magnetische Flussdichte $B$ | (Tesla, T) |
| Magnetische Feldstärke $H$ | (A/m) |
| Magnetische Spannung $V$ | (A) |

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = \Theta = N \cdot I \cong H_1 \cdot l_1 + H_2 \cdot l_2 + \ldots. + \underbrace{H_n \cdot l_n}_{V_n}$$

$$\Theta \cong V_1 + V_2 + \ldots. + V_n$$

**Durchflutungssatz:**

In einem magnetischen Feld ist das Linienintegral über die magnetische Feldstärke $H$ entlang einer in sich geschlossenen Linie $C$ stets gleich dem gesamten elektrischen Strom $N \cdot I$ (als Durchflutung $\Theta$), der durch die von dieser Linie gebildeten Fläche hindurch tritt.

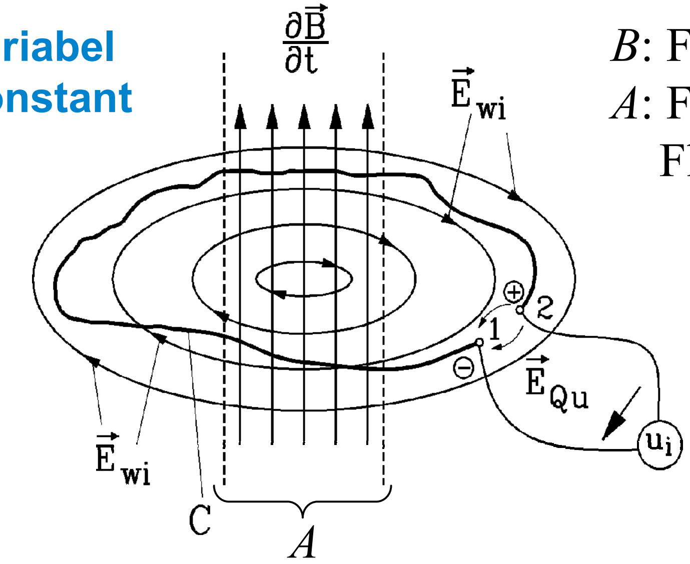
## FARADAY´sches Induktionsgesetz

**Wiederholung**

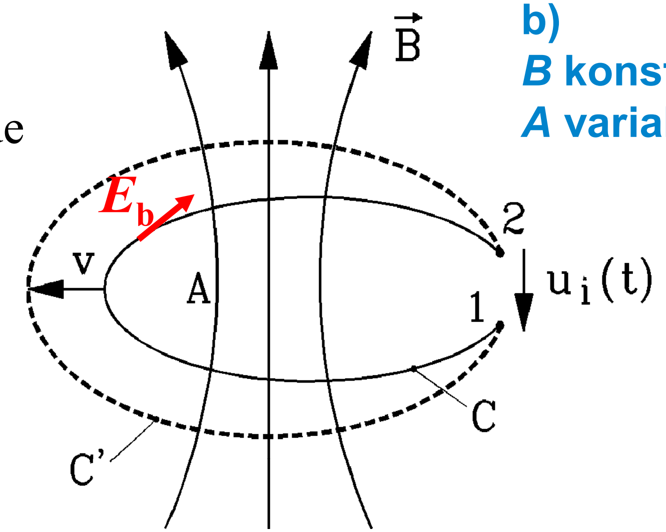
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- **Änderung von $\Phi$ :** a) $B$ ändert sich, b) Fläche $A$ ändert sich mit Geschwindigkeit $v$

**a)**
***B* variabel**
***A* konstant**




$B$: Flussdichte
$A$: Flussführende Fläche




**b)**
***B* konstant**
***A* variabel**

- Jede Änderung des mit der Leiterschleife *C* verketteten Flusses $\Phi$ ruft eine induzierte Spannung $u_i$ hervor
- Die induzierte Spannung ist die negative Änderung des Flusses.

$$\boxed{u_i = -d\Phi / dt} \qquad \text{Fluss:} \quad \Phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} \qquad [\Phi] = \mathrm{V} \cdot \mathrm{s} = \mathrm{Weber}$$

# Dynamische Grundgesetze der Mechanik und Elektromagnetik
## Flussverkettung $\psi$

**Wiederholung**

Fluss: $\Phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$ $\quad [\Phi] = \mathrm{V} \cdot \mathrm{s} = \mathrm{Weber}$ $\quad u_i = -d\Phi / dt$

- Hat die Schleife *N* Windungen in Serie, so ist $u_i$ *N*-mal so groß: $u_i = -N \cdot d\Phi / dt$

- **Flussverkettung** $\Psi = N \cdot \Phi \quad \Rightarrow \quad \boxed{u_i = -d\Psi / dt} \quad [\Psi] = \mathrm{V} \cdot \mathrm{s}$

- **Änderung von $\Psi$:**
  a) *B* ändert sich (KEINE Relativbewegung *v*),
  b) Fläche *A* ändert sich mit (Relativ-)Geschwindigkeit $v << c_0$

- Produktregel beim Differenzieren: $\dfrac{d\Phi}{dt} = \dfrac{d}{dt} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_{A=konst.} \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A} - \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s}$

$$\boxed{u_i = \oint_{N \cdot C} \left(\vec{E}_{wi} + \vec{E}_b\right) \cdot d\vec{s} = N \cdot \int_A -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A} + N \cdot \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Psi}{dt}}$$

## Dynamische Grundgesetze der Mechanik und Elektromagnetik

## Ruh- und Bewegungsinduktion ($v << c_0$) **Wiederholung**

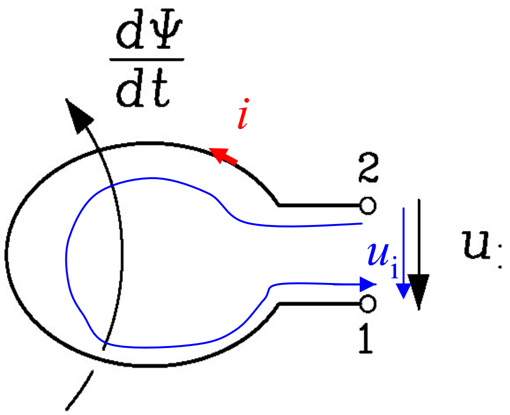
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

| *Ruhinduktion* | *Bewegungsinduktion* |
|---|---|
| Flussdichte *B* zeitlich veränderlich | Flussdichte *B* zeitlich konstant |
| Spule ruht | Spule bewegt sich mit Geschwindigkeit *v* |
| $u_i = -d\Psi / dt = -N \cdot d\Phi / dt$ | |
| $u_i = -\partial\Psi / \partial t = \oint \vec{E}_{wi} \cdot d\vec{s}$ | $u_i = \oint (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s} = \oint \vec{E}_b \cdot d\vec{s}$ |
| Wirbelfeldstärke $\vec{E}_{wi}$ $\quad \mathrm{rot}\vec{E}_{wi} = -\partial\vec{B}/\partial t$ | Bewegungsfeldstärke $\vec{E}_b = \vec{v} \times \vec{B}$ |
| **Anwendung des Induktionsgesetzes:** z. B.: | |
| • Transformatorspulen<br>• Ständerspulen in Drehfeldmaschinen | • Rotierende Ankerwicklung in Gleichstrommaschinen |
| ***Transformatorische Induktion*** | ***Rotatorische Induktion*** |

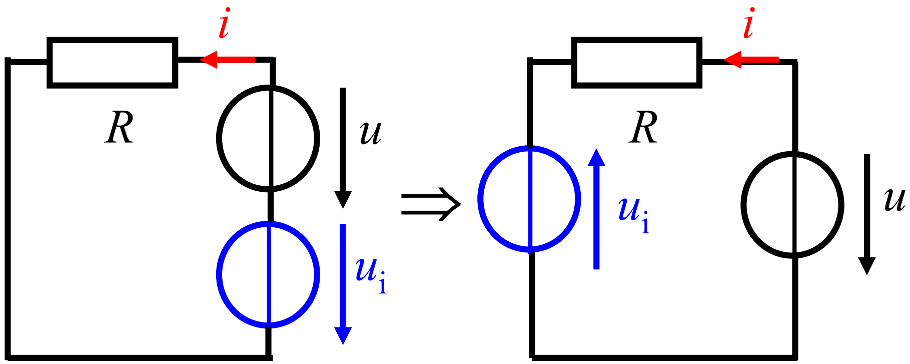
**Wiederholung**

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

## *Beispiel:* Induktion in eine Leiterschleife - Ersatzschaltbild




Ersatzschaltbild:




$$u_i = -d\Psi/dt$$

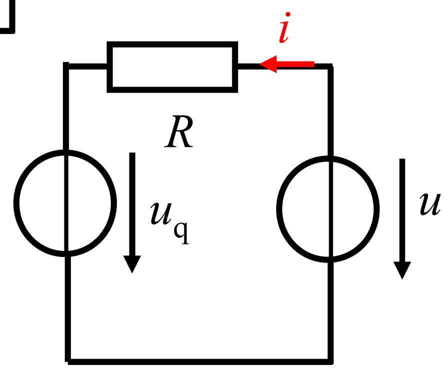
$$u + u_i = R \cdot i$$

$$u = R \cdot i + d\Psi/dt$$

$$u = R \cdot i + u_q$$

*R*: Schleifen-Widerstand
*u*: Klemmenspannung
$u_i$: induzierte Spannung
$u_q = -u_i$: Quellen-Spannung

$$\boxed{u_q = -u_i = d\Psi/dt}$$




Verbraucher-Zählpfeilsystem
für $u, i$

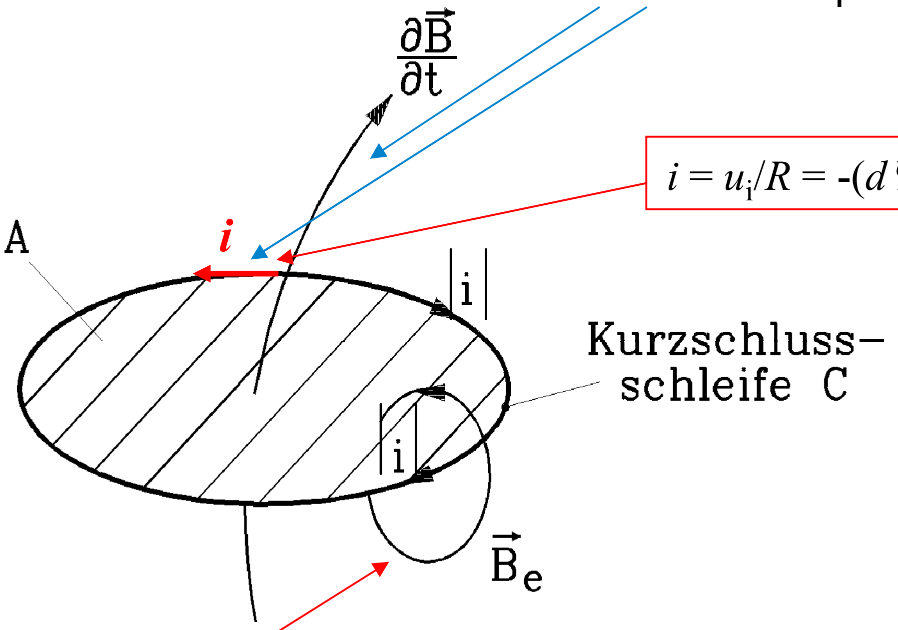
*Beispiel:*
a) Leerlaufende Schleife: $i = 0 \Rightarrow u = -u_i = u_q = d\Psi/dt$
b) Kurzgeschlossene Schleife:
$u = 0 \Rightarrow i = u_i/R = -u_q/R = -(d\Psi/dt)/R$ NEGATIVER Strom!

# Dynamische Grundgesetze der Mechanik und Elektromagnetik

## *Beispiel:* Induzierung einer Kurzschluss-Schleife

Positive Zählpfeilrichtung, damit gilt: $\boxed{u_i = -d\Psi / dt}$

$i = u_i/R = -(d\Psi/dt)/R$ NEGATIVER Strom!




Das Feld $B_e(i)$ bremst die resultierende Feldänderung = „Magnetische Trägheit“!

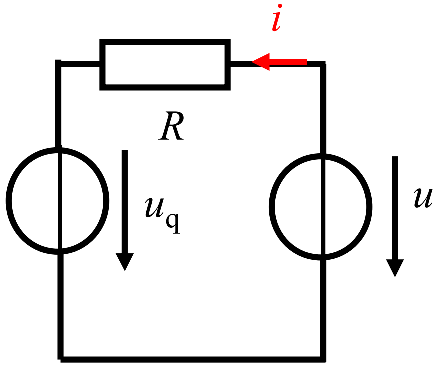
# Dynamische Grundgesetze der Mechanik und Elektromagnetik

## Induzierte Spannung – Selbst- und Gegeninduktion

**Wiederholung**

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Ersatzschaltbild: Verbraucher-Zählpfeilsystem für $u$, $i = i_1$




$L$: Selbstinduktivität von $i_1$

$M$: Gegeninduktivität eines Fremdstromsystems $i_2$

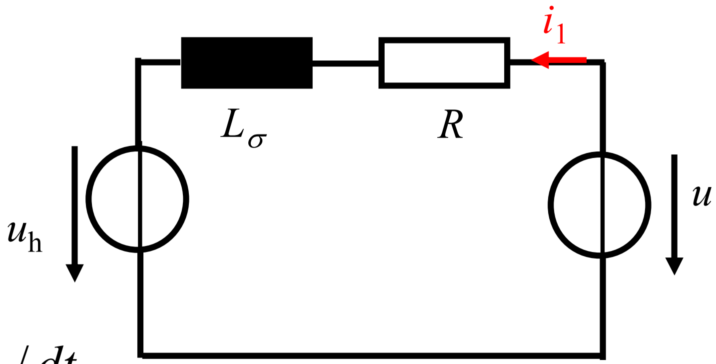
Gesamtflussverkettung der Schleife: $\Psi = L \cdot i_1 + M \cdot i_2$

Streuinduktivität: $L_\sigma = L - M$

Hauptfeldspannung: $u_h = M \cdot d(i_1 + i_2)/dt$

$$u = R \cdot i + d\Psi/dt$$

$$u_q = -u_i = d\Psi/dt$$




Hauptflussverkettung:

$$\Psi_h = M \cdot (i_1 + i_2)$$

Streuflussverkettung:

$$\Psi_\sigma = L_\sigma \cdot i_1$$

$$u_q = d\Psi/dt = L \cdot di_1/dt + M \cdot di_2/dt$$

$$u_q = (L - M) \cdot di_1/dt + M \cdot d(i_1 + i_2)/dt$$

$$u_q = d\Psi_\sigma/dt + d\Psi_h/dt$$

$$\boxed{u = R \cdot i_1 + L_\sigma \cdot di_1/dt + u_h}$$

# Dynamische Grundgesetze der Mechanik und Elektromagnetik
## Elektromagnetische Grundgleichungen (1)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Die **elektromagnetischen Grundgleichungen** können auf zwei Arten formuliert werden:

a) Mit Verwendung der vier **MAXWELL´schen Gleichungen,**
b) Mit Verwendung des **LAGRANGE-Formalismus**

- Mit Verwendung der vier **MAXWELL´schen Gleichungen** mit dem vereinfachten AMPERE-MAXWELL-Satz für kleine zeitliche Änderungen

1. in lokaler (= differentieller) Form mit den lokalen Feldgrößen $D$, $E$, $B$, $H$
   oder
2. in globaler (= integraler) Form mit $\Psi$ (bzw. $\Phi$), $\Phi_e$, $Q$, $i$, $\varphi$, $u$, $V$ (magnetische Spannung),
   oder
3. mit den konzentrierten Größen
   als Netzwerke mit magnetischen und elektrischen Widerständen („Reluktanzen")
   und
   elektrischen Netzwerken mit den Parametern $L$, $C$
   und
   Anwendung der beiden KIRCHHOFF´schen Gesetze.

# Elektromagnetische Grundgleichungen (2)



- Mit Verwendung des **LAGRANGE-Formalismus**:
  1. Für lokale Feldgrößen fußt die skalare (LAGRANGE)-Funktion auf dem Vektorpotential $A$

$$\vec{B} = \mathrm{rot}\vec{A}, \quad \mathrm{div}\vec{A} = -\frac{1}{c_0^2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (\vec{E} = -\mathrm{grad}\varphi)$$

$\varphi$: elektrisches Potential

Für numerische Feldberechnungen wird bei der Methode der Finiten Elemente für endlich große („finite") Geometrieelemente durch Variationsrechnung aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung das elektromagnetische Feld bestimmt.
Dabei wird $A$ über jedem finiten Element als
linear oder quadratisch von $(x, y, z)$ abhängige Größe angenähert.

2. Für globale Größen $u$, $i$ wird die LAGRANGE-Funktion wie in der Mechanik über den Energiebegriff gebildet.
Mit der Variationsrechnung werden (anstelle mit den KIRCHHOFF´schen Gesetzen) die Strom- und Spannungsgleichungen aufgestellt.

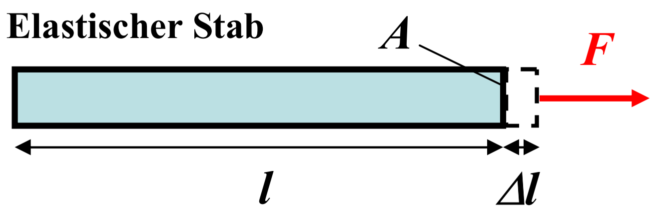
- Dynamische Grundgesetze der Mechanik und Elektromagnetik
- Materialgesetze
- Kraftgesetze
- Energiebegriffe
- Einführendes Beispiel:
  Kopplung eines mechanischen mit einem el.-magn. System

# Materialgesetze
## Elastisch verformbare Materie

**Wiederholung**

- **Elastizität:** Körpereigenschaft, unter Krafteinwirkung die Körperform zu verändern und bei Wegfall der einwirkenden Kraft in die Ursprungsform zurückzufedern
- **Sonderfall**: Linear-elastischer Körper im einachsigen Spannungszustand (= eindimensionales HOOKE´sches Gesetz):

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$




Elastischer Stab (Länge $l$, unverformter Querschnitt $A$): $\Rightarrow$ Angriff einer äußeren Kraft $F$:

Mechanische Spannung: $\sigma = F / A$
Elastische Verlängerung des Stabs: $\Delta l \Rightarrow$ „Dehnung": $\varepsilon = \Delta l / l$

**Elastizitätsmodul *E*** ist Werkstoff-Eigenschaft

- **Thermoelastizität:** Elastische Körperverformung bei Wärmezufuhr (z. B: Wärmedehnung). Aber auch Änderung der mechanischen Spannungen, wenn Verformung nicht möglich ist.

# Materialgesetze
# Elektrisch polarisierbare Materie

- **Dielektrika:** i. A. elektrisch nicht oder schwach leitfähige Stoffe, deren Moleküle versuchen, sich im äußeren elektrischen Feld $E$ in oder gegen die Feldrichtung $E$ auszurichten („polarisieren“). Dadurch erregen sie ein zusätzliches elektrisch wirksames Feld, die **elektrische Polarisation *P*.**
- Das resultierend wirksame elektrische Feld ist die **dielektrische Verschiebung (el. Flussdichte) *D***: $\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P}$
- **Isotrope Dielektria:** Die Wirkung der Polarisierung ist unabhängig von der Raumrichtung.
- Lineare Polarisierbarkeit: $\vec{P} \sim \vec{E} \Rightarrow \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon \cdot \vec{E} = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \vec{E}$

  $\varepsilon_r$ = konstant  $\varepsilon_r \geq 1$: relative Permittivität
- Nichtlineare Polarisierbarkeit: $\varepsilon_r(E)$, $E = \left|\vec{E}\right|$
- **Sonderfall:** „Ideal“ polarisierbar: $\varepsilon_r \to \infty$

# Materialgesetze
# Magnetisierbare Materie

- **Magnetisierbare Werkstoffe:**

  **Ferromagnetika, Anti-Ferromagnetika, Ferri-Magnetika, Diamagnetika, Paramagnetika**

  i. A. elektrisch leitfähige Stoffe, deren Moleküle versuchen, sich im äußeren magnetischen Feld $H$ in oder gegen die Feldrichtung $H$ auszurichten. Dadurch erregen sie ein zusätzliches magnetisch wirksames Feld (= **magnet. Polarisation $J_M$** bzw. Magnetisierung $M = J_M/\mu_0$).

- Oberhalb der ***CURIE*-Temperatur $T_c$** verschwindet der Ferro-/Anti-Ferromagnetismus!

  Fe: 768°C, Ni: 350°C, Co: 1150°C, Ba- u. Sr-Ferrite: 100 … 460°C je nach Typ

- Das resultierend wirksame magnetische Feld ist die **magnetische Induktion**

  **(mag. Flussdichte)** $B$: $\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H} + \vec{J}_M = \mu_0 \cdot \vec{H} + \mu_0 \cdot \vec{M}$

- **Isotrope Magnetika:** Die Magnetisierungswirkung ist unabhängig von der Raumrichtung:

  a) Linear: $\mu_r$ = konstant: $\vec{J}_M \sim \vec{H} \Rightarrow \vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{J}_M = \mu \cdot \vec{H} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \vec{H}$

  b) Nichtlinear: $\mu_r(H)$, $H = \left|\vec{H}\right|$ $\mu_r \geq 1$: relative Permeabilität

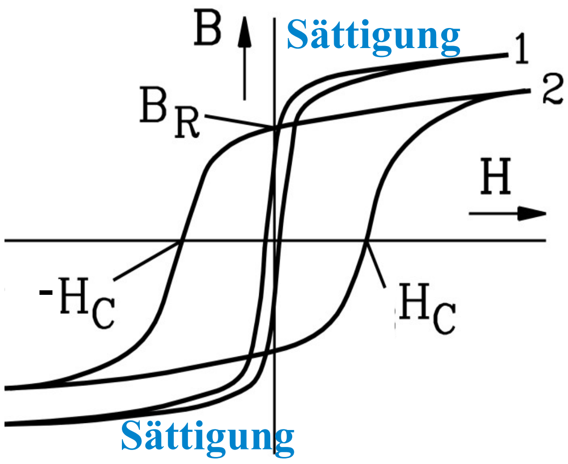
  **c) Sonderfall**: „Ideal“ magnetisierbar: $\mu_r \to \infty$

# Materialgesetze

## Ferromagnetische Werkstoffe (hier: isotrop)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- $B(H)$-Kurve hängt nichtlinear von *H* ab: $\vec{B}(H) = \mu_0 \vec{H} + \vec{J}_M(H) = \mu_0 \cdot \mu_r(H) \cdot \vec{H}$ $\quad H = \left|\vec{H}\right|$
- $\mu_r(H)$: **Relative Permeabilität**: z. B. spezielles Eisenblech: $\mu_{r;max}$ = ca. 5000 … 7000
- Tatsächlich haben $B(H)$-Kurven eine **„Hysterese"** = Schleifenform der *B*(*H*)-Kennlinie: Es treten Remanenzflussdichte $B_R$ und Koerzitivfeldstärke $H_C$ auf.




*Quelle: Fischer, R., Ele. Maschinen, Hanser-Verlag*

1: „Weichmagnetisches" Material: $H_C$ klein
(z. B. Eisen, Nickel, Kobalt, …)

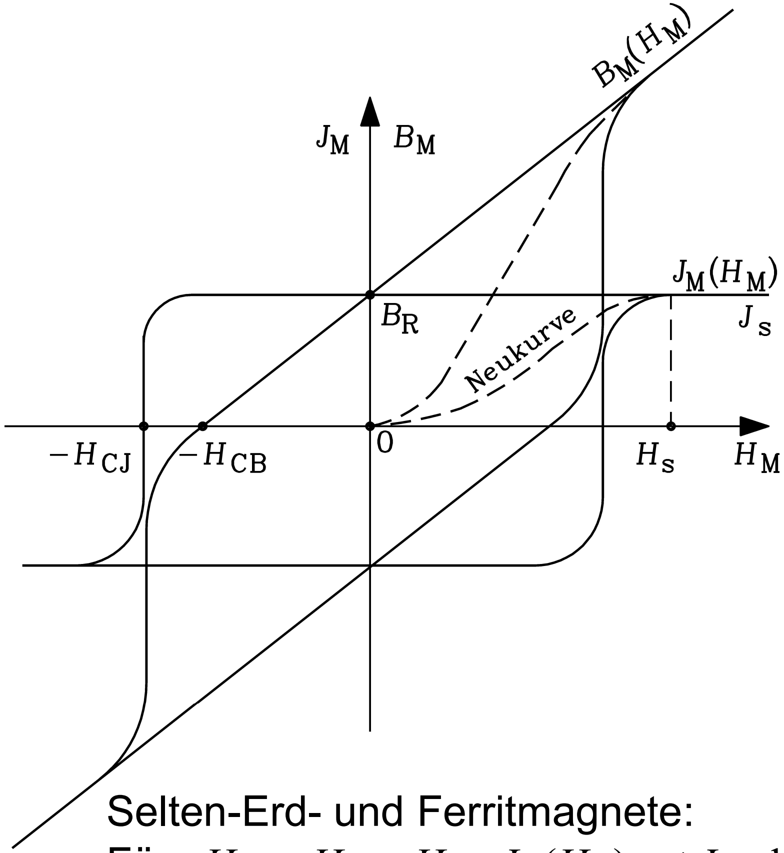
2: „Hartmagnetisches" Material: $H_C$ groß:
Permanentmagnete
(z. B. Ferrite, Al-Ni-Co-Magnete, Selten-Erd-Hochenergiemagnete wie NdFeB, $SmCo_5$, $Sm_2Co_{17}$ …)

**„Sättigung" des Werkstoffs**:
*B* lässt sich trotz *H*-Vergrößerung kaum mehr erhöhen, da alle „Elementarmagnete" im Werkstoff parallel zu *H* ausgerichtet sind $\Rightarrow$ *B* wächst nur noch $\vec{B}(H) = \mu_0 \vec{H}$

- Sättigung setzt bei Eisen ab etwa 1.7 T ein!

- **Ferroelektrika (Elektrete):** Hystereseschleife *D*(*E*)

# Materialgesetze
## Selten-Erd- und Ferrit-Dauermagnete




Permanentmagnete (Dauermagnete):
- AlNiCo,
- Ba-Ferrite und Sr-Ferrite,
- Selten-Erd-Magnete z.B. $Sm_2Co_{17}$, NdFeB

Magnetische Flussdichte im Permanentmagnet:

$$B_M = \mu_0 H_M + J_M$$

$J_M$: Magnetische Polarisation

Gesättigte Werte: Index *s*

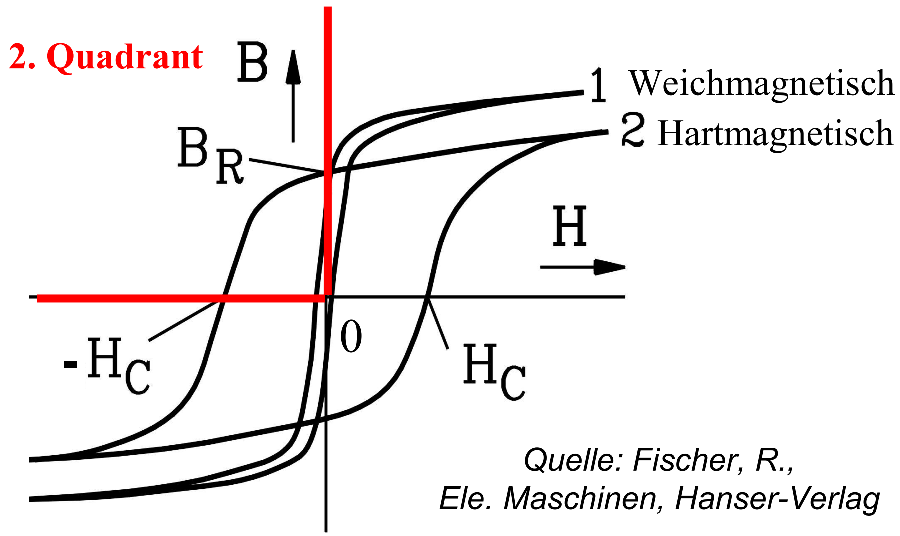
Remanenzflussdichte: $B_R = J_R$
Koerzitivfeldstärke: $H_{CJ}$ und $H_{CB}$

Selten-Erd- und Ferritmagnete:
Für $-H_{CJ} < H_M < H_{CJ}$: $J_M(H_M) \approx \pm J_s = \text{konst.}$: $B_M \approx \mu_0 H_M \pm J_s$

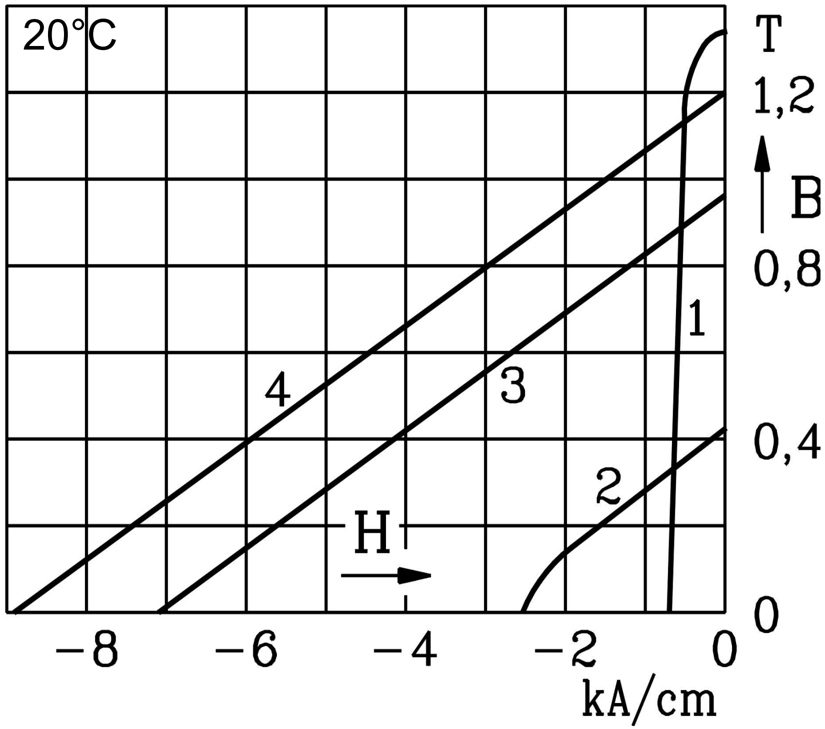
$$B_M \approx \mu_M H_M \pm B_R \approx \mu_M H_M \pm J_s$$

$$\boxed{\mu_M \approx \mu_0 \text{ typisch: } \mu_M \approx 1.05 \cdot \mu_0}$$

# Materialgesetze
## Magnetkennlinien im 2. Quadranten




Quelle: Fischer, R., Ele. Maschinen, Hanser-Verlag




*B*(*H*)-Hystereseschleife: i. A. sinken $B_R$, $H_C$ mit steigender Temperatur bis $T_c$
1: Al-Ni-Co: Hohes $B_R$, aber kleines $H_C$
2: Ba-Ferrite, Sr-Ferrite: $H_C$ steigt mit steigender Temperatur in gewissem Temperaturbereich.
3: $Sm_2Co_{17}$ ($\vartheta_{max}$ = 350°C): Für hohe Dauertemperaturen wegen Co geeignet
4: NdFeB ($\vartheta_{max}$ = 180°C): i. A. kostengünstiger als SmCo!

# Materialgesetze
# Elektrische vs. magnetische Größen

**Wiederholung**

| | Elektrostatik | Magnetostatik |
|---|---|---|
| Flussdichte | $D$ (A·s/m²) | $B$ (V·s/m²) |
| Feldstärke | $E$ (V/m) | $H$ (A/m) |
| Polarisation | $P$ (A·s/m²) | $J_\mathrm{M}$ (V·s/m²) |
| rel. Werkstoffparameter | $\varepsilon_\mathrm{r}$ (-) | $\mu_\mathrm{r}$ (-) |
| Feldkonstante | $\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}$ A·s/(V·m) | $\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$ V·s/(A·m) |
| "Geometriefaktor“ | $C$ (A·s/V) $C = Q / U$ | $L$ (V·s/A) $L = \Psi / I$ |
| Energiedichte (lineares Material) | $\vec{D} \cdot \vec{E} / 2$ | $\vec{B} \cdot \vec{H} / 2$ |
| Energie (lineares Material) | $C \cdot U^2/2 = Q \cdot U / 2$ | $L \cdot I^2/2 = \Psi \cdot I / 2$ |

# Materialgesetze
## Erzeugung magnetischer Felder

**Wiederholung**

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

| Stromdurchflossene Spulen | Permanentmagnete |
|---|---|
| - Erregerverluste (Abhilfe: Supraleitung) | + keine Verluste |
| - Stromversorgung nötig | + einfacher Aufbau der el.-mech. Wandler |
| + (beliebig) hohe Felder möglich | - Magnetfeld begrenzt auf ca. 1 T |
| + Magnetfeld veränderbar | - Gefahr der Entmagnetisierung |
| + fallweise kostengünstiger | |

Material: **Kupfer, Aluminium Isolierstoff** — **Eisen-Nickel-Kobalt-Legierungen u. Sinterwerkstoffe mit Seltenen Erden**

# Elektromagnetisch-mechanisch wechselwirkende Materie



- Neben elastischen Materialien, Dielektrika und Magnetika gibt es zahlreiche weitere Materialtypen, die für die Anwendung in elektromechanischen Systemen interessant sind, z. B.:
- **Piezoelektrizität:** Änderung der elektrischen Polarisation $P$ in Festkörpern, wenn sie elastisch verformt werden (Druck- oder Zugspannung), und umgekehrt („Elektrostriktion").
- **Piezoresistiver Effekt:** Änderung des elektrischen Widerstands $R$ eines Materials durch Druck- oder Zugspannung.
- **Piezomagnetismus:** Änderung der magnetischen Polarisation $J_M$ in magnetischen Festkörpern, wenn sie elastisch verformt werden (über Druck- oder Zugspannung), und umgekehrt (Magnetostriktion $\Rightarrow$ z. B.: „Trafo-Brummen 100 Hz").

# Materialgesetze

## Elektromagnetisch-thermisch wechselwirkende Materie

- **Thermoelektrische Stoffe:**
  Gegenseitige Beeinflussung von Temperatur und Elektrizität
- ***Seebeck*-Effekt:**
  In einem Stromkreis aus zwei verschiedenen elektrischen Leitermaterialien entsteht bei einer Temperaturdifferenz zwischen den Kontaktstellen dort eine elektrische Spannung
- ***Peltier*-Effekt:**
  „Reziproker" Effekt zum *Seebeck*-Effekt
  Ein elektrischer Stromfluss durch eine Kontaktstelle aus zwei verschiedenen elektrischen Leitern bewirkt eine Änderung der Kontakttemperatur (Erhöhung oder Absenkung) = Wärmeerzeugung oder Kühlung.
- ***Thomson*-Effekt:**
  Jeder stromdurchflossene Leiter mit einer Temperaturdifferenz zwischen zwei Punkten wird entweder mehr oder weniger Wärme transportieren, als dies ohne Stromfluss aufgrund der Wärmeleitfähigkeit und Temperaturdifferenz der Fall wäre.

# Elektromechanische Systeme
# 2. Grundlagen

- Dynamische Grundgesetze der Mechanik und Elektromagnetik
- Materialgesetze
- Kraftgesetze
- Energiebegriffe
- Einführendes Beispiel:
  Kopplung eines mechanischen mit einem el.-magn. System

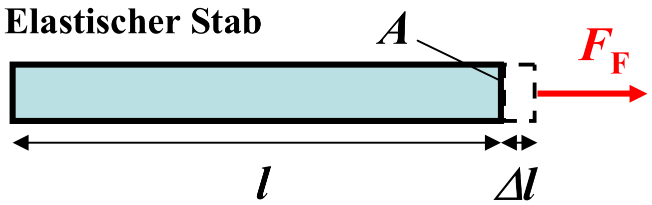
# Kraftgesetze
## Federkraft $F_F$ und Reibungskraft $F_R$

- **Federkraft $F_F$:** Verformbare Materialien

**Beispiel:** Dehnungsstab als linear elastische Feder $\sigma = E \cdot \varepsilon = E \cdot \Delta l / l = (E/l) \cdot \Delta l$

$$F_F = A \cdot \sigma = (E \cdot A / l) \cdot \Delta l = k \cdot \Delta l$$

Federkonstante : $k = E \cdot A / l$




- **Reibungskraft $F_R$:** Zwischen einander berührenden Körpern als Reaktionskraft.
  Muss bei Bewegung (Strecke $\Delta l$) der Körper gegeneinander durch äußere Arbeitszufuhr $W$ überwunden werden, um Bewegung aufrecht zu erhalten: $W = F_R \cdot \Delta l$

  Arbeit $W \Rightarrow$ Reibungswärme und/oder für plastische Verformungsarbeit („Verschleiß“)

  Äußere Reibung: Zwischen sich berührenden Außenflächen von Festkörpern
  Innere Reibung: Zwischen benachbarten Teilchen bei Verformungsvorgängen innerhalb von Festkörpern, Flüssigkeiten und Gasen

# Kraftgesetze
## Elektromagnetische Kraft (*Lorentz*-Kraft) *F*

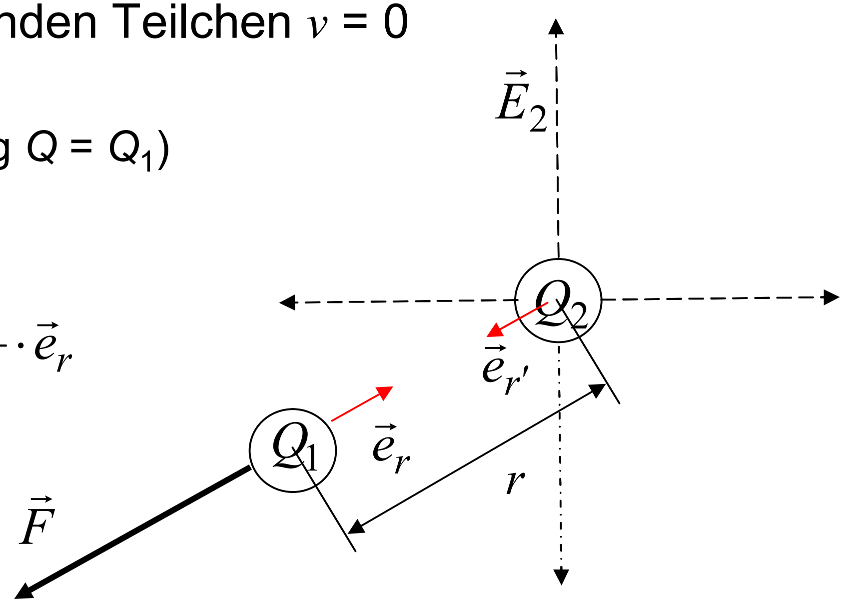
$$\vec{F} = Q \cdot (\vec{v} \times \vec{B} + \vec{E})$$

Ein mit der Geschwindigkeit $v$ bewegtes Teilchen mit der elektrischen Ladung $Q$ erfährt im elektrischen Feld $E$ und im magnetischen Feld $B$ eine Kraft.

**a) *Coulomb*-Anteil:** Wirkt auch beim ruhenden Teilchen $v = 0$

***Beispiel*:**
Ruhendes geladenes Teilchen ($v = 0$, Ladung $Q = Q_1$)
im $E$-Feld der „Punktladung“ $Q_2$ im Abstand $r$

$$\left.\begin{aligned} \vec{F} &= Q_1 \cdot \vec{E}_2 \\ \vec{E}_2 &= \frac{Q_2}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2} \cdot \vec{e}_{r'} \\ \vec{e}_r &= -\vec{e}_{r'} \end{aligned}\right\} \quad \vec{F} = -\frac{Q_1 \cdot Q_2}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2} \cdot \vec{e}_r$$



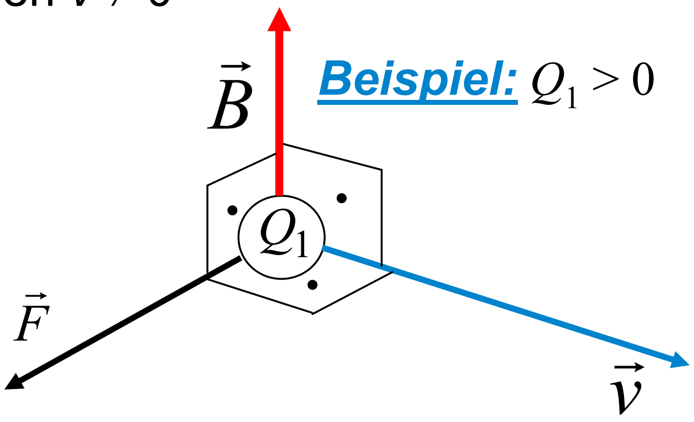

$\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}$ As/(Vm) Dielektrizitätszahl des leeren Raums

# Kraftgesetze
## Elektromagnetische Kraft (*Lorentz*-Kraft)

**Wiederholung**

**b) *Lorentz*-Anteil:** Wirkt NUR beim bewegten Teilchen $v \neq 0$

$$\vec{F} = Q_1 \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

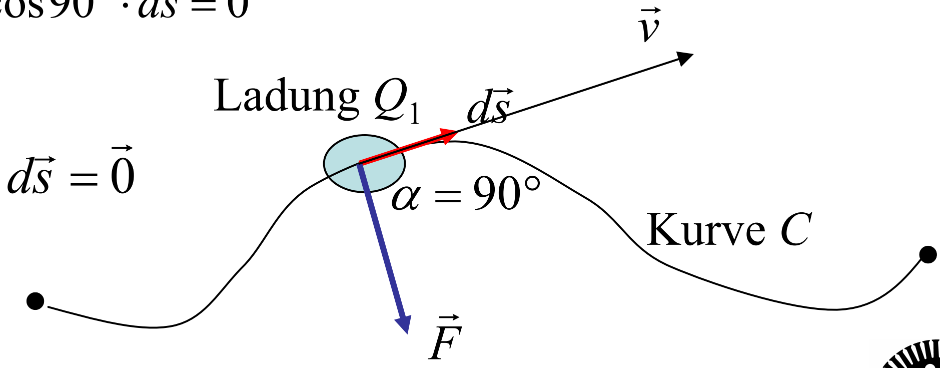



Die *Lorentz*-Kraft *F* ist normal auf die Bewegungs- und Feldrichtung gerichtet!

Die *Lorentz*-Kraft kann KEINE mechanische Arbeit am geladenen Teilchen verrichten!

$$W = \int_C dW = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_C F \cdot \cos\alpha \cdot ds = \int_C F \cdot \cos 90° \cdot ds = 0$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{s} = Q_1 \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s} = Q_1 \cdot \left( \frac{d\vec{s}}{dt} \times \vec{B} \right) \cdot d\vec{s} = \vec{0}$$



## Kraftgesetze
## Elektromagnetische Kraft (*Lorentz*-Kraft)

***Beispiel*:**

Elektronen-Gleichstrom im metallischen Leiter:

el. Gleichstrom $I = 10$ A ($v = 0.7$ mm/s in Kupfer) im externen Magnetfeld $B = 1$T.

Bewegte Ladungsmenge $\Delta Q$ durch den Leiterquerschnitt je Zeiteinheit $\Delta t$:

$$I = \Delta Q / \Delta t$$

Anteil der *Lorentz*-Kraft auf diese bewegte Ladungsmenge:

$$\Delta\vec{F} = \Delta Q \cdot \vec{v} \times \vec{B} = \Delta Q \cdot \frac{\Delta\vec{s}}{\Delta t} \times \vec{B} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \cdot \Delta\vec{s} \times \vec{B} = I \cdot \Delta\vec{s} \times \vec{B} \Rightarrow d\vec{F} = I \cdot d\vec{s} \times \vec{B}$$

*Lorentz*-Kraft auf geraden Leiter $l$: $\vec{F} = \int_0^l d\vec{F} = \int_0^l I \cdot d\vec{s} \times \vec{B} = I \cdot \vec{l} \times \vec{B}$ $\boxed{\vec{F} = I \cdot \vec{l} \times \vec{B}}$
und $B$ homogen längs $l$

Bei Leiterlänge $l = 1$ m: $\left|\vec{F}\right| = \left|I \cdot \vec{l} \times \vec{B}\right| = I \cdot l \cdot B = 10 \cdot 1 \cdot 1 = 10\text{N}$

*Lorentz*-Kräfte sind in technischen Anwendungen i. A. größer als *Coulomb*-Kräfte, so dass viele elektromechanische Wandler mit Magnetkräften arbeiten!

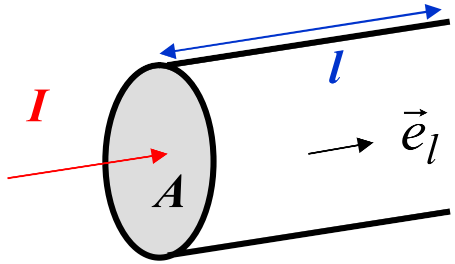
# Kraftgesetze
# Elektromagnetische Kraftdichte *f*

- **Lokale elektromagnetische Kraftdichte *f*:**

$$\vec{f} = \vec{F}/V = I\cdot(\vec{l}\times\vec{B})/V + (Q/V)\cdot\vec{E} = I\cdot(\vec{l}\times\vec{B})/(A\cdot l) + (Q/V)\cdot\vec{E}$$

$$\vec{f} = d\vec{F}/dV = I\cdot(d\vec{l}\times\vec{B})/dV + (dQ/dV)\cdot\vec{E}$$

$$\vec{f} = I\cdot(d\vec{l}\times\vec{B})/(dA\cdot dl) + \underbrace{(dQ/dV)}_{\rho}\cdot\vec{E}$$




- **Elektrische Stromdichte *J*:** $I = \int_A \vec{J}\cdot d\vec{A}$

Für kleinen Leiterquerschnitt $A \Rightarrow dA$ normal zur Stromrichtung: $\vec{l} = l\cdot\vec{e}_l,\quad |\vec{e}_l| = 1$

$$I\cdot d\vec{l}\,/(dA\cdot dl) = (\int_A \vec{J}\cdot d\vec{A})/dA\cdot(d\vec{l}\,/dl) \Rightarrow (J\cdot dA)/dA\cdot\vec{e}_l = J\cdot\vec{e}_l = \vec{J}$$

- **Elektrische Ladungsdichte $\rho$:** $\rho = dQ/dV$

$$\boxed{\vec{f} = \vec{J}\times\vec{B} + \rho\cdot\vec{E}}$$

# Kraftgesetze
## Kraft auf polarisierte u. magnetisierte Körper

- El. polarisierte und el. geladene Körper im äußeren *D*-Feld:

Lokaler Kraftangriff des $D$-Felds am Ort $\vec{x}$ auf die el. Ladungen der Moleküle = „Kraftdichte“ $f_{\mathrm{e}} = F_{\mathrm{e}}/V$

$$\vec{F}_e(t) = \int_V \vec{f}_e(\vec{D},\vec{x},t) \cdot dV = \oint_{A=\partial V} \vec{p}_e \cdot dA$$

- Magnetisierte Körper mit elektrischem Stromfluss im äußeren *B*-Feld:

Lokaler Kraftangriff des *B*-Felds am Ort $\vec{x}$ der in den Atomen bewegten el. Ladungen (= AMPERE´sches „Kreisstrommodell“ der Atomelektronen) = „Kraftdichte“ $f_{\mathrm{m}} = F_{\mathrm{m}}/V$

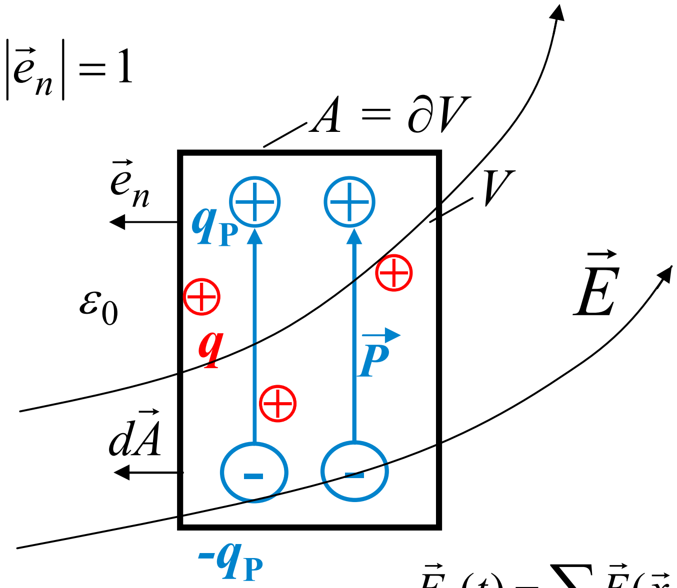
$$\vec{F}_m(t) = \int_V \vec{f}_m(\vec{B},\vec{x},t) \cdot dV = \oint_{A=\partial V} \vec{p}_m \cdot dA$$

- Je nach Materialart existieren unterschiedliche empirisch beschriebene Gesetze für den lokalen Kraftangriff $f_{\mathrm{e}}, f_{\mathrm{m}}$.

- Wenn das resultierende *D*- bzw. *B*-Feld bekannt ist, kann über die **„*Maxwell´*schen Zugspannungen $p_{\mathrm{e}}$ bzw. $p_{\mathrm{m}}$“** die Kraft $F_{\mathrm{e}}$ bzw. $F_{\mathrm{m}}$ auf den polarisierten bzw. magnetisierten Körper berechnet werden.

# Kraftgesetze

## Kraft $F_e$ auf el. polarisierten, el. geladenen Körper




- Im Fremdfeld $E$ liegt ein el. polarisierter und el. geladener Körper (Volumen $V$): $q$: „Wahre" Ladungen, $q_P$: Polarisationsladungen
- Auf $q$, $q_P$, $-q_P$ und daher auf den Körper wirkt Kraft $F_e$
- „Wahre" Ladungsdichte: $\rho \to Q = \sum_{i=1}^{N} q_i = \int_V \rho(V) \cdot dV$
- Polarisationsladungsdichte: $\rho_P \to \sum_{j=1}^{N_P} q_{P,j} = \int_V \rho_P(V) \cdot dV$

$$\rho'(V) = \rho(V) + \rho_P(V) \qquad dV = dx \cdot dy \cdot dz$$

$$\vec{F}_e(t) = \sum_i \vec{E}(\vec{x}_i, t) \cdot q_i(t) + \sum_j \vec{E}(\vec{x}_j, t) \cdot q_{P,j}(t) = \int_V \vec{E}(x,y,z,t) \cdot \rho'(x,y,z,t) \cdot dV$$

- Wir umgeben den Körper mit einer geschlossenen Fläche $A$, die ganz im leeren Raum außerhalb des Körpers verläuft.

- Resultierende Kraft auf den Körper: $\vec{F}_e = \oint_{A=\partial V} \vec{p}_e \cdot dA$

$$\boxed{\vec{p}_e = \varepsilon_0 \cdot (\vec{e}_n \cdot \vec{E}) \cdot \vec{E} - \varepsilon_0 \cdot (\vec{e}_n \cdot \vec{E}^2)/2}$$

# Kraftgesetze

**Herleitung**

## Herleitung: Kraft auf el. geladene, el. polarisierte Körper (1)



Elektrische resultierende Ladungsdichte: $\rho'(x,y,z,t),\ \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

*Gauß´*scher Integralsatz: $\oint\limits_{A=\partial V,\, \partial A=0} \vec{D}\cdot d\vec{A} = \int\limits_V (\nabla\cdot\vec{D})\cdot dV \Leftrightarrow \nabla = (\partial./\partial x, \partial./\partial y, \partial./\partial z)$ „*Nabla*"-Operator

$$\nabla\cdot\vec{D} = (\partial D_x/\partial x) + (\partial D_y/\partial y) + (\partial D_z/\partial z)$$

4. *Maxwell*-Gleichung: $\Phi_e = \oint\limits_{A=\partial V,\, \partial A=0} \vec{D}\cdot d\vec{A} = Q = \int\limits_V \rho\cdot dV = \int\limits_V (\nabla\cdot\vec{D})\cdot dV \Leftrightarrow \nabla\cdot\vec{D} = \rho$

$\nabla\cdot\vec{P} = -\rho_P \qquad \nabla\cdot\vec{D} = \rho = \varepsilon_0\nabla\cdot\vec{E} + \nabla\cdot\vec{P} \Rightarrow \varepsilon_0\nabla\cdot\vec{E} = \rho + \rho_P = \rho'$

$\vec{F}_e = \int\limits_V \vec{f}_e\cdot dV = \int\limits_V \vec{E}\cdot\rho'\cdot dV = \int\limits_V \vec{E}\cdot\varepsilon_0\cdot(\nabla\cdot\vec{E})\cdot dV$ *D, E*: Quellenfelder: $\mathrm{rot}\vec{E} = \nabla\times\vec{E} = \vec{0} = (0,0,0)$

Hilfssatz der Vektorrechnung: $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}\cdot(\vec{A}\cdot\vec{C}) - (\vec{A}\cdot\vec{B})\cdot\vec{C}$

$$\vec{0} = \vec{E}\times\vec{0} = \vec{E}\times(\nabla\times\vec{E}) = \vec{E}_c\times(\nabla\times\vec{E}) = \nabla\cdot(\vec{E}_c\cdot\vec{E}) - (\vec{E}_c\cdot\nabla)\cdot\vec{E} \qquad \nabla\cdot\vec{E}_c := 0$$

$$\nabla\cdot(\vec{E}_c\cdot\vec{E}) = \left[\nabla\cdot(\vec{E}_c\cdot\vec{E}) + \nabla\cdot(\vec{E}_c\cdot\vec{E})\right]/2 = \left[\nabla\cdot(\vec{E}\cdot\vec{E}_c) + \nabla\cdot(\vec{E}_c\cdot\vec{E})\right]/2 = \left[\nabla\cdot(\vec{E}\cdot\vec{E})\right]/2 = \left[\nabla\cdot\vec{E}^2\right]/2$$

$$\vec{0} = \left[\nabla\cdot\vec{E}^2\right]/2 - (\vec{E}_c\cdot\nabla)\cdot\vec{E}$$

$$\vec{F}_e = \varepsilon_0\int\limits_V \vec{E}\cdot(\nabla\cdot\vec{E})\cdot dV = \varepsilon_0\cdot\int\limits_V \Big(\vec{E}_c\cdot(\nabla\cdot\vec{E})\underbrace{-(\nabla\cdot\vec{E})^2/2 + (\vec{E}_c\cdot\nabla)\cdot\vec{E}}_{\vec{0}}\Big)\cdot dV$$

# Kraftgesetze

**Herleitung**

## Herleitung: Kraft auf el. geladene, el. polarisierte Körper (2)

$$\vec{F}_e = \varepsilon_0 \int_V \vec{E} \cdot (\nabla \cdot \vec{E}) \cdot dV = \varepsilon_0 \cdot \int_V (\vec{E}_c \cdot (\nabla \cdot \vec{E}) + (\vec{E}_c \cdot \nabla) \cdot \vec{E} - (\nabla \cdot \vec{E}^2)/2) \cdot dV$$

$$\vec{E}_c \cdot (\nabla \cdot \vec{E}) + (\vec{E}_c \cdot \nabla) \cdot \vec{E} = (\nabla \cdot \vec{E}) \cdot \vec{E}_c + (\nabla \cdot \vec{E}_c) \cdot \vec{E} = (\nabla \cdot \vec{E}) \cdot \vec{E}$$

$$\vec{F}_e = \varepsilon_0 \cdot \int_V ((\nabla \cdot \vec{E}) \cdot \vec{E} - (\nabla \cdot \vec{E}^2)/2) \cdot dV = \varepsilon_0 \cdot \int_V (\nabla \cdot \vec{E}) \cdot \vec{E} \cdot dV - \frac{\varepsilon_0}{2} \cdot \int_V (\nabla \cdot \vec{E}^2) \cdot dV$$

*Gauß´scher Integralsatz:* $\oint\limits_{A=\partial V,\, \partial A=0} d\vec{A} \cdot \vec{K} = \int\limits_V dV \cdot (\nabla \cdot \vec{K}) \Rightarrow \oint\limits_{A=\partial V,\, \partial A=0} d\vec{A} \cdot \ldots = \int\limits_V dV \cdot (\nabla \cdot \ldots)$

$$\vec{F}_e = \varepsilon_0 \cdot \int_V dV \cdot (\nabla \cdot \vec{E}) \cdot \vec{E} - \frac{\varepsilon_0}{2} \cdot \int_V dV \cdot (\nabla \cdot \vec{E}^2) = \varepsilon_0 \cdot \oint_{A=\partial V} (d\vec{A} \cdot \vec{E}) \cdot \vec{E} - \frac{\varepsilon_0}{2} \cdot \oint_{A=\partial V} (d\vec{A} \cdot \vec{E}^2)$$

$$\boxed{\vec{F}_e = \varepsilon_0 \cdot \oint_{A=\partial V} \left[ (\vec{e}_n \cdot \vec{E}) \cdot \vec{E} - (\vec{e}_n \cdot \vec{E}^2)/2 \right] \cdot dA = \oint_{A=\partial V} \vec{p}_e \cdot dA} \qquad d\vec{A} = \vec{e}_n \cdot dA$$

*Maxwell´sche Zugspannungen* an der Körperoberfläche: $\boxed{\vec{p}_e = \varepsilon_0 \cdot (\vec{e}_n \cdot \vec{E}) \cdot \vec{E} - \varepsilon_0 \cdot (\vec{e}_n \cdot \vec{E}^2)/2}$

Geschlossene Oberfläche *A* außerhalb des Körpers im materiefreien Raum; dort ist $\varepsilon = \varepsilon_0$ und $P = 0$: $\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \vec{E} : \vec{p}_e = (\vec{e}_n \cdot \vec{D}) \cdot \vec{D} / \varepsilon_0 - (\vec{e}_n \cdot \vec{D}^2)/(2\varepsilon_0)}$

# Kraftgesetze
## Kraftkomponenten auf el. geladene, el. polarisierte Körper

$$\vec{p}_e = (\vec{e}_n \cdot \vec{D}) \cdot \vec{D} / \varepsilon_0 - (\vec{e}_n \cdot \vec{D}^2)/(2\varepsilon_0)$$

$$\vec{e}_n = \vec{e}_x : \vec{p}_{e,x} = (\vec{e}_x \cdot \vec{D}) \cdot \vec{D} / \varepsilon_0 - (\vec{e}_x \cdot \vec{D}^2)/(2\varepsilon_0) = (D_x) \cdot \vec{D} / \varepsilon_0 - (\vec{e}_x \cdot D^2)/(2\varepsilon_0)$$

$$\vec{p}_{e,x} = \frac{D_x}{\varepsilon_0} \cdot (D_x, D_y, D_z) - \frac{D^2}{2\varepsilon_0} \cdot (1,0,0) = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot (D_x^2, D_x D_y, D_x D_z) - \frac{D_x^2 + D_y^2 + D_z^2}{2\varepsilon_0} \cdot (1,0,0)$$

$$\left.\begin{aligned}
\vec{p}_{e,x} &= \frac{D_x^2 - D_y^2 - D_z^2}{2\varepsilon_0} \cdot \vec{e}_x + \frac{D_x D_y}{\varepsilon_0} \cdot \vec{e}_y + \frac{D_x D_z}{\varepsilon_0} \cdot \vec{e}_z \\
\vec{p}_{e,y} &= \frac{D_x D_y}{\varepsilon_0} \cdot \vec{e}_x + \frac{D_y^2 - D_x^2 - D_z^2}{2\varepsilon_0} \cdot \vec{e}_y + \frac{D_y D_z}{\varepsilon_0} \cdot \vec{e}_z \\
\vec{p}_{e,z} &= \frac{D_x D_z}{\varepsilon_0} \cdot \vec{e}_x + \frac{D_y D_z}{\varepsilon_0} \cdot \vec{e}_y + \frac{D_z^2 - D_x^2 - D_y^2}{2\varepsilon_0} \cdot \vec{e}_z
\end{aligned}\right\} \quad \vec{\vec{T}}_e = \begin{pmatrix} \vec{p}_{e,x} \\ \vec{p}_{e,y} \\ \vec{p}_{e,z} \end{pmatrix}$$

***Maxwell´*scher Spannungstensor**
(ein Tensor 2. Stufe)

# Kraftgesetze
## *Maxwell´*scher Spannungstensor

$\rho(x,y,z,t)$: El. Ladungsdichteverteilung = Skalarfeld (Skalar = Tensor 0. Stufe)

$\vec{D}(x,y,z,t) = (D_x, D_y, D_z)$: Dielektr. Verschiebungsfeld = Vektorfeld (Vektor = Tensor 1. Stufe)

***Maxwell´*****scher Spannungstensor** der elektrischen Kraft-Verteilung (ein Tensor 2. Stufe):

$$\vec{\vec{T}}_e(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} \vec{p}_{e,x} \\ \vec{p}_{e,y} \\ \vec{p}_{e,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{D_x^2 - D_y^2 - D_z^2}{2\varepsilon_0} & \frac{D_x D_y}{\varepsilon_0} & \frac{D_x D_z}{\varepsilon_0} \\ \frac{D_x D_y}{\varepsilon_0} & \frac{D_y^2 - D_x^2 - D_z^2}{2\varepsilon_0} & \frac{D_y D_z}{\varepsilon_0} \\ \frac{D_x D_z}{\varepsilon_0} & \frac{D_y D_z}{\varepsilon_0} & \frac{D_z^2 - D_x^2 - D_y^2}{2\varepsilon_0} \end{pmatrix}$$

Zweidimensionaler Sonderfall:

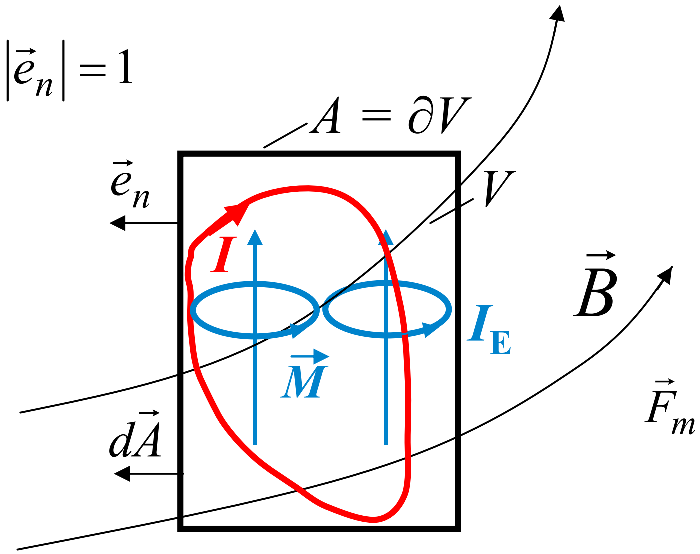
$$\rho(x,y,t), \qquad \vec{D}(x,y,t) = (D_x, D_y) \qquad \vec{\vec{T}}_e(x,y,t) = \begin{pmatrix} \vec{p}_{e,x} \\ \vec{p}_{e,y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{D_x^2 - D_y^2}{2\varepsilon_0} & \frac{D_x D_y}{\varepsilon_0} \\ \frac{D_x D_y}{\varepsilon_0} & \frac{D_y^2 - D_x^2}{2\varepsilon_0} \end{pmatrix}$$

Eindimensionaler Sonderfall:

$$\rho(x,t) \qquad \vec{D}(x,t) = D_x \cdot \vec{e}_x \qquad \vec{\vec{T}}_e(x,t) = \vec{p}_{e,x} = D_x^2 / (2\varepsilon_0) \cdot \vec{e}_x = (D_x E_x / 2) \cdot \vec{e}_x$$

# Kraftgesetze

## Kraft $F_m$ auf magnetisierten stromdurchflossenen Körper




- Im Fremdfeld *B* liegt ein magnetisierter (atomare „Elementarströme" $I_E \Rightarrow$ Magnetisierung $M$) und stromdurchflossener (Strom $I$) Körper.
- Auf $I$, $I_E$ und daher auf den Körper wirkt die Kraft $F_m$
- Stromdichten: $\vec{J} \Leftrightarrow I, \vec{J}_E \Leftrightarrow I_E$

$$\vec{F}_m(t) = \int_V \vec{f}_m(\vec{B},\vec{x},t) \cdot dV = \int_V (\vec{J}(\vec{x},t) + \vec{J}_E(\vec{x},t)) \times \vec{B}(\vec{x},t) \cdot dV$$

- Wir umgeben den Körper mit einer geschlossenen Fläche *A*, die ganz im leeren Raum außerhalb des Körpers verläuft.

- Resultierende Kraft auf den Körper: $\vec{F}_m = \oint_{A=\partial V} \vec{p}_m \cdot dA$ $\boxed{\vec{p}_m = (\vec{e}_n \cdot \vec{B}) \cdot \vec{B} / \mu_0 - (\vec{e}_n \cdot \vec{B}^2)/(2\mu_0)}$

Herleitung

# Herleitung:
# Kraft auf magnetisierten stromdurchflossenen Körper (1)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Elektrische Ströme: $I, I_\mathrm{E} \Rightarrow$ el. Stromdichten: $\vec{J}(x,y,z,t), \vec{J}_E(x,y,z,t)$

Kraftdichte: $\vec{f}_m = (\vec{J}+\vec{J}_E)\times\vec{B}$ $\qquad \vec{B} = \mu_0\cdot\vec{H} + \mu_0\cdot\vec{M}$

*Stokes´*scher Integralsatz: $\oint\limits_{C=\partial A}\vec{K}\cdot d\vec{s} = \int\limits_A \mathrm{rot}\vec{K}\cdot d\vec{A} = \int\limits_A (\nabla\times\vec{K})\cdot d\vec{A}$

1. *Maxwell*-Gleichung für: $\frac{\partial \Phi_e}{\partial t}\approx 0:\quad \oint\limits_{C=\partial A}\vec{H}\cdot d\vec{s} = \Theta = \int\limits_A \vec{J}\cdot d\vec{A} = \int\limits_A(\nabla\times\vec{H})\cdot d\vec{A} \Rightarrow \nabla\times\vec{H} = \vec{J}$

$$\nabla\times\vec{M} = \vec{J}_E \Rightarrow \vec{J}+\vec{J}_E = \nabla\times\vec{H}+\nabla\times\vec{M} = \nabla\times(\vec{H}+\vec{M}) = (\nabla\times\vec{B})/\mu_0 \qquad \nabla\cdot\vec{B}_c := 0$$

$$\vec{F}_m = \int\limits_V \vec{f}_m\cdot dV = \int\limits_V((\vec{J}+\vec{J}_E)\times\vec{B})\cdot dV = \frac{1}{\mu_0}\int\limits_V((\nabla\times\vec{B})\times\vec{B}_c)\cdot dV = -\frac{1}{\mu_0}\int\limits_V(\vec{B}_c\times(\nabla\times\vec{B}))\cdot dV$$

Hilfssatz der Vektorrechnung: $\vec{A}\times(\vec{G}\times\vec{C}) = \vec{G}\cdot(\vec{A}\cdot\vec{C}) - (\vec{A}\cdot\vec{G})\cdot\vec{C}$

$$\vec{B}_c\times(\nabla\times\vec{B}) = \nabla\cdot(\vec{B}_c\cdot\vec{B}) - (\vec{B}_c\cdot\nabla)\cdot\vec{B}$$

---

$$\nabla\cdot(\vec{B}_c\cdot\vec{B}) = \left[\nabla\cdot(\vec{B}_c\cdot\vec{B}) + \nabla\cdot(\vec{B}_c\cdot\vec{B})\right]/2 = \left[\nabla\cdot(\vec{B}\cdot\vec{B}_c) + \nabla\cdot(\vec{B}_c\cdot\vec{B})\right]/2 = \left[\nabla\cdot(\vec{B}\cdot\vec{B})\right]/2 = \left[\nabla\cdot\vec{B}^2\right]/2$$

3. *Maxwell*-Gleichung: $\Phi_m = \oint\limits_{A=\partial V,\,\partial A=0}\vec{B}\cdot d\vec{A} = 0 = \int\limits_V(\nabla\cdot\vec{B})\cdot dV \Leftrightarrow \nabla\cdot\vec{B} = 0$

$$\vec{B}_c\times(\nabla\times\vec{B}) = \left[\nabla\cdot\vec{B}^2\right]/2 - (\vec{B}_c\cdot\nabla)\cdot\vec{B} = \left[\nabla\cdot\vec{B}^2\right]/2 - (\vec{B}_c\cdot\nabla)\cdot\vec{B} - \vec{B}\cdot(\nabla\cdot\vec{B})$$

# Kraftgesetze

**Herleitung**

## Herleitung:
## Kraft auf magnetisierten stromdurchflossenen Körper (2)

$$(\vec{B}_c\cdot\nabla)\cdot\vec{B}+\vec{B}\cdot(\nabla\cdot\vec{B})=(\nabla\cdot\vec{B}_c)\cdot\vec{B}+(\nabla\cdot\vec{B})\cdot\vec{B}_c=(\nabla\cdot\vec{B})\cdot\vec{B}$$

$$\vec{B}_c\times(\nabla\times\vec{B})=\left[\nabla\cdot\vec{B}^2\right]/2-(\vec{B}_c\cdot\nabla)\cdot\vec{B}=\left[\nabla\cdot\vec{B}^2\right]/2-(\nabla\cdot\vec{B})\cdot\vec{B}$$

$$\vec{F}_m=-\int_V(\vec{B}_c\times(\nabla\times\vec{B}/\mu_0))\cdot dV=\frac{1}{\mu_0}\int_V-(\left[\nabla\cdot\vec{B}^2\right]/2+(\nabla\cdot\vec{B})\cdot\vec{B})\cdot dV$$

*Gauß´*scher Integralsatz: $\oint\limits_{A=\partial V,\,\partial A=0} d\vec{A}\cdot\vec{K}=\int\limits_V dV\cdot(\nabla\cdot\vec{K})\Rightarrow\oint\limits_{A=\partial V,\,\partial A=0} d\vec{A}\cdot\ldots=\int\limits_V dV\cdot(\nabla\cdot\ldots)$ $\qquad d\vec{A}=\vec{e}_n\cdot dA$

$$\vec{F}_m=\frac{1}{\mu_0}\int_V dV\cdot(\nabla\cdot\vec{B})\cdot\vec{B})-\frac{1}{\mu_0}\int_V dV\cdot(\left[\nabla\cdot\vec{B}^2\right]/2=\frac{1}{\mu_0}\cdot\oint\limits_{A=\partial V}(d\vec{A}\cdot\vec{B})\cdot\vec{B}-\frac{1}{\mu_0}\cdot\oint\limits_{A=\partial V}d\vec{A}\cdot\vec{B}^2/2$$

$$\boxed{\vec{F}_m=\frac{1}{\mu_0}\cdot\oint\limits_{A=\partial V}\left[(\vec{e}_n\cdot\vec{B})\cdot\vec{B}-\vec{e}_n\cdot\vec{B}^2/2\right]\cdot dA=\oint\limits_{A=\partial V}\vec{p}_m\cdot dA}$$

*Maxwell´*sche Zugspannungen $p_m$ an der Körperoberfläche:

$$\boxed{\vec{p}_m=(\vec{e}_n\cdot\vec{B})\cdot\frac{\vec{B}}{\mu_0}-\vec{e}_n\cdot\frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}}$$

# Kraftgesetze
## Kraft auf magnetisierte und stromdurchflossene Körper

***Maxwell´*****scher Spannungstensor** der magnetischen Kraft-Verteilung
(ein Tensor 2. Stufe):

$$\vec{\vec{T}}_m(x,y,z,t)=\begin{pmatrix}\vec{p}_{m,x}\\ \vec{p}_{m,y}\\ \vec{p}_{m,z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{B_x^2-B_y^2-B_z^2}{2\mu_0} & \frac{B_xB_y}{\mu_0} & \frac{B_xB_z}{\mu_0}\\ \frac{B_xB_y}{\mu_0} & \frac{B_y^2-B_x^2-B_z^2}{2\mu_0} & \frac{B_yB_z}{\mu_0}\\ \frac{B_xB_z}{\mu_0} & \frac{B_yB_z}{\mu_0} & \frac{B_z^2-B_x^2-B_y^2}{2\mu_0}\end{pmatrix}$$

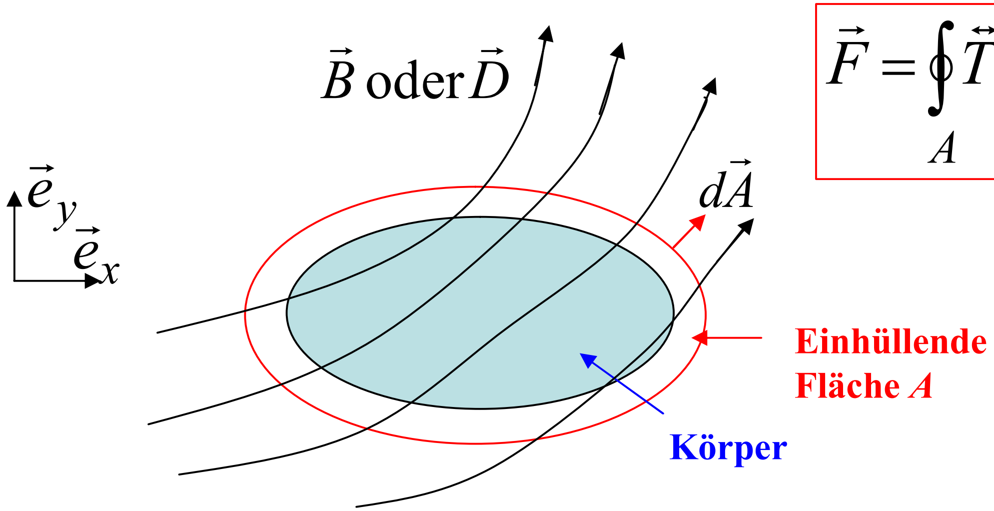
# Kraftgesetze
## *Maxwell´scher* Spannungstensor

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Allgemeines Ergebnis zum *Maxwell*´schen Spannungstensor:
  Die resultierende Kraft *F* auf einen polarisierten bzw. magnetisierten Körper wird berechnet, indem

a) aus den bekannten Feldkomponenten ($D_x$, $D_y$, $D_z$) bzw. ($B_x$, $B_y$, $B_z$) in einer geschlossenen Hüllfläche *A* um den Körper die $3^2 = 9$ Komponenten des *Maxwell*´schen Spannungstensors *T* („Tensor 2. Stufe“) gebildet werden,

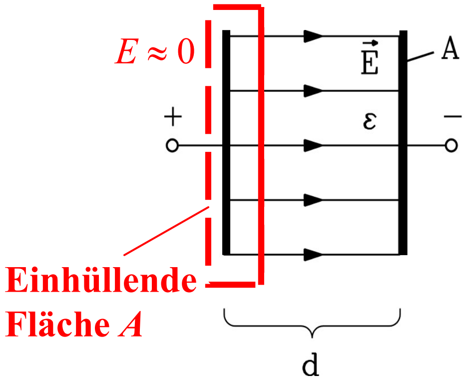
b) die über die GESCHLOSSENE Fläche *A* integriert werden.




$$\vec{F} = \oint_A \overleftrightarrow{T} \cdot d\vec{A}$$

# Kraftgesetze
## *Maxwell´scher* Spannungstensor: Beispiel 1

<u>*Beispiel 1:*</u> Körper ist positiv geladene Kondensatorplatte



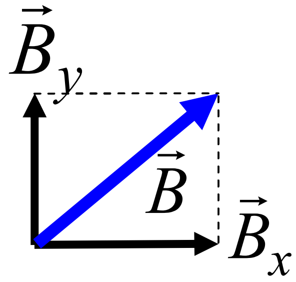

Plattenäußeres: Feld $E \approx 0$: $\vec{F}_e = \oint_A \overleftrightarrow{T}_e \cdot d\vec{A} \approx \int_A \overleftrightarrow{T}_e \cdot d\vec{A}$

$$\vec{F}_e = (\varepsilon \cdot E_x^2 / 2) \cdot A \cdot \vec{e}_x$$

# Kraftgesetze

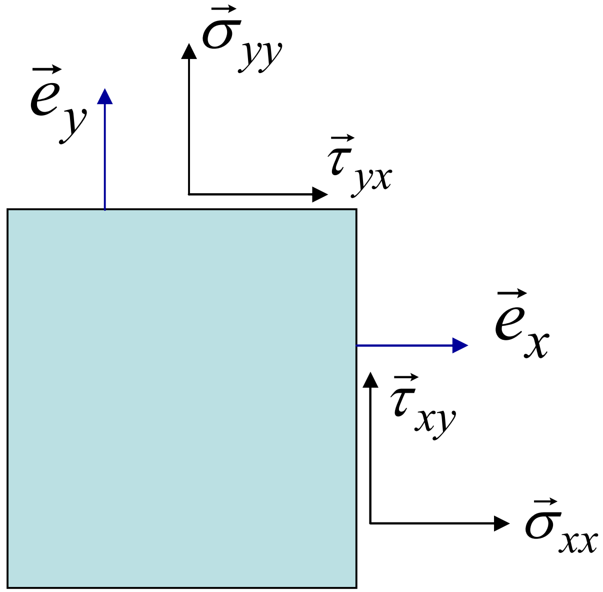
## *Beispiel 2:* 2D: *B*-Feld-Spannungstensor (1)

*Maxwell´scher B-Feld-Spannungstensor T* in 2 Dimensionen *x*, *y* hat $2^2 = 4$ Komponenten.

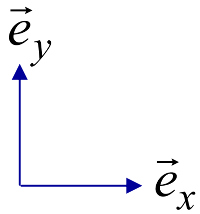



$$\vec{T} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{B_x^2 - B_y^2}{2\mu_0} & \dfrac{B_x B_y}{\mu_0} \\ \dfrac{B_y B_x}{\mu_0} & \dfrac{B_y^2 - B_x^2}{2\mu_0} \end{pmatrix}$$

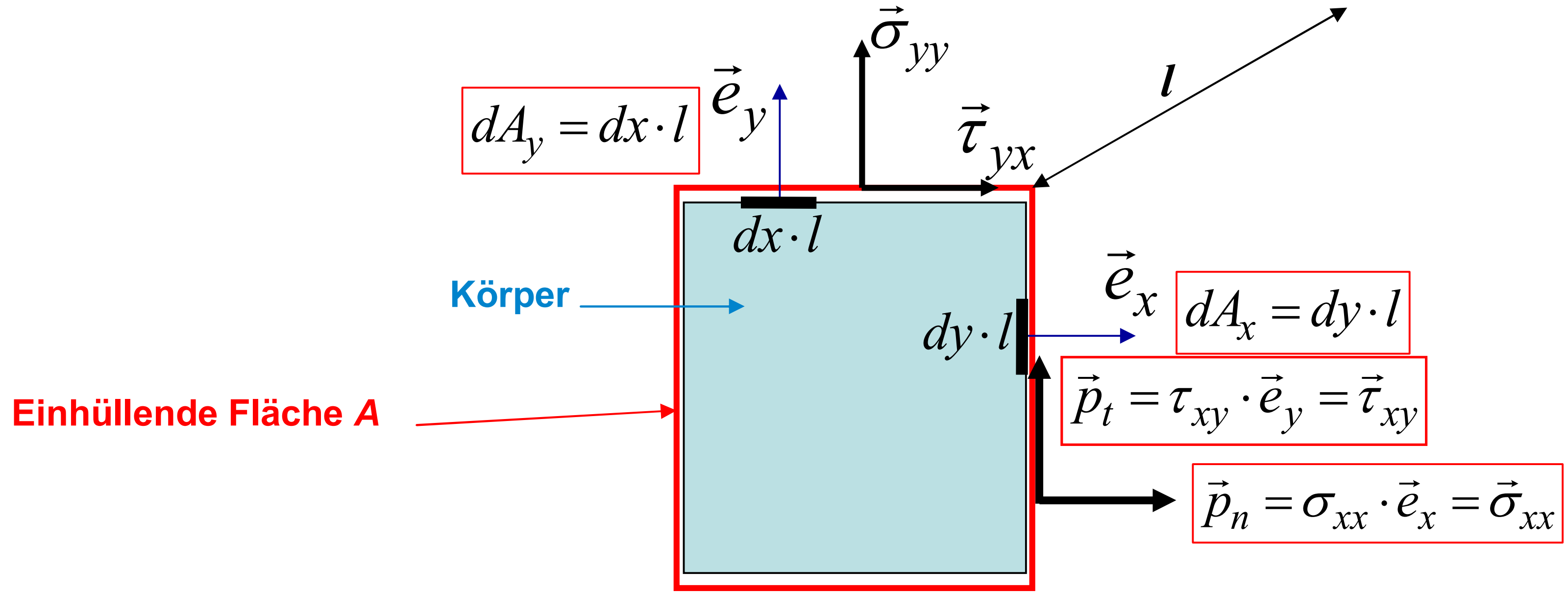
$$\tau_{yx} = \tau_{xy}$$




$$|\vec{e}_x| = |\vec{e}_y| = 1$$



# Kraftgesetze
## *Beispiel 2:* 2D: *B*-Feld-Spannungstensor (2)




$$\vec{p} = \begin{pmatrix} \vec{p}_{xy} \\ \vec{p}_{yx} \end{pmatrix} = \overset{\leftrightarrow}{T} \cdot \begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \cdot \vec{e}_x + \tau_{xy} \cdot \vec{e}_y \\ \tau_{yx} \cdot \vec{e}_x + \sigma_{yy} \cdot \vec{e}_y \end{pmatrix}$$

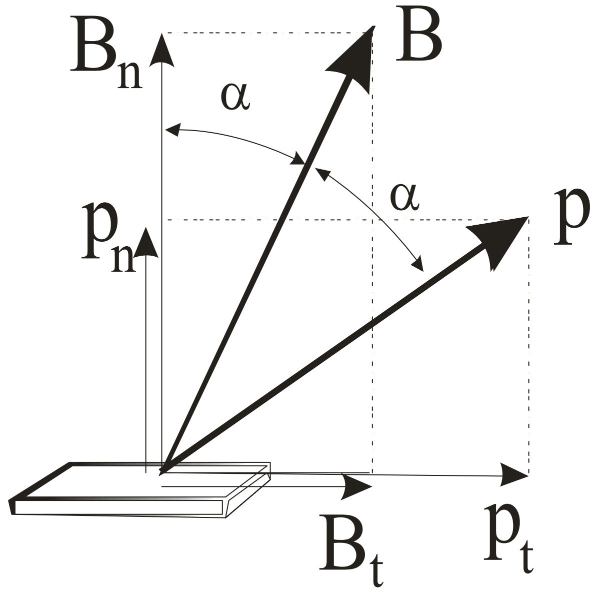
$$\boxed{\vec{F} = \oint_A \overset{\leftrightarrow}{T} \cdot d\vec{A} = \oint_A \vec{p} \cdot dA}$$

# Kraftgesetze
## Spannungstensor-Komponenten

- Die Kraftrichtung der MAXWELL-Spannungen *p* ist <u>ähnlich</u> wie die Feldrichtung *D* bzw. *B*, aber i. A. nicht identisch!
- Allgemein hat nur ihr Integral über *A* als *F* eine physikalische Bedeutung.

$$\boxed{\vec{F} = \oint_A \vec{p} \cdot dA}$$

$$\left.\begin{aligned} \text{z.B.: } \vec{B} = \vec{B}_n + \vec{B}_t : \ \sigma &= \frac{B_n^2 - B_t^2}{2\mu_0} = p_n \\ \tau &= \frac{B_n B_t}{\mu_0} = p_t \end{aligned}\right\} \vec{p} = \vec{p}_n + \vec{p}_t$$

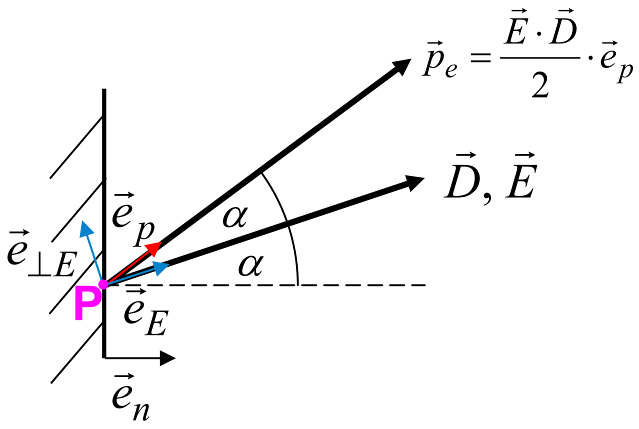



$$\tan\alpha = \frac{B_t}{B_n}$$

$$\frac{p_t}{p_n} = \tan 2\alpha = \frac{2}{\dfrac{1}{\tan\alpha} - \tan\alpha} = \frac{2B_n B_t}{B_n^2 - B_t^2}$$

*Quelle: Reichert, K., VDE-Kurs El. Maschinen, 2009*

# Kraftgesetze
## Betrag der *MAXWELL*-Zugspannung (1)




- Leerer Raum des umhüllten Körpers: $\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \vec{E}$
- MAXWELL-Zugspannung:

$$\vec{p}_e = \varepsilon_0 \cdot (\vec{e}_n \cdot \vec{E}) \cdot \vec{E} - \varepsilon_0 \cdot (\vec{e}_n \cdot \vec{E}^2)/2 =$$

$$= (\vec{e}_n \cdot \vec{D}) \cdot \vec{E} - \vec{e}_n \cdot (\vec{D} \cdot \vec{E})/2$$

$$|\vec{e}_n| = |\vec{e}_p| = |\vec{e}_E| = |\vec{e}_{\perp E}| = 1$$ Einheitsvektoren

$$\vec{e}_n = \vec{e}_E \cdot \cos\alpha - \vec{e}_{\perp E} \cdot \sin\alpha$$

$$\vec{p}_e = D \cdot \cos\alpha \cdot E \cdot \vec{e}_E - \frac{D\cdot E}{2} \cdot (\vec{e}_E \cdot \cos\alpha - \vec{e}_{\perp E} \cdot \sin\alpha) = \frac{D\cdot E}{2} \cdot \cos\alpha \cdot \vec{e}_E + \frac{D\cdot E}{2} \cdot \sin\alpha \cdot \vec{e}_{\perp E}$$

$$\boxed{\vec{p}_e = |\vec{p}_e| \cdot \vec{e}_p \qquad |\vec{p}_e| = \frac{D\cdot E}{2} \cdot \sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = \frac{D\cdot E}{2} = \frac{\vec{D}\cdot\vec{E}}{2}} \qquad w_e = \frac{dW_e}{dV} = \frac{\vec{D}\cdot\vec{E}}{2}$$

- In gleicher Weise gilt magnetisch:

$$\boxed{\vec{p}_m = |\vec{p}_m| \cdot \vec{e}_p \qquad |\vec{p}_m| = \frac{B\cdot H}{2} = \frac{\vec{B}\cdot\vec{H}}{2}} \qquad w_m = \frac{dW_m}{dV} = \frac{\vec{B}\cdot\vec{H}}{2}$$

# Kraftgesetze
# Betrag der *MAXWELL*-Zugspannung (2)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- **Ergebnis:**
  Der Betrag der MAXWELL-Zugspannung ist (nicht zufällig!) ebenso groß wie die elektrische bzw. magnetische Energiedichte $w_e$, $w_m$ im betrachteten Raumpunkt P.

- Einheiten: Energiedichte $w_e$: $J/m^3 = N{\cdot}m/m^3 = N/m^2$ : MAXWELL-Zugspannung $p_e$

- In numerischen Feldberechnungsprogrammen
  (z. B. mit der Methode der Finiten Elemente)
  wird aus der „Feldlösung“ die Kraft auf polarisierbare oder magnetisierbare Körper durch Integration der MAXWELL-Spannungen über die Körper einhüllende Flächen berechnet.

# Kraftgesetze
## *Maxwell*-Spannungstensor: Eigenschaften (1)

- Integration von *T* erfolgt über **geschlossene Fläche *A*** des eingehüllten Körpers.

- Lokale Werte $p \cdot \mathrm{d}A$ haben für sich i. A. KEINE physikalische Bedeutung.

$$\boxed{\vec{F} = \oint_A \vec{p} \cdot dA}$$

- Die Kraftdichte $f_\mathrm{e}$ bzw. $f_\mathrm{m}$ ist im Körper je nach Verteilung $\varepsilon(x,y,z)$ bzw. $\mu(x,y,z)$ i. A. ungleichmäßig verteilt.

- Daher hat diese physikalisch wirksame Verteilung IM VOLUMEN i. A. NICHTS mit der (äquivalenten) lokalen OBERFLÄCHEN-Verteilung der MAXWELL-Spannungstensor-Komponenten zu tun.

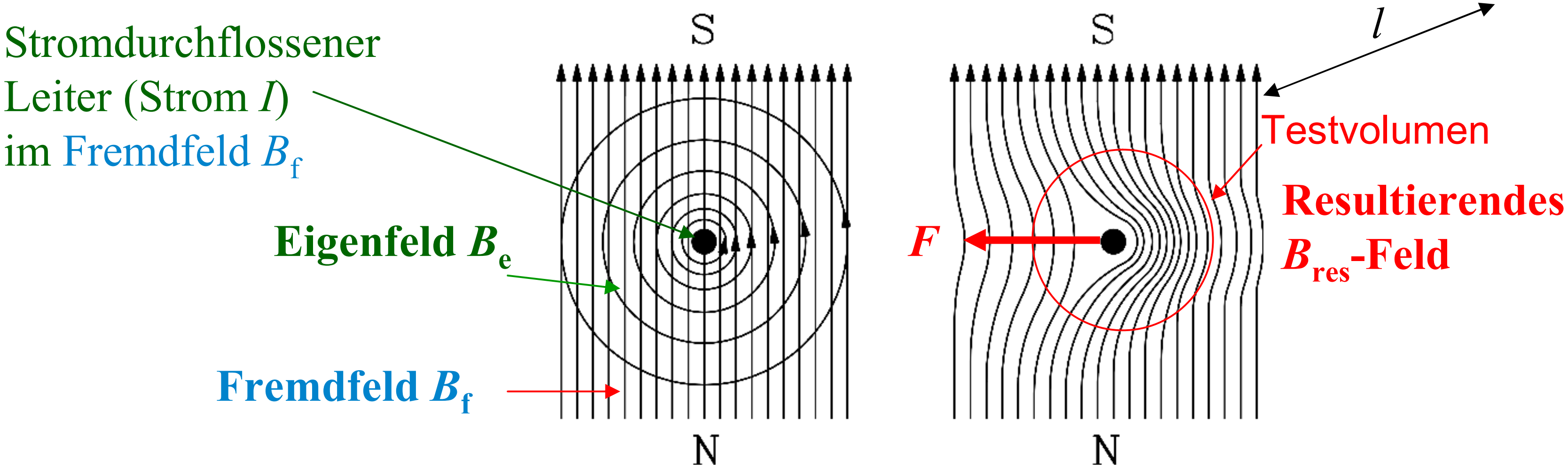
# Kraftgesetze
## *Maxwell*-Spannungstensor: Eigenschaften (2)

- ***Sonderfall:*** Körper ist
  i) ungeladen bzw. stromlos Körper: $\rho(x,y,z) = 0$, bzw. $\vec{J} = \vec{0}$ und
  ii) homogen & isotrop polarisierbar $\varepsilon(x,y,z) = \varepsilon = \text{konst.}$ bzw. magnetisierbar $\mu(x,y,z) = \mu = \text{konst.}$:
  Die lokale Kraftdichte *f* tritt nur an der Körperoberfläche auf (im Inneren: *f* = 0),
  ist aber i. A. NICHT identisch mit den MAXWELL-Spannungstensor-Komponenten.

- ***Sonder-Sonderfall:***
  Im Körper $\varepsilon \to \infty$ bzw. $\mu \to \infty$ :
  Die lokale Kraftdichte *f* tritt nur an der Körperoberfläche auf
  UND
  ist identisch mit den MAXWELL-Spannungstensor-Komponenten:

$$\varepsilon \to \infty, \mu \to \infty: \quad d\vec{F}(x,y,z)/dA = \vec{p}(x,y,z)$$

# Kraftgesetze – Beispiel 1
## Kraft auf stromdurchflossenen Leiter im *B*-Feld



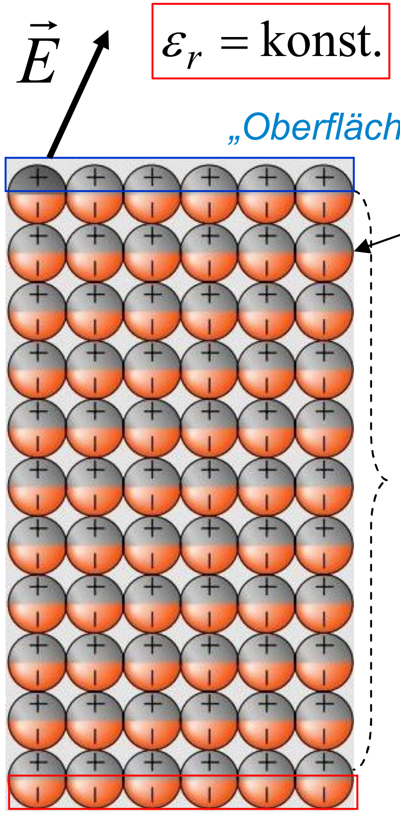

- Fremdfeld $B_f$ (homogenes Feld) von unten nach oben gerichtet
- Der Strom $I$ im Leiter (Länge $l$) fließt auf den Betrachter zu
- $I$ erregt ein kreisförmiges Eigenfeld $B_e$ nach der Rechtsschraubenregel
- Überlagerung ergibt resultierendes $B_{res}$-Feld: Links kleiner als rechts vom Leiter
- Feldlinien = „elastische Gummischnüre“ (MAXWELL‘scher Zug) wollen sich verkürzen $\Rightarrow$ Kraft ***F*** nach links auf den Leiter !
- Zum selben Ergebnis kommt man mit der LORENTZ-Kraftformel: $F = I \cdot B_f \cdot l$

# Kraftgesetze
## Räumlich konstantes $\varepsilon$, $\mu$: Oberflächenkraft

- Ungeladene bzw. stromlose Körper mit $\varepsilon(x,y,z) = \varepsilon = \text{konst.}$ bzw. $\mu(x,y,z) = \mu = \text{konst.}$:
  Die lokale Kraftdichte tritt an der Körperoberfläche auf $\Rightarrow$ VERANSCHAULICHUNG:

$\varepsilon_r = \text{konst.}$

*„Oberflächenladung“*

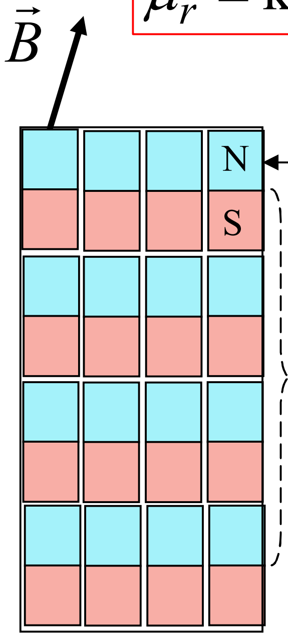



*Elementarer Dipol:*
$(+q_\mathrm{P}, -q_\mathrm{P})$

Ladungen und damit Kraft $F_\mathrm{e} = q_\mathrm{P} \cdot E$ heben sich auf.
Es verbleibt die Kraft auf die „Oberflächenladungen“ = Kraft ist an der Oberfläche lokalisiert.

*„Oberflächenladung“*

$\mu_r = \text{konst.}$




*Elementarer Magnet:*
(N,S)

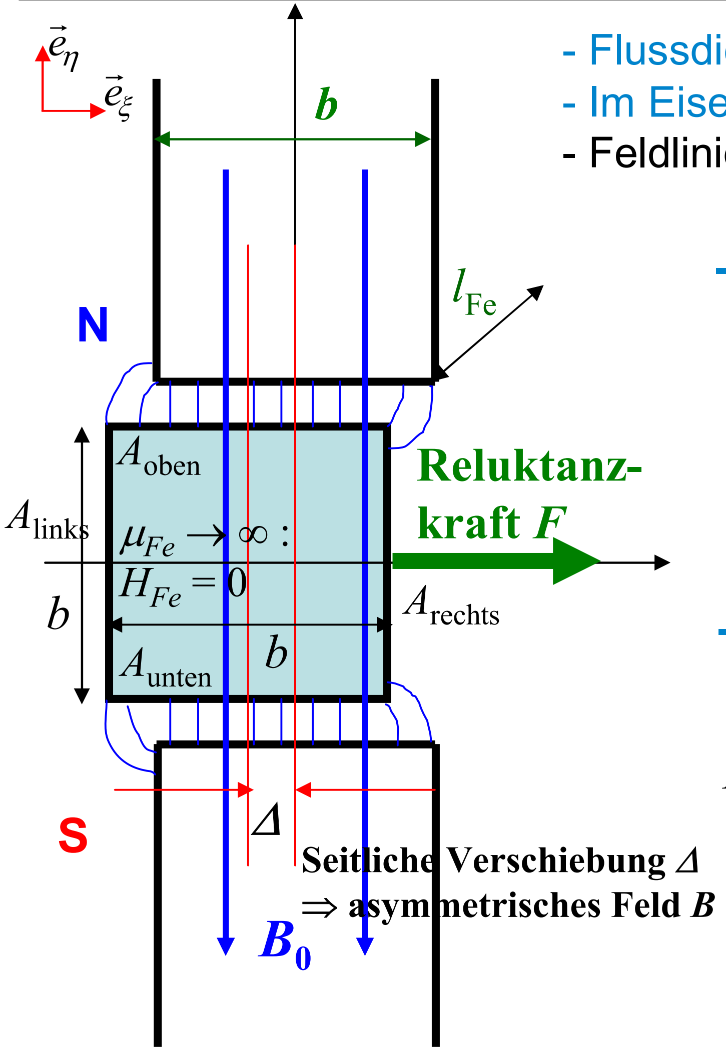
Polaritäten und damit Magnetkraft $F_\mathrm{m}$ heben sich auf.
Es verbleibt die Kraft auf die „Oberflächen“ = Kraft ist an der Oberfläche lokalisiert.

*Quelle: Gerthsen, Physik, Springer*

# Kraftgesetze – Beispiel 2

## Kraft auf ideal magnetisierbaren Körper $F$ (Länge $l_{\mathrm{Fe}}$)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT




- Flussdichte $B_0$ eingeprägt durch zwei Eisen-Polschuhe (N, S):
- Im Eisen: $\mu \to \infty$, daher $H_{\mathrm{Fe}} = 0$
- Feldlinien normal zur Eisenoberfläche $\tau_{\eta\xi} = \tau_{\xi\eta} = 0$

**- Vertikalkraft:** $\sigma_{\eta\eta} = \dfrac{B_\eta^2 - B_\xi^2}{2\mu_0} = \dfrac{B_\eta^2}{2\mu_0}$

$$\vec{F}_\eta = \oint_A \vec{T} \cdot d\vec{A}_\eta = \left( \int_0^b B_\eta^2(A_{oben}) \cdot d\xi - \int_0^b B_\eta^2(A_{unten}) \cdot d\xi \right) \cdot \frac{l_{Fe}}{2\mu_0} = 0$$

**- Horizontalkraft:** $\sigma_{\xi\xi} = \dfrac{B_\xi^2 - B_\eta^2}{2\mu_0} = \dfrac{B_\xi^2}{2\mu_0}$

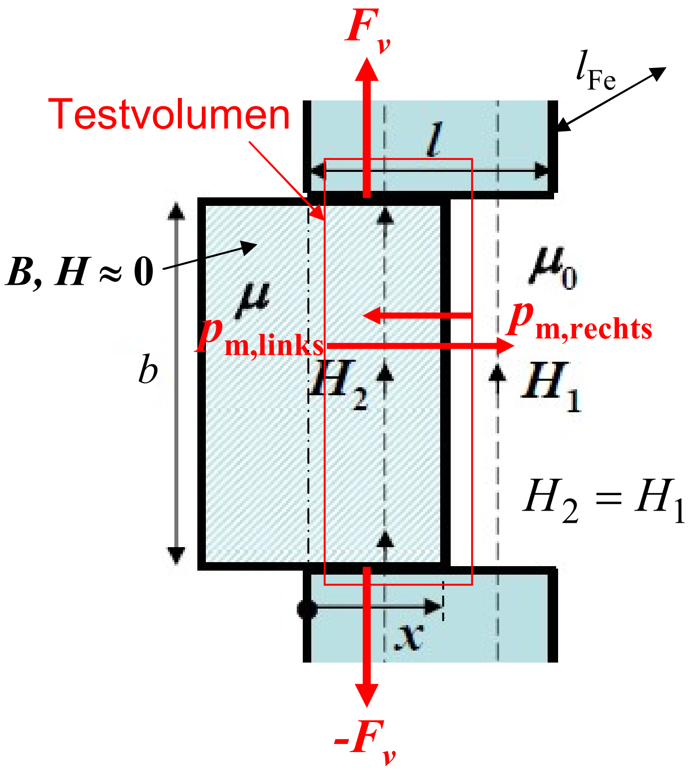
$$\vec{F}_\xi = \oint_A \vec{T} \cdot d\vec{A}_\xi = \left( -\int_0^b B_\xi^2(A_{links}) \cdot d\eta + \int_0^b B_\xi^2(A_{rechts}) \cdot d\eta \right) \cdot \frac{l_{Fe}}{2\mu_0} = \vec{F}$$

**„Reluktanzkraft“ *F***

$$\boxed{\vec{F} \approx \int_0^b B_\xi^2(A_{rechts}) \cdot d\eta \cdot \frac{l_{Fe}}{2\mu_0} \cdot \vec{e}_\xi}$$

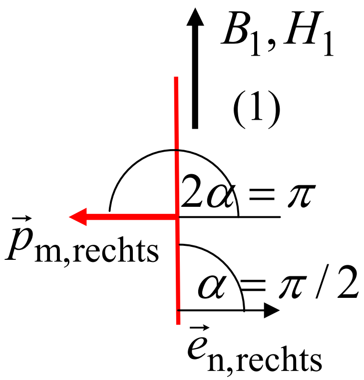
# Kraftgesetze – Beispiel 3
## Kraft auf magnetisierbaren Körper $F$: Näherungsformel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT




$$B_2 = \mu \cdot H_2 \qquad B_1 = \mu_0 \cdot H_1$$

Magn. Vertikalkraft $F_v - F_v = 0$!




Testvolumen:

a) Rechte Fläche:

$$\vec{p}_{m,rechts} = -\frac{B_1 H_1}{2} \cdot \vec{e}_{n,rechts}$$

b) Linke Fläche:

$$\vec{p}_{m,links} = -\frac{B_2 H_2}{2} \cdot \vec{e}_{n,links} = \frac{B_2 H_2}{2} \cdot \vec{e}_{n,rechts}$$

c) Resultierende Kraft aus linker & rechter Fläche:

$$\vec{p}_m = \vec{p}_{m,links} + \vec{p}_{m,rechts} = \frac{B_2 H_2 - B_1 H_1}{2} \cdot \vec{e}_{n,rechts}$$

$$\boxed{\vec{F}_m = \vec{p}_m \cdot A}$$

$$\boxed{F_m = F_{rechts} = \frac{(B_2 - B_1) \cdot H_1}{2} \cdot b \cdot l_{Fe}}$$

- Dynamische Grundgesetze der Mechanik und Elektromagnetik
- Materialgesetze
- Kraftgesetze
- Energiebegriffe
- Einführendes Beispiel:
  Kopplung eines mechanischen mit einem el.-magn. System

# Energiebegriffe

Wiederholung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

## Kinetische Energie (Linear- und Drehbewegung)

- Energie als geleistete Arbeit = Kraft x Weg: $W = \int\limits_x F \cdot dx = \int\limits_\gamma M \cdot d\gamma$

$$W = F \cdot x = (F \cdot r) \cdot (x / r) = M \cdot \gamma$$

- Leistung = Energie / Zeit = Kraft x Geschwindigkeit ($p$: Momentanleistung)

$$P = W / t = F \cdot x / t = F \cdot v \qquad p = dW / dt = F \cdot dx / dt = F \cdot \dot{x} = F \cdot v$$

- Leistung = Energie / Zeit = Drehmoment x Winkelgeschwindigkeit

$$P = W / t = (F \cdot r) \cdot (x / r) \; / t = M \cdot \gamma / t = M \cdot \omega_m$$

- Gespeicherte mechanische Energie $W$ als kinetische Energie $W_k$

$$dW = p \cdot dt = F \cdot v \cdot dt = m \cdot \ddot{x} \cdot \dot{x} \cdot dt = m \cdot d(\dot{x}^2 / 2) \Rightarrow W_k = m \cdot v^2 / 2$$

$$dW = p \cdot dt = M \cdot \omega_m \cdot dt = J \cdot \dot{\omega}_m \cdot \omega_m \cdot dt = J \cdot d(\omega_m^2 / 2) \Rightarrow W_k = J \cdot \omega_m^2 / 2$$

$W_\mathrm{k} = m \cdot v^2 / 2$ (translatorisch) $\qquad W_\mathrm{k} = J \cdot \omega_m^2 / 2$ (rotatorisch)

# Energiebegriffe

## Potentielle Energie

**Wiederholung**

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

**a) Potentielle „Höhen"-Energie $W_p$:**

Aufzuwendende Arbeit für eine Änderung der Höhenlage *h* eines Körpers in Bezug auf einen anderen massebehafteten Körper (hier: Erde)

***Beispiel:***

Erde: *g*: Erdbeschleunigung, *h*: Höhe über Erdoberfläche , *m*: Körpermasse.

Für Erddurchmesser >> Körperabmessungen $\Rightarrow W_\mathrm{p} = m \cdot g \cdot h$

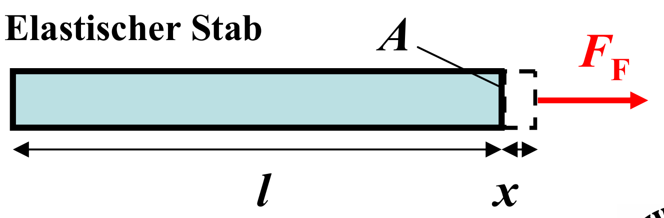
**b) Potentielle Verformungsenergie $W_F$:**

Aufzuwendende Arbeit für eine Änderung der Form eines (elastisch oder plastisch) verformbaren Körpers

***Beispiel:***

Dehnungsstab als linear elastische Feder: Dehnungsarbeit $W_\mathrm{F}$ für Längung $x$

$$W_\mathrm{F} = \int_0^x F_F \cdot dx = \int_0^x k \cdot x \cdot dx = k \cdot x^2 / 2$$



# Energiebegriffe
## El. Energiedichte $w_e$ (nichtlinearer Werkstoff)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Niederfrequenzbereich:
  Elektrisches Feld *E* bzw. *D* und magnetisches Feld *H* bzw. *B* getrennt betrachtbar
  (= Magnetfelder zufolge $\partial D/\partial t$ vernachlässigt)
  Exakt gilt dies bei statischen Feldern: $\partial./\partial t = 0$

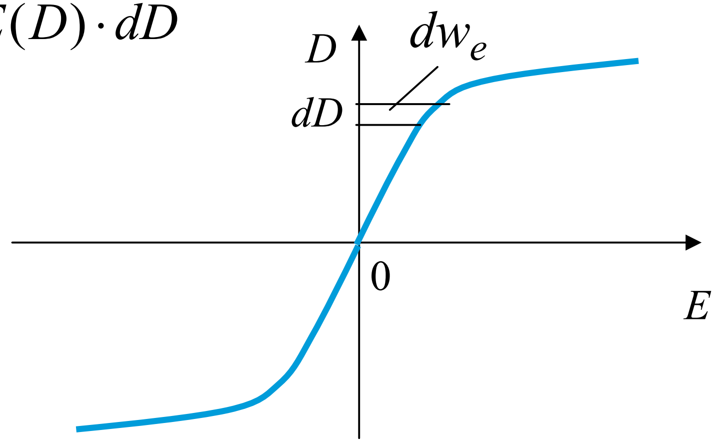
- **Elektrostatische Energiedichte $w_e$:**
  Durch elektrische Ladungen $Q$ UND polarisierbare Materie ($P$):
  Differentiell kleiner Zuwachs an Energiedichte: $dw_e = \vec{E}(D)\cdot d\vec{D}$
  Energiedichte $w_e$:

$$w_e(E,D) = \int dw_e = \int_0^D \vec{E}(D')\cdot d\vec{D}'$$

**Sonderfall:** Isotroper Werkstoff $\vec{D} \uparrow\uparrow \vec{E}$

$$w_e(E,D) = \int_0^D \vec{E}(D')\cdot d\vec{D}' = \int_0^D E(D')\cdot dD'$$

Die Fläche zwischen *D*-Achse und *E*(*D*)-Kurve ist $w_e$!




**Beispiel:** Nichtlinear polarisierbarer isotroper Werkstoff ohne Hysterese

# Energiebegriffe

## El. Energiedichte $w_e$ (linearer Werkstoff)

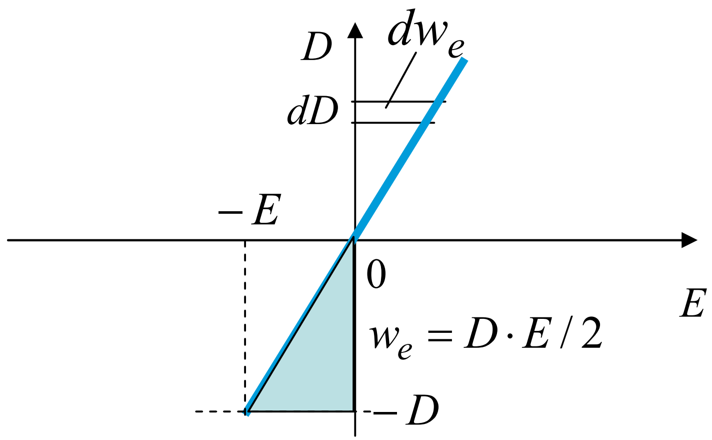
- ***Sonderfall:*** Anisotroper linearer Werkstoff $\vec{D} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \cdot \vec{E}$

  z.B.: Piezoelektrischer Werkstoff $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{xy}, \text{etc.} = \text{konst.}$

  Bei $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = 0$: $w_e(E,D) = \vec{D} \cdot \vec{E} / 2$

- ***Sonderfall:*** Isotroper linear polarisierbarer Werkstoff $\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E}$ $\quad \varepsilon = \text{konst.} \Leftrightarrow \vec{D} \uparrow\uparrow \vec{E}$

$$w_e(E,D) = \int_0^D \vec{E}(D') \cdot d\vec{D}' = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^D D' \cdot dD' = \frac{D^2}{2\varepsilon} = \frac{D \cdot E}{2} \qquad w_e = \frac{\vec{D} \cdot \vec{E}}{2} = \Big|_{isotrop} = \frac{1}{2\varepsilon} \cdot \left|\vec{D}\right|^2 = \frac{1}{2\varepsilon} \cdot D^2$$



# Energiebegriffe
## El. Energie $W_e$ (nichtlinearer Werkstoff)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Der gesamte vom el. Feld erfüllte Raum $V$ ist Ort der dort verteilten Energiedichte $w_e$:

**El. Energie $W_e$:** $W_e = \int_V w_e(E,D)\cdot dV = \int_V w_e(V)\cdot dV$

$$W_e = \int_V \int_0^D \vec{E}(D')\cdot d\vec{D}'\cdot dV = \oint_A \int_l \int_0^D \vec{E}(D')\cdot d\vec{D}'\cdot d\vec{A}\cdot d\vec{s}$$

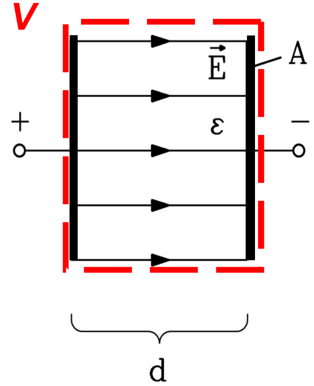
$$W_e = \oint_A \int_0^D \int_l \vec{E}(D')\cdot d\vec{s}\cdot d\vec{D}'\cdot d\vec{A} = \oint_A \int_0^D u(D')\cdot d\vec{D}'\cdot d\vec{A} = \int_0^Q u\cdot d\left(\oint_A \vec{D}'\cdot d\vec{A}\right) = \int_0^Q u\cdot dQ'$$

$$\boxed{\vec{D}\Leftrightarrow Q \quad \vec{E}\Leftrightarrow u}$$

- ***Beispiel:***
Kondensator: differentielles Volumen: $dV = d\vec{A}\cdot d\vec{s}$

$$\Phi_e = \oint_{A,\partial A=0} \vec{D}\cdot d\vec{A} = Q \qquad u = \int_d \vec{E}\cdot d\vec{s}$$

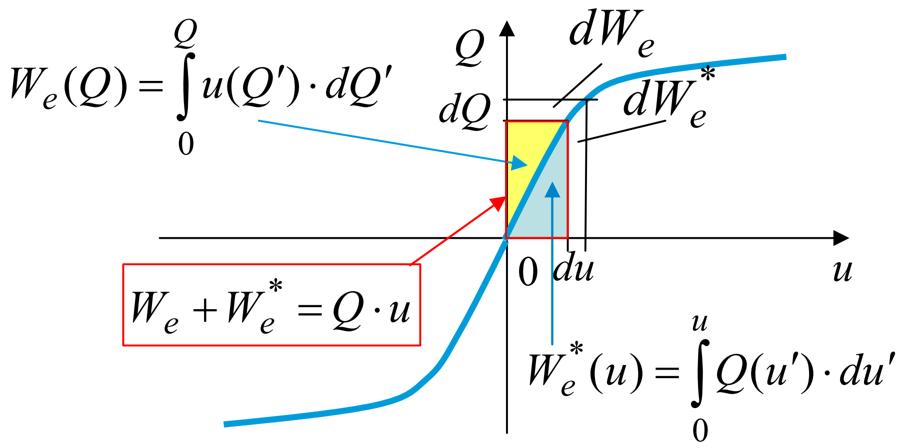
Feldvolumen $V$



# Energiebegriffe

## El. Energie $W_e$ und Ko-Energie $W^*_e$

- Die Fläche zwischen *Q*-Achse und *u*(*Q*)-Kurve ist **el. Energie $W_e$**
- Die Fläche zwischen *u*-Achse und *Q*(*u*)-Kurve nennt man **el. Ergänzungsenergie $W_e^*$ („el. Ko-Energie“)**




***Beispiel:***

Nichtlinear polarisierbares isotropes Dielektrikum im Kondensator (ohne Hysterese)

# Energiebegriffe
## Elektrische Energie $W_e$ (linearer Werkstoff)

***Sonderfall:*** Linear polarisierbarer Werkstoff

$Q = C \cdot u$:

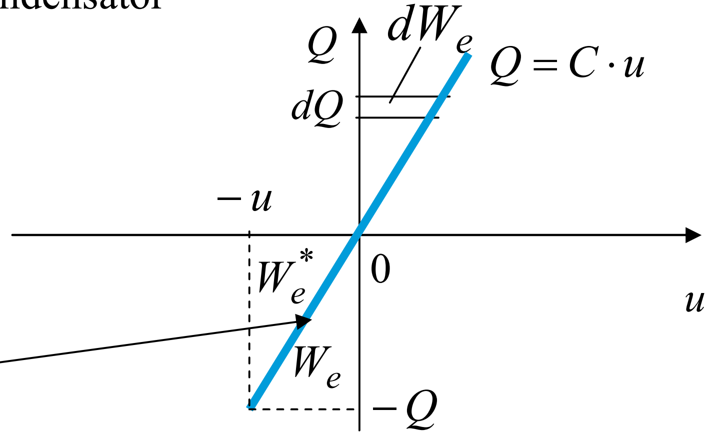
$$W_e(Q) = \int_0^Q u(Q') \cdot dQ' = \int_0^Q \frac{Q'}{C} \cdot dQ' = \frac{Q^2}{2C}$$

$$W_e^*(u) = \int_0^u Q(u') \cdot du' = \int_0^u C \cdot u' \cdot du' = \frac{C \cdot u^2}{2}$$

- Diagonale halbiert Rechteck (Fläche $Q \cdot u$) in zwei gleiche Dreiecksflächen $W_e$ und $W_e^*$

$$W_e(Q) = \frac{Q^2}{2C} = \frac{(C \cdot u)^2}{2C} = \frac{C \cdot u^2}{2} = W_e^*(u)$$

***Beispiel:***
Linear polarisierbares Dielektrikum im Kondensator




$$\boxed{W_e + W_e^* = Q \cdot u}$$

# Energiebegriffe - Beispiel

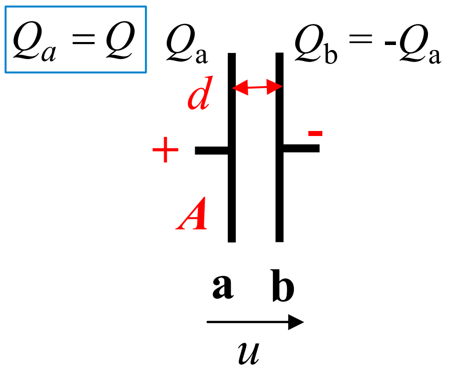
## Elektrische Energie $W_e$ im Kondensator (1)

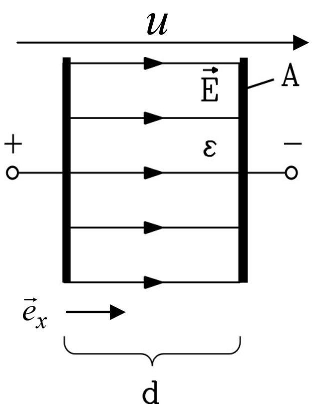
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Energie $W_e$ ist im felderfüllten Raum lokalisiert, der mit der Energiedichte $w_e$ „erfüllt“ ist!
- Die beiden Elektroden **a** und **b** stehen unter mechanischer Spannung der sich gegenseitig anziehenden elektrischen Ladungen $Q_a$ und $Q_b = -Q_a$ (*Coulomb*-Kraft = „Fernwirkungsmodell“).
- Diese Kraft wird durch die wie „Gummischnüre“ ziehende Kraftwirkung des elektrischen Felds $E$ zwischen den Elektroden als MAXWELL-Zug $p_e$ vermittelt („Nahwirkungsmodell“).

# Energiebegriffe - Beispiel

## Elektrische Energie $W_e$ im Kondensator (2)




$$W_e = \int_V w_e \cdot dV \approx \int_0^d \int_0^A w_e \cdot dx \cdot dA$$

Näherung: $w_e = \varepsilon \cdot E^2/2 = \text{konst:}$

$$W_e = \frac{\varepsilon \cdot E^2}{2} \cdot A \cdot d$$

- Gespeicherte elektrische Energie $W_e$ ist (nahezu zur Gänze) im Volumen $A \cdot d$ !
- **Kapazität** $C$: $C = \varepsilon \cdot A / d$
- El. Spannung: $u = \int_0^d \vec{E} \cdot d\vec{x} \cong E \cdot d$

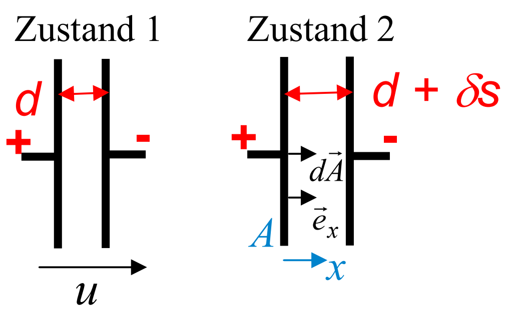
$$\left.\begin{matrix} C = \varepsilon \cdot A / d \\ u = \int_0^d \vec{E} \cdot d\vec{x} \cong E \cdot d \end{matrix}\right\} W_e = \frac{\varepsilon \cdot E^2}{2} \cdot A \cdot d = \frac{D^2}{2 \cdot \varepsilon} \cdot A \cdot d = \frac{(D \cdot A)^2}{2 \cdot \varepsilon \cdot A / d} = \frac{Q^2}{2C} = C \cdot \frac{u^2}{2}$$

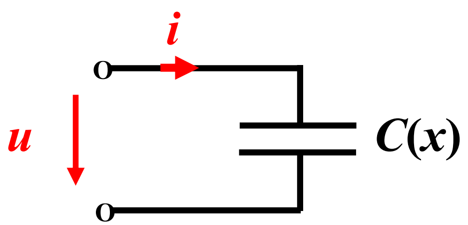
# Energiebegriffe

## Energiebilanz: Kondensator + Spannungsquelle (1)

- **Berechnung der elektrischen Kraft $F_e$ über „Energiebilanz“:**
  **Prinzip der „virtuellen“ Verschiebung:**
  Zwei Variable: $x$ und $u \Rightarrow W_e^*$
  bzw. $x$ und $Q \Rightarrow W_e$

- Energieänderung bei einer gegenüber den Körperabmessungen kleinen Verschiebung $\delta s$ der beiden Elektroden ($x_1 = d$, $x_2 = d + \delta s$),
  die wegen der Annahme $t$ = konst. nur gedacht (= **„virtuell“**) ist.
  Es ändert sich nur $x$, aber nicht $u$ am Kondensator, weil $u(t) = u(\text{konst.})$ konstant ist.




Verbraucher-Zählpfeilsystem (VZS)

# Energiebegriffe

## Energiebilanz: Kondensator + Spannungsquelle (2)

- Elektrische Energieänderung („el. Arbeit“) d$W_{el}$ bei $C(x)$, die von der Spannungsquelle verrichtet wird.
- Die el. Spannung $u$ wird wegen $u = \text{konst.}$ von einer idealen Spannungsquelle eingeprägt.
- Wir lassen die virtuelle Verschiebung $\delta s$ und ihre Auswirkungen, z. B.: $\delta W_{el}$ , die auch endlich groß sein können, z. B. $\Delta W_{el}$ , nun infinitesimal klein werden: $dW_{el}$ .

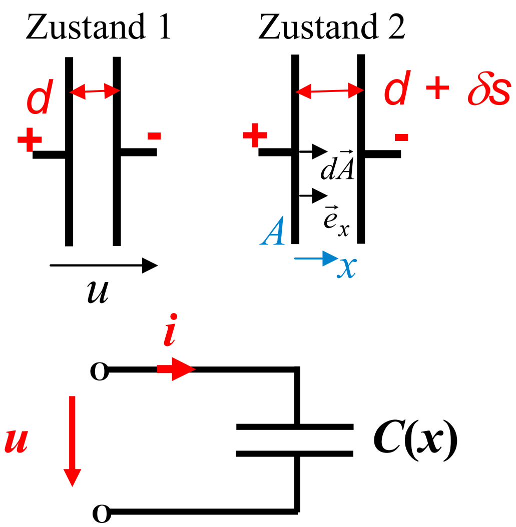
$$p_{el}(t) = u(t) \cdot i(t) \qquad i(t) = dQ/dt$$

$$dW_{el} = p_{el} \cdot dt = u \cdot i \cdot dt = u \cdot dQ$$

$$\Delta W_{el} = u \cdot \Delta Q = u \cdot Q_2 - u \cdot Q_1 = (W_{e,2} + W_{e,2}^*) - (W_{e,1} + W_{e,1}^*)$$

$$u \cdot \Delta Q = (W_{e,2} - W_{e,1}) + (W_{e,2}^* - W_{e,1}^*) = \Delta W_e + \Delta W_e^*$$

$$u \cdot dQ = dW_e + dW_e^*$$



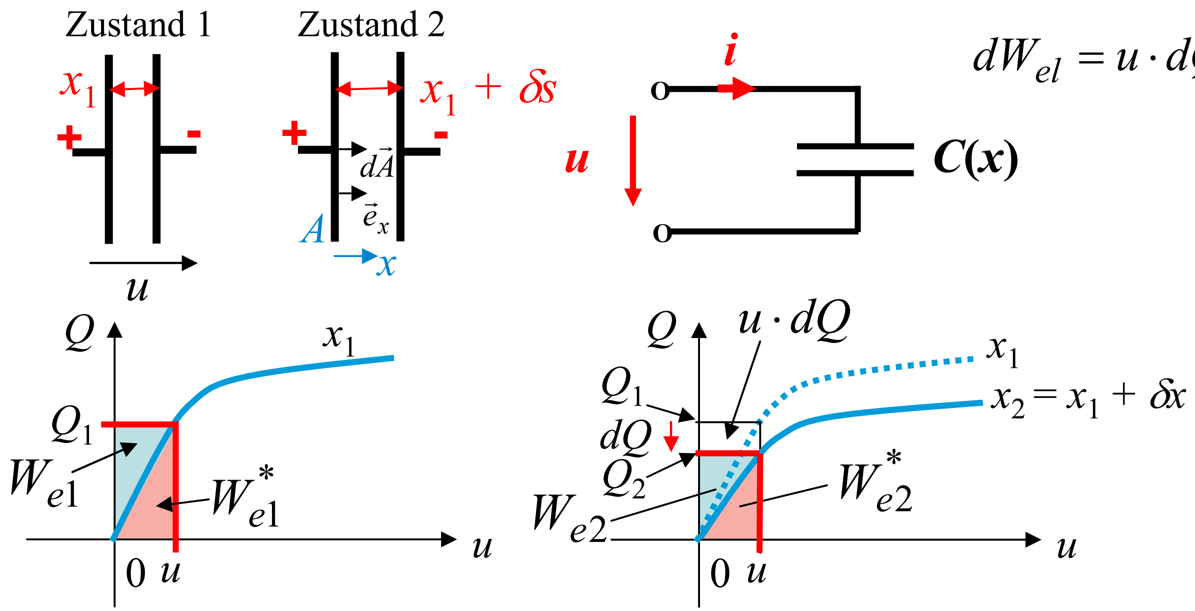

Verbraucher-Zählpfeilsystem (VZS)

# Energiebegriffe

## Beispiel 1a: Energiebilanz im Kondensator, $\varepsilon = \varepsilon(u)$: Plattenabstand nimmt zu bei $u$ = konst.

**Beispiel:** $u = \text{konst.};\ \Delta Q = Q_2 - Q_1 < 0 \quad u \cdot \Delta Q = (W_{e,2} - W_{e,1}) + (W_{e,2}^* - W_{e,1}^*) = \Delta W_e + \Delta W_e^* < 0$

$$dW_{el} = u \cdot dQ < 0, W_{e,2} < W_{e,1}, W_{e,2}^* < W_{e,1}^*$$




**Beispiel:**
Nichtlinearer Kondensator
$\varepsilon = \varepsilon(u)$

- Plattenabstand nimmt zu, Kapazität $C$ sinkt, die el. Ladung $Q$ je Platte nimmt bei $u$ = konst. ab.
- $E$- und $D$-Feld nehmen ab, die im Feld gespeicherte el. Energie $W_e$ sinkt trotz Feldvolumenzunahme. (Auch $W_e^*$ sinkt).
- Die Spannungsquelle nimmt el. Energie $dW_{el}$ auf. Im VZS ist daher $dW_{el} < 0$!

# Energiebegriffe

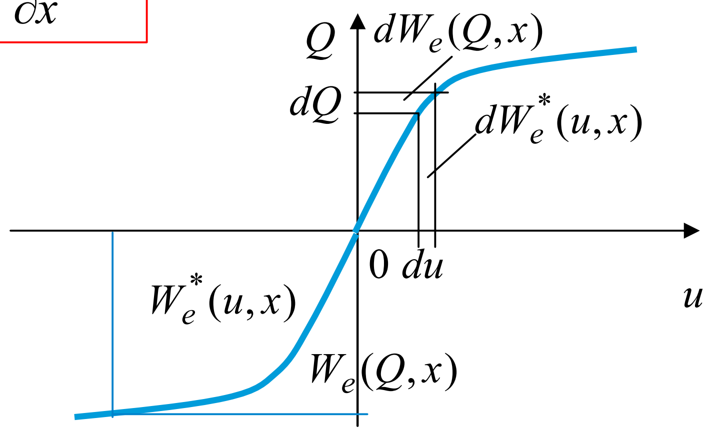
## Kraft $F_e$ in Abhängigkeit von ($Q$, $x$) bzw. ($u$, $x$)

$$dW_{el} = u \cdot dQ = dW_e + F_e \cdot dx \Rightarrow dW_e = u \cdot dQ - F_e \cdot dx \Rightarrow W_e = W_e(Q,x)$$

- Für die gespeicherte elektrische Energie $W_e$ sind die unabhängigen Variablen $Q$ und $x$.
- Die Spannung $u$ stellt sich je nach $C(x)$ gemäß $u = Q/C$ ein
- Vollständige Änderung der gespeicherten el. Energie $W_e$ mit $Q$ und $x$:

$$dW_e(Q,x) = \frac{\partial W_e}{\partial Q} \cdot dQ + \frac{\partial W_e}{\partial x} \cdot dx = u \cdot dQ - F_e \cdot dx$$

$$\boxed{u = \frac{\partial W_e(Q,x)}{\partial Q} \qquad F_e = -\frac{\partial W_e(Q,x)}{\partial x}}$$




$$\boxed{Q \cdot u = W_e(Q,x) + W_e^*(u,x)}$$

# Energiebegriffe
## *LEGENDRE*-Transformation

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Wechsel von der unabhängigen Variablen Q auf *u* über die *LEGENDRE*-Transformation: $dW_e = \underbrace{u \cdot dQ} - F_e \cdot dx$

$$d(Q\cdot u) = dQ\cdot u + Q\cdot du \Rightarrow dW_e = \overbrace{d(Q\cdot u) - Q\cdot du} - F_e\cdot dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d(Q\cdot u) - dW_e = Q\cdot du + F_e\cdot dx$$

$$u\cdot Q = W_e(Q,x) + W_e^*(u,x) \Rightarrow d(u\cdot Q) = dW_e + dW_e^* \Rightarrow dW_e^* = d(u\cdot Q) - dW_e$$

$$Q\cdot du + F_e\cdot dx = dW_e^* = dW_e^*(u,x) = \frac{\partial W_e^*}{\partial u}\cdot du + \frac{\partial W_e^*}{\partial x}\cdot dx, \quad W_e^* = W_e^*(u,x)$$

$$\boxed{Q = \frac{\partial W_e^*(u,x)}{\partial u} \qquad F_e = \frac{\partial W_e^*(u,x)}{\partial x}}$$

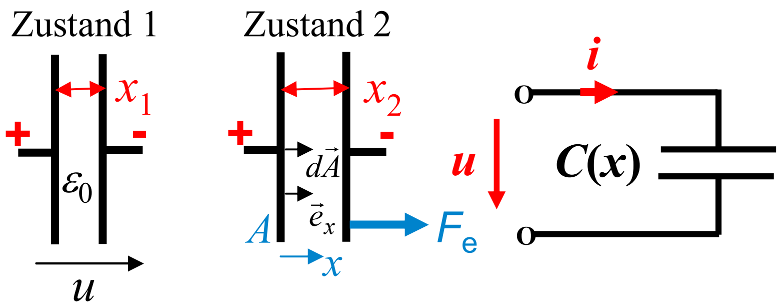
$$\boxed{u = \frac{\partial W_e(Q,x)}{\partial Q} \qquad F_e = -\frac{\partial W_e(Q,x)}{\partial x}}$$

- Bei Verwendung der Variablen Q wird $F_e$ aus $W_e$ berechnet (mit MINUS-Vorzeichen!), bei Verwendung von *u* jedoch aus $W_e^*$ (mit PLUS-Vorzeichen)!

## *Beispiel 1b:* El. Kraft $F_e$ im Kondensator, $\varepsilon = \varepsilon_0$: Plattenabstand nimmt zu bei $u$ = konst. (1)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

**Beispiel:** $u = U = \text{konst.};\ \Delta Q = Q_2 - Q_1 < 0 \qquad C(x) = \varepsilon_0 \cdot A / x$




$$\Delta W_{el} = \int_{Q(x_1)=Q_1}^{Q(x_2)=Q_2} u \cdot dQ = U \cdot \int_{Q_1}^{Q_2} dQ = U \cdot (Q_2 - Q_1) < 0$$

$$\Delta W_{el} = U^2 \cdot (C(x_2) - C(x_1)) = U^2 \cdot \varepsilon_0 \cdot A \cdot \left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}\right) < 0$$

$$W_e^* = \frac{C(x) \cdot U^2}{2} \rightarrow F_e(x) = \frac{\partial W_e^*}{\partial x} = \frac{\varepsilon_0 \cdot A \cdot U^2}{2} \cdot \frac{\partial(1/x)}{\partial x} = -\frac{\varepsilon_0 \cdot A \cdot U^2}{2x^2} < 0$$

Kraft $F_e$ wirkt anziehend!

Allgemein: $F_e = \dfrac{dW_e^*}{dx} = \dfrac{d}{dx}\dfrac{C(x) \cdot U^2}{2} = C'(x) \cdot \dfrac{U^2}{2} < 0$

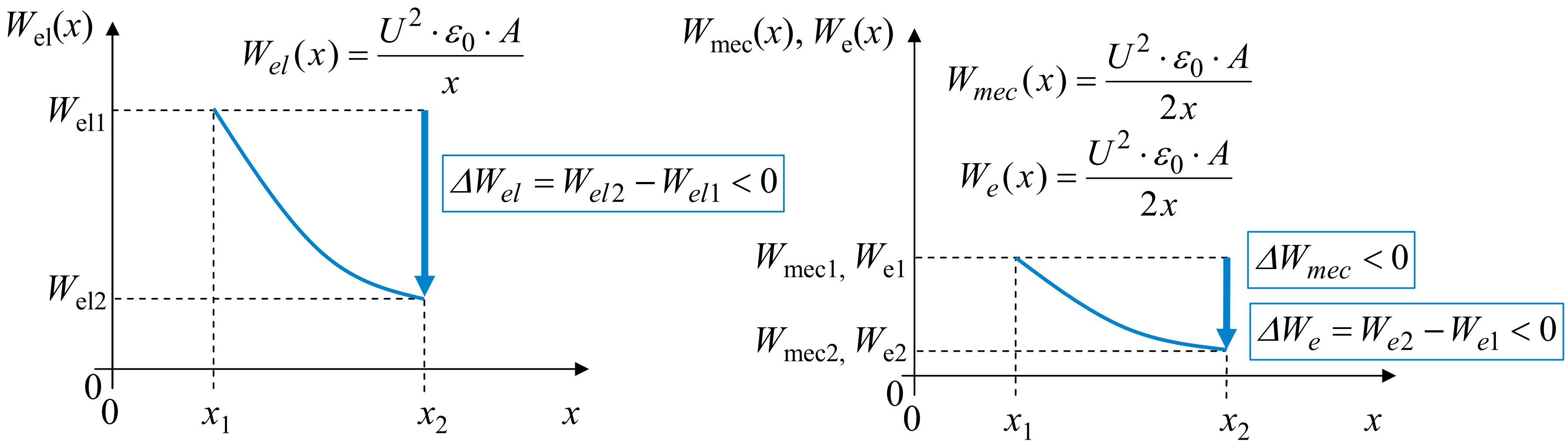
$$\Delta W_{mec} = \int_{x_1}^{x_2} F_e(x) \cdot dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dW_e^*}{dx} \cdot dx = \int_{W_{e1}^*}^{W_{e2}^*} dW_e^* = W_{e2}^* - W_{e1}^* = \frac{\varepsilon_0 \cdot A \cdot U^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}\right) < 0$$

$$\Delta W_e = \int_{W_e(x_1)}^{W_e(x_2)} dW_e = W_e(x_2) - W_e(x_1) = \frac{Q_2^2}{2C(x_2)} - \frac{Q_1^2}{2C(x_1)} = \frac{U^2}{2} \cdot (C(x_2) - C(x_1)) = \frac{\varepsilon_0 A \cdot U^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}\right) < 0$$

Kontrolle: $\Delta W_{el} = \Delta W_{mec} + \Delta W_e < 0$

## *Beispiel 1b:* El. Kraft $F_e$ im Kondensator, $\varepsilon = \varepsilon_0$: (2)
## Plattenabstand nimmt zu bei $u$ = konst.

**Beispiel:** $u = U = \text{konst.};\ \Delta Q = Q_2 - Q_1 < 0 \qquad C(x) = \varepsilon_0 \cdot A / x$

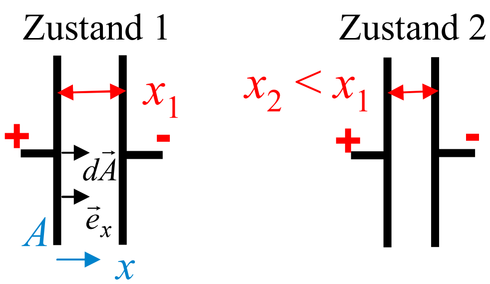


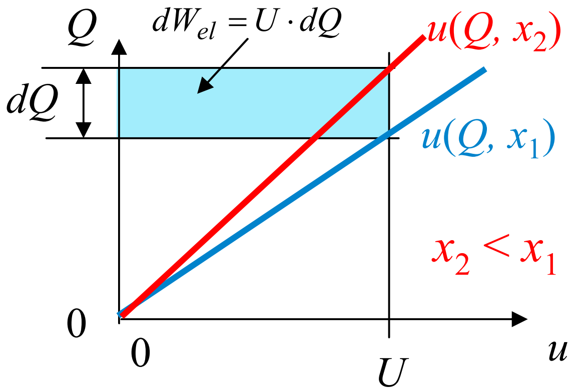

- Der Plattenabstand nimmt von $x_1$ nach $x_2$ zu, indem gegen die anziehende el. Kraft $F_e$ von außen an dem System mech. Arbeit verrichtet wird, daher im VZS: $\Delta W_{mec} < 0$!
- Auch die im Feld gespeicherte el. Energie $W_e$ sinkt wegen $u$ = konst.: $\Delta W_e < 0$!
- Die Spannungsquelle nimmt die Summe $\Delta W_{mec} + \Delta W_e$ als el. Energie $W_{el}$ auf: $W_{el} < 0$!

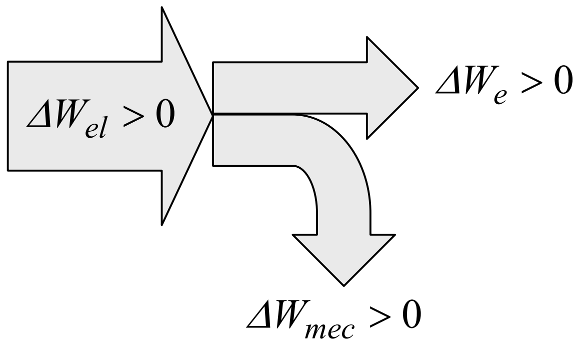
# Energiebegriffe

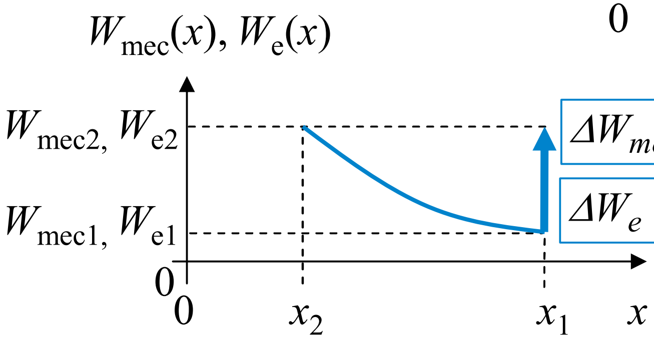
## Beispiel 2: Kraft $F_e$ im Kondensator , $\varepsilon = \varepsilon_0$: Plattenabstand nimmt ab bei $u$ = konst.

**Beispiel:** $u = U = \text{konst.};\ \Delta Q = Q_2 - Q_1 > 0 \qquad C(x) = \varepsilon_0 \cdot A / x \Rightarrow C(x_2) > C(x_1)$




$\boxed{\Delta W_{mec} = W_{mec2} - W_{mec1} > 0}$

$\boxed{\Delta W_e = W_{e2} - W_{e1} > 0}$

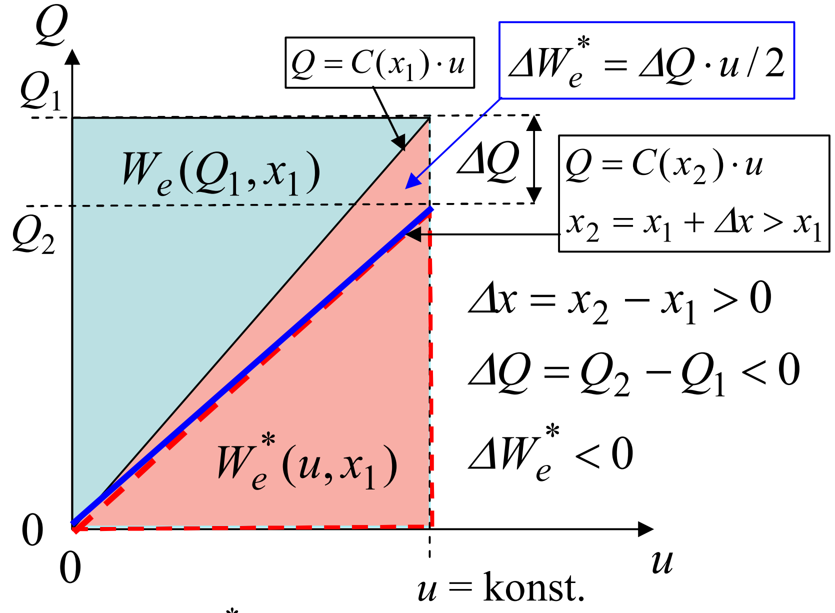
$$W_{mec}(x) = \frac{U^2 \cdot \varepsilon_0 \cdot A}{2x} \qquad W_e(x) = \frac{U^2 \cdot \varepsilon_0 \cdot A}{2x}$$

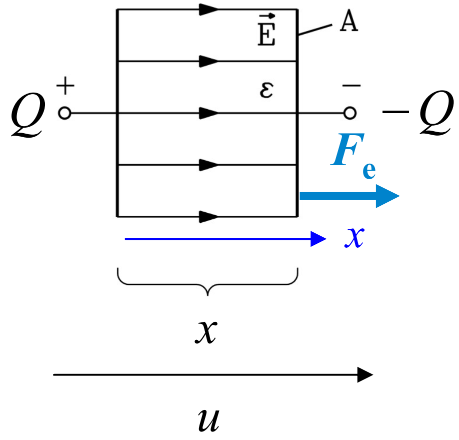
- Der Plattenabstand nimmt von $x_1$ nach $x_2$ AB, indem das System über die anziehende el. Kraft $F_e$ mech. Arbeit verrichtet, daher im VZS: $\Delta W_{mec} > 0$!
- Auch die im Feld gespeicherte el. Energie $W_e$ STEIGT mit $C$ wegen $u$ = konst.: $\Delta W_e > 0$!
- Die Spannungsquelle gibt die Summe $\Delta W_{mec} + \Delta W_e$ als el. Energie $W_{el}$ AB: $W_{el} > 0$!

# Energiebegriffe

## Kondensator an idealer Spannungsquelle; *u* = konst., Kraftformel aus $W^*_e$ anschaulich

- *u* = konst.:
  Platten sind an idealer Spannungsquelle, so dass *Q* variabel ist!
  Plattenabstand $x$ variabel von $x_1$ auf $x_2 > x_1$.




$$F_e = \frac{dW_e^*(u,x)}{dx} \Rightarrow F_e = \frac{\Delta W_e^*}{\Delta x} < 0$$

$$F_e = \frac{\Delta Q}{2}\cdot\frac{u}{\Delta x} = \frac{u\cdot\Delta C}{2\Delta x}\cdot u = \frac{u^2\cdot\varepsilon\cdot A\cdot\Delta(1/x)}{2\Delta x}$$

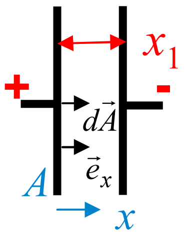
$$F_e = -\frac{(u/x)^2\cdot\varepsilon\cdot A\cdot\Delta x}{2\Delta x} = -\frac{E^2\cdot\varepsilon\cdot A}{2} = -\underbrace{\frac{D\cdot E}{2}}_{p_{e,x}}\cdot A < 0$$

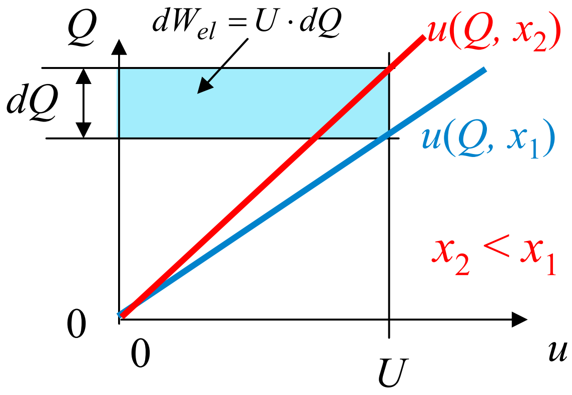
# Energiebegriffe

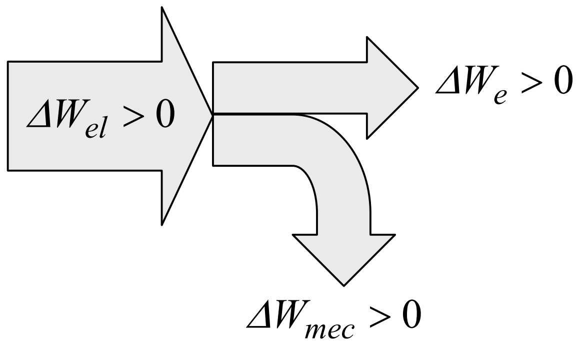
## <u>*Beispiel 2:*</u> Kraft $F_e$ im Kondensator , $\varepsilon = \varepsilon_0$: Plattenabstand nimmt <u>ab</u> bei $u$ = konst.

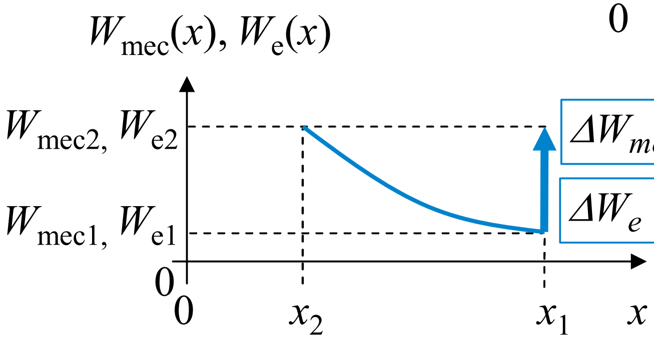
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

<u>***Beispiel:***</u> $u = U = \text{konst.};\ \Delta Q = Q_2 - Q_1 > 0 \qquad C(x) = \varepsilon_0 \cdot A / x \Rightarrow C(x_2) > C(x_1)$




$\boxed{\Delta W_{mec} = W_{mec2} - W_{mec1} > 0}$

$\boxed{\Delta W_e = W_{e2} - W_{e1} > 0}$

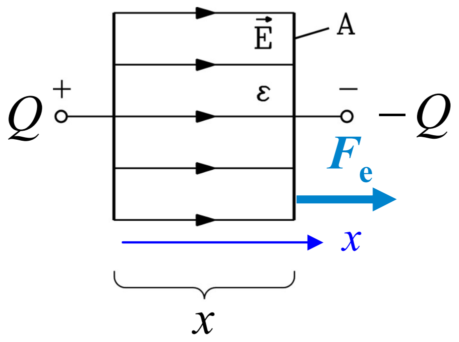
$$W_{mec}(x) = \frac{U^2 \cdot \varepsilon_0 \cdot A}{2x} \qquad W_e(x) = \frac{U^2 \cdot \varepsilon_0 \cdot A}{2x}$$

- Der Plattenabstand nimmt von $x_1$ nach $x_2$ AB, indem das System über die anziehende el. Kraft $F_e$ mech. Arbeit verrichtet, daher im VZS: $\Delta W_{mec} > 0$!
- Auch die im Feld gespeicherte el. Energie $W_e$ STEIGT mit $C$ wegen $u$ = konst.: $\Delta W_e > 0$!
- Die Spannungsquelle gibt die Summe $\Delta W_{mec} + \Delta W_e$ als el. Energie $W_{el}$ AB: $W_{el} > 0$!

# Energiebegriffe

## *Beispiel 3:* Kondensator isoliert: $Q$ = konst., Kraftformel aus $W_e$ anschaulich

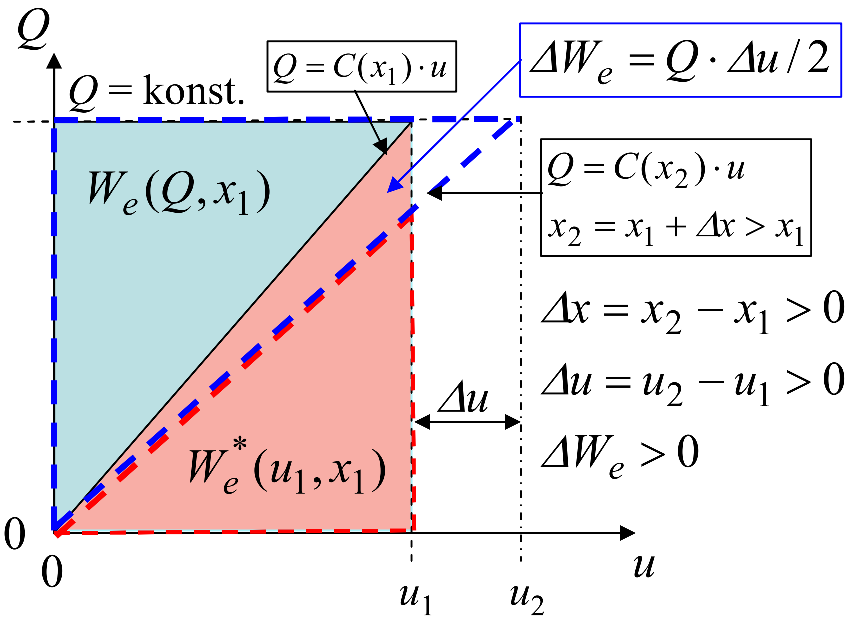
- $Q$ = konst.:
  Platten sind von Spannungsquelle getrennt!
  Plattenabstand $x$ variabel von $x_1$ auf $x_2 > x_1$




$u$ nimmt mit Plattenabstand $x$ zu:
$x_2 > x_1$

$$E = D/\varepsilon = (Q/A)/\varepsilon = \text{konst.}$$

$$u(x_2) = E \cdot x_2 > u(x_1) = E \cdot x_1$$




$$\Delta x = x_2 - x_1 > 0$$

$$\Delta u = u_2 - u_1 > 0$$

$$\Delta W_e > 0$$

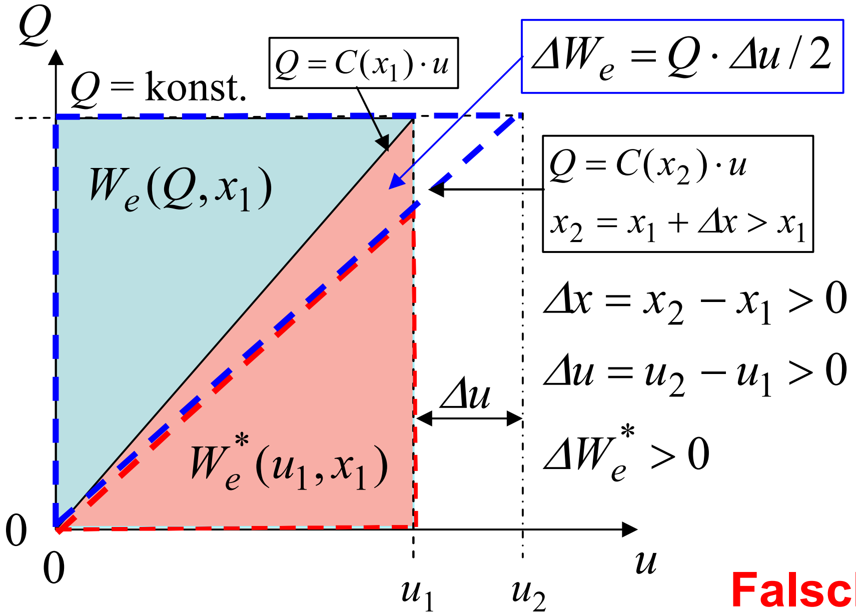
$$F_e = -\frac{dW_e(Q,x)}{dx} \Rightarrow F_e = -\frac{\Delta W_e}{\Delta x} < 0$$

$$F_e = -\frac{\Delta W_e}{\Delta x} = -\frac{Q}{2} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} = -\frac{D \cdot A}{2} \cdot E$$

$$F_e = -\frac{D \cdot E}{2} \cdot A = -p_{e,x} \cdot A$$

# Energiebegriffe

## *Achtung:* Falsche Berechnung mit der Kraftformel (1)




$Q = \text{konst.}, E = \text{konst}:$

$$F_e = \frac{dW_e^*(u,x)}{dx} \Rightarrow F_e = \frac{\Delta W_e^*}{\Delta x} > 0$$

$$\Delta W_e^* = (u_2^2 \cdot C(x_2) - u_1^2 \cdot C(x_1))/2 = \Delta(u^2 \cdot C)/2$$

$$F_e = \frac{\Delta W_e^*}{\Delta x} = \frac{\Delta(u^2 \cdot C)/2}{\Delta x} = \frac{\Delta((E\cdot x)^2 \cdot \varepsilon \cdot A/x)}{2\cdot \Delta x}$$

$$\cancel{F_e = \frac{\varepsilon \cdot E^2 \cdot A}{2}\cdot\frac{\Delta x}{\Delta x} = \frac{D\cdot E}{2}\cdot A = p_{e,x}\cdot A}$$

**Falsch!**

- Es ergibt sich (wegen der linearen Rechnung) zwar der richtige Betrag der Kraft $F_e$, aber das falsche Vorzeichen!
- Die zweite unabhängige Variable ist bei der Kraftformel mit $W_e$* die Spannung $u$, die bei der Ableitung nach $x$ KONSTANT gehalten werden muss, und nicht $\Delta u = E\cdot\Delta x$ variabel!

$$F_e = \frac{\Delta W_e^*}{\Delta x} = \left.\frac{\Delta(u^2\cdot C)}{2\cdot\Delta x}\right|_{u=\text{konst.}} = \frac{u^2\cdot\Delta C}{2\cdot\Delta x} = \frac{u^2\cdot\Delta(\varepsilon\cdot A/x)}{2\cdot\Delta x} = -\frac{u^2}{x^2}\cdot\frac{\varepsilon\cdot A}{2} = -\frac{\varepsilon E^2\cdot A}{2} = -\frac{D\cdot E}{2}\cdot A = -p_{e,x}\cdot A$$

**Richtig!**

# Energiebegriffe

## *Achtung:* Falsche Berechnung mit der Kraftformel (2)

- Eine falsche Kraftberechnung ergibt sich auch, wenn $W_e$ und $W_e^*$ verwechselt werden.

Falsch: $W_e = C \cdot u^2 / 2$

$$F_e = -\frac{dW_e}{dx} = -\frac{u^2 \cdot dC}{2 \cdot dx} = -\frac{u^2 \cdot d(\varepsilon \cdot A / x)}{2 \cdot dx} = \frac{u^2}{x^2} \cdot \frac{\varepsilon \cdot A}{2} = \frac{\varepsilon E^2 \cdot A}{2} = \frac{D \cdot E}{2} \cdot A = p_{e,x} \cdot A$$

- Es ergibt sich wieder (wegen der linearen Rechnung) zwar der richtige Betrag der Kraft $F_e$, aber das falsche Vorzeichen!

Richtig: $W_e = Q^2 / (2C)$

$$F_e = -\frac{dW_e}{dx} = -\frac{Q^2 \cdot d(1/C)}{2 \cdot dx} = -\frac{Q^2 \cdot dx}{2 \cdot \varepsilon \cdot A \cdot dx} = -\frac{u^2}{x^2} \cdot \frac{\varepsilon \cdot A}{2} = -\frac{\varepsilon E^2 \cdot A}{2} = -\frac{D \cdot E}{2} \cdot A = -p_{e,x} \cdot A$$

- Es ergibt sich der richtige Betrag der Kraft $F_e$ mit richtigem Vorzeichen!

# Energiebegriffe

**Übung**

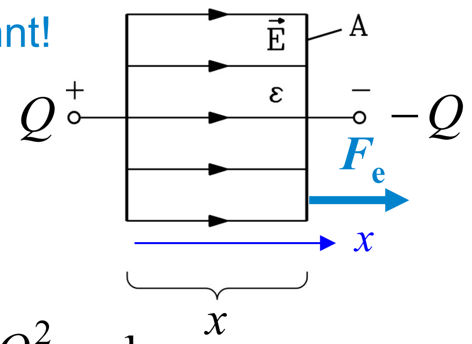
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

## *Beispiel 3:* Kraft $F_e$ im Plattenkondensator (1): Plattenabstand nimmt zu bei $Q$ = konst.

- ***Beispiel 3:*** Q = konst.: Platten sind von Spannungsquelle getrennt! Plattenabstand $x$ variabel von $x_1$ auf $x_2 > x_1$:

  Wie groß ist Kraft $F_e$ bei Plattenabstand $x$ ?

  Erstellen Sie die Energiebilanz für den Vorgang $x_1 \rightarrow x_2$ !




$$C(x) = \varepsilon \cdot A / x \Rightarrow W_e(Q,x) = Q^2/(2C(x))$$

$$F_e = -\left.\frac{\partial W_e(Q,x)}{\partial x}\right|_{Q=\text{konst.}} = -\frac{Q^2}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{C(x)} = -\frac{Q^2}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{\varepsilon\cdot A} = -\frac{Q^2}{2}\cdot\frac{1}{\varepsilon\cdot A} < 0$$

- Die Kraft $F_e$ ist gegen die positive $x$-Zählrichtung gerichtet, wirkt also Platten-anziehend !

- Alternativer Rechnungsgang („virtuelle Verschiebung“ $x$; $u$ ändert sich dabei nicht!):

$$W_e^*(u,x) = \frac{C(x)\cdot u^2}{2} \Rightarrow F_e = \left.\frac{\partial W_e^*(u,x)}{\partial x}\right|_{u=\text{konst.}} = \frac{u^2}{2}\cdot\frac{\partial C(x)}{\partial x} = \frac{u^2}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\frac{\varepsilon\cdot A}{x} = -\frac{u^2}{2}\cdot\frac{\varepsilon\cdot A}{x^2}$$

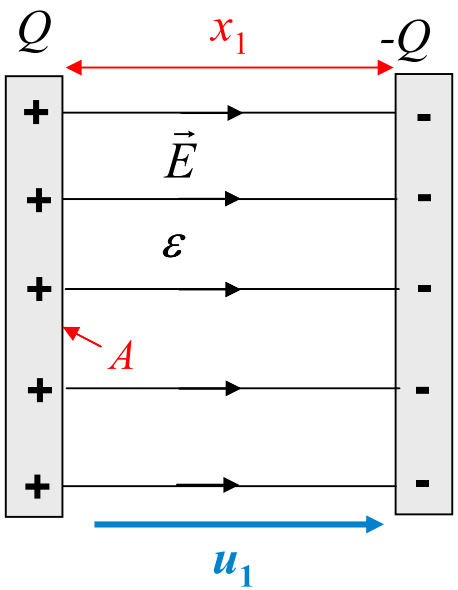
- Beide Rechnungswege führen zur identischen Kraft $F_e$, da am Ort $x$ gilt: $Q(x) = C(x)\cdot u(x)$

$$F_e = -\frac{u^2}{2}\cdot\frac{\varepsilon\cdot A}{x^2} = -\frac{(Q/C(x))^2}{2}\cdot\frac{\varepsilon\cdot A}{x^2} = -\frac{Q^2}{2}\cdot\frac{x^2}{(\varepsilon\cdot A)^2}\cdot\frac{\varepsilon\cdot A}{x^2} = -\frac{Q^2}{2}\cdot\frac{1}{\varepsilon\cdot A}$$

Übung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

## *Beispiel 3:* Kraft $F_e$ im Plattenkondensator (2): Plattenabstand nimmt zu bei $Q$ = konst.

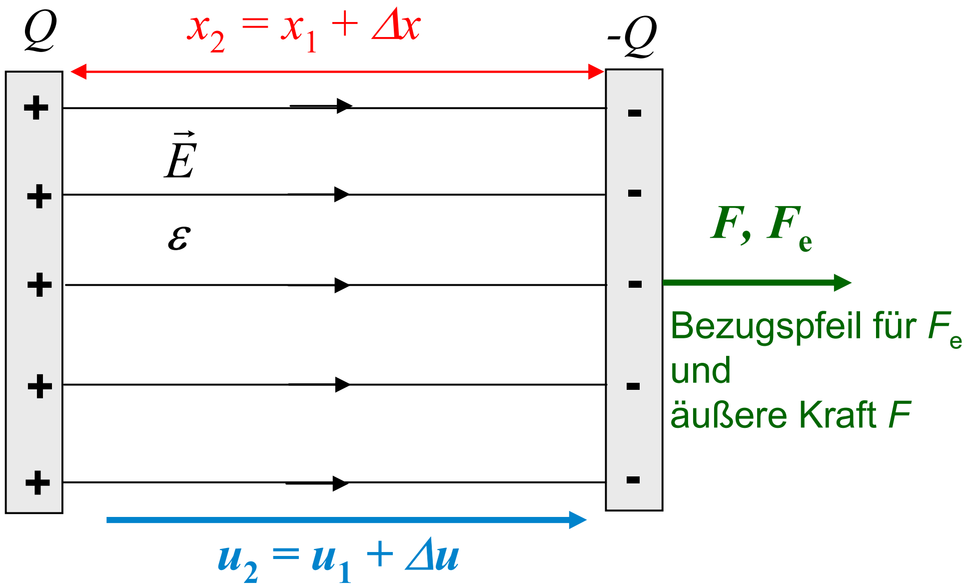



$$E = \frac{Q}{\varepsilon \cdot A} = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

$$w_e = \varepsilon \cdot E^2 / 2$$

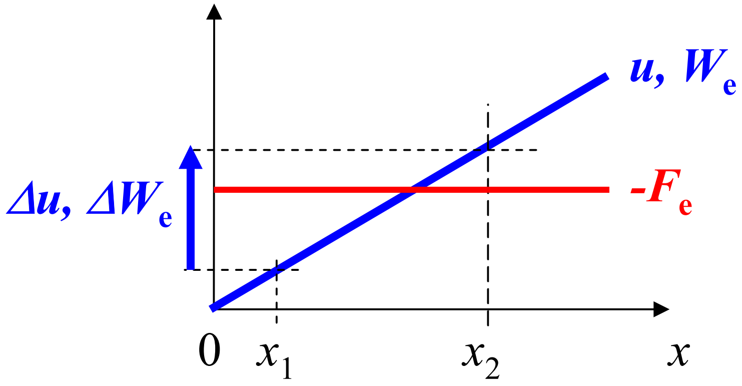
$$u = E \cdot x \rightarrow$$

$$\rightarrow du = E \cdot dx$$




El. Feldenergie: $W_e = w_e \cdot (A \cdot x_1)$

$$W_e + \Delta W_e = w_e \cdot A \cdot (x_1 + \Delta x) = w_e \cdot A \cdot x_2$$



Übung

# *Beispiel 3:* Kraft $F_e$ im Plattenkondensator (3): Plattenabstand nimmt zu bei $Q$ = konst.

- Energiebilanz für den Vorgang $x_1 \to x_2$:

$$Q = konst. \to dQ = 0 : dW_{el} = u \cdot dQ = dW_e + F_e \cdot dx = 0$$

$$\Rightarrow dW_e = -F_e \cdot dx \Rightarrow \Delta W_e = \int_{W_e(x_1)}^{W_e(x_2)} dW_e = W_e(x_2) - W_e(x_1) = -\int_{x_1}^{x_2} F_e(x) \cdot dx = -\Delta W_{mec}$$

$$\Delta W_e = \frac{Q^2 \cdot (x_2 - x_1)}{2 \cdot \varepsilon \cdot A} \qquad \Delta W_{mec} = \int_{x_1}^{x_2} F_e(x) \cdot dx = -\frac{Q^2}{2 \cdot \varepsilon \cdot A} \cdot \int_{x_1}^{x_2} dx = -\frac{Q^2 \cdot (x_2 - x_1)}{2 \cdot \varepsilon \cdot A}$$

## Energiebegriffe

Übung

## ***Beispiel 3:*** Kraft $F_e$ im Plattenkondensator (4): Plattenabstand nimmt zu bei $Q$ = konst.

- Mit der **äußeren Kraft *F*** wurde die rechte Elektrode von der linken um den Weg $\Delta x = x_2 - x_1$ wegbewegt gegen die bremsende elektrische Kraft $F_e < 0$.
- Dabei wurde die **mechanische Arbeit $\Delta W_{mec}$** $< 0$ verrichtet, also dem System zugeführt, daher ist sie gemäß dem VZS negativ!
- Diese mech. Arbeit ist wegen $\Delta W_e = -\Delta W_{mec}$ nun in Form **erhöhter elektrischer Feldenergie $\Delta W_e$** im erhöhten Feldvolumen $A \cdot (x_2 - x_1)$ des $E$-Felds gespeichert (Energieerhaltung!).
- Umkehrung: Vorgang: $x_1 \rightarrow x_2 < x_1$
  Von selbst bewegen sich die Platten durch die anziehende Kraft $F_e$ aufeinander zu und verrichten dabei Arbeit $\Delta W_{mec} > 0$
  auf Kosten der abnehmenden el. Feldenergie $\Delta W_e = -\Delta W_{mec} < 0$!

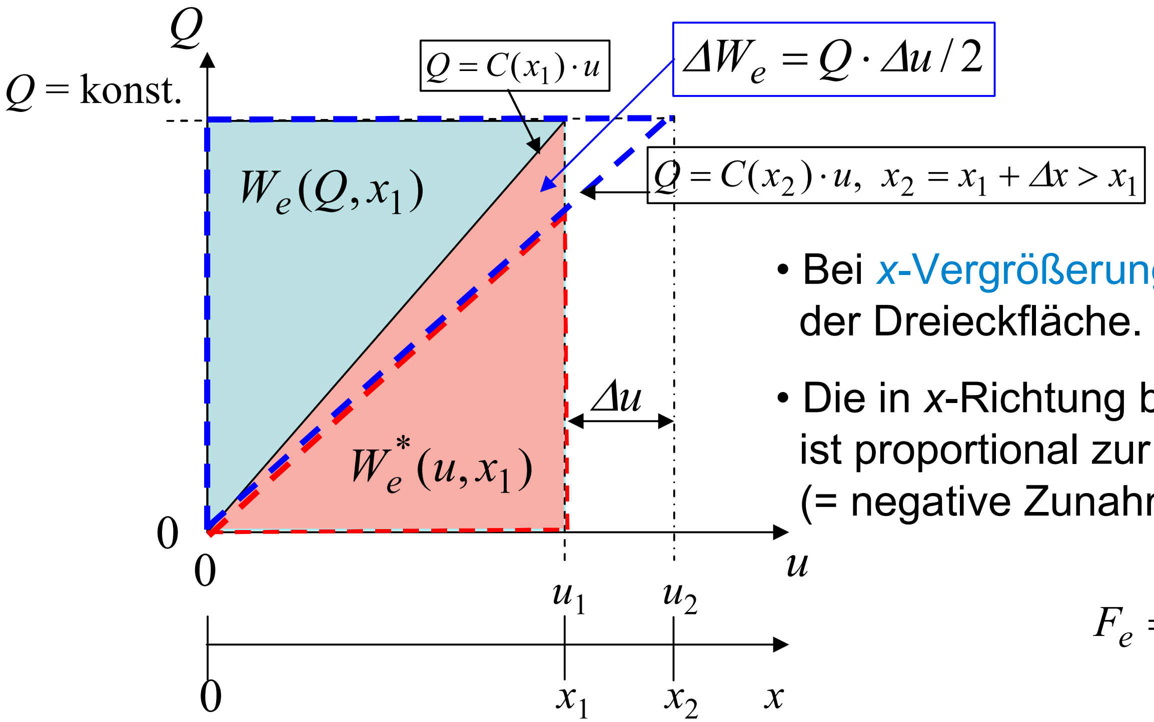
Übung

# *Beispiel 3:* Kraft $F_e$ im Plattenkondensator (5): Plattenabstand nimmt zu bei $Q$ = konst.



- Anschaulich: $W_e(Q,x) = \dfrac{Q^2}{2C(x)} = \dfrac{Q^2 \cdot x}{2 \cdot \varepsilon \cdot A} \sim x$

$$\Delta W_e(Q,x) = \frac{Q^2 \cdot \Delta x}{2 \cdot \varepsilon \cdot A} = \frac{Q \cdot Q \cdot \Delta x}{2 \cdot \varepsilon \cdot A} = \frac{Q \cdot E \cdot \Delta x}{2} = \frac{Q \cdot \Delta u}{2}$$




- Bei $x$-Vergrößerung steigt $W_e$ bei $Q$ = konst. gemäß der Dreieckfläche.
- Die in $x$-Richtung bremsende (negative) Kraft $F_e$ ist proportional zur negativen Änderung (= negative Zunahme) von $W_e \Rightarrow F_e < 0$:

$$F_e = -\frac{\partial W_e(Q,x)}{\partial x}$$

# Energiebegriffe

**Selbststudium**

## Magnetische Energiedichte $w_m$ (nichtlinear)

- **Analoge Vorgehensweise** bei der magnetostatischen Energie wie bei der elektrostatischen Energie!

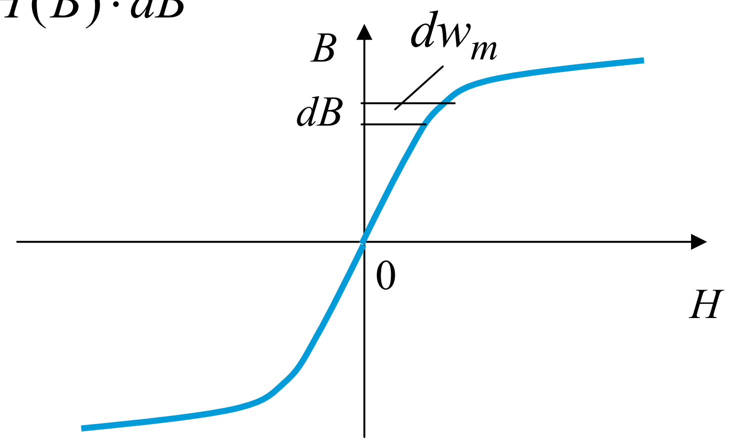
### ▪ Magnetostatische Energiedichte $w_m$:

Durch elektrischen Gleichstrom $I$ UND magnetisierte Materie ($J_M$):

Differentiell kleiner Zuwachs an Energiedichte: $dw_m = \vec{H}(B) \cdot d\vec{B}$

Energiedichte $w_m$:

$$w_m(H,B) = \int dw_m = \int_0^B \vec{H}(B') \cdot d\vec{B}'$$




***Sonderfall:*** Isotroper Werkstoff $\vec{B} \uparrow\uparrow \vec{H}$

$$w_m(H,B) = \int_0^B \vec{H}(B') \cdot d\vec{B}' = \int_0^B H(B') \cdot dB'$$

Die Fläche zwischen $B$-Achse und $H(B)$-Kurve ist $w_m$!

***Beispiel:***
Nichtlinear magnetisierbarer isotroper Werkstoff ohne Hysterese

# Energiebegriffe

Selbststudium

## Magnetische Energiedichte $w_m$ (linear)

**Sonderfall:** Anisotroper linearer Werkstoff $\vec{B} = \begin{pmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{pmatrix} \cdot \vec{H}$

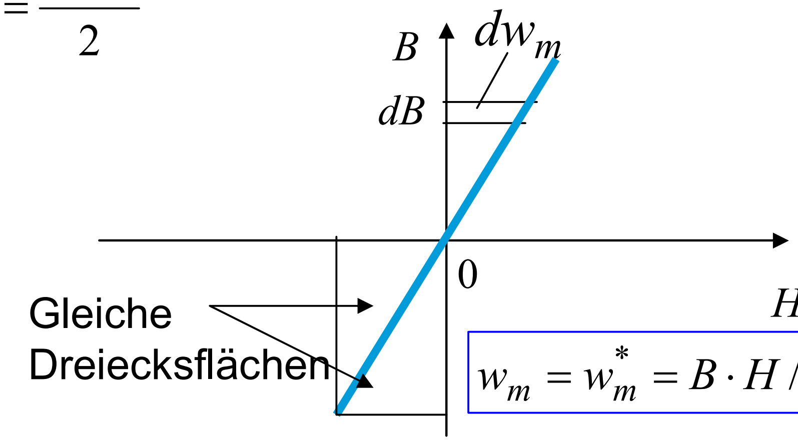
z.B.: kaltgewalzte Transformatorbleche $\mu_{xx}, \mu_{xy}, \text{etc.} = \text{konst.}$

Für $\mu_{xy} = \mu_{yx} = \mu_{xz} = \mu_{zx} = \mu_{zy} = \mu_{yz} = 0$ : $w_m(B,H) = \dfrac{\vec{B} \cdot \vec{H}}{2}$

**Sonderfall:** Isotroper linearer Werkstoff $\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$ $\quad \mu = \text{konst.} \Leftrightarrow \vec{B} \uparrow\uparrow \vec{H}$

$$w_m(H,B) = \int_0^B \vec{H}(B') \cdot d\vec{B}' = \frac{1}{\mu} \int_0^B B' \cdot dB' = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{B \cdot H}{2}$$

$$w_m = \frac{\vec{B} \cdot \vec{H}}{2} = \bigg|_{isotrop} = \frac{1}{2\mu} \cdot \left|\vec{B}\right|^2 = \frac{1}{2\mu} \cdot B^2$$




$\boxed{w_m = w_m^* = B \cdot H / 2}$

# Energiebegriffe

## Magnetische Energie $W_m$ (nichtlinear)

Der gesamte vom magn. Feld erfüllte Raum ist Ort der dort verteilten Energiedichte $w_m$:

$$W_m = \int_V w_m(H,B)\cdot dV = \int_V w_m(V)\cdot dV$$

***Beispiel:*** Spule, $N$ Windungen:

Volumen: $dV = d\vec{A}\cdot d\vec{s}$

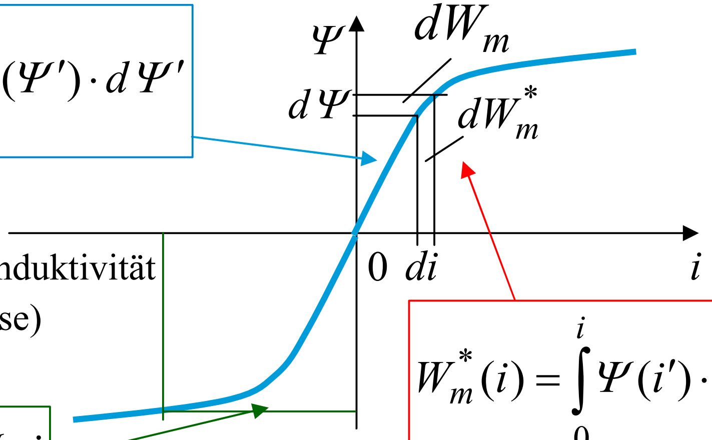
$$W_m = \int_V \int_0^B \vec{H}(B')\cdot d\vec{B}'\cdot dV = \oint_C \int_A \int_0^B \vec{H}(B')\cdot d\vec{B}'\cdot d\vec{A}\cdot d\vec{s}$$

$$\Psi = N\cdot\int_A \vec{B}\cdot d\vec{A} \qquad i = \frac{1}{N}\cdot\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{s}$$

$$W_m = \int_A \int_0^B \oint_C \vec{H}(B')\cdot d\vec{s}\cdot d\vec{B}'\cdot d\vec{A} = \int_A \int_0^B N\cdot i\cdot d\vec{B}'\cdot d\vec{A} = \int_0^{\Psi} i\cdot d\left(N\cdot\int_A \vec{B}'\cdot d\vec{A}\right) = \int_0^{\Psi} i\cdot d\Psi'$$

$$\boxed{\vec{B}\Leftrightarrow\Psi \quad \vec{H}\Leftrightarrow i}$$

$$\boxed{W_m(\Psi) = \int_0^{\Psi} i(\Psi')\cdot d\Psi'}$$




***Beispiel:***
Nichtlineare Induktivität
(ohne Hysterese)

$$\boxed{W_m^*(i) = \int_0^{i} \Psi(i')\cdot di'}$$

$$\boxed{W_m + W_m^* = \Psi\cdot i}$$

- Die Fläche zwischen $\Psi$-Achse und $i(\Psi)$-Kurve ist **magn. Energie $W_m$**
- Die Fläche zwischen $i$-Achse und $\Psi(i)$-Kurve nennt man **magn. Ergänzungsenergie $W_m^*$ („magn. Ko-Energie“)**

# Energiebegriffe

## Magnetische Energie $W_m$ (linear)

**Selbststudium**



***Sonderfall:*** Linear magnetisierbarer Werkstoff

$\Psi = L \cdot i :$

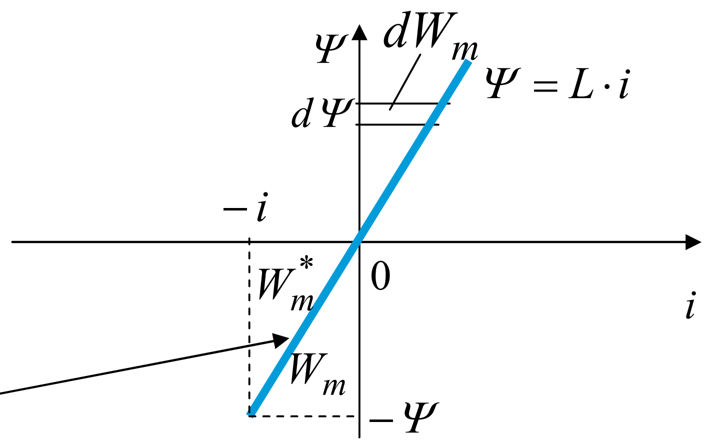
$$W_m(\Psi) = \int_0^{\Psi} i(\Psi') \cdot d\Psi' = \int_0^{\Psi} \frac{\Psi'}{L} \cdot d\Psi' = \frac{\Psi^2}{2L}$$

$$W_m^*(i) = \int_0^{i} \Psi(i') \cdot di' = \int_0^{i} L \cdot i' \cdot di' = \frac{L \cdot i^2}{2}$$

- Diagonale halbiert Rechteck (Fläche $\psi \cdot i$) in zwei gleiche Dreiecksflächen $W_m$ und $W_m^*$

$$W_m(\Psi) = \frac{\Psi^2}{2L} = \frac{(L \cdot i)^2}{2L} = \frac{L \cdot i^2}{2} = W_m^*(i)$$

***Beispiel:*** Lineare Induktivität

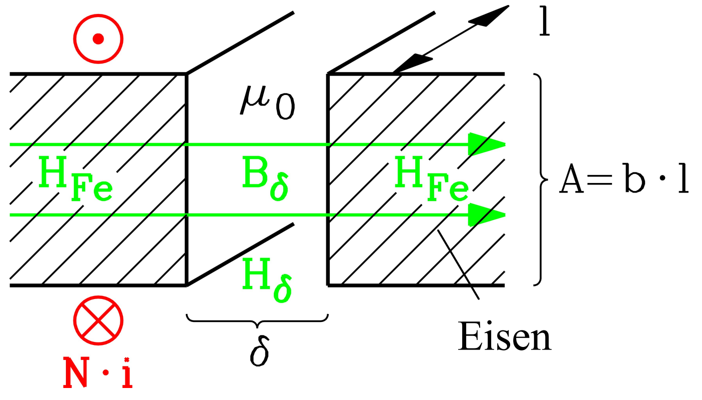



$$\boxed{W_m + W_m^* = \Psi \cdot i}$$

# Energiebegriffe - Beispiel
## Magnetische Energie $W_m$ zwischen Polen (1)

- Magn. Energie $W_m$ ist im felderfüllten Raum lokalisiert, der mit der Energiedichte $w_m$ „erfüllt“ ist!
- Die beiden Polschuhe **1** und **2** stehen unter mechanischer Spannung der sich gegenseitig anziehenden magnetisierten Eisenflächen („Fernwirkungsmodell“).
- Diese Kraft wird durch die wie „Gummischnüre“ ziehende Kraftwirkung des magnetischen Felds $B_\delta$ zwischen den Polschuhen als „*Maxwell*“scher Zug $p_m$ vermittelt („Nahwirkungsmodell“).

# Energiebegriffe
## Einachsiges Magnetfeld zwischen 2 Polschuhen




**Eisenpolschuhe** (Eisenrückschluss nicht dargestellt)

Eisenpermeabilität $\mu_{Fe}$ >> $\mu_0$,

$s_{Fe}$: *B*-Feldlinienlänge im Fe

*H*-Feld-Erregung durch Spule (*N* Windungen, Strom *i*)

Magnetischer Fluss: $\Phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = B_\delta \cdot A = B_{Fe} \cdot A$

Durchflutungssatz: $N \cdot i = \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = H_{Fe} \cdot s_{Fe} + H_\delta \cdot \delta$

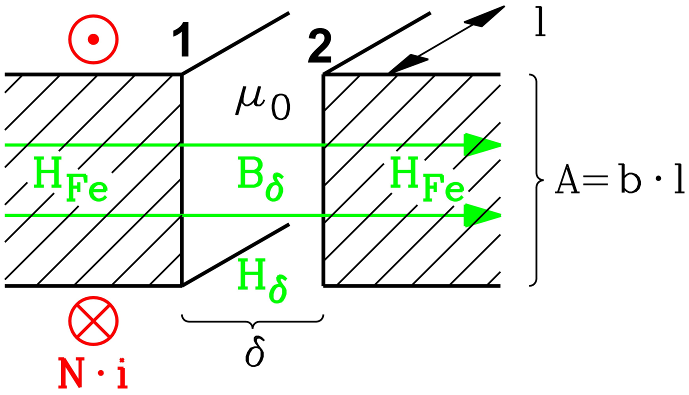
$$H_\delta = B_\delta / \mu_0, \quad H_{Fe} = B_{Fe} / \mu_{Fe} = B_\delta / \mu_{Fe} << H_\delta \quad \Rightarrow \quad H_{Fe} \approx 0, B_\delta = \mu_0 \cdot \frac{N \cdot i}{\delta}$$

Selbstinduktivität (aus $\psi$ bestimmt): $L = \Psi / i = N \cdot \Phi / i = N \cdot B_\delta \cdot A / i = \mu_0 N^2 A / \delta$

Feld-Energiedichte: $w_m = B_\delta \cdot H_\delta / 2$

Zugkraft je Pol: $F_m = p_m \cdot A = (B_\delta \cdot H_\delta / 2) \cdot A$ (*MAXWELL*-Zug, anziehend)

# Energiebegriffe - Beispiel
## Magnetische Energie $W_m$ zwischen Polen (2)




$$W_m = \int_V w_m \cdot dV \Bigg|_{H_{Fe} << H_\delta} \approx \int_0^\delta \int_0^A w_m \cdot dx \cdot dA$$

Näherung für $H_{Fe} << H_\delta$: $w_m = \mu_0 \cdot H_\delta^{\ 2}/2 = \text{konst}$:

$$W_m = \frac{\mu_0 \cdot H_\delta^2}{2} \cdot A \cdot \delta$$

- Gespeicherte magnetische Energie $W_m$ ist bei $H_{Fe} << H_\delta$ fast zur Gänze im Volumen $A \cdot \delta$!
- El. Durchflutung: $\Theta = N \cdot i \approx H_\delta \cdot \delta$

$$W_m = \frac{\mu_0 \cdot H_\delta^2}{2} \cdot A \cdot \delta = L \cdot \frac{i^2}{2} \quad \Rightarrow$$ **Selbstinduktivität** (aus $W_m$ bestimmt): $L = N^2 \cdot \mu_0 \cdot \dfrac{A}{\delta}$

# Energiebegriffe

## Kraft $F_m$ zwischen zwei Polschuhen (1)

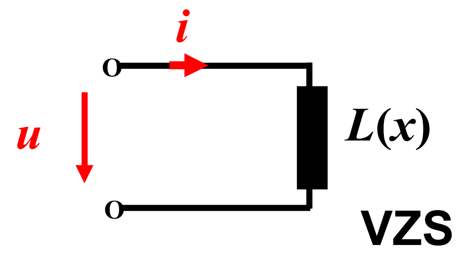
- **Berechnung von $F_m$ über „Energiebetrachtung“: (Prinzip der virtuellen Verschiebung)**

- Änderung der Energien bei einer kleinen <u>gedachten</u> (= virtuellen) Verschiebung $\delta s = dx$ der beiden Polflächen, wenn sich nur $x$, aber nicht $i$ in der Spule ändert

- Magnetische Energieänderung bei $L(x)$: $\Psi$ zeitlich veränderlich $\Rightarrow$ Kleinbuchstabe $\psi$

$$R = 0: \quad u + u_i = R \cdot i = 0 \rightarrow u - d\psi / dt = 0 \rightarrow u = d\psi / dt$$

$$p_{el}(t) = u(t) \cdot i(t)$$



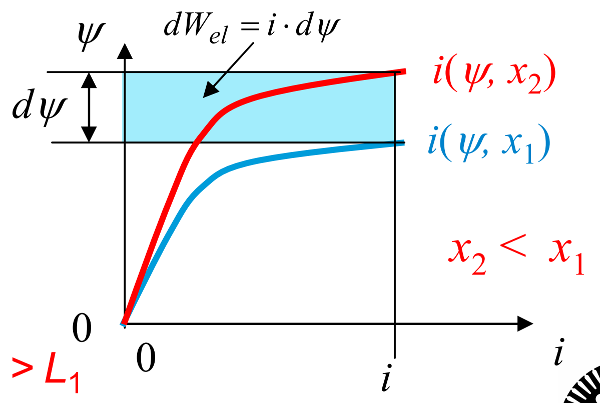

- Elektrische Arbeit der Spannungsquelle $dW_{el}$ an $L(x)$:

$$dW_{el} = p_{el} \cdot dt = u \cdot i \cdot dt = \frac{d\psi}{dt} \cdot i \cdot dt = i \cdot d\psi$$

$$i \cdot \Delta\psi = i \cdot \psi_2 - i \cdot \psi_1 = (W_{m,2} + W_{m,2}^*) - (W_{m,1} + W_{m,1}^*)$$

$$i \cdot \Delta\psi = (W_{m,2} - W_{m,1}) + (W_{m,2}^* - W_{m,1}^*) = \Delta W_m + \Delta W_m^*$$

$$i \cdot d\psi = dW_m + dW_m^*$$




***<u>Beispiel:</u>*** $\delta s = dx < 0 \Rightarrow L_2 > L_1$

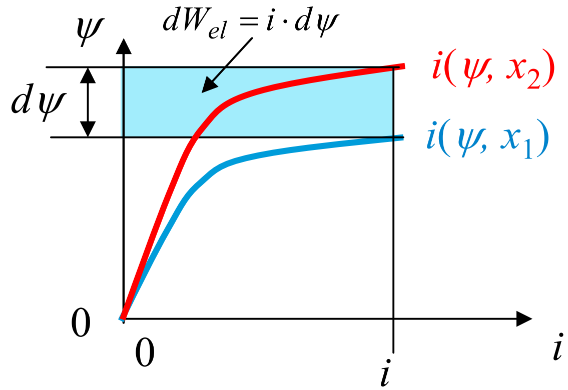
# Energiebegriffe

## Kraft $F_m$ zwischen zwei Polschuhen (2)

$dW_{el}$ = Änderung der gespeicherten magn. Energie $W_m$
und
der von Kraft $F_m$ verrichteten mechanischen Arbeit:

$$dW_{el} = dW_m + F_m \cdot dx = dW_m + dW_m^*$$

$$\boxed{F_m = \frac{dW_m^*(x,i)}{dx}}$$



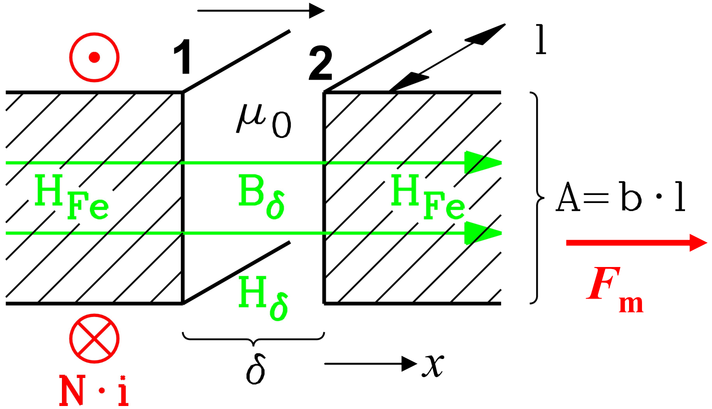

Die magnetostatische Kraft $F_m$ wird bei Verwendung der beiden unabhängigen Variablen $i, x$ aus der partiellen Änderung der magn. Ko-Energie $W_m^*$ mit $x$ berechnet!

Sonderfall: Linear magnetisierbar:

$$F_m = \frac{dW_m^*(x,i)}{dx} = \frac{d}{dx}\frac{L(x)\cdot i^2}{2} = L'(x)\cdot\frac{i^2}{2}$$

„Magnetische Spannung“:

$$V_\delta = H_\delta \cdot d$$




Positive Zählrichtung der Kraft $F_m$

# Energiebegriffe

## Kraft $F_m$ in Abhängigkeit von $(\Psi, x)$ bzw. $(i, x)$

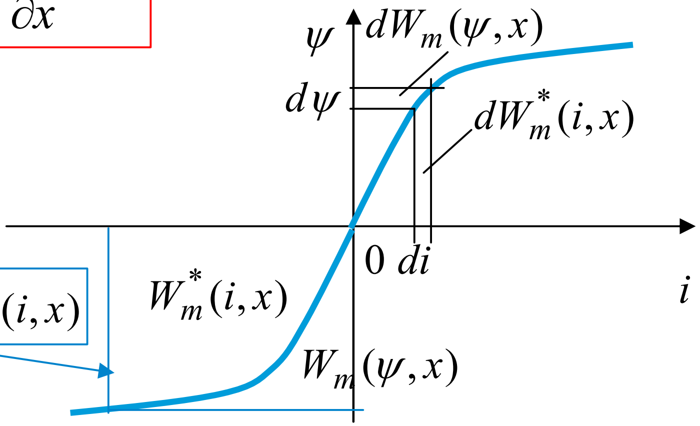
$$dW_{el} = i \cdot d\psi = dW_m + F_m \cdot dx \Rightarrow dW_m = i \cdot d\psi - F_m \cdot dx \Rightarrow W_m = W_m(\psi, x)$$

- Für die magnetostatische Energie $W_m$ sind die unabhängigen Variablen $\psi$ und $x$.
- Der Strom $i$ stellt sich je nach $L(x)$ gemäß $i = \psi / L$ ein.
- Vollständige Änderung der gespeicherten magn. Energie mit $\psi$ und $x$:

$$dW_m(\psi, x) = \frac{\partial W_m}{\partial \psi} \cdot d\psi + \frac{\partial W_m}{\partial x} \cdot dx = i \cdot d\psi - F_m \cdot dx$$

$$\boxed{i = \frac{\partial W_m(\psi, x)}{\partial \psi} \qquad F_m = -\frac{\partial W_m(\psi, x)}{\partial x}}$$

$$\boxed{\psi \cdot i = W_m(\psi, x) + W_m^*(i, x)}$$



# Energiebegriffe
## *LEGENDRE*-Transformation

- Wechsel von der unabhängigen Variablen $\psi$ auf $i$ über die *LEGENDRE*-Transformation:

$$dW_m = i \cdot d\psi - F_m \cdot dx$$

$$d(\psi \cdot i) = d\psi \cdot i + \psi \cdot di \Rightarrow dW_m = d(\psi \cdot i) - \psi \cdot di - F_m \cdot dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d(\psi \cdot i) - dW_m = dW_m^* = \psi \cdot di + F_m \cdot dx = \frac{\partial W_m^*}{\partial i} \cdot di + \frac{\partial W_m^*}{\partial x} \cdot dx \Rightarrow W_m^* = W_m^*(i,x)$$

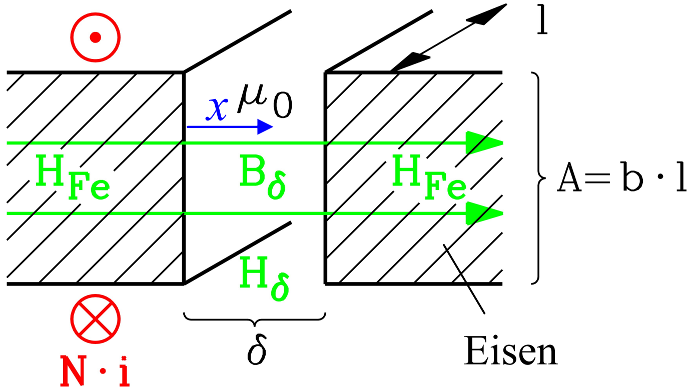
$$\psi \cdot i = W_m(\psi, x) + W_m^*(i,x) \Rightarrow d(\psi \cdot i) = dW_m(\psi, x) + dW_m^*(i,x)$$

$$\boxed{\psi = \frac{\partial W_m^*(i,x)}{\partial i} \qquad F_m = \frac{\partial W_m^*(i,x)}{\partial x}} \qquad i = \frac{\partial W_m(\psi,x)}{\partial \psi} \qquad F_m = -\frac{\partial W_m(\psi,x)}{\partial x}$$

- Bei Verwendung der unabhängigen Variablen $\psi$ wird $F_m$ aus $W_m$ (mit NEGATIVEM Vorzeichen) berechnet, bei Verwendung von $i$ aus $W_m^*$ (mit POSITIVEM Vorzeichen)!

# Energiebegriffe

## Beispiel 4: Magnetfeld zwischen 2 Polschuhen




Selbstinduktivität: $L = \mu_0 N^2 A/\delta \quad \mu_{Fe} >> \mu_0$

$\delta \Rightarrow x: \; L(x) = \mu_0 N^2 \cdot A/x$

Feld-Energiedichte: $w_m = B_\delta \cdot H_\delta / 2$

Zugkraft je Pol: anziehend!

a) *MAXWELL*-Zug: $F_m = -p_m \cdot A = -(B_\delta \cdot H_\delta / 2) \cdot A$

b) Aus Energie:

$$F_m = -\frac{\partial W_m}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{\psi^2}{2L} = -\frac{\psi^2}{2\mu_0 N^2 A}\cdot\frac{\partial x}{\partial x} = -\frac{\psi^2}{2\mu_0 N^2 A} = -\frac{(N \cdot B_\delta A)^2}{2\mu_0 N^2 A} = -\frac{B_\delta H_\delta A}{2}$$

**Angaben:** $b = l = 5$ cm, $\delta = 1$ mm, $N = 500$, $i = 1$ A:

$H_\delta = 500 \cdot 1/10^{-3} = 500$ kA/m, $B_\delta = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 0.5 \cdot 10^6 = 0.628$ T

$L = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 500^2 \cdot 5^2 \cdot 10^{-4} / 10^{-3} = 0.785 \text{ H} \Rightarrow W_m = L \cdot i^2/2 = 0.785 \cdot 1^2 / 2 = 0.39$ J

$w_m = 0.628 \cdot 500 \cdot 10^3 / 2 = \boxed{157 \text{ kJ/m}^3}, \quad F_m = 25 \cdot 10^{-4} \cdot 157 \cdot 10^3 = \boxed{392.5 \text{ N}}$

- HOHE Energiedichte und hohe Kraft!

# Energiebegriffe

## *Achtung:* Falsche Wahl der Formel für $W_m$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Wird bei der Kraftberechnung über die virtuelle Verschiebung die falsche Formel für $W_m$ gewählt, ist die berechnete Kraft FALSCH!

- ***Beispiel:*** Kraft zwischen zwei ideal magnetisierten Polen:
  Polfläche *A*, Abstand *x*, Spulenwindungszahl *N*: $L(x) = \mu_0 N^2 A / x$
  Statt $W_m(\Psi, x) = \Psi^2 / (2L(x))$ wird fälschlich gewählt: $W_m(i,x) = L(x)\cdot i^2/2$

Falsch: $\cancel{W_m(i,x) = L(x)\cdot i^2/2}$

$$F_m = -\frac{\partial W_m(i,x)}{\partial x} = -\frac{\mu_0 N^2 A\cdot i^2}{2}\cdot\frac{\partial(1/x)}{\partial x} = \cancel{\frac{\mu_0 N^2 A\cdot i^2}{2x^2} > 0}$$

Richtig: $W_m(\Psi, x) = \Psi^2 / (2L(x))$

$$F_m = -\frac{\partial W_m(\Psi,x)}{\partial x} = -\frac{\Psi^2}{2\mu_0 N^2 A}\cdot\frac{\partial(x)}{\partial x} = -\frac{\Psi^2}{2\mu_0 N^2 A} = -\frac{L(x)^2\cdot i^2}{2\mu_0 N^2 A} = -\frac{\mu_0 N^2 A\cdot i^2}{2x^2} < 0$$

ODER:

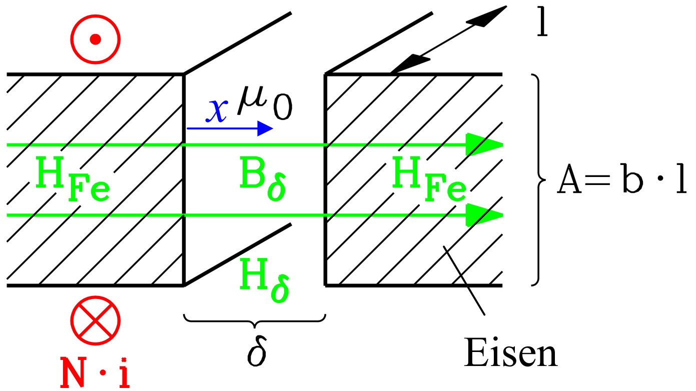
$$F_m = \frac{\partial W_m^*(i,x)}{\partial x} = \frac{\mu_0 N^2 A\cdot i^2}{2}\cdot\frac{\partial(1/x)}{\partial x} = -\frac{\mu_0 N^2 A\cdot i^2}{2x^2} < 0$$

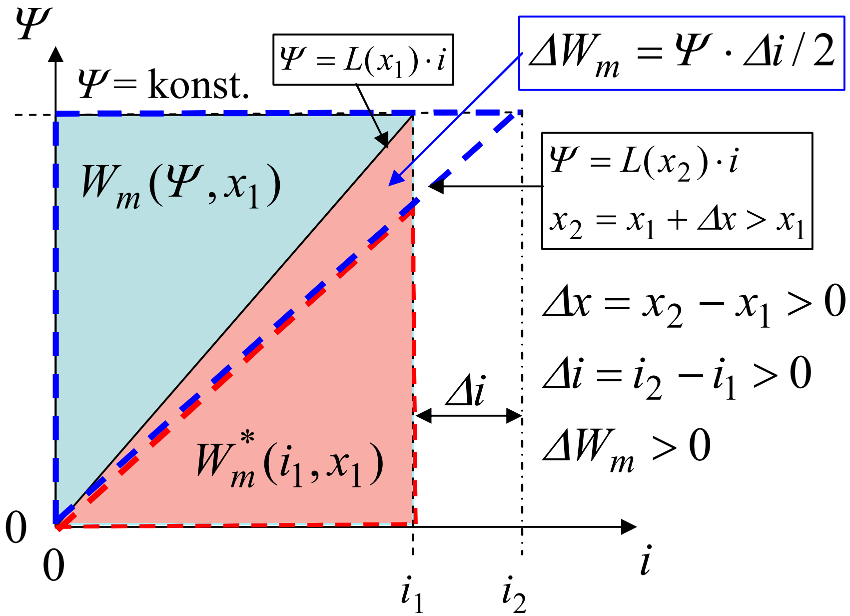
- Bei der falschen Rechnung erhält man (wegen der hier linear angenommenen Verhältnisse) zwar denselben Betrag, aber das falsche Vorzeichen.
  Es wird anstelle einer anziehenden eine abstoßende Kraft berechnet!

# Energiebegriffe

## Magnetpole: Kraftformel aus $W_m$ anschaulich

- $\Psi$ = konst.:
  Polabstand $x$ variabel von $x_1$ auf $x_2 > x_1$




$$F_m = -\frac{dW_m(\Psi, x)}{dx} \Rightarrow F_m = -\frac{\Delta W_m}{\Delta x} < 0$$

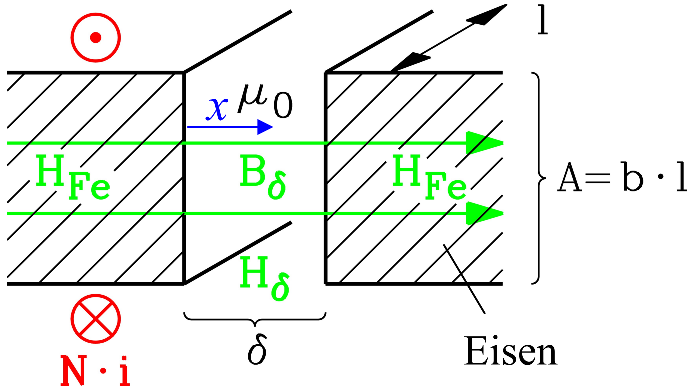
$$F_m = -\frac{\Psi}{2} \cdot \frac{\Delta i}{\Delta x} = -\frac{N \cdot B_\delta \cdot A}{2} \cdot \frac{\Delta i}{\Delta x} = -\frac{B_\delta \cdot A}{2} \cdot \frac{\Delta (N \cdot i)}{\Delta x}$$

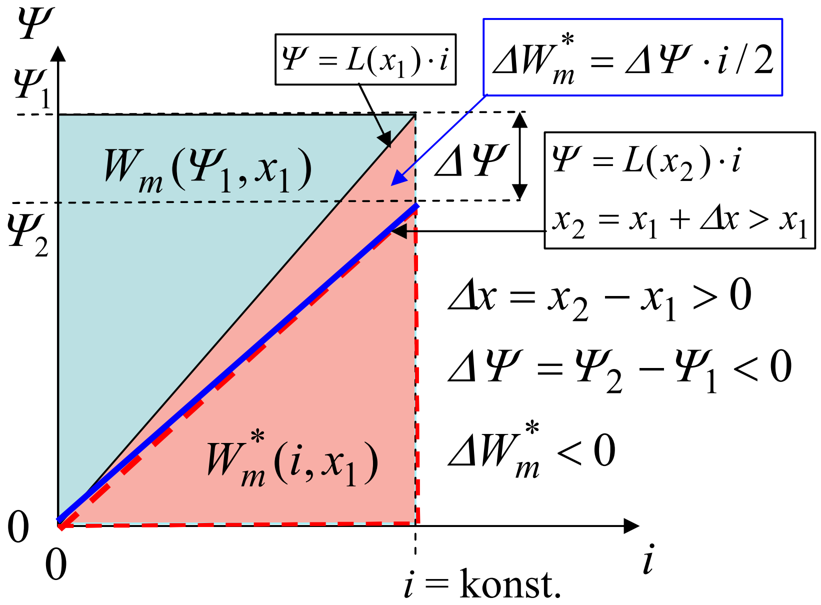
$$F_m = -\frac{B_\delta \cdot A}{2} \cdot H_\delta = -\frac{B_\delta \cdot H_\delta}{2} \cdot A = -p_{m,x} \cdot A$$

# Energiebegriffe

## Magnetpole: Kraftformel aus $W^*_m$ anschaulich

- $i$ = konst.:
  Polabstand $x$ variabel von $x_1$ auf $x_2 > x_1$




$$\Delta x = x_2 - x_1 > 0$$
$$\Delta\Psi = \Psi_2 - \Psi_1 < 0$$
$$\Delta W_m^* < 0$$

$$F_m = \frac{dW_m^*(i,x)}{dx} \Rightarrow F_m = \frac{\Delta W_m^*}{\Delta x} < 0$$

$$F_m = \frac{\Delta\Psi}{2}\cdot\frac{i}{\Delta x} = \frac{i\cdot\Delta L}{2\Delta x}\cdot i = \frac{i^2\cdot\mu\cdot A\cdot N^2\cdot\Delta(1/x)}{2\Delta x}$$

$$F_m = -\frac{(N\cdot i/x)^2\cdot\mu_0\cdot A\cdot\Delta x}{2\Delta x} = -\frac{H_\delta^2\cdot\mu_0\cdot A}{2} = -\underbrace{\frac{B_\delta\cdot H_\delta}{2}}_{p_{m,x}}\cdot A$$

Selbststudium

# *Beispiel 5:* Kraft $F_m$ zwischen Polschuhen (1): Polabstand nimmt zu bei $i = \text{konst.}$

*Beispiel 5:* $i = I = \text{konst.};\ \Delta\Psi = \Psi_2 - \Psi_1 < 0 \qquad \mu_{Fe} \to \infty : L(x) = \mu_0 N^2 A / x$

Polabstand vergrößert sich von $x_1$ auf $x_2$

$$\Delta W_{el} = \int\limits_{\Psi(x_1)=\Psi_1}^{\Psi(x_2)=\Psi_2} i \cdot d\Psi = I \cdot \int\limits_{\Psi_1}^{\Psi_2} d\Psi = I \cdot (\Psi_2 - \Psi_1) = I^2 \cdot (L(x_2) - L(x_1)) = I^2 \cdot \mu_0 \cdot N^2 A \cdot \left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}\right) < 0$$

$$W_m^* = \frac{L(x) \cdot I^2}{2} \to F_m(x) = \frac{\partial W_m^*}{\partial x} = \frac{\mu_0 \cdot A \cdot (N \cdot I)^2}{2} \cdot \frac{\partial(1/x)}{\partial x} = -\frac{\mu_0 \cdot A \cdot (N \cdot I)^2}{2x^2} < 0$$

Kraft $F_m$ wirkt anziehend!

Allgemein: $F_m = \frac{dW_m^*}{dx} = \frac{d}{dx} \frac{L(x) \cdot I^2}{2} = L'(x) \cdot \frac{I^2}{2} < 0$

$$\Delta W_{mec} = \int\limits_{x_1}^{x_2} F_m(x) \cdot dx = \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{dW_m^*}{dx} \cdot dx = \int\limits_{W_{m1}^*}^{W_{m2}^*} dW_m^* = W_{m2}^* - W_{m1}^* = \frac{\mu_0 \cdot A \cdot (N \cdot I)^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}\right) < 0$$

$$\Delta W_m = \int\limits_{W_m(x_1)}^{W_m(x_2)} dW_m = W_m(x_2) - W_m(x_1) = \frac{\Psi_2^2}{2L(x_2)} - \frac{\Psi_1^2}{2L(x_1)} = \frac{I^2}{2} \cdot (L(x_2) - L(x_1)) = \frac{\mu_0 A \cdot (N \cdot I)^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}\right) < 0$$

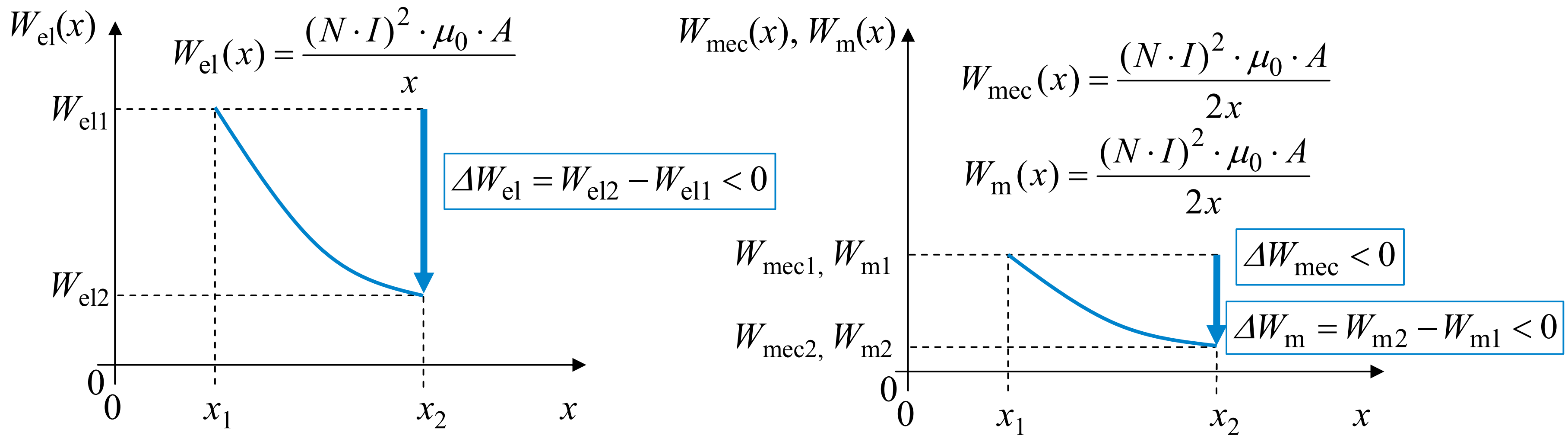
Kontrolle: $\Delta W_{el} = \Delta W_{mec} + \Delta W_m < 0$

**Selbststudium**

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

## *Beispiel 5:* Kraft $F_{\mathrm{m}}$ zwischen Polschuhen (2): Polabstand nimmt <u>zu</u> bei $i = \mathrm{konst.}$

*Beispiel 5:* $i = I = \mathrm{konst.}$:



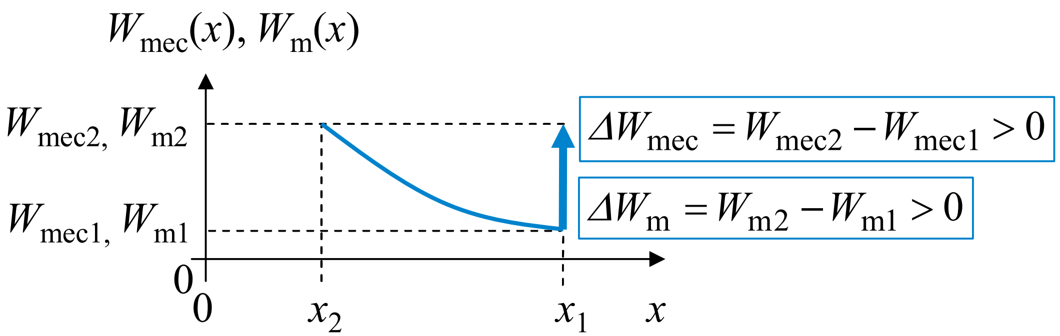

- Der Polabstand nimmt von $x_1$ nach $x_2$ zu, indem gegen die anziehende magn. Kraft $F_{\mathrm{m}}$ von außen an dem System mech. Arbeit verrichtet wird, daher im VZS: $\Delta W_{\mathrm{mec}} < 0$!
- Auch die im $B$-Luftspaltfeld gespeicherte magn. Energie $W_{\mathrm{m}}$ sinkt wegen $i = \mathrm{konst.}$: $\Delta W_{\mathrm{m}} < 0$!
- Die Stromquelle nimmt die Summe $\Delta W_{\mathrm{mec}} + \Delta W_{\mathrm{m}}$ als el. Energie $\Delta W_{\mathrm{el}}$ auf: $\Delta W_{\mathrm{el}} < 0$!

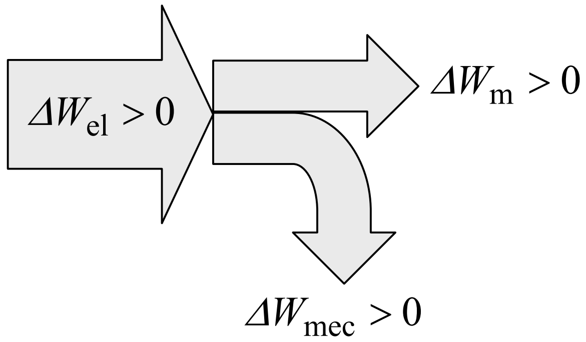
**Selbststudium**

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

## Beispiel 5: Kraft $F_m$ zwischen Polschuhen (2): Polabstand nimmt ab bei $i = \mathrm{konst.}$

**Beispiel 5:** $i = I = \mathrm{konst.}: \mu_{Fe} \to \infty : L(x) = \mu_0 \cdot N^2 A / x \Rightarrow L(x_2) > L(x_1)$




$$W_{mec}(x) = \frac{(N \cdot I)^2 \cdot \mu_0 \cdot A}{2x} \qquad W_m(x) = \frac{(N \cdot I)^2 \cdot \mu_0 \cdot A}{2x}$$

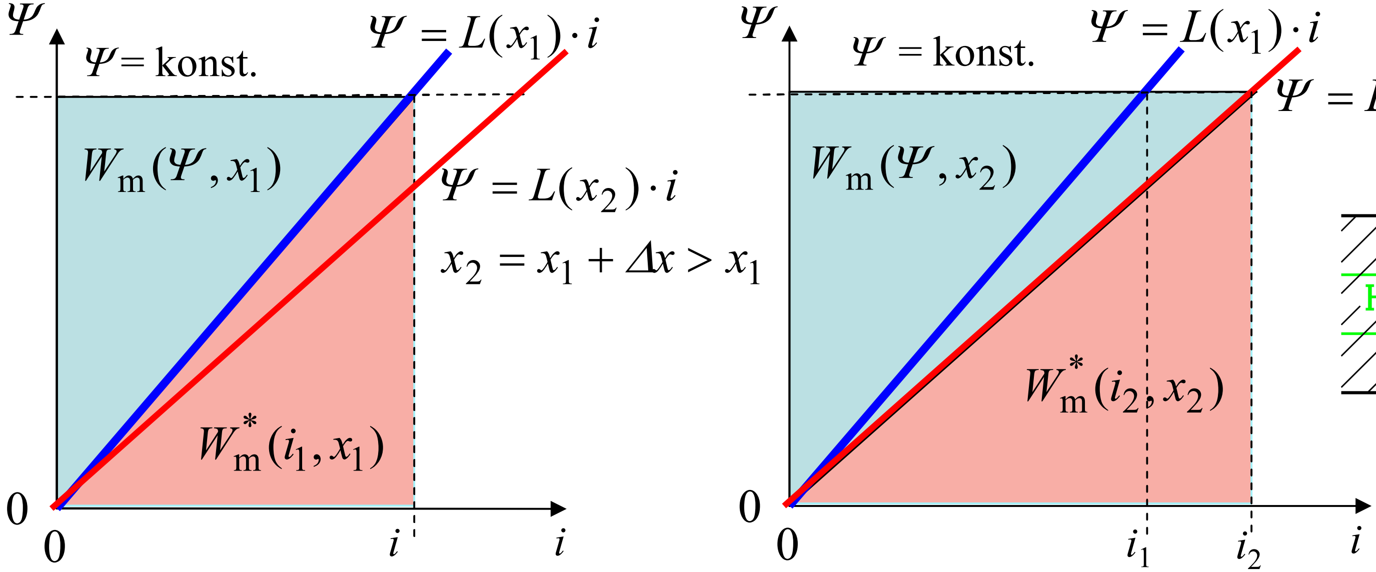
- Der Polabstand nimmt von $x_1$ nach $x_2$ AB, indem das System über die anziehende magn. Kraft $F_m$ mech. Arbeit verrichtet, daher im VZS: $\Delta W_{mec} > 0$!
- Auch die im $B$-Luftspaltfeld gespeicherte magn. Energie $W_m$ STEIGT mit $L$ wegen $i = \mathrm{konst.}$: $\Delta W_m > 0$!
- Die Stromquelle gibt die Summe $\Delta W_{mec} + \Delta W_m$ als el. Energie $\Delta W_{el}$ AB: $\Delta W_{el} > 0$!

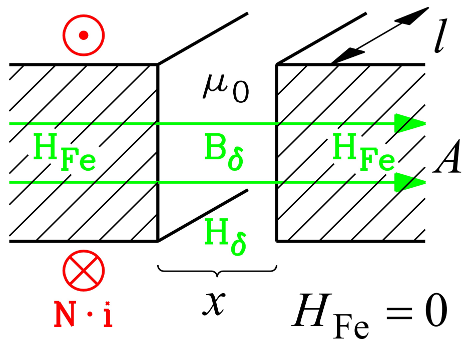
**Selbststudium**

# *Beispiel 6:* Kraft $F_m$ zwischen Polschuhen: Polabstand nimmt zu bei $\Psi = \text{konst.}$

- Bei $\Psi$ = konst. steigt $W_m$ mit steigendem $x$, da Erregerstrom $i$ prop. $x$ erhöht werden muss.

$$x_2 > x_1: \quad W_m(\Psi, x_1) < W_m(\Psi, x_2), \quad W_m^*(i_1, x_1) < W_m^*(i_2, x_2) \quad F_m = -\frac{\partial W_m(\Psi, x)}{\partial x} < 0$$




$$\Psi = \text{konst.}: \mathrm{d}\psi = 0, dW_{el} = i \cdot d\psi = 0 \Rightarrow W_{el} = \text{konst.}$$

$$dW_{el} = 0 = dW_m + dW_{mec} \Rightarrow dW_m = -dW_{mec} \Rightarrow \Delta W_{mec} = \int_{x_1}^{x_2} F_m \cdot dx = -\frac{B^2 \cdot A}{2\mu_0} \int_{x_1}^{x_2} dx = -\frac{B^2 \cdot A \cdot \Delta x}{2\mu_0}$$

Dem System zugeführte mech. Arbeit $\Delta W_{mec} < 0$ in erhöhter Feldenergie $\Delta W_m$ gespeichert!

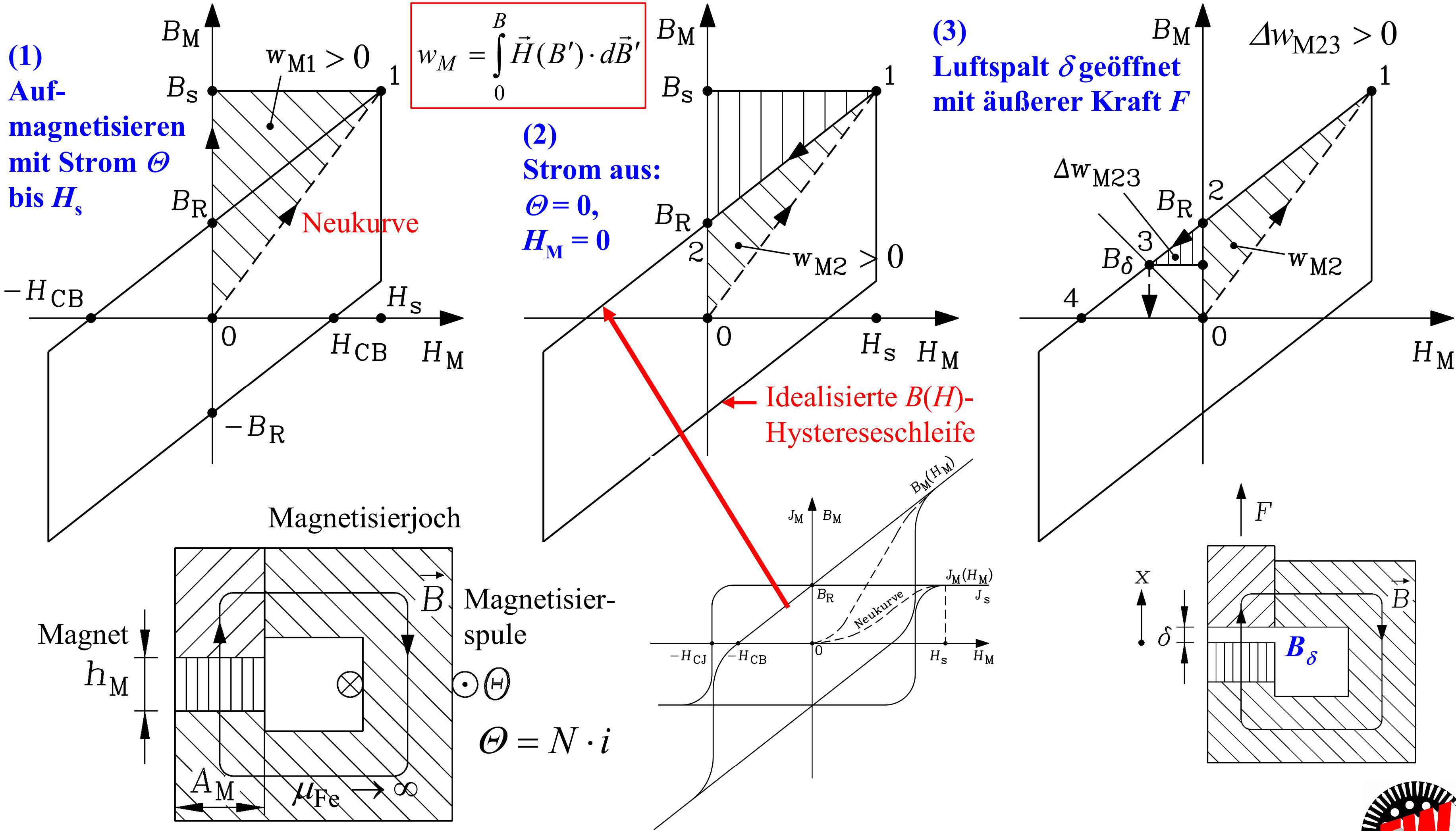
# Energiebegriffe
## Plattenkondensator versus Magnetpole

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

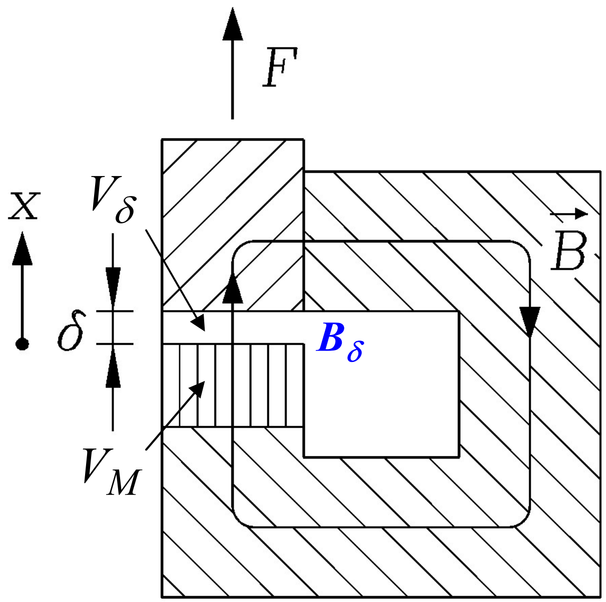
- Bei $\mu_{Fe} \to \infty$ sind die parallelen Eisenpole mit ihrem *B*-Luftspaltfeld die analoge Entsprechung zum Plattenkondensator mit seinem *D*-Plattenfeld.
- Daher treten analoge Energiebilanzen und Feldkräfte auf, wobei einander die Größen $N \cdot I$ und $U$, $L$ und $C$, $\mu_0$ und $\varepsilon_0$ sowie $\Psi$ und $Q$ entsprechen.
- a) Pol- bzw. Plattenverschiebungen in $x$-Richtung (Längsrichtung) und b) seitliche Pol- bzw. Plattenverschiebungen führen auf analoge (a) nichtlineare, b) lineare) Formeln für die Kräfte und auf analoge Energiebilanzen.
- Elektromagn. Wandler (Kräfte über magnetisierte Eisenteile) mit Längsverschiebung haben ein nichtlineares Großsignal-Verhalten und (linearisiertes) Kleinsignalverhalten wie längsverschiebliche kapazitive Wandler: siehe Kap. 7: Wandler „Typ 1“ und „Typ 3“! Wandler mit seitlicher Pol- oder Plattenverschiebung „Typ 4“ haben ein lineares Großsignalverhalten.
- Auch elektrodynamische Wandler (bewegte Spule im Magnetfeld, „Typ 2“) haben lineares Großsignal-Verhalten, entsprechen aber im physikalischen Aufbau nicht den linearen magnetischen und kapazitiven Wandlern („Typ 4“).

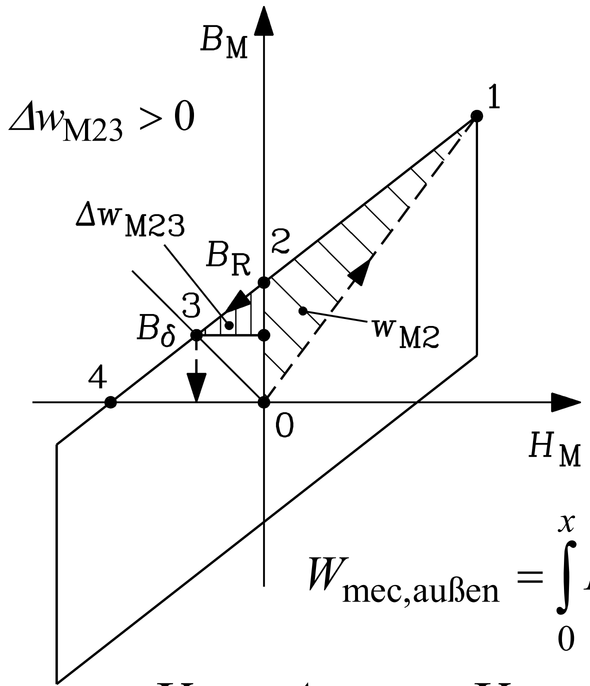
# Energiebegriffe

## Energie im Permanentmagnet $W_M = w_M A_M h_M$



# Energiebegriffe
## Energiebilanz beim Öffnen des Luftspalts




Magnetvolumen:

$$V_{\mathrm{M}} = h_{\mathrm{M}} A_{\mathrm{M}}$$

Luftspaltvolumen:

$$V_{\delta} = \delta \cdot A_{\mathrm{M}}$$

$$W_{\mathrm{mec,außen}} = \int_0^x F \cdot dx = -\int_0^x F_m \cdot dx > 0$$

$$W_{\mathrm{mec}} = \int_0^x F_m \cdot dx < 0$$

$$\underbrace{W_{\mathrm{mec}}}_{<0} + \underbrace{w_{\mathrm{m}} \cdot V_{\delta}}_{W_{\delta}>0} + \underbrace{\Delta w_{\mathrm{M23}} \cdot V_M}_{\Delta W_{\mathrm{M23}}>0} = 0$$

Die am System verrichtete mechanische Arbeit $W_{\mathrm{mec,außen}} > 0$ wird als Änderung der magnetischen Energie im Magnet $\Delta W_{\mathrm{M23}}$ und in der magnetischen Energie $W_{\delta}$ im Luftspalt $\delta$ gespeichert!

# Energiebegriffe
## Feldberechnung mit numerischen Programmen

**1) Methode der Finiten Differenzen:**

Die Geometrie wird mit einem regelmäßigen Netz diskretisiert.
Aus den *Maxwell*-Differential-Gleichungen werden Differenzengleichungen für z. B. *B*, *H* gebildet und für entsprechende Vorgabe der Quellen (Ladungen, Ströme) gelöst.

**2) Methode der Finiten Elemente:**

Die Geometrie wird mit einem UNregelmäßigen Netz diskretisiert,
so dass die reale Geometrie BESSER angenähert wird.
Anstelle der *Maxwell*-Differential-Gleichungen wird über den *Lagrange*-Formalismus das zugehörige Variationsproblem der „minimalen Wirkung“ formuliert.
Damit wird z. B. das Vektorpotential *A* und daraus mit $\vec{B} = \mathrm{rot}\vec{A} = \nabla \times \vec{A}$
das Feld *B* näherungsweise (abhängig von der Diskretisierung) berechnet.

# Energiebegriffe
## Kraftberechnung mit numerischen Programmen

**El.-magn. Kraftberechnung auf einen Körper:**

Für finite Differenzen und finite Elemente:

a) Mit der „virtuellen“ Verschiebung $\delta x$ wird das Feld für zwei Körperlagen (Verschiebung der Körper-Netzknoten um Vorgabewert $\delta s$ ) berechnet.
Aus beiden Feldlösungen wird über die Feldenergie-Differenz $\delta W_e$ bzw. $\delta W_m$ die Kraft $F_e = -\delta W_e / \delta s$ bzw. $F_m = -\delta W_m / \delta s$ auf den Körper in $s$-Richtung berechnet.

b) Aus den Feldwerten der Feldlösung werden die 4 oder 9 Komponenten des *Maxwell*´schen Spannungstensors auf einer vorgegebenen (geschlossenen) Oberfläche um den Körper berechnet, und daraus die resultierende Kraft auf den eingeschlossenen Körper mit ihrer Richtung anhand der einzelnen Kraftkomponenten ermittelt.

# Energiebegriffe

Übung

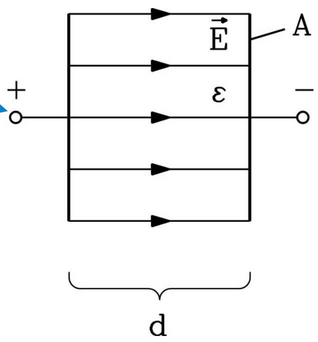
## *Beispiel:* Elektrostat. & magnetostat. Energie

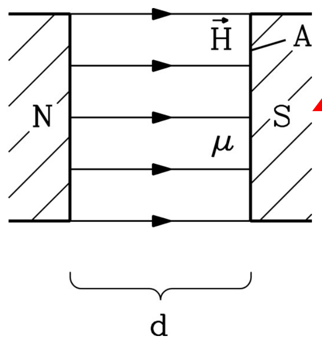
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Vergleich der gespeicherten Energie im elektrostatischen und magnetostatischen Feld:

a) Plattenkondensator:

- $A = 1\ \mathrm{m}^2,\ d = 1\ \mathrm{mm}$
- $\mu = \mu_0\ ,\ \varepsilon = \varepsilon_0$




b) Eisen-Polschuhe:

- Energie im elektrostatischen Feld: $E = 40\ \mathrm{kV/cm}$ (Durchschlagsfeldstärke in Luft bei $d = 1\ \mathrm{mm}$)

$$W_\mathrm{e} = A \cdot d \cdot \frac{\varepsilon \cdot E^2}{2} = 1 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3 \cdot \frac{8.854 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{As/(Vm)}}{2} \cdot (4 \cdot 10^6)^2 \left(\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\right)^2 = 0.071\ \mathrm{J}$$

- Energie im magnetostatischen Feld $B = 1\ \mathrm{T}$ (< 1.7 T als Sättigungsflussdichte von Eisen)

$$W_\mathrm{m} = A \cdot d \cdot \frac{B^2}{2\mu} = 1 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3 \cdot \frac{1^2 (\mathrm{Vs/m}^2)^2}{2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{Vs/(Am)}} = 397.9\ \mathrm{J}$$

- $W_\mathrm{e} = 0.07\ \mathrm{J},\ W_\mathrm{m} = 400\ \mathrm{J}$

$$\boxed{\frac{W_\mathrm{m}}{W_\mathrm{e}} = 5700\,!}$$

# Energiebegriffe

Übung

## Einachsige Kraft im elektrostat. & magnetostat. Feld

a) Plattenkondensator: einachsig

$$F_e = \frac{dW_e^*}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\varepsilon \cdot A}{d+x} \cdot \frac{u^2}{2}\right) = -\frac{\varepsilon \cdot A}{(d+x)^2} \cdot \frac{u^2}{2}$$

$$F_e(x=0) = -\frac{\varepsilon \cdot A}{d^2} \cdot \frac{u^2}{2} = -\frac{C}{d} \cdot \frac{u^2}{2} = $$

$$= -\frac{1}{d} \cdot \frac{Q^2}{2C} = -\frac{W_e(0)}{d}$$

b) Eisen-Polschuhe: einachsig

$$F_m = \frac{dW_m^*}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\mu_0 \cdot N^2 \cdot A}{d+x} \cdot \frac{i^2}{2}\right) = -\frac{\mu_0 \cdot N^2 \cdot A}{(d+x)^2} \cdot \frac{i^2}{2}$$

$$F_m(x=0) = -\frac{\mu_0 \cdot N^2 \cdot A}{d^2} \cdot \frac{i^2}{2} = -\frac{L}{d} \cdot \frac{i^2}{2} = -\frac{1}{d} \cdot \frac{\Psi^2}{2L} = -\frac{W_m(0)}{d}$$

Negative Kraft: Gegen die $x$-Richtung der Platten- bzw. Polverschiebung = Platten bzw. Polschuhe ziehen sich gegenseitig an

### Magnetische vs. elektrische Kraft:

$$\frac{F_m(x=0)}{F_e(x=0)} = \frac{W_m(0)}{W_e(0)} = 5700$$

# Energiebegriffe
## Magnetische vs. elektrische Wandler

Änderung der Ko-Energie bei kleinen Wegänderungen = Kraft: $F = dW^*/dx$

- ***Beispiel:***
  Gleiches Luft-Volumen: Fläche $A$ = 1m$^2$, Abstand $d$ = 1mm
  $W_m / W_e = 400/0.07 = 5700$ (!)

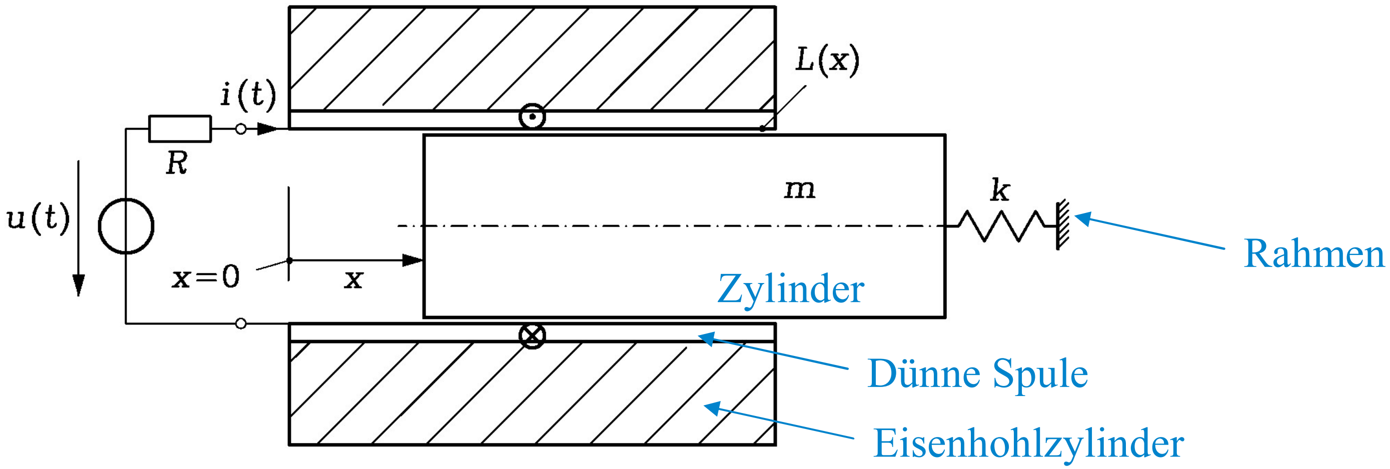
- Das magnetische Feld erlaubt wesentlich größere Energiedichten bzw. Kräfte!
- Daher werden bei größeren Leistungen/Kräften bevorzugt
  elektro-magnetische Wandler eingesetzt!
- Bei Mikro-Wandlern werden aber
  a) Elektrostatische Kräfte, b) Piezoeffekt-Kräfte
  verwendet (= elektrische Wandler), da sich
  1) Ladungsanordnungen wesentlich besser miniaturisieren lassen als
  elektrisch isolierte Draht-Spulen-Körper,
  2) bei kleinen Abständen (Sub-$\mu$m-Bereich) die Durchschlagsfeldstärke $E_D$
  deutlich erhöht ist.
- Die Kräfte in elektrischen Wandlern sind aber i. A. sehr klein.

# Elektromechanische Systeme
# 2. Grundlagen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

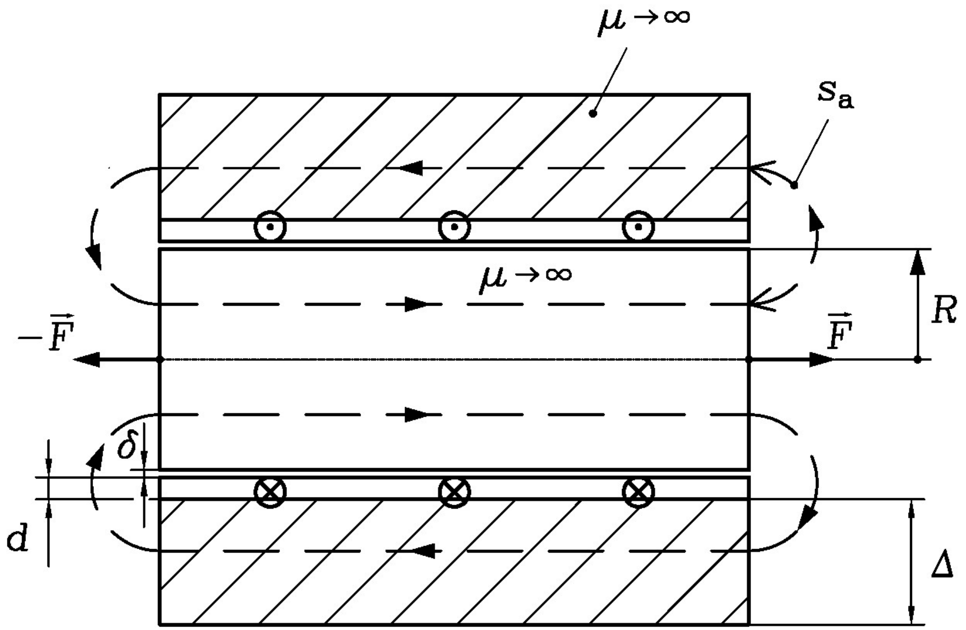
- Dynamische Grundgesetze der Mechanik und Elektromagnetik
- Materialgesetze
- Kraftgesetze
- Energiebegriffe
- Einführendes Beispiel:
  Kopplung eines mechanischen mit einem el.-magn. System

# Einführendes Beispiel
## Magnetischer Wandler




- Ideale Spannungsquelle (Innenwiderstand = 0)
- Spannungsgespeiste Spule mit Innenwiderstand $R$ und Induktivität $L(x)$
- Dünne Spule (Windungszahl $N$) in Eisenhohlzylinder als Träger
- Reibungsfrei längsverschieblicher Eisenzylinder (Masse $m$, Positionskoordinate $x$), über masselose lineare Feder (Federkonstante $k$) an festem Rahmen fixiert
- Schwerkrafteinfluss vernachlässigt

# Einführendes Beispiel
## Symm. Lage: Angenäherte Induktivitätsberechnung (1)




**ACHTUNG:**
Diese Feldbild-Betrachtung ist zu stark vereinfacht (wie später gezeigt wird).

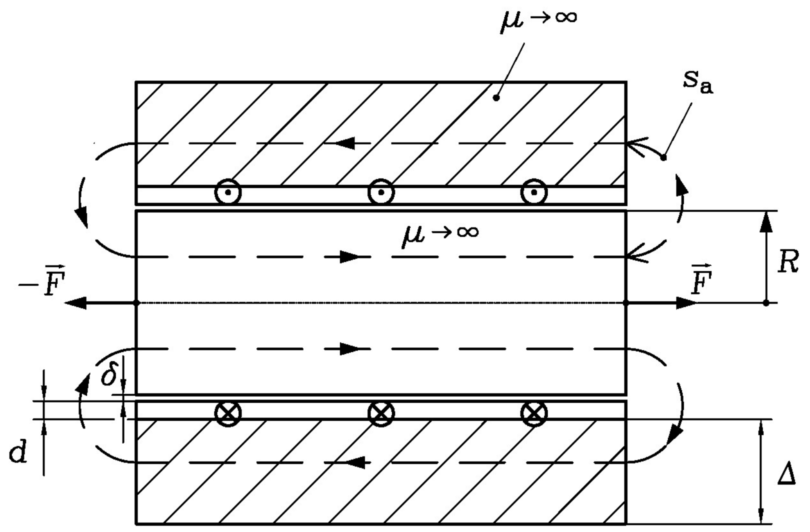
Deshalb ist die berechnete Selbstinduktivität *L* viel zu klein.

- Dünne Spule (Dicke *d*, *N* Windungen) mit Luftspalt $\delta$
- Symmetrische Lage bei $x = 0 \Rightarrow$ symmetrisches *B*-Feld, Magnetkräfte $F_m$ heben sich auf!
- Eisenpermeabilität $\mu >> \mu_0 \Rightarrow H_{Fe}$ im Eisen: Null
- Stirnseitige „mittlere“ Feldlinienlänge $s_a$ halbkreisförmig angenähert $s_a \approx \left(\frac{R+\Delta}{2} + d + \delta\right) \cdot \frac{\pi}{2}$

# Einführendes Beispiel

## Symm. Lage: Angenäherte Induktivitätsberechnung (2)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT




- Durchflutungssatz: Geschlossene Kurve *C* = Feldlinie *B*:

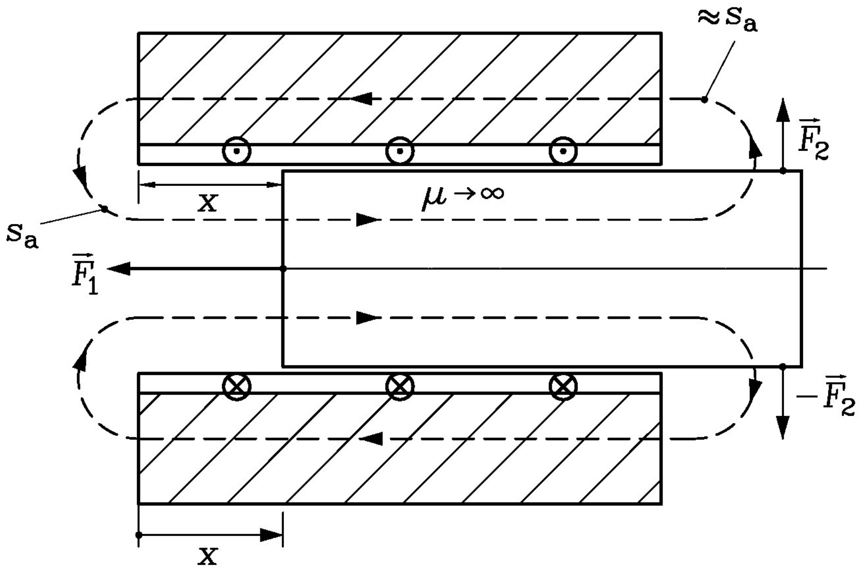
$$\Theta = N \cdot i = \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} \approx H_{Fe} \cdot s_{Fe} + H_a \cdot 2s_a \approx H_a \cdot 2s_a \Rightarrow B_a = \mu_0 H_a = \mu_0 \cdot \Theta / (2s_a)$$

- *Maxwell´*scher Zug *F* nach beiden Seiten entgegengesetzt gleich ⇒ Körper *m* ist kräftefrei!
- Flussverkettung der Spule: $\Psi = N \cdot \Phi = N \cdot \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} \approx N \cdot B_a \cdot A = \mu_0 \cdot N^2 \cdot i \cdot A / (2s_a)$
- Selbstinduktivität:

$$L(x=0) = \Psi / i = \mu_0 \cdot N^2 \cdot A / (2s_a) = \mu_0 \cdot N^2 \cdot R^2 \pi / (2s_a)$$

# Einführendes Beispiel

## Asymmetrische Lage: Angenäherte Kraftberechnung



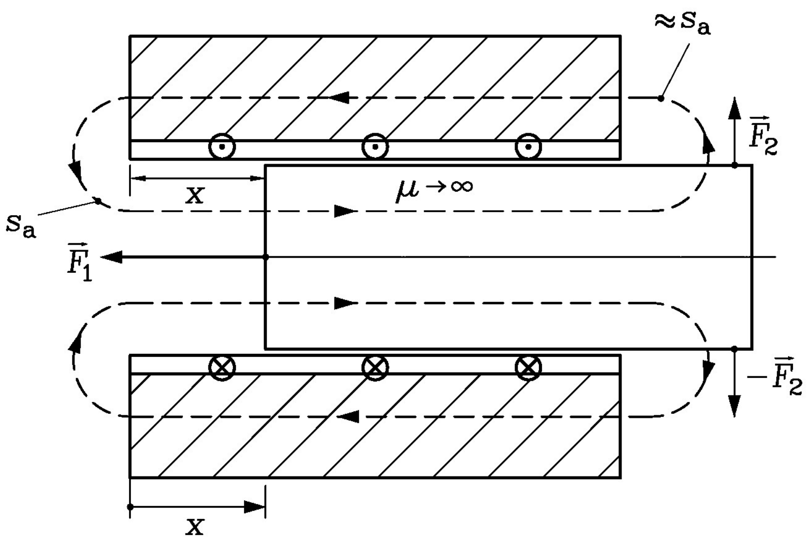

- Stirnseitige „mittlere“ Feldlinienlänge gegenüber symmetrischer Lage etwas verzerrt, weiterhin mit $s_a$ abgeschätzt
- **Durchflutungssatz:** Geschlossene Kurve $C$ = Feldlinie $B$, $H_{Fe}$ im Eisen Null, $x > 0$:

$$\Theta = N \cdot i = \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} \approx H_a \cdot x + H_a \cdot 2s_a \Rightarrow B_a = \mu_0 H_a = \frac{\mu_0 \cdot \Theta}{x + 2s_a}$$

- Kräfte $F_2$ heben sich auf, *Maxwell´*scher Zug $F_1$ nach links
  $\Rightarrow$ Körper $m$ wird magnetisch nach links gezogen

# Einführendes Beispiel

## Asymm. Lage: Angenäherte Induktivitätsberechnung



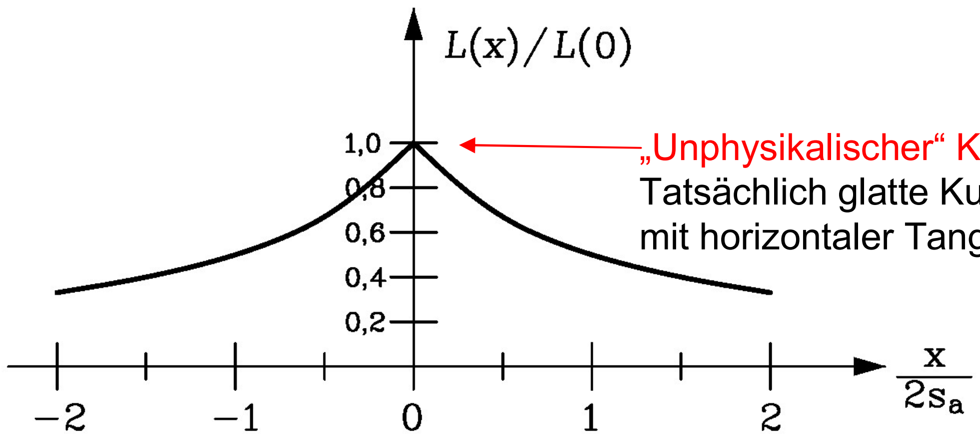

$$L(x) = \Psi(x)/i \cong N \cdot B_a(x) \cdot A/i = \mu_0 \cdot N^2 \cdot A/(x + 2s_a)$$

$$x \geq 0: \frac{L(x)}{L(0)} = \frac{1}{1 + x/(2s_a)}$$

$$x \leq 0: \frac{L(x)}{L(0)} = \frac{1}{1 - x/(2s_a)}$$

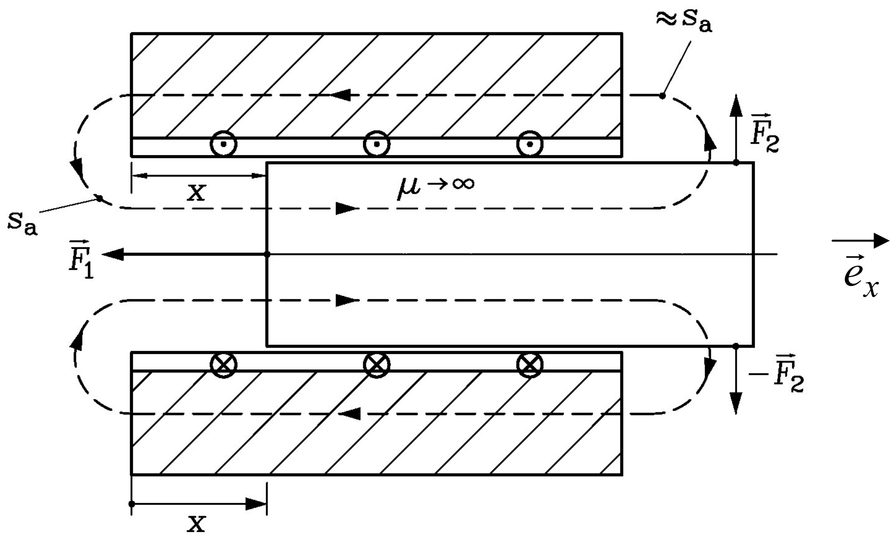
$$\frac{L(x)}{L(0)} = \frac{1}{1 + |x|/(2s_a)}$$

$$L(0) = \mu_0 \cdot N^2 \cdot A/(2s_a)$$




„Unphysikalischer" Knick:
Tatsächlich glatte Kurve
mit horizontaler Tangente bei $x$ = 0

# Einführendes Beispiel
## Asymmetrische Lage: Kraftberechnung $F_1$




- *Maxwell´*scher Zug $F_1$ nach links (= negative *x*-Richtung): $-F_1 \cdot \vec{e}_x = \oint_A \vec{T} \cdot d\vec{A} = -\vec{e}_x \cdot \int_A B_a^2 /(2\mu_0) \cdot dA = \boxed{-\frac{\mu_0 \cdot (N \cdot i)^2 \cdot A}{2 \cdot (x + 2s_a)^2} \cdot \vec{e}_x}$

- **Alternative Berechnung:**
  Berechnung über „virtuelle“ Verschiebung: Nur *x* ändert sich, alles andere $(u, i)$ konstant!

$$-F_1 \cdot \vec{e}_x = \frac{dW_m^*}{dx} \cdot \vec{e}_x = \frac{d}{dx}\left( L(x) \cdot \frac{i^2}{2} \right) \cdot \vec{e}_x = \frac{i^2}{2} \cdot \frac{d}{dx}\left( \mu_0 \cdot \frac{N^2 A}{x + 2s_a} \right) \cdot \vec{e}_x \qquad \boxed{F_1 = \frac{i^2}{2} \cdot \mu_0 \cdot \frac{N^2 A}{(x + 2s_a)^2}}$$

# Einführendes Beispiel

## Kritik an der vereinfachten Induktivitätsberechnung

- Bei $x = 0$ ist das bewegliche Teil im Gleichgewicht:
  Die resultierende Magnetkraft muss Null sein.
- Mit der Induktivität gemäß $x \geq 0: \frac{L(x)}{L(0)} = \frac{1}{1 + x/(2s_a)}$ ist sie das nicht!

$$L'(x) = -\frac{L(0)}{(1 + x/(2s_a))^2} \cdot \frac{1}{2s_a} \Rightarrow L'(0) = -\frac{L(0)}{2s_a} < 0$$

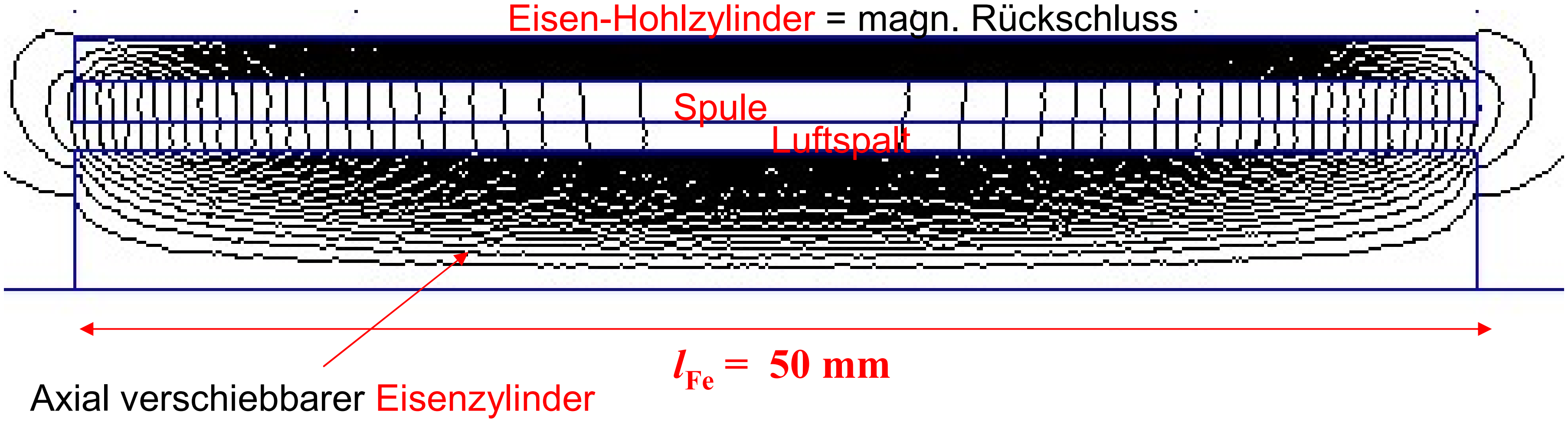
$$-F_1(0) \cdot \vec{e}_x = \frac{dW_m^*}{dx}(x=0) \cdot \vec{e}_x = \vec{e}_x \cdot \frac{d}{dx}\left( L(x) \cdot \frac{i^2}{2} \right)\bigg|_{x=0} = \vec{e}_x \cdot \underbrace{L'(0)}_{<0} \cdot \frac{i^2}{2}$$

- Genauere Induktivitätsberechnung erforderlich (z. B: über numerische Feldberechnung), die z. B. auf folgenden Näherungs-Ausdruck führt:

$$\frac{L(x)}{L(0)} \approx \frac{1}{1 + (x/s_a)^2} \Rightarrow L'(0) = -L(0) \cdot \frac{2x/s_a^2}{(1 + (x/s_a)^2)^2}\bigg|_{x=0} = 0$$

$$-F_1(0) = \frac{dW_m^*}{dx}(x=0) = \frac{d}{dx}\left( L(x) \cdot \frac{i^2}{2} \right)\bigg|_{x=0} = L'(0) \cdot \frac{i^2}{2} = 0$$

# Einführendes Beispiel
## Numerische Feldberechnung: Geometrie

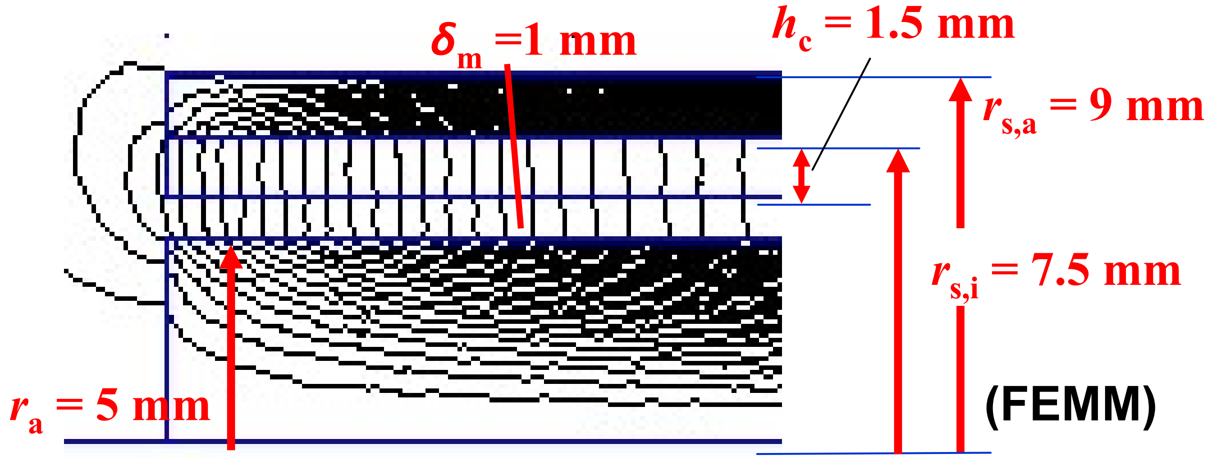



$d = h_c = 1.5\ \mathrm{mm}$

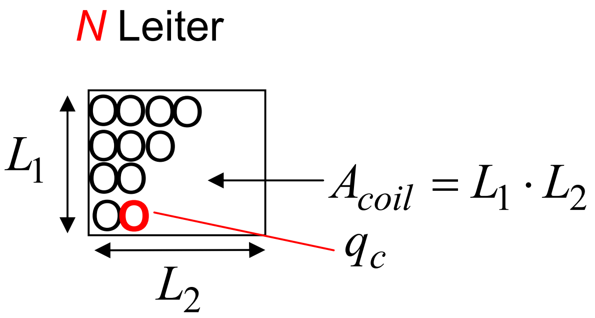
$\Delta = r_{sa} - r_{si} = 1.5\ \mathrm{mm}$

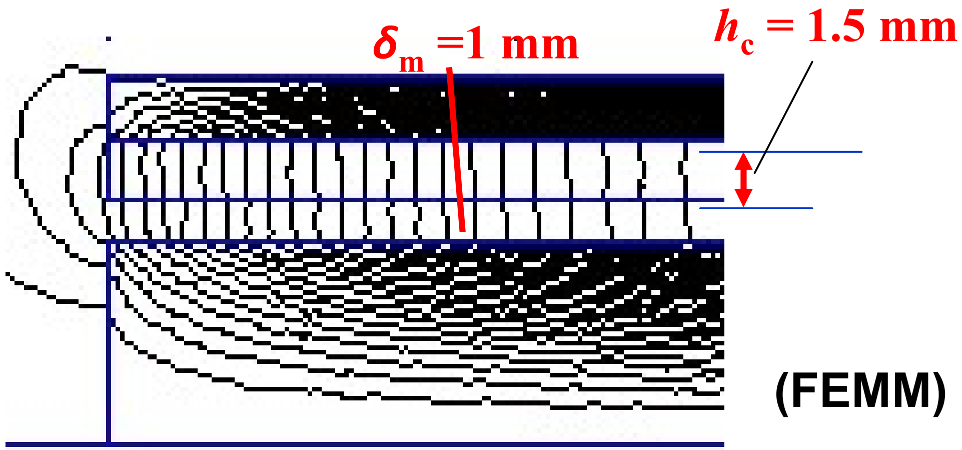
$R = r_a = 5\ \mathrm{mm}$

$\delta = \delta_m = 1\ \mathrm{mm}$



# Einführendes Beispiel
## Ersatzstromdichte $J_e$




$$\boxed{k_F = N \cdot q_c / A_{coil}}$$

$k_F = 0.65$ $J_e = 3\ \mathrm{A/mm^2}$

- Runddraht-Spule-Füllfaktor $k_F$ = Leiter-Summenquerschnittsfläche / Spulen-Querschnittsfläche
- Ersatzstromdichte $J_e$ = El. Durchflutung / Spulen-Querschnittsfläche

$$\boxed{J_e = \frac{N \cdot I}{A_{coil}} = \frac{N \cdot I}{N \cdot q_c / k_F} = k_F \cdot (I / q_c) = k_F \cdot J}$$

$$d_c = 0.75\ \mathrm{mm},\ q_c = d_c^2 \cdot \pi / 4 = 0.44\ \mathrm{mm}^2,\ I = 2\ \mathrm{A},\ J = I / q_c = 4.6\ \mathrm{A/mm}^2,$$

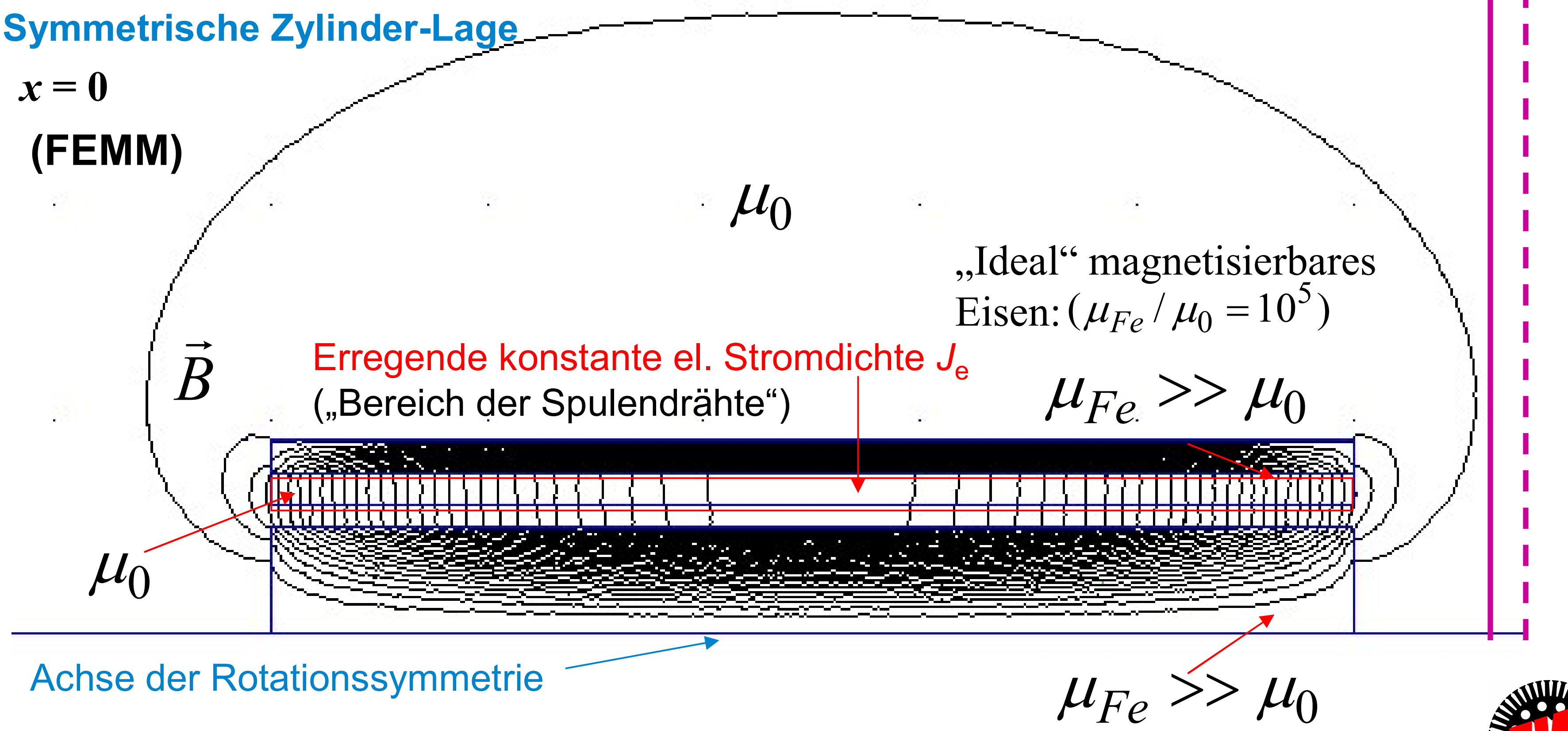
$$N = 110,\ k_F = 110 \cdot 0.44 / (1.5 \cdot 50) = 0.65,\ J_e = 0.65 \cdot 4.6 = 3\ \mathrm{A/mm}^2$$

# Einführendes Beispiel
## Numerische Feldberechnung (z. B. FEMM)

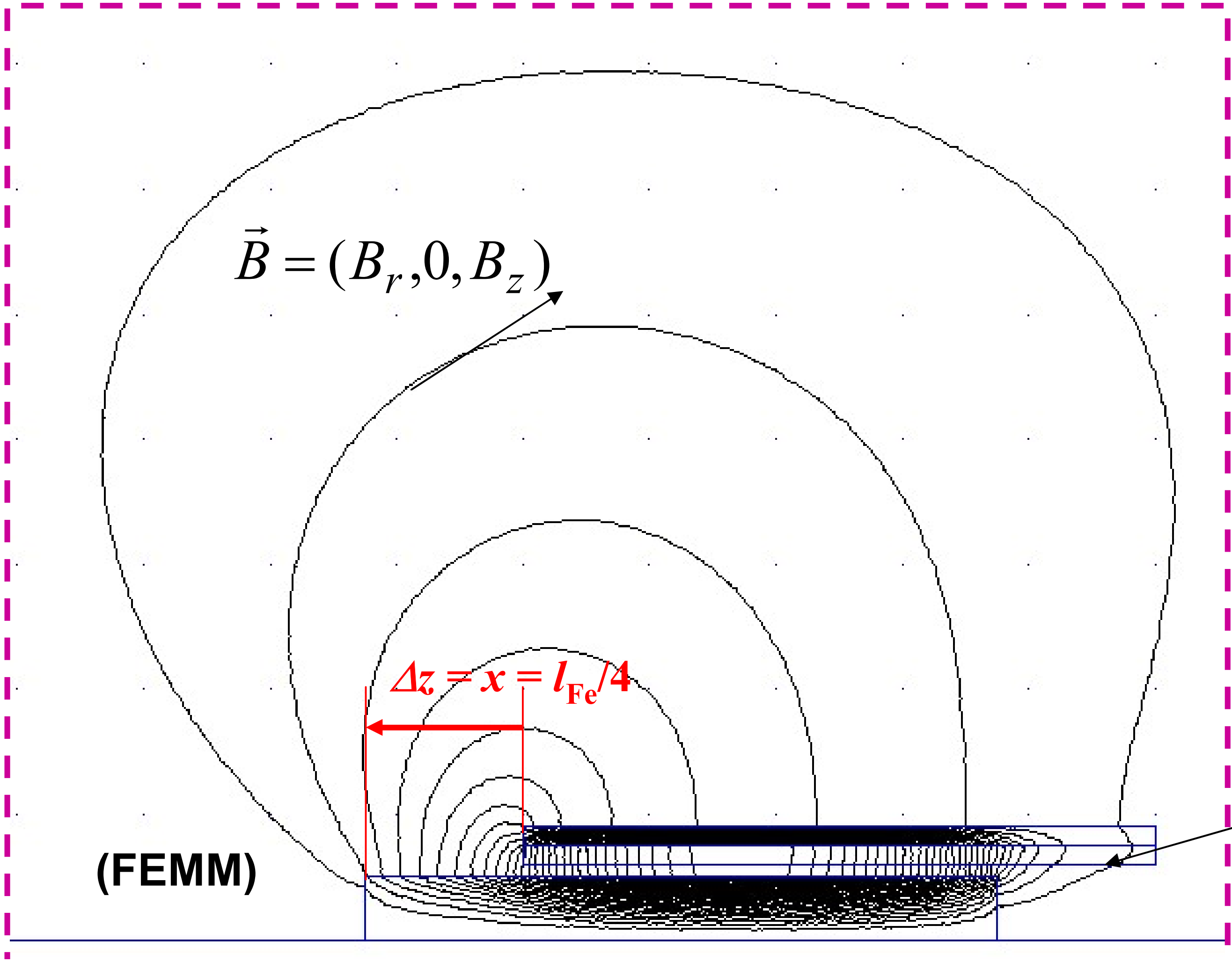
Magnetostatisches ($d./dt = 0$),
lineares ($\mu_{Fe}$ = konst.),
rotationssymmetrisches Magnetfeldmodell

„Willkürliche“ Feldraumbegrenzungen
beeinflussen das numerische Ergebnis

**Symmetrische Zylinder-Lage**



# Einführendes Beispiel
## Asymmetrische Zylinderlage *x*




„Willkürliche“ Feldraumbegrenzungen beeinflussen das numerische Ergebnis

Rotationssymmetrie:
Zylinderkoordinaten:

$r, \varphi, z$

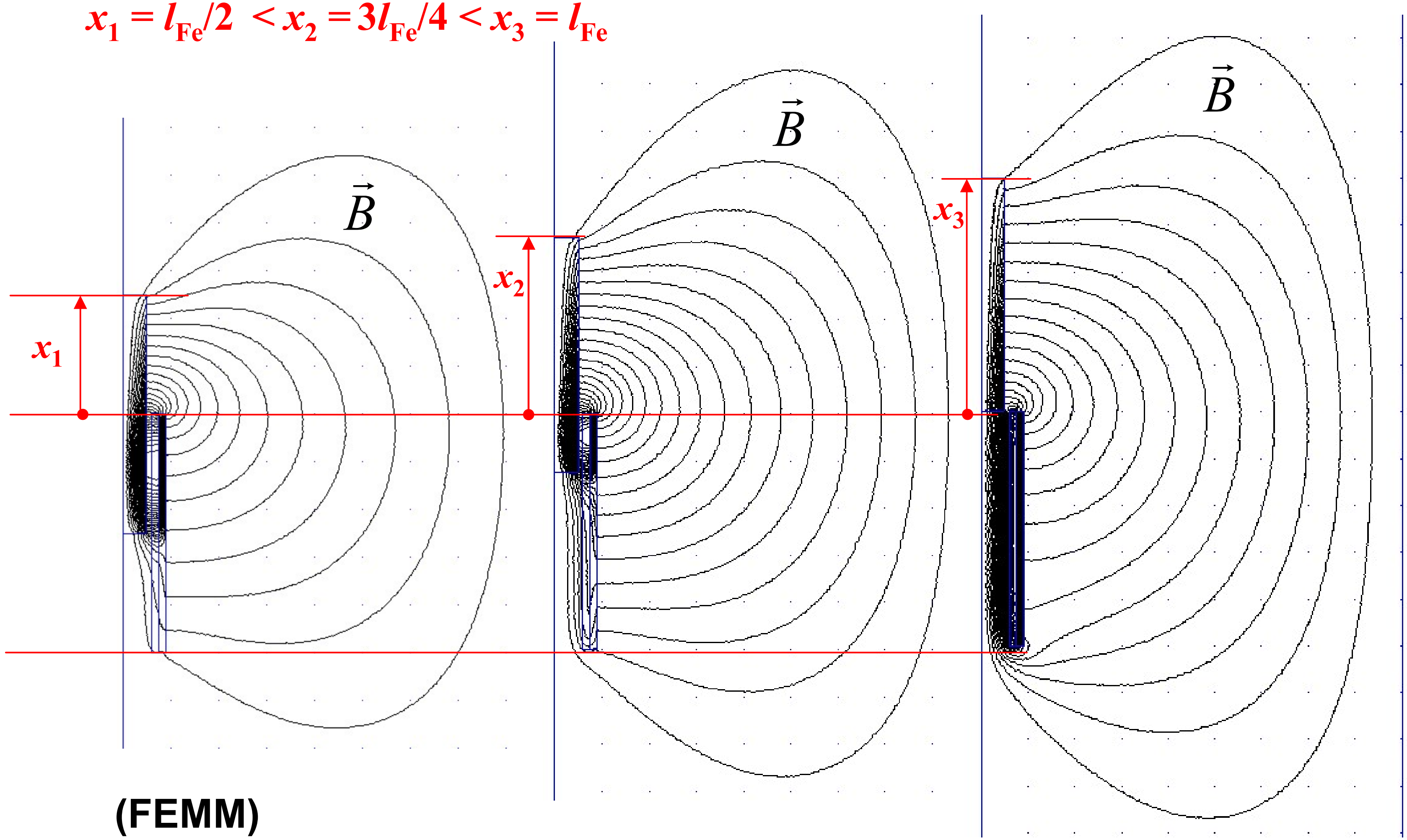
$\vec{e}_r$, $\vec{e}_z$, $\vec{e}_\varphi$

$$|\vec{e}_r| = |\vec{e}_\varphi| = |\vec{e}_z| = 1$$

$$\vec{J} = (0, J_\varphi, 0)$$

# Einführendes Beispiel
## Variable asymmetrische Zylinderlage *x*

$$x_1 = l_{Fe}/2 < x_2 = 3l_{Fe}/4 < x_3 = l_{Fe}$$

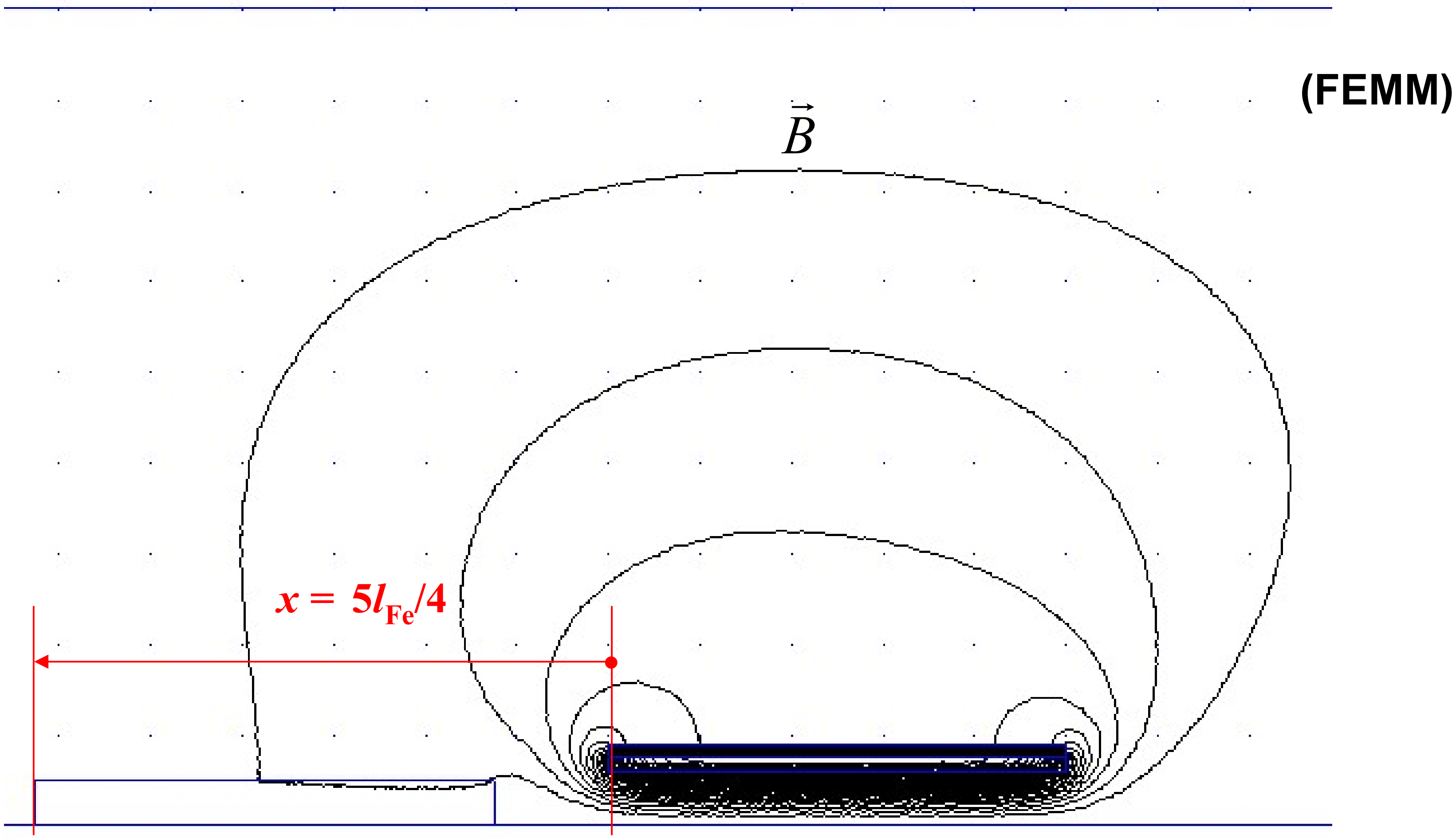



**(FEMM)**

# Einführendes Beispiel

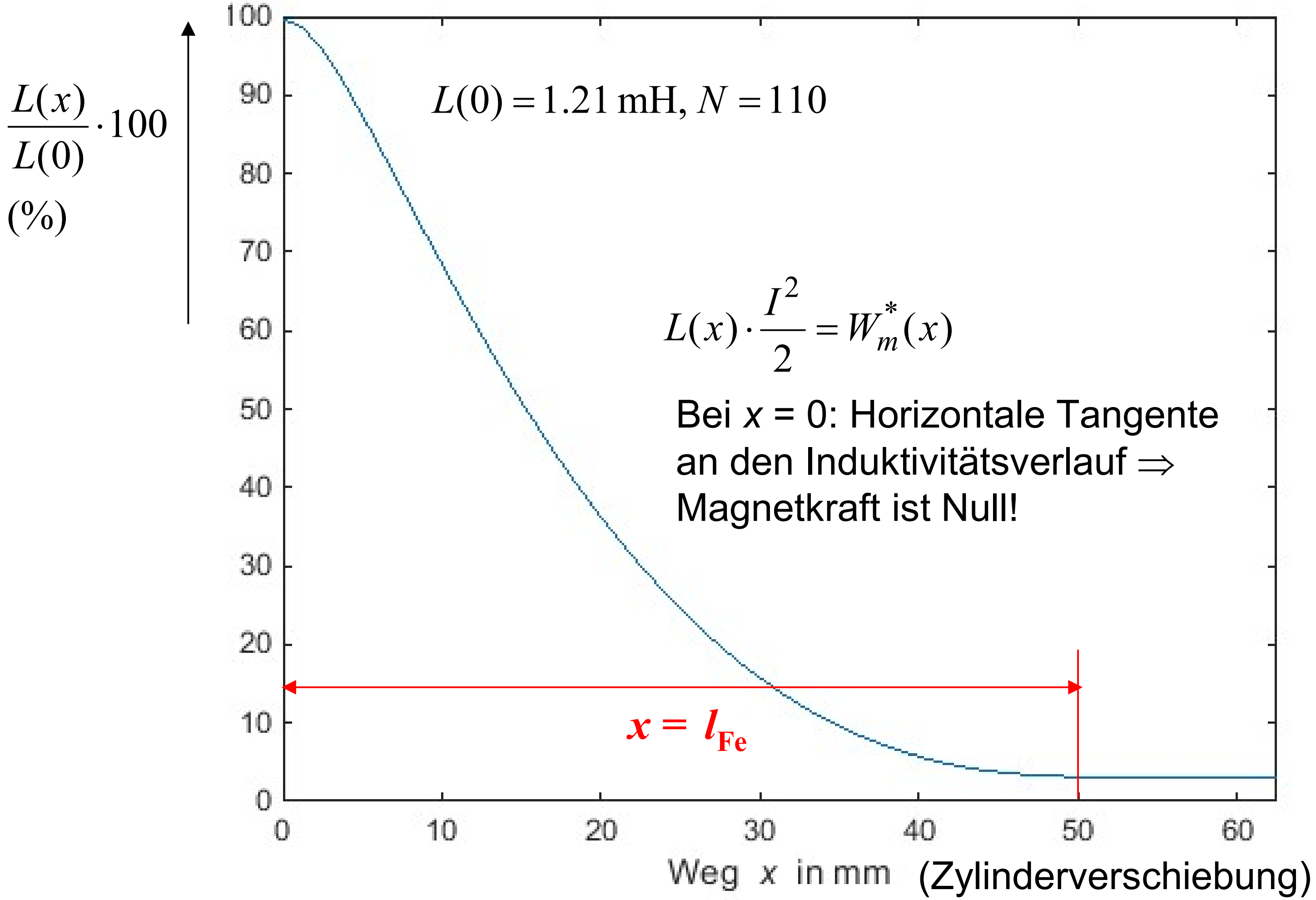
## Zylinder außerhalb der Spule $\Rightarrow$ *B*-Feld wird sehr klein

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT



# Einführendes Beispiel

## Numerisch berechnete Induktivität aus der Feldenergie $W_m$



# Einführendes Beispiel

## Vergleich:
## Vereinfacht analytische und numerische *L*-Berechnung

Vereinfacht analytisch:

$$L(x=0) = \mu_0 \cdot N^2 \cdot R^2 \pi / (2 s_a) = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 110^2 \cdot 0.005^2 \cdot \pi / (2 \cdot 0.009) = 0.066\,\mathrm{mH}$$

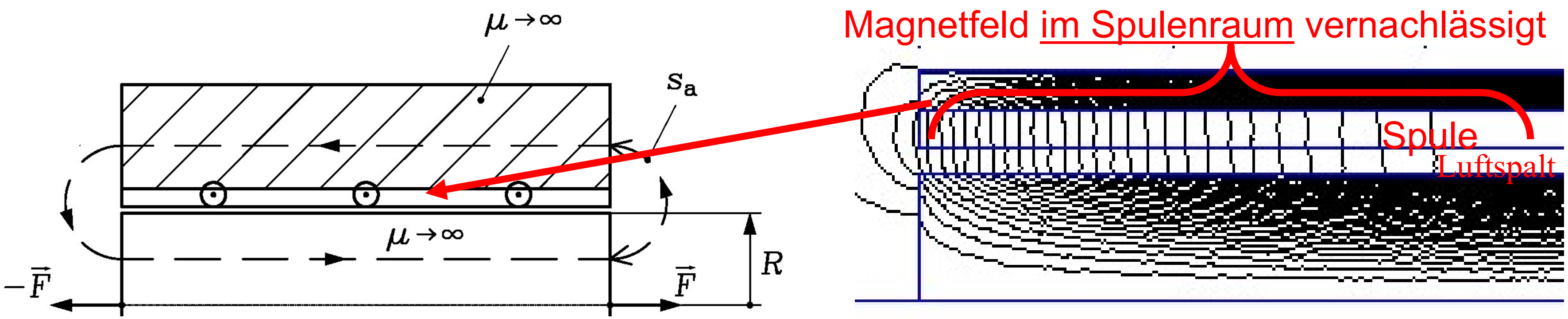
Numerisch:

$$L(x=0) = 1.21\,\mathrm{mH}$$

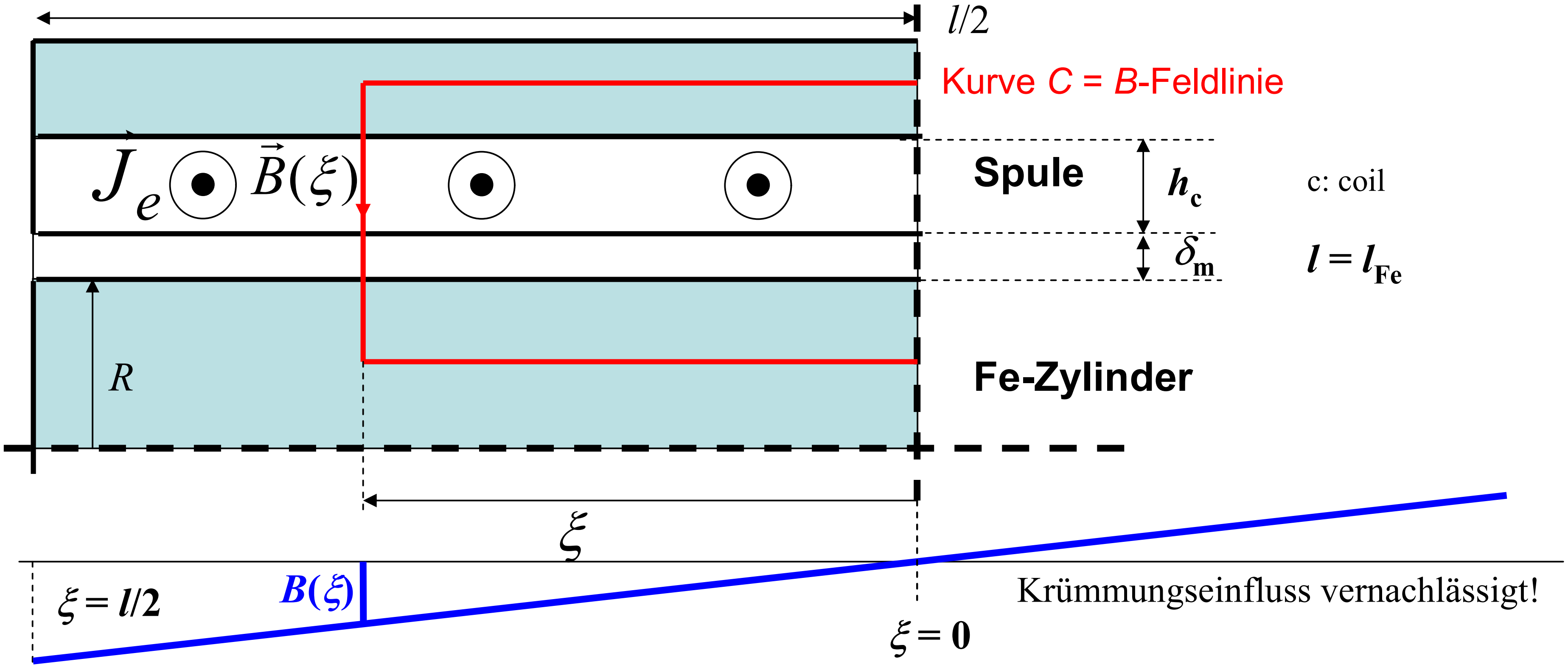
Die vereinfacht analytisch berechnete Selbstinduktivität *L* ist um ca. 1/20 viel zu klein.

**Warum?** Weil das Magnetfeld im Spulenraum vernachlässigt wurde!

Diese Feld ist aber der Hauptanteil des Spulenfelds!



# Einführendes Beispiel
## Analytisch genauere $L$-Berechnung (1)




$$\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{s} = \Theta \Rightarrow \mu_{Fe} \to \infty \Rightarrow H_{Fe} = 0 : \oint_C \vec{H}\cdot d\vec{s} = 2H(\xi)\cdot(h_c+\delta_m) = \Theta(\xi) = \underbrace{2\xi\cdot h_c\cdot J_e}_{N\cdot i\cdot 2\xi/l}$$

$$\boxed{B(\xi) = \mu_0\cdot N\cdot i\cdot \xi/(l\cdot(h_c+\delta_m)) \quad -l/2 \le \xi \le l/2}$$

# Einführendes Beispiel
## Analytisch genauere $L$-Berechnung (2)

- Anteil $L_1$ des Felds im Spulenkörper und Luftspalt (Bei mittig liegendem Zylinder $x = 0$):

$$L_1 \cdot i^2 / 2 = \int_V w_m^* \cdot dV = 2A \cdot \int_0^{l/2} \frac{B^2(\xi)}{2\mu_0} \cdot d\xi \qquad A = \left( R + \frac{h_c + \delta_m}{2} \right) \cdot 2\pi \cdot (h_c + \delta_m)$$

„Ringfläche $A$"

$$2 \cdot \int_0^{l/2} \frac{B^2(\xi)}{2\mu_0} \cdot d\xi = \frac{[\mu_0 \cdot N \cdot i / (l \cdot (h_c + \delta_m))]^2}{\mu_0} \cdot \underbrace{\int_0^{l/2} \xi^2 \cdot d\xi}_{(l/2)^3/3}$$

$$L_1 = 2A \cdot \frac{[\mu_0 \cdot N / (l \cdot (h_c + \delta_m))]^2}{3\mu_0} \cdot \left( \frac{l}{2} \right)^3 = \left( 1 + \frac{2R}{h_c + \delta_m} \right) \cdot \pi \cdot \cancel{(h_c + \delta_m)^2} \cdot \frac{\mu_0 \cdot N^2 \cdot l}{12 \cdot \cancel{(h_c + \delta_m)^2}}$$

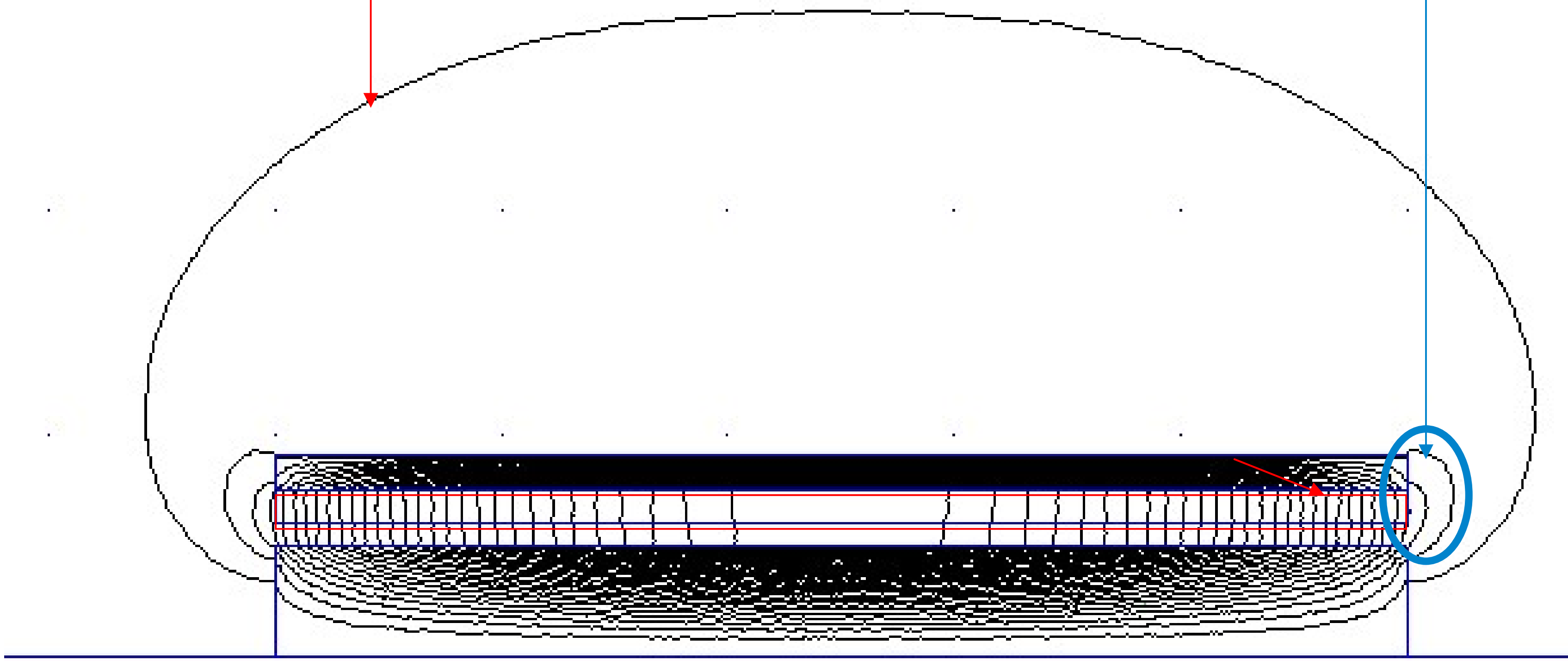
$$\boxed{L_1 = \frac{\mu_0 \cdot N^2 \cdot l_{Fe}}{12} \cdot \left( 1 + \frac{2R}{h_c + \delta_m} \right) \cdot \pi = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 110^2 \cdot 0.05}{12} \cdot \left( 1 + \frac{2 \cdot 5}{1.5 + 1} \right) \cdot \pi = 0.995\ \mathrm{mH}}$$

- Anteil $L_2$ des Streufelds hatten wir schon: $\boxed{L_2 = \mu_0 \cdot N^2 \cdot R^2 \pi / (2 s_a) = 0.066\ \mathrm{mH}}$

- Selbstinduktivität $L$: $\boxed{L = L_1 + L_2 = 0.995 + 0.066 = 1.06\ \mathrm{mH}}$ Numerisch: $L = 1.21\ \mathrm{mH}$

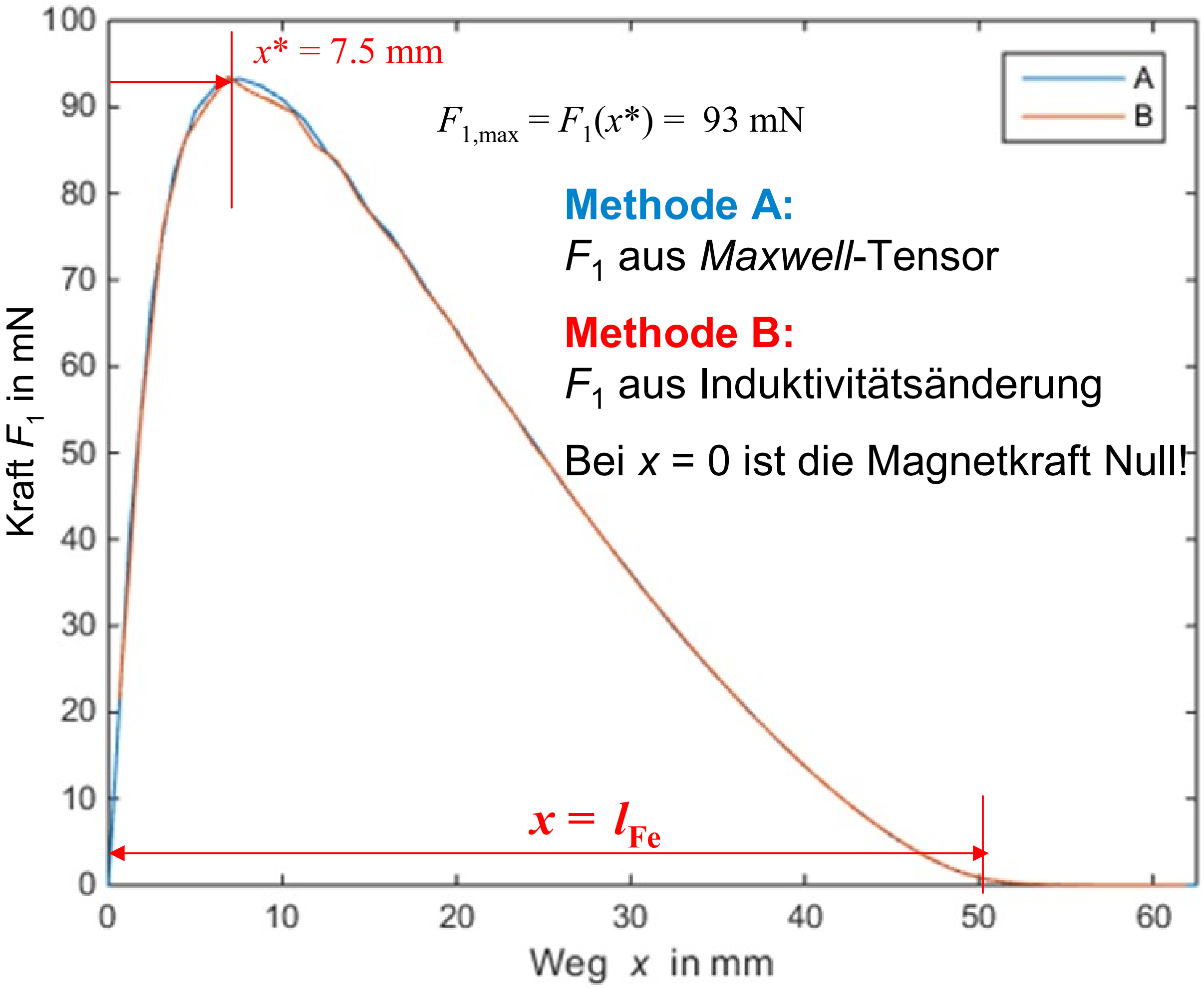
# Einführendes Beispiel
## Analytisch genauere *L*-Berechnung (3)

- Selbstinduktivität *L*: $\boxed{L = L_1 + L_2 = 0.995 + 0.066 = 1.06\,\mathrm{mH}}$ Numerisch: $L = 1.21\,\mathrm{mH}$
- Numerischer Wert um (1.21/1.06 = 1.14) 14% größer! Warum? a) Krümmung vernachlässigt, b) Weil das reale Streufeld deutlich größer ist als das analytisch modellierte Streufeld!



# Einführendes Beispiel

## Numerisch berechnete axiale Magnetkraft (1)




**Methode A:**
$F_1$ aus *Maxwell*-Tensor

**Methode B:**
$F_1$ aus Induktivitätsänderung

Bei $x$ = 0 ist die Magnetkraft Null!

Analytische Näherungsrechnung für $x^*$:

$$\frac{L(x)}{L(0)} \approx \frac{1}{1+(x/s_a)^2}$$

$$-F_1 = \frac{dW_m^*}{dx} = \frac{i^2}{2}\cdot\frac{dL(x)}{dx}$$

$$-F_1 = -\frac{L(0)\cdot i^2}{2}\cdot\frac{2x/s_a^2}{(1+(x/s_a)^2)^2}$$

$$F_1 = \frac{L(0)\cdot i^2}{s_a}\cdot\frac{\tilde{x}}{(1+\tilde{x}^2)^2} \qquad \tilde{x} = \frac{x}{s_a}$$

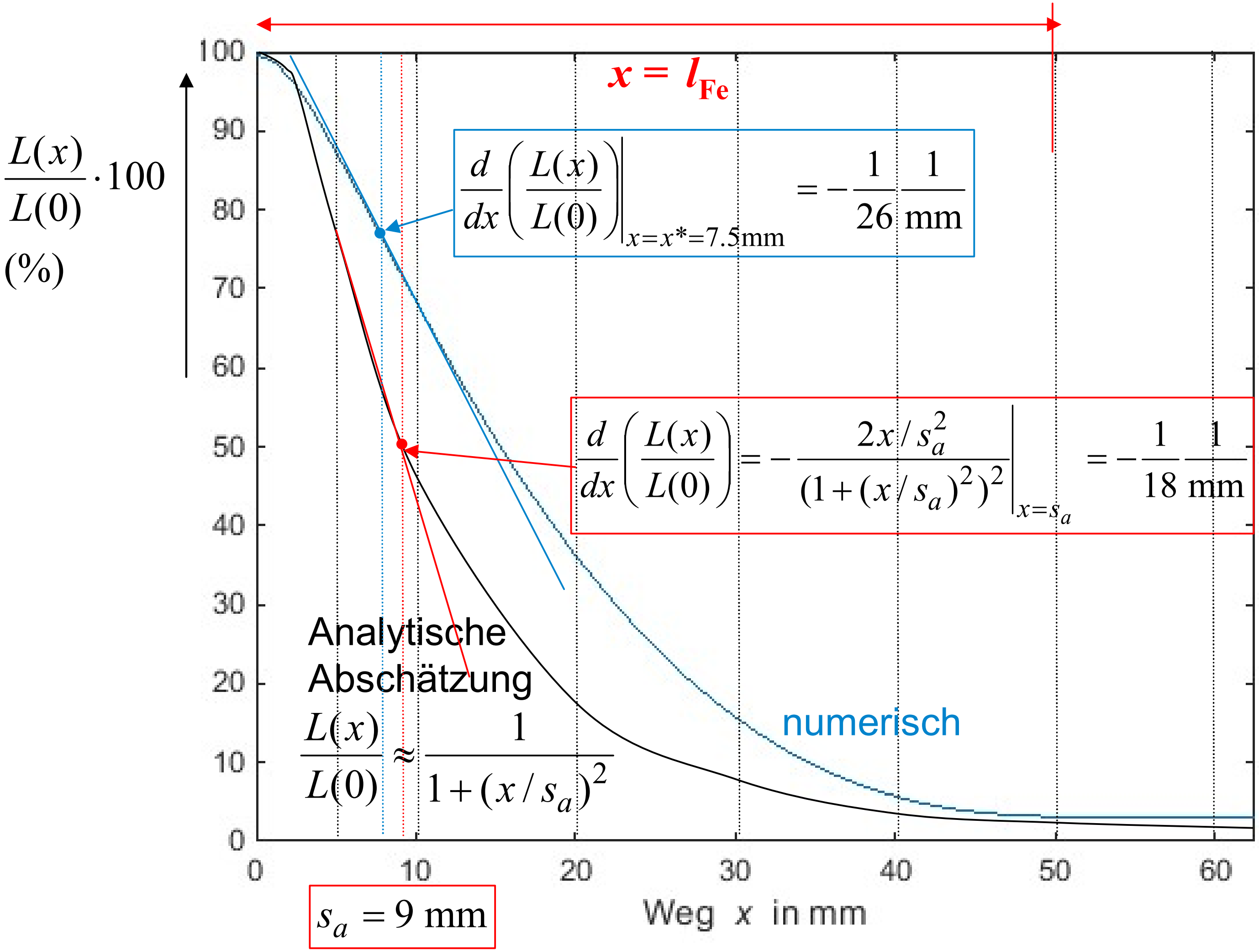
$$\frac{dF_1}{d\tilde{x}} = 0 \rightarrow \frac{1}{(1+\tilde{x}^2)^2} - \frac{\tilde{x}\cdot 2\tilde{x}}{(1+\tilde{x}^2)^3} = 0$$

$$\tilde{x}^{*2} = 1 \rightarrow x^* = \pm s_a$$

$$\boxed{\begin{aligned} x^* &= s_a = (R+\Delta+2d+2\delta)\cdot\pi/4 = \\ &= (5+1.5+2\cdot(1.5+1))\cdot\pi/4 = 9\text{ mm}\end{aligned}}$$

# Einführendes Beispiel

## Selbstinduktivität *L* und axiale Magnetkraft $F_1$




$$-F_1 = \frac{i^2}{2} \cdot \frac{dL(x)}{dx}$$

$i = 2$ A,

numerisch/analytisch:

$L(0) = 1.21 / 1.06$ mH

Maximale Kraft bei Wendetangente:

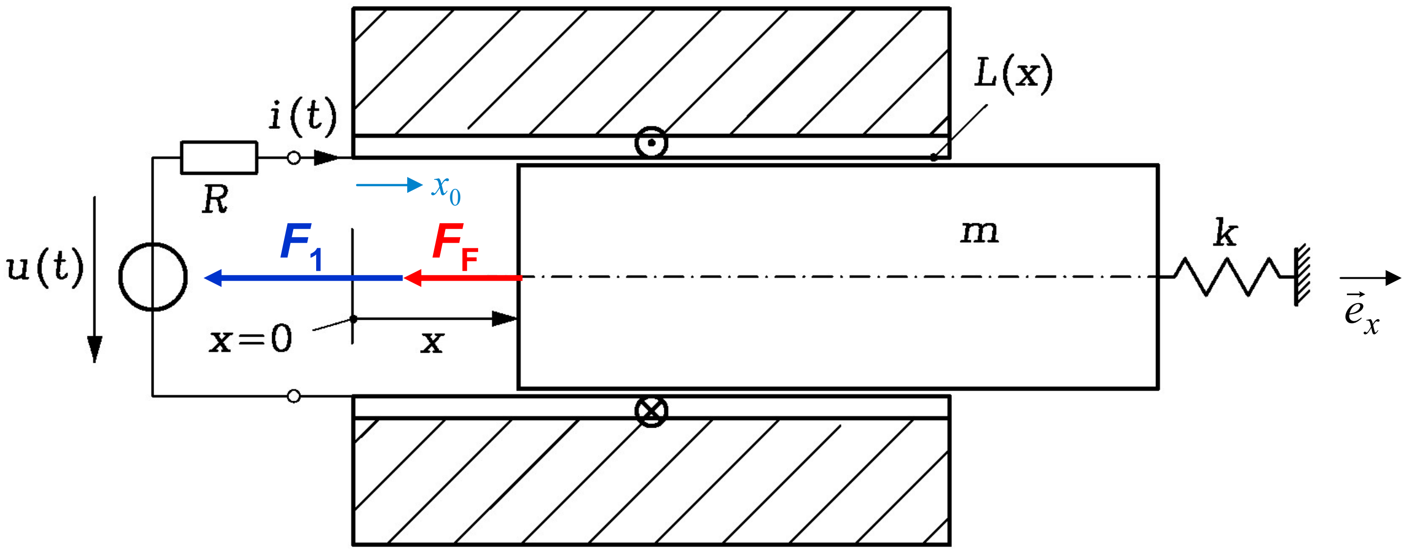
- Numerisch:

$$F_1 = \frac{2^2}{2} \cdot \frac{1.21}{1000} \cdot \frac{1000}{26} = = 0.093 \text{ N}$$

- Analytisch:

$$F_1 = \frac{2^2}{2} \cdot \frac{1.06}{1000} \cdot \frac{1000}{18} = = 0.1178 \text{ N}$$

# Einführendes Beispiel
## Asymm. Lage: Resultierende mech. Kraftgleichung




- **Resultierende Kraft** auf Körper *m* (Schwerpunktssatz):

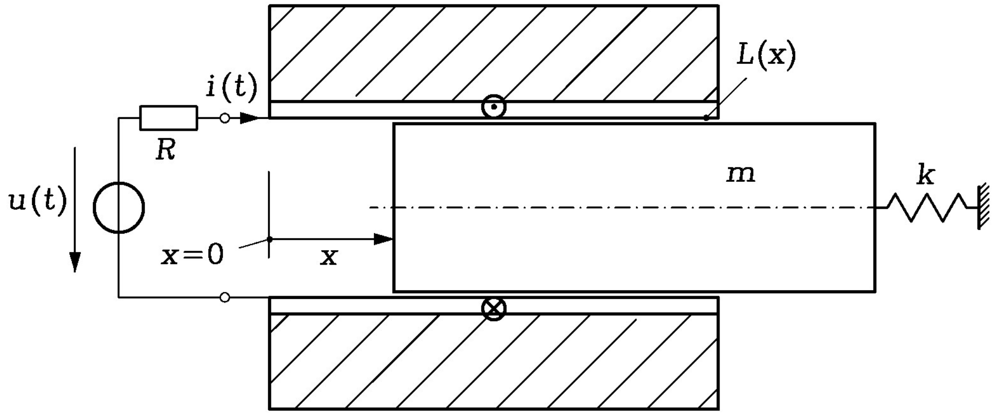
$$m \cdot \ddot{x} \cdot \vec{e}_x = \sum \text{Äußere Kräfte} = -F_F \cdot \vec{e}_x - F_1 \cdot \vec{e}_x$$

- Feder *k* bei $x = x_0 > 0$ entspannt $\Rightarrow$ Feder drückt bei $x > x_0$ nach links: $\begin{cases} \vec{F}_F = -F_F \cdot \vec{e}_x \\ F_F = k \cdot (x - x_0) \end{cases}$

$$m \cdot \ddot{x} = -F_F - F_1 = -k \cdot (x - x_0) + \frac{i^2}{2} \cdot \frac{dL}{dx}$$

$$\boxed{m \cdot \ddot{x} + k \cdot (x - x_0) - \frac{i^2}{2} \cdot \frac{dL}{dx} = 0}$$

# Einführendes Beispiel
## Systemgleichungen für Bewegung der Masse *m*




- Mechanische Gleichung:

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot (x - x_0) - \frac{i^2}{2} \cdot \frac{dL(x)}{dx} = 0$$

- Elektrische Gleichung: *Kirchhoff*´sche Maschengleichung
  Verbraucher-Zählpfeilsystem

$$u(t) + u_i(t) = R \cdot i(t) \Rightarrow u(t) - d\psi / dt = R \cdot i(t), \quad u(t) = R \cdot i(t) + d(L(x) \cdot i)/dt$$

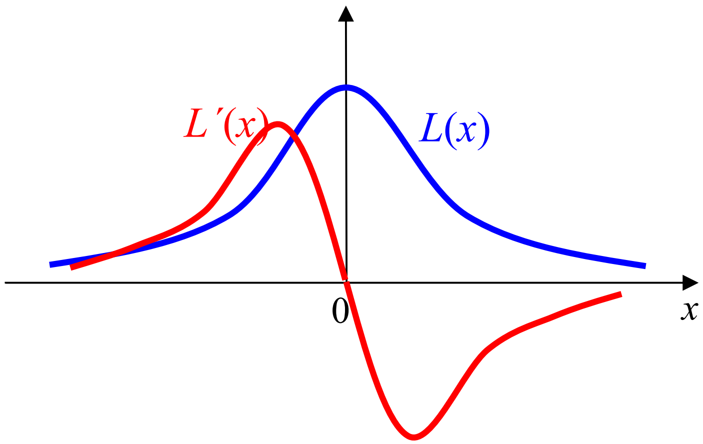
- Zwei Unbekannte: $x$, $i$; nichtlineares Gleichungssystem
  wegen a) $L(x)$, b) $i^2$, c) Produkten aus $L$ und $i$

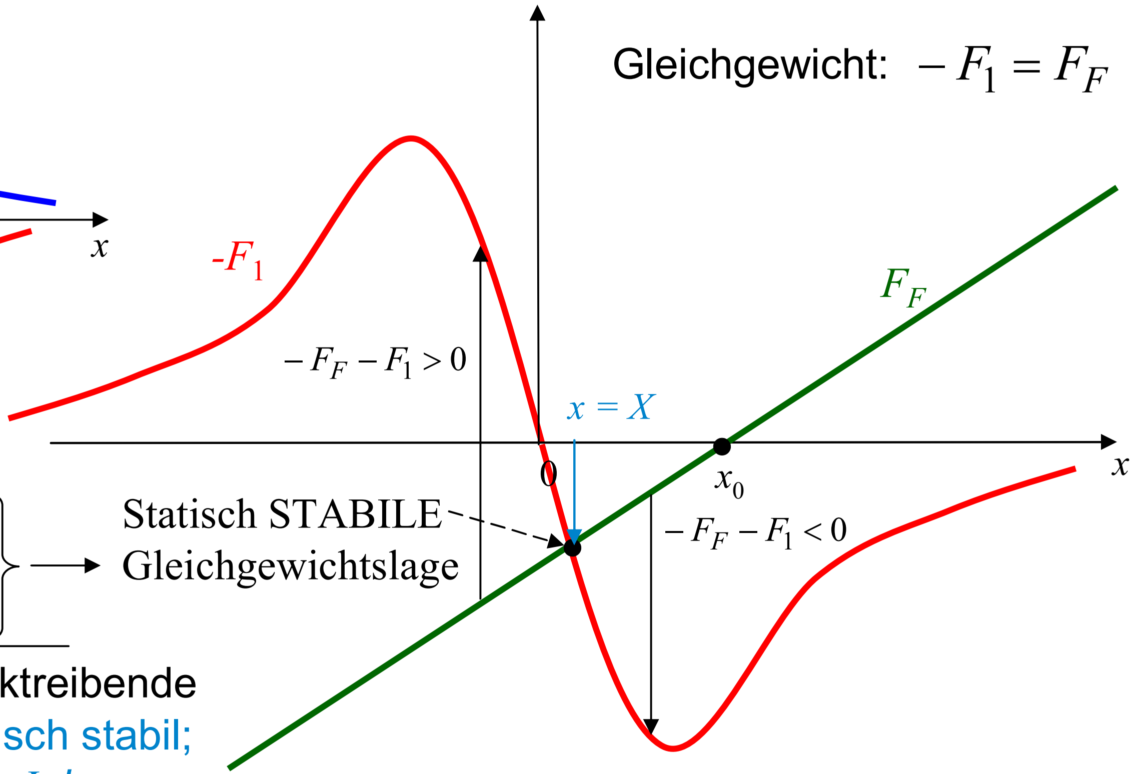
- Lösungsverhalten: a) Statische Kennlinie $i(x) = I(X)$ für $d./dt = 0$
  b) Stabilitätsuntersuchung der Gleichgewichtslagen $i(x)$ = $I(X)$
  c) Verhalten bei sinusförmiger Anregung im Arbeitspunkt $I(X)$
  $u(t) = U + \hat{U} \cdot \cos \omega t$ bei kleinen Signalen und großen Signalen $\hat{U}$

# Einführendes Beispiel

## Gleichgewichtslage $x = X$

- Gleichgewicht: *d./dt* = 0 $\quad u(t) = U = R \cdot i(t) = R \cdot I \Rightarrow \quad F_F = k \cdot (X - x_0) = \frac{I^2}{2} \cdot \frac{dL}{dx}\bigg|_{x=X} = -F_1$




$$m \cdot \ddot{x} = -F_F - F_1 < 0,\ x > X$$
$$m \cdot \ddot{x} = -F_F - F_1 > 0,\ x < X$$

$\rightarrow$ Statisch STABILE Gleichgewichtslage

Stets in die Lage $x = X$ zurücktreibende Gesamtkraft $-F_F - F_1 \Leftrightarrow$ Statisch stabil;
Ist abhängig von den Größen $I$, $k$, $x_0$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

## Zusammenfassung:

- Mechanische und elektromagnetische Kräfte
- Mechanische und elektromagnetische Energien
- Kopplung der mechanischen und elektrischen Systemgleichungen
- Nichtlineare System-Differentialgleichungen mit mehreren mechanischen und elektromagnetischen Unbekannten