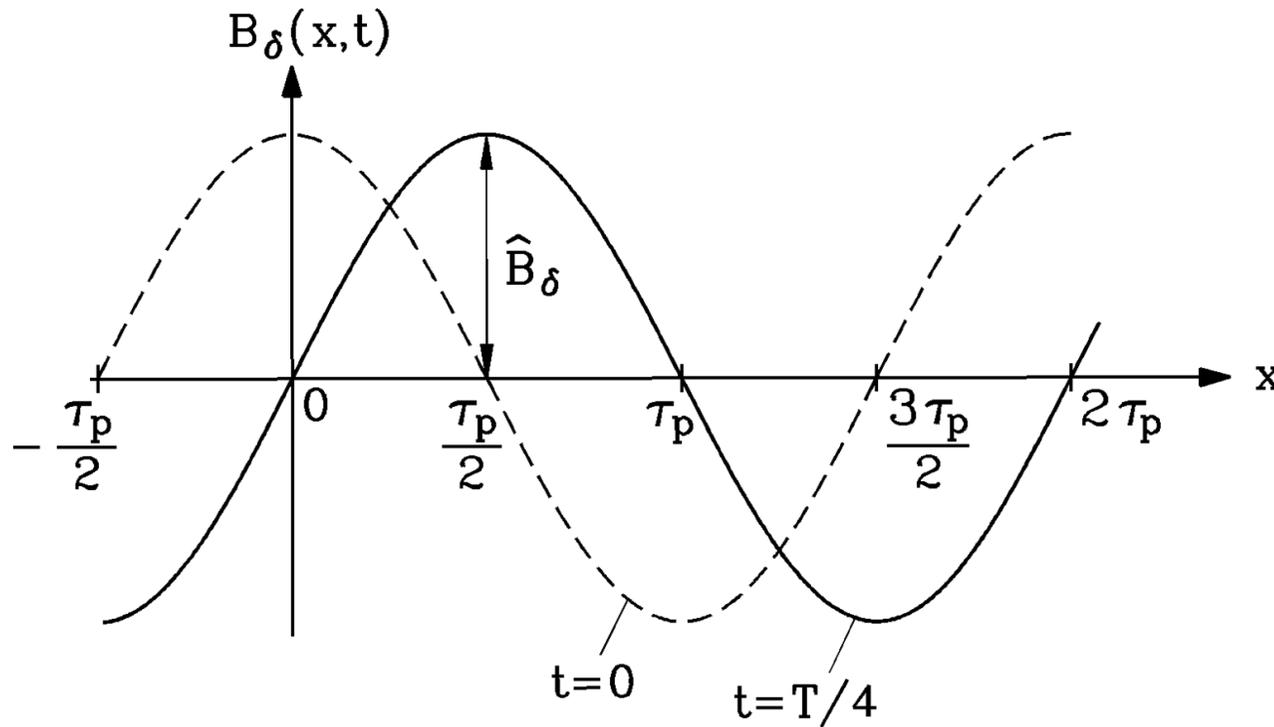


## Vorlesungsinhalt

1. Einleitung
2. Drehfelder in elektrischen Maschinen
3. **Mathematische Analyse von Luftspaltfeldern**
4. Spannungsinduktion in Drehstrommaschinen
5. Die Schleifringläufer-Asynchronmaschine
6. Die Kurzschlussläufer-Asynchronmaschine
7. Antriebstechnik mit der Asynchronmaschine
8. Die Synchronmaschine
9. Erregereinrichtungen und Kennlinien
10. Gleichstromantriebe

# 3. Mathematische Analyse von Luftspaltfeldern



## 3. Mathematische Analyse von Luftspaltfeldern

### 3.1 Grund- und Oberwellen von Luftspaltfeldern

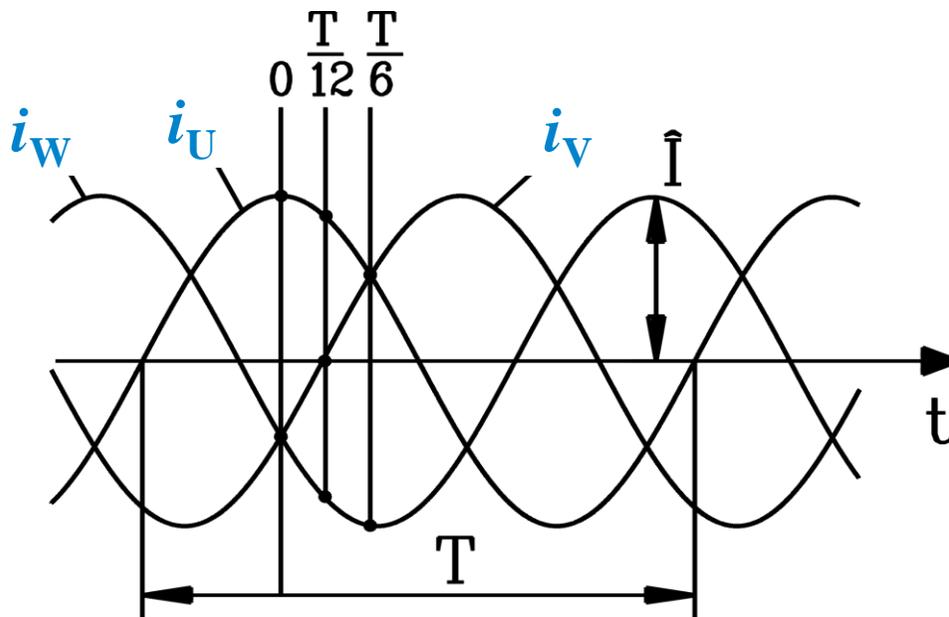
### 3.2 FOURIER-Reihenentwicklung zur Ermittlung von Grund- und Oberwellen

### 3.3 FOURIER-Reihe von gleichstromerregten Polradfeldern

# Wellen versus Schwingungen

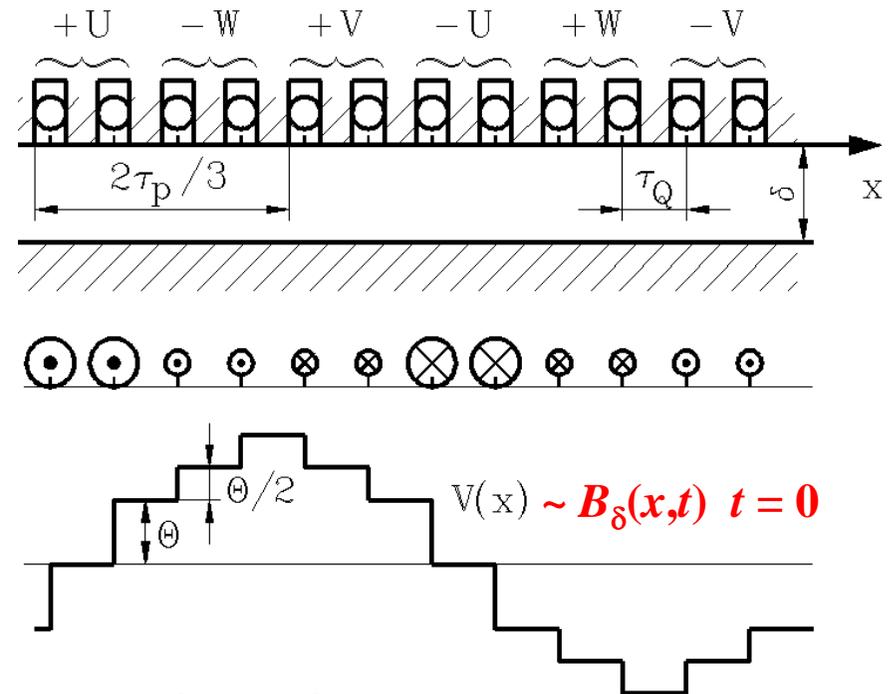
- Periodische **Welle**: eine Größe ändert sich **räumlich** und **zeitlich** periodisch
- **Schwingung**: nur **zeitlich** periodische Änderung

Wechselstrom je Strang  $i(t)$ : ist Schwingung



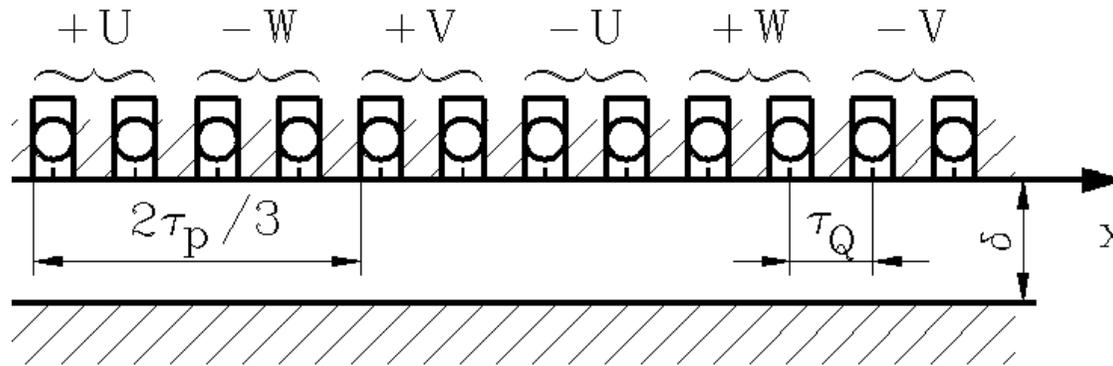
Phasenfolge U, V, W

Feldverteilung  $B_\delta(x,t)$  im Luftspalt ist Welle



$m = 3, q = 2$

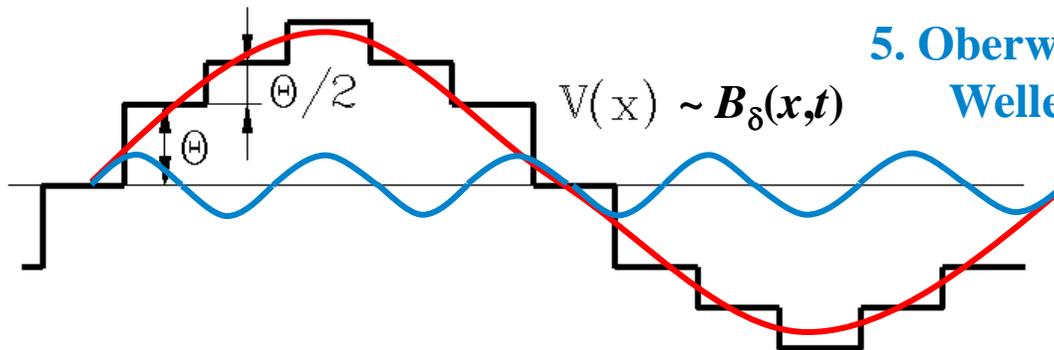
Treppenförmige Luftspalt-Feldwelle  $B_\delta(x,t)$  kann als (unendliche) Summe von Grund- und Oberwellen dargestellt werden = **FOURIER-Reihe**



$$m = 3, q = 2$$



$$i_V = i_W = -i_U/2$$



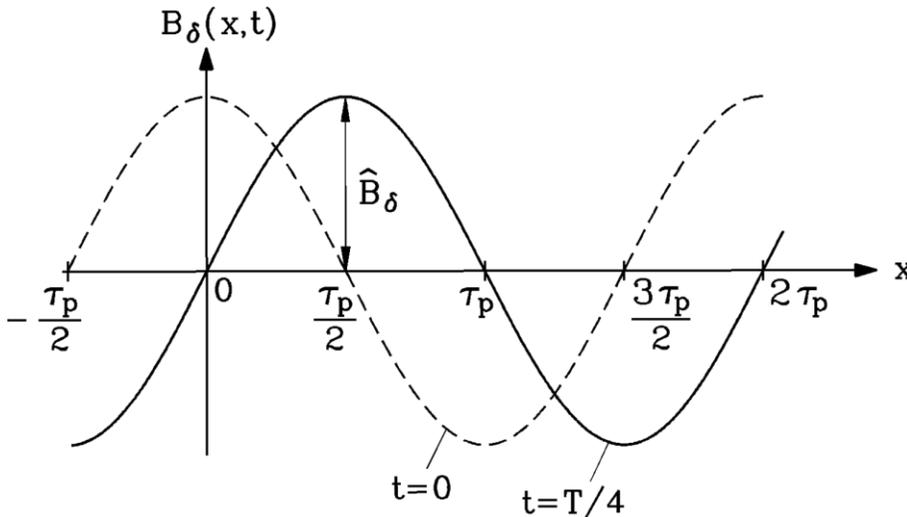
**5. Oberwelle: Sinuswelle mit Wellenlänge =  $2\tau_p / 5$**

**Grundwelle: Sinuswelle mit Wellenlänge =  $2\tau_p$**

# Grundwelle: Drehwelle versus Wanderwelle

Wiederholung

- **Drehwelle:**  $x$  ist Ständer-Umfangskoordinate (*rotierende Maschine*)
- **Wanderwelle:**  $x$  ist Ständer-Längskoordinate (*Linearmaschine*)



$$B_{\delta 1}(x, t) = \hat{B}_{\delta 1} \cdot \cos\left(\frac{x \cdot \pi}{\tau_p} - 2\pi f \cdot t\right)$$

- **Wellengeschwindigkeit:** Mitbewegter Beobachter sieht konstante Phase:  
 $\Rightarrow$  Argument des  $\cos(\dots)$  ist konstant: *Konst.*

$$\frac{x \cdot \pi}{\tau_p} - 2\pi f \cdot t = \text{Konst.} \quad x = (\text{Konst.} + 2\pi f t) \cdot \frac{\tau_p}{\pi}$$

$$v_{\text{syn}} = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ (\text{Konst.} + 2\pi f t) \cdot \frac{\tau_p}{\pi} \right] = \underline{\underline{2f\tau_p}}$$

- **Welle in Gegen-Richtung:**  $B_{\delta 1}(x, t) = \hat{B}_{\delta 1} \cdot \cos\left(\frac{x \cdot \pi}{\tau_p} + 2\pi f \cdot t\right) \Rightarrow v_{\text{syn}} = -2f\tau_p$

# Drehwelle im Kraftwerksgenerator

- Beispiel:**  $f = 50$  Hz:  $v_{syn}$  in m/s so groß wie die Polteilung in cm:  $v_{syn}^{[m/s]} = \tau_p^{[cm]}$   
Zweipoliger Turbogenerator ( $2p = 2$ ) im thermischen Kraftwerk:  $n_{syn} = 3000$ /min:
- Bohrungsdurchmesser  $d_{si} = 1.2$  m, Polteilung  $\tau_p = 1.2\pi/2 = 1.88$  m = 188 cm
  - $v_{syn} = \underline{188 \text{ m/s}} = 676$  km/h = Umfangsgeschwindigkeit des Läufers, der synchron mit der Drehwelle läuft (**Synchronmaschine** !)



$f = 50$  Hz:

$$v_{syn}^{[m/s]} = \tau_p^{[cm]}$$

Quelle: Wikipedia

- **Stehendes Feld (Wechselfeld):**

Ändert die Lage der *Knoten* (Nullstellen) und *Bäuche* (Maxima) nicht, **pulsiert** aber in der Amplitude.

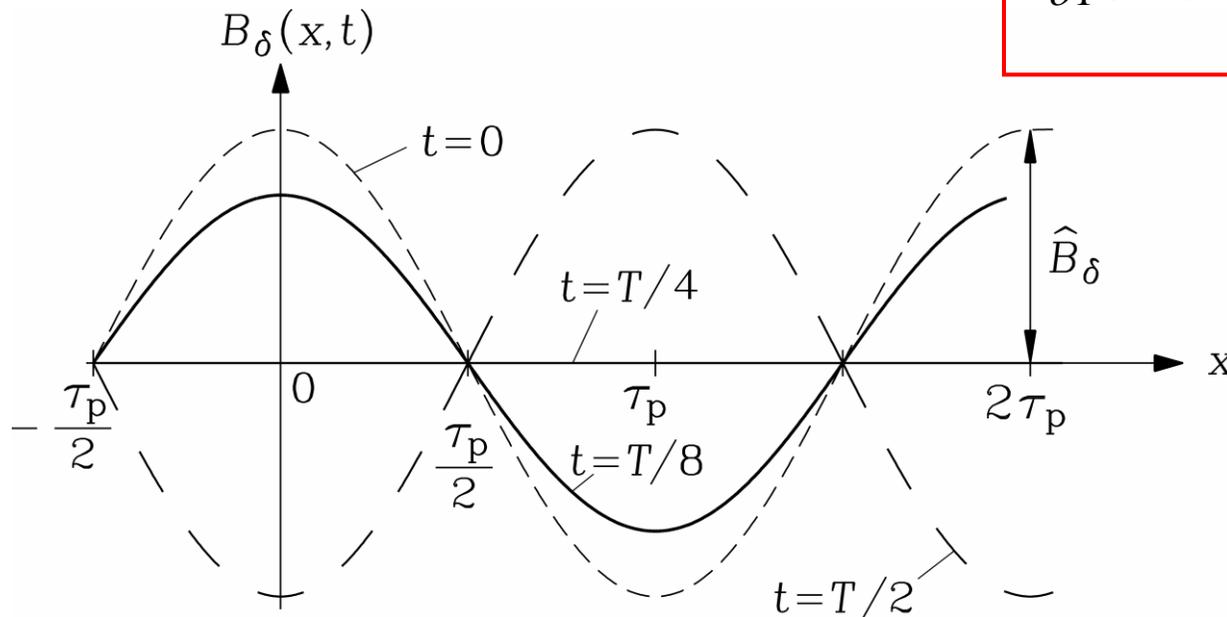
- Zeit  $t = 0$ : Maximum bei  $x = 0$  hat Amplitudenwert  $\hat{B}_{\delta 1}$

$$t = T/8: \hat{B}_{\delta 1} / \sqrt{2}$$

$$t = T/4: \text{Null,}$$

$$t = T/2: -\hat{B}_{\delta 1} \quad \text{usw.}$$

$$B_{\delta 1}(x, t) = \hat{B}_{\delta 1} \cdot \cos\left(\frac{x \cdot \pi}{\tau_p}\right) \cdot \cos(2\pi f \cdot t)$$



## Zusammenfassung: Grund- und Oberwellen von Luftspaltfeldern

- Unterscheide Schwingungen und Wellen!
- Unterscheide stehende und wandernde (drehende) Wellen!
- Das Luftspaltfeld ist eine Drehwelle mit ausgeprägter Sinus-Grundwelle
- Für die elektromechanische Energiewandlung wird nur die Grundwelle genützt

## 3. Mathematische Analyse von Luftspaltfeldern

### 3.1 Grund- und Oberwellen von Luftspaltfeldern

### 3.2 **FOURIER-Reihenentwicklung zur Ermittlung von Grund- und Oberwellen**

### 3.3 FOURIER-Reihe von gleichstromerregten Polradfeldern

# FOURIER-Reihe: Ermittlung von Grund- und Oberwellen

Wiederholung



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

- **FOURIER-Reihe:** Eine periodische Funktion  $V(\gamma)$  mit der Periode  $2\pi$  kann in eine unendliche Summe von sinusförmigen Funktionen dargestellt werden.

$$V(\gamma) = V_0 + \sum_{\nu=1,2,3,\dots}^{\infty} [\hat{V}_{\nu,a} \cdot \cos(\nu \cdot \gamma) + \hat{V}_{\nu,b} \cdot \sin(\nu \cdot \gamma)]$$

$$\gamma = \frac{x}{\tau_p} \cdot \pi \quad \begin{cases} 0 \leq \gamma \leq 2\pi \\ 0 \leq x \leq 2\tau_p \end{cases}$$

- **Ordnungszahlen:**  $\nu = 1, 2, 3, \dots$

- **Amplituden:**  $\hat{V}_{\nu,a} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} V(\gamma) \cdot \cos(\nu \cdot \gamma) \cdot d\gamma$  ,  $\hat{V}_{\nu,b} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} V(\gamma) \cdot \sin(\nu \cdot \gamma) \cdot d\gamma$

- **Mittelwert:**  $V_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V(\gamma) \cdot d\gamma$

- **Magnetische Spannungen der Luftspaltfelder:**

a) KEIN UNIPOLAR-Fluss:  $V_0 = 0$

b) Funktion  $V$  **abszissensymmetrisch**: KEINE geraden Ordnungszahlen

c) Funktion  $V$  **gerade** Funktion  $\Leftrightarrow$  Nullpunkt so gelegt, dass  $V(\gamma) = V(-\gamma)$ : KEINE Sinus-Terme

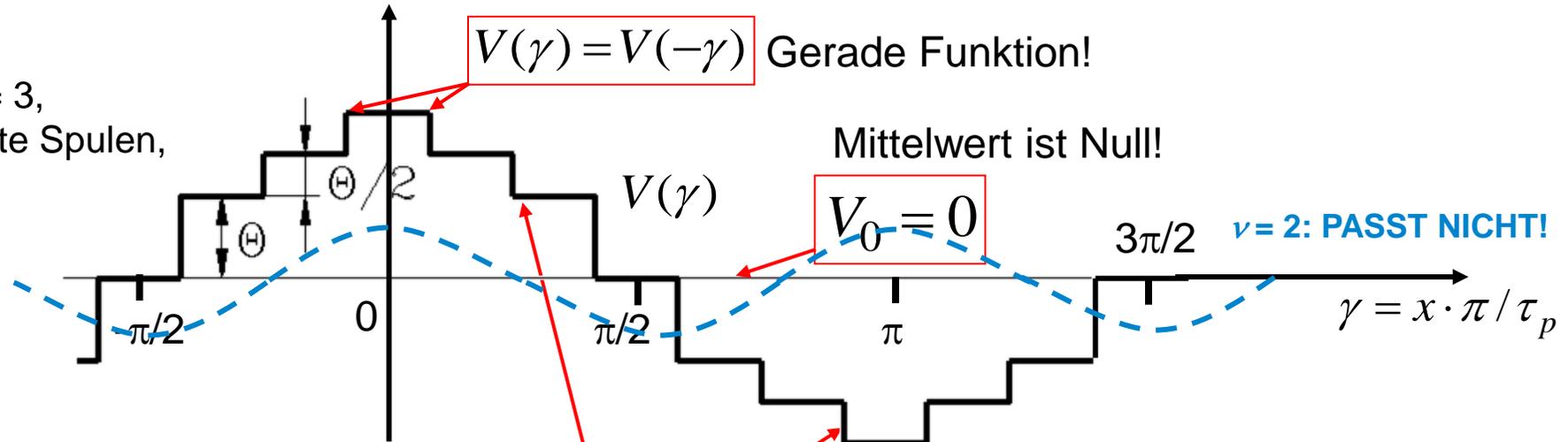


# Eigenschaften des magnetischen Drehfelds $B_\delta$ im Luftspalt

$$B_\delta(\gamma) = \mu_0 \cdot V(\gamma) / \delta$$

## Beispiel:

$q = 2, m = 3,$   
ungesehnte Spulen,  
 $t = 0$



Abszissensymmetrie:  $V(\gamma) = -V(\gamma + \pi)$

$$V(\gamma) = \sum_{\nu=1,5,7,\dots}^{\infty} \hat{V}_{\nu,a} \cdot \cos(\nu \cdot \gamma)$$

Weil das Luftspaltfeld von einer  $m = 3$ -strängigen Wicklung erregt wird, treten **keine durch 3 teilbaren** Ordnungszahlen  $\nu$  auf !

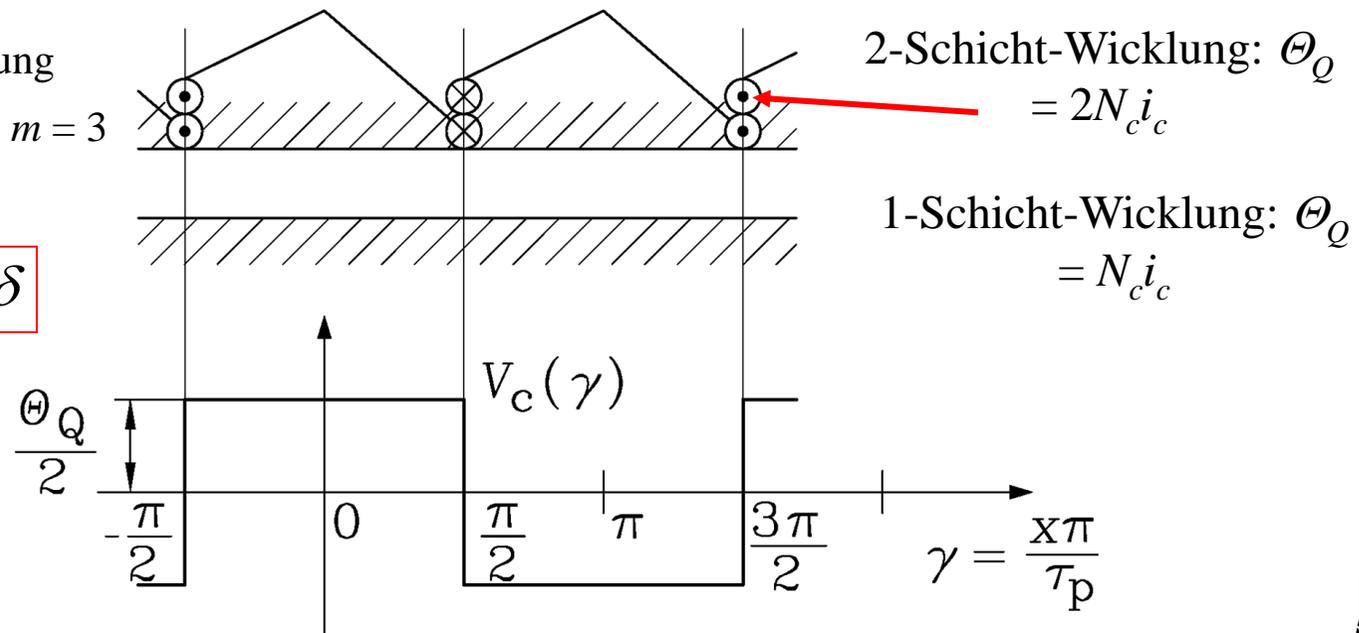
# Luftspaltfeldkurve einer ungesehnter Spule ( $q = 1$ )

- Magnetische Spannung  $V_c(x)$  ist **Rechteckfunktion**,
- Nut-Durchflutung: 1-Schicht-Wicklung:  $\Theta_Q = N_c i_c$ , 2-Schicht-Wicklung:  $\Theta_Q = 2N_c i_c$
- Umfangswinkel:  $\gamma = x \cdot \pi / \tau_p$
- **Beispiel: Vierpolige Maschine:** Halber Umfang =  $\pi$  in "mechanischen Graden", sind aber zwei Polteilungen  $x = 2\tau_p$ , daher  $\gamma = 2\pi$ , in "elektrischen Graden"

2-Schichtwicklung

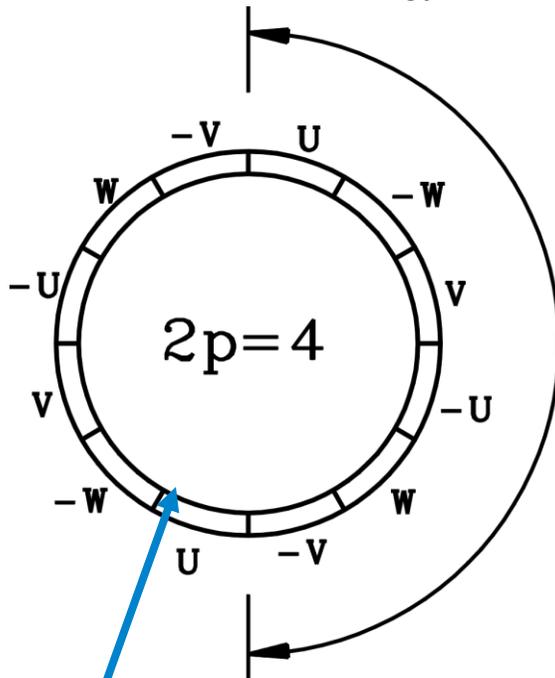
$$q = 1, W/\tau_p = 1, m = 3$$

$$B_\delta(\gamma) = \mu_0 V_c(\gamma) / \delta$$



**Beispiel:**  $2p = 4$ :  $\gamma_{el} / 2 = \gamma_m$

$$\gamma_{el} = \gamma = \frac{x}{\tau_p} \cdot \pi \quad \begin{cases} 0 \leq \gamma \leq 2\pi \\ 0 \leq x \leq 2\tau_p \end{cases}$$



1 Polpaar

$$\cong 2\tau_p = 360^\circ \text{ „elektrisch“}$$

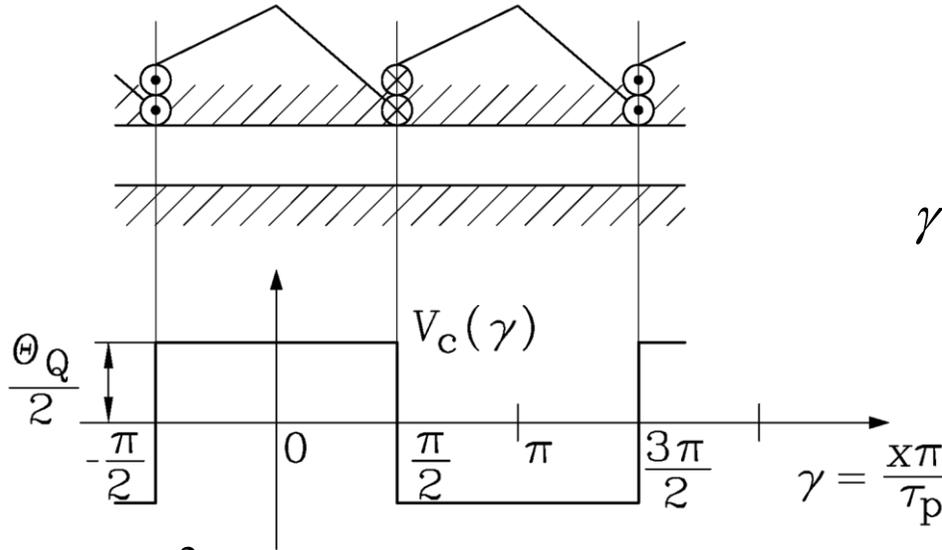
Eine Wellenlänge  $\Rightarrow \gamma_{el} = 360^\circ$  „elektrisch“

Umfang der Maschine  $\Rightarrow \gamma_m = 360^\circ$  „mechanisch“

Umfang der Maschine =  $360^\circ$  „mechanisch“

$$\gamma_{el} / p = \gamma_m$$

# FOURIER-Reihe des Felds ungesetzter Spulen ( $q = 1$ )



$$\gamma = x \cdot \pi / \tau_p : \quad V_c(\gamma) = \sum_{v=1,3,5,\dots}^{\infty} \hat{V}_{c,v} \cos(v\gamma)$$

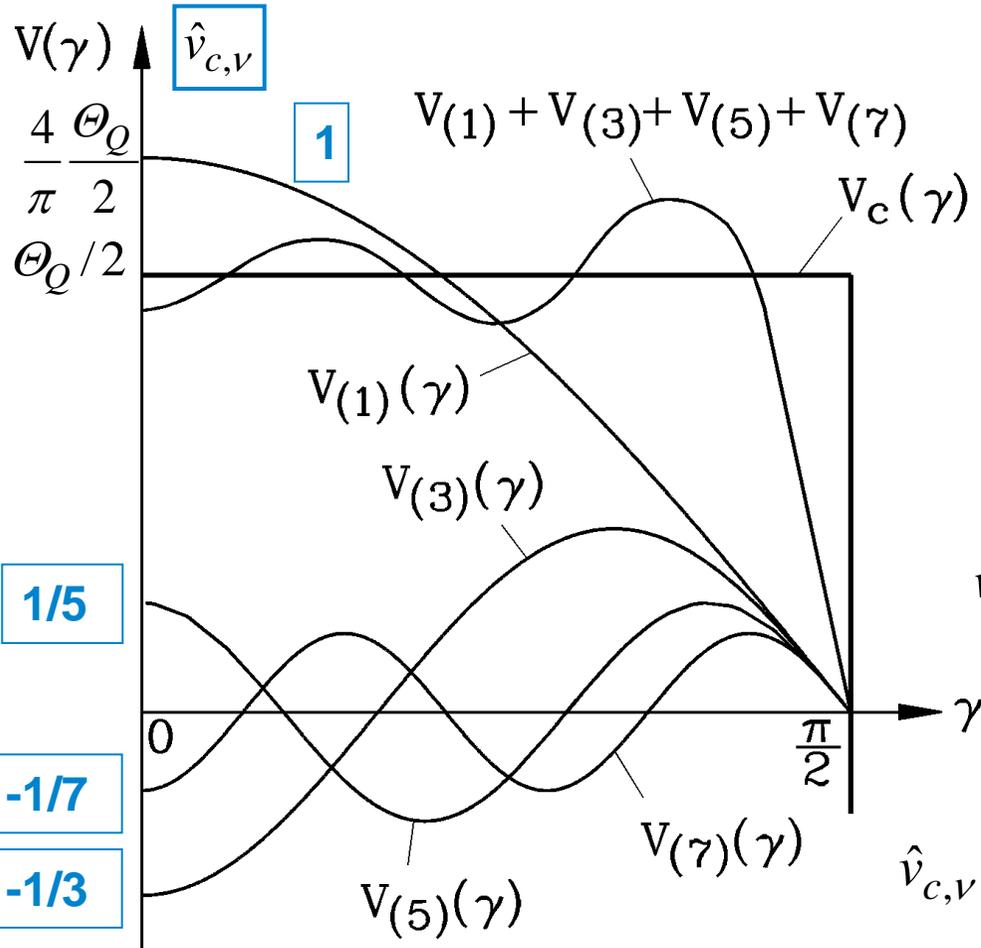
$$\hat{V}_{c,v} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} V_c(\gamma) \cos(v\gamma) d\gamma = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} V_c(\gamma) \cos(v\gamma) d\gamma = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\Theta_Q}{2} \cdot \cos(v\gamma) d\gamma = \frac{\Theta_Q}{2} \cdot \frac{4}{v\pi} \cdot \sin\left(\frac{v\pi}{2}\right)$$

$V_c(\gamma) = -V_c(\gamma + \pi)$  **Abszissensymmetrie**  $V_c(\gamma) = V_c(-\gamma)$  **gerade Funktion**  
 $v = 1, 3, 5, \dots$   $v = 1, 3, 5, \dots$

$$\hat{V}_{c,v} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} V_c(\gamma) \cos(v\gamma) d\gamma = \frac{\Theta_Q}{2} \cdot \frac{4}{v\pi} \cdot \sin\left(\frac{v\pi}{2}\right) \quad v = 1, 3, 5, \dots$$



# FOURIER-Reihe des Felds ungesetzter Spulen ( $q = 1$ )



$$\gamma = x \cdot \pi / \tau_p$$

$$V_c(\gamma) = \sum_{v=1,3,5,\dots}^{\infty} \hat{V}_{c,v} \cos(v\gamma)$$

$$\hat{V}_{c,v} = \frac{\Theta_Q}{2} \cdot \frac{4}{v\pi} \cdot \sin\left(\frac{v\pi}{2}\right)$$

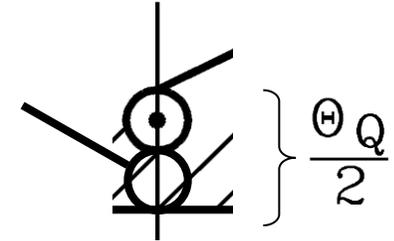
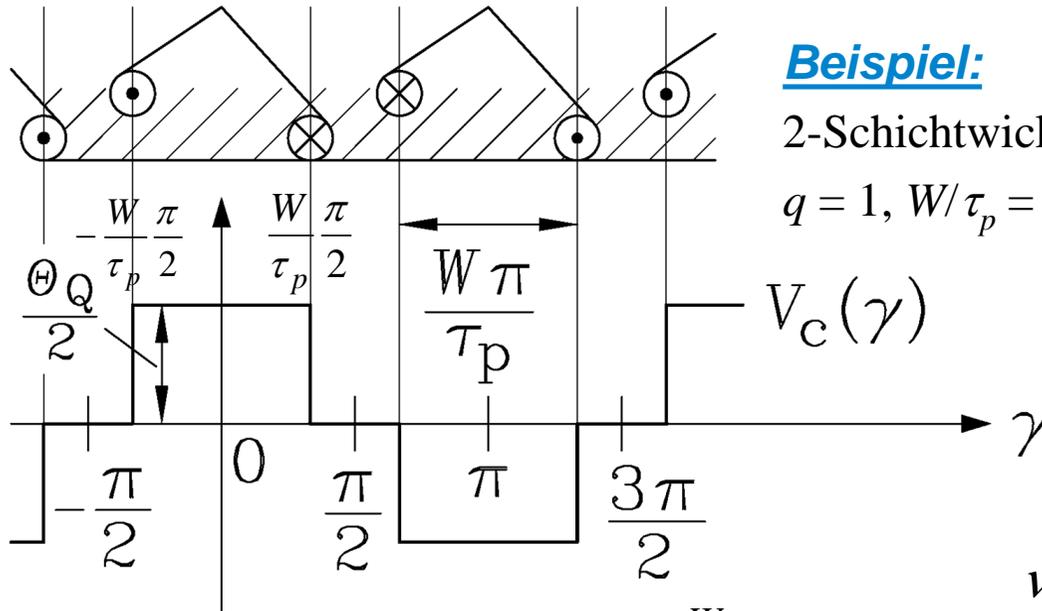
$$v = 1, 3, 5, 7, \dots \Rightarrow \sin\left(\frac{v\pi}{2}\right) = 1, -1, 1, -1, \dots$$

$v$	1	3	5	7 ...
$\hat{V}_{c,v} = \frac{\hat{V}_{c,v}}{\frac{\Theta_Q}{2} \cdot \frac{4}{\pi}} = \frac{1}{v} \cdot \sin\left(\frac{v\pi}{2}\right)$	1	-1/3	1/5	-1/7 ...



# FOURIER-Reihe des Felds gesehnter Spulen

## Beispiel: $q = 1$



$$\nu = 1, 3, 5, \dots$$

$$\hat{V}_{c,\nu} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} V_c(\gamma) \cos(\nu\gamma) d\gamma = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{W \cdot \pi}{\tau_p \cdot 2}} \frac{\Theta_Q}{2} \cdot \cos(\nu\gamma) d\gamma = \frac{\Theta_Q}{2} \cdot \frac{4}{\nu\pi} \cdot \sin\left(\frac{W}{\tau_p} \cdot \frac{\nu\pi}{2}\right)$$

Vergleich zu ungesehnten Spulen:

Amplituden um den "**Sehnungsfaktor**"  $k_{p,\nu}$  kleiner:

$$k_{p,\nu} = \sin\left(\frac{W}{\tau_p} \cdot \frac{\nu\pi}{2}\right)$$

$$k_{p,\nu} = \sin\left(\frac{W}{\tau_p} \cdot \frac{\nu\pi}{2}\right)$$

- **Beispiel:**  $W/\tau_p = 5/6 = 0.833$  ( $q = 2$ ):  $\nu = 1$ :  $k_{p1} = 0.966$ ,  $\nu = 5$ :  $k_{p5} = 0.259$
- **Sonderfall:** Ungesehnte Spulen:  $W/\tau_p = 1$   $k_{p,\nu} = \sin\left(\frac{W}{\tau_p} \cdot \frac{\nu\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)$
- Sehnung  $W/\tau_p = 0.8$ :  $k_{p,5} = \sin\left(\frac{W}{\tau_p} \cdot \frac{\nu\pi}{2}\right) = \sin\left(0.8 \cdot \frac{5\pi}{2}\right) = \sin(2\pi) = 0$

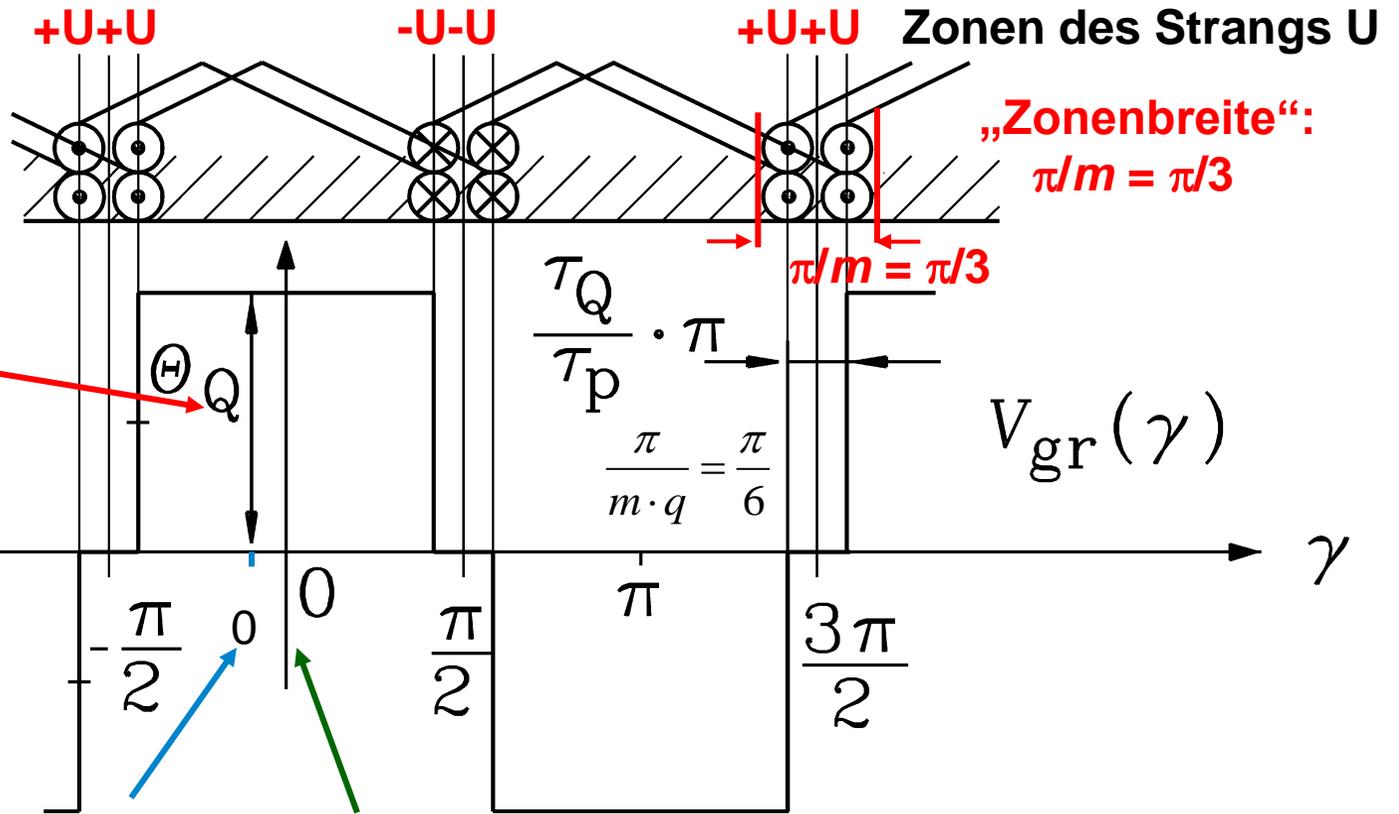
**Minimaler Oberwellengehalt = OPTIMALE Sehnung !**

# Feldkurve einer Spulengruppe $q > 1$

**Beispiel:**

2-Schichtwicklung

$q = 2, W/\tau_p = 1, m = 3$



Amplitude:  $q\Theta_Q/2$   
 bei  $q = 2$ :  
 Amplitude ist  $\Theta_Q$

Nullpunkt des Felds einer Spule    Nullpunkt des Felds einer Spulengruppe,  
 verschoben um  $\pi/(2m \cdot q)$



# FOURIER-Reihe des Felds einer Spulengruppe $q > 1$

- Magnetische Spannung einer ungesehten Spulengruppe:  $\nu = 1, 3, 5, \dots$

$$\hat{V}_{gr,\nu} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} V_{gr}(\gamma) \cdot \cos(\nu\gamma) \cdot d\gamma = \frac{q\Theta_Q}{2} \cdot \frac{4}{\nu\pi} \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)}_{k_{p,\nu}} \cdot \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{\nu\pi}{2m}\right)}{q \cdot \sin\left(\frac{\nu\pi}{2mq}\right)}}_{k_{d,\nu}} \quad (\text{Ohne Beweis})$$

"Zonenfaktor":

$$k_{d,\nu} = \frac{\sin\left(\frac{\nu\pi}{2m}\right)}{q \cdot \sin\left(\frac{\nu\pi}{2mq}\right)}$$

**Sonderfall:**

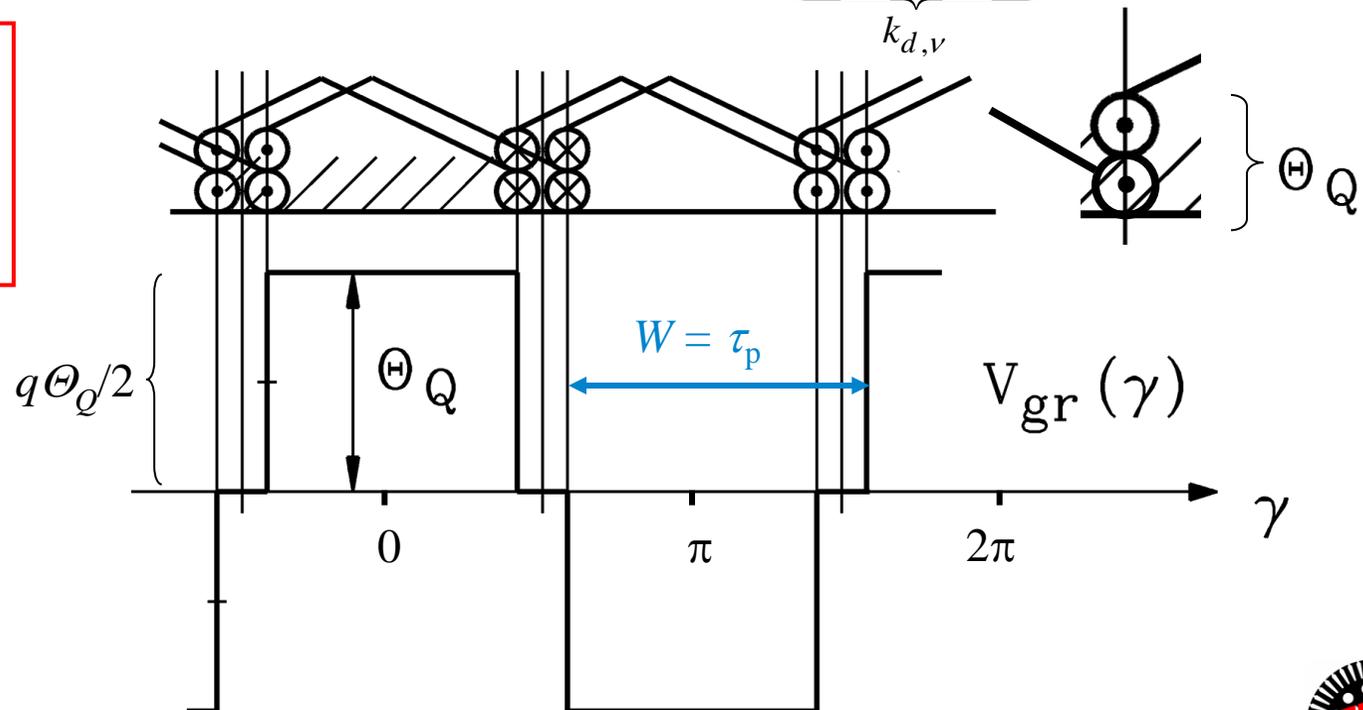
$$q = 1: k_{d,\nu} = 1$$

**Beispiel:**

$$q = 2, W/\tau_p = 1, m = 3$$

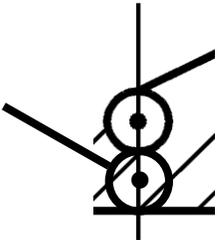
$$\nu = 1: k_{d1} = 0.966$$

$$\nu = 3: k_{d3} = 0.707$$



# V(x)-Formel mit Windungszahl je Strang N

- Zweischicht-Wicklung ungeseht:**



$$\frac{q\Theta_Q}{2} = qN_c i_c = \frac{2pqN_c}{a} \cdot \frac{ai_c}{2p} = N \cdot \frac{i}{2p}$$

$$\Theta_Q = 2N_c i_c \quad i = a \cdot i_c$$

$$\hat{V}_{gr,v} = N \cdot \frac{i}{2p} \cdot \frac{4}{v\pi} \cdot \sin\left(\frac{v\pi}{2}\right) \cdot k_{d,v}$$

- Einschicht-Wicklung (stets ungeseht):**



$$\frac{q\Theta_Q}{2} = \frac{qN_c i_c}{2} = \frac{pqN_c}{a} \cdot \frac{ai_c}{2p} = N \cdot \frac{i}{2p}$$

$$\Theta_Q = N_c i_c$$

$$\hat{V}_{gr,v} = N \cdot \frac{i}{2p} \cdot \frac{4}{v\pi} \cdot \sin\left(\frac{v\pi}{2}\right) \cdot k_{d,v}$$

- Zweischicht-Wicklung geseht:**

$$\hat{V}_{gr,v} = N \cdot \frac{i}{2p} \cdot \frac{4}{v\pi} \cdot \sin\left(\frac{W}{\tau_p} \frac{v\pi}{2}\right) \cdot k_{d,v}$$

# FOURIER-Reihe: Feld des Wicklungsstrangs

$$q > 1, W/\tau_p \neq 1$$

- *FOURIER*-Reihe der Kurve  $V_{strang}(\gamma)$  eines Wicklungsstrangs:

$$\hat{V}_{strangv} = N \cdot \frac{i}{2p} \cdot \frac{4}{v\pi} \cdot k_{p,v} \cdot k_{d,v}, \quad v = 1, 3, 5, \dots$$

- Strangstrom  $i = I \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(\omega t)$
- Die magnetische Spannungsverteilung ist eine Summe stehender, pulsierender Wellen („**Wechselfeld**“).

$$\hat{V}_{strangv} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{\pi} \cdot \frac{N}{p} \cdot \frac{1}{v} \cdot k_{p,v} \cdot k_{d,v} \cdot I, \quad v = 1, 3, 5, \dots$$

$$V_{strang}(\gamma, t) = \sum_{v=1,3,5,\dots}^{\infty} \hat{V}_{strang,v} \cdot \cos(v\gamma) \cdot \cos(\omega t)$$

- **"Wicklungsfaktor"**  $k_{w,v} = k_{p,v} \cdot k_{d,v}$

# Beispiele gängiger Drehstrom-Wicklungen

**Sehnungs-, Zonen- und Wicklungsfaktoren** für ungesehnte bzw. gesehnte 3-strängige Drehstromwicklungen mit 6, 12 und 18 Nuten je Polpaar  $Q/p$

**Beispiel 1:**  $Q/p = 6$ ,  $q = 1$ ,  $W/\tau_p = 1$ :

- elektrische erregte Synchron-Lichtmaschine (12-polig),
- TRANSRAPID-Wanderfeldwicklung für ele. erregten Synchron-Linearmotor

Eine Sehnung  $W/\tau_p = 2/3$  mindert alle Amplituden gleichartig (siehe folgende Tabelle): Sie wird daher in der Praxis bei  $q = 1$  **nicht** eingesetzt.

**Beispiel 2:**  $Q/p = 12$ ,  $q = 2$ ,  $W/\tau_p = 1$ :

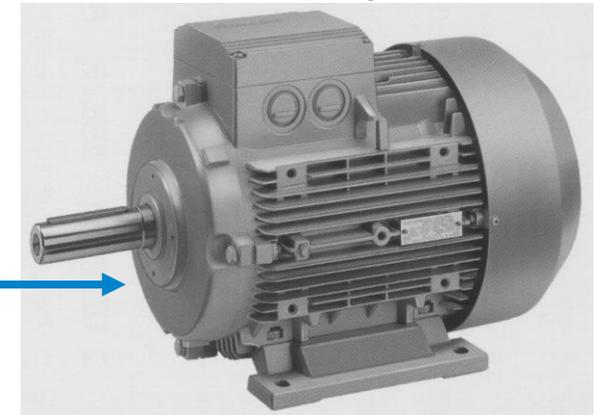
Permanentmagneterregte Synchronmaschine im Hybridauto (*Toyota Prius II*), 8-polig

Die Sehnung  $W/\tau_p = 5/6$  mindert selektiv Amplituden:

Sie wird in der Praxis häufig eingesetzt, aus Kostengründen aber erst bei größeren E-Maschinen.

**Beispiel 3:**  $Q/p = 18$ ,  $q = 3$ ,  $W/\tau_p = 7/9$ :

Vierpolige Käfigläufer-Asynchronmaschine



Quelle: Siemens AG, Deutschland

# Beispiel: Sehnungs-, Zonen- und Wicklungsfaktoren

- Gesehnte 2-Schicht-Drehstromwicklungen mit 6, 12 und 18 Nuten je Polpaar  $Q/p$   
(Angabe in Tabelle ohne durch 3 teilbare Harmonische!)

	<b>A</b>			<b>B</b>			<b>C</b>		
	$q = 1, W/\tau_p = 2/3$			$q = 2, W/\tau_p = 5/6$			$q = 3, W/\tau_p = 7/9$		
	$Q/p = 6$			$Q/p = 12$			$Q/p = 18$		
$\nu$	$k_{p,\nu}$	$k_{d,\nu}$	$k_{w,\nu}$	$k_{p,\nu}$	$k_{d,\nu}$	$k_{w,\nu}$	$k_{p,\nu}$	$k_{d,\nu}$	$k_{w,\nu}$
1	0.866	1	0.866	<b>0.966</b>	<b>0.966</b>	<b>0.933</b>	<b>0.940</b>	<b>0.960</b>	<b>0.902</b>
5	-0.866	1	-0.866	0.259	0.259	0.067	-0.174	0.218	-0.038
7	0.866	1	0.866	0.259	-0.259	-0.067	0.766	-0.177	-0.136
11	-0.866	1	-0.866	<b>0.966</b>	<b>-0.966</b>	<b>-0.933</b>	0.766	-0.177	-0.136
13	0.866	1	0.866	<b>-0.966</b>	<b>-0.966</b>	<b>0.933</b>	-0.174	0.218	-0.038
17	-0.866	1	-0.866	-0.259	-0.259	0.067	<b>0.940</b>	<b>0.960</b>	<b>0.902</b>
19	0.866	1	0.866	-0.259	0.259	-0.067	<b>-0.940</b>	<b>0.960</b>	<b>-0.902</b>

- Sehnungs- und Zonenfaktor **SCHWÄCHEN** bestimmte Oberwellenamplituden **AB**.
- Der Wicklungsfaktor ist eine **PERIODISCHE** Funktion der Ordnungszahl  $\nu$ .

# Einlegen von Formspulen als Zweischichtwicklung in einen vierpoligen Stator (Asynchron-Windgenerator)



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

Wickelkopf

$Q = 72$  Nuten

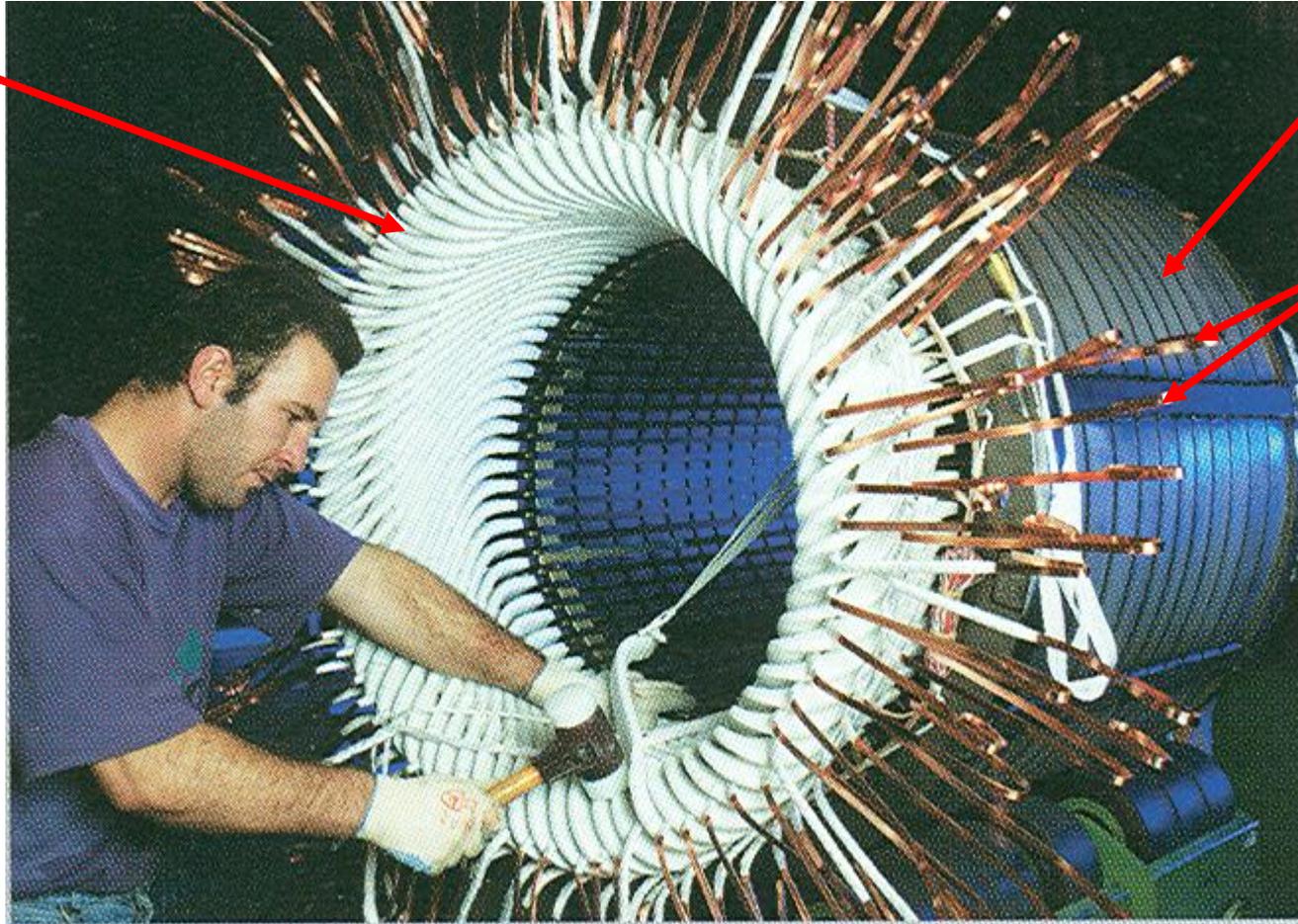
72 Spulen

$m = 3$  Stränge

$2p = 4$  Pole

**$q = 6$  Nuten pro  
Pol und Strang**

$$Q = 2p \cdot m \cdot q =$$
$$= 4 \cdot 3 \cdot 6 = 72$$



Stator-  
blechpaket

Spulen-  
enden

Quelle:  
Winergy  
Deutschland



- **Wechselfeld je Strang:** Je um  $2\tau_p/3$  räumlich versetzt (Stränge U, V, W). Die drei Stränge werden durch um je  $T/3$  phasenversetzte Sinuswechselströme gespeist

$$\left. \begin{aligned} V_{U\nu}(\gamma, t) &= \hat{V}_{strang,\nu} \cdot \cos(\nu\gamma) \cdot \cos(\omega t) \\ V_{V\nu}(\gamma, t) &= \hat{V}_{strang,\nu} \cdot \cos(\nu(\gamma - 2\pi/3)) \cdot \cos(\omega t - 2\pi/3) \\ V_{W\nu}(\gamma, t) &= \hat{V}_{strang,\nu} \cdot \cos(\nu(\gamma - 4\pi/3)) \cdot \cos(\omega t - 4\pi/3) \end{aligned} \right\} \nu\text{-te Oberwelle}$$

- **Wechselfeld je Strang** in **gegen-** und **mitlaufende** Drehwellen zerlegt mit trigonometrischem Summensatz:  $\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2} \cdot [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$

$$V_{U\nu}(\gamma, t) = \frac{\hat{V}_{strang,\nu}}{2} \cdot \cos(\nu\gamma + \omega t) + \frac{\hat{V}_{strang,\nu}}{2} \cdot \cos(\nu\gamma - \omega t)$$

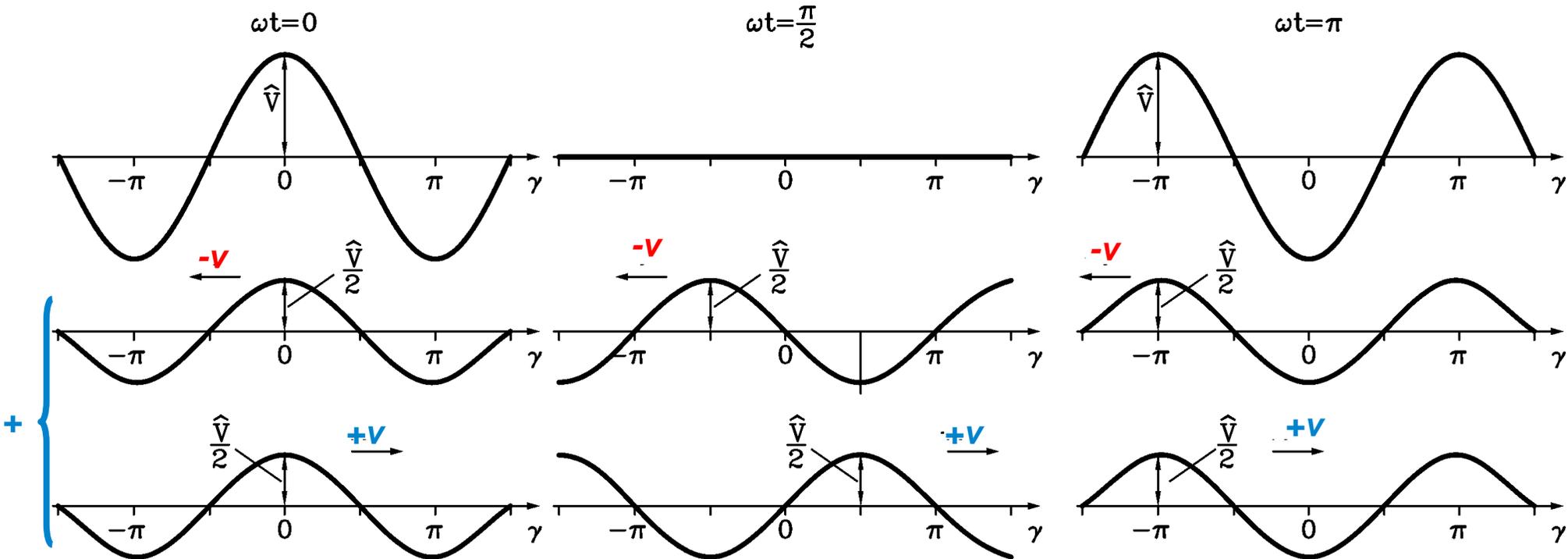
$$V_{V\nu}(\gamma, t) = \frac{\hat{V}_{strang,\nu}}{2} \cdot \cos\left(\nu\gamma - \frac{\nu 2\pi}{3} + \omega t - \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{\hat{V}_{strang,\nu}}{2} \cdot \cos\left(\nu\gamma - \frac{\nu 2\pi}{3} - \omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$V_{W\nu}(\gamma, t) = \frac{\hat{V}_{strang,\nu}}{2} \cdot \cos\left(\nu\gamma - \frac{\nu 4\pi}{3} + \omega t - \frac{4\pi}{3}\right) + \frac{\hat{V}_{strang,\nu}}{2} \cdot \cos\left(\nu\gamma - \frac{\nu 4\pi}{3} - \omega t + \frac{4\pi}{3}\right)$$

# Stehendes pulsierendes Feld als Summe zweier gegenläufiger Wanderwellen

Stehendes pulsierendes Feld:  $V_U(\gamma, t) = \hat{V} \cdot \cos(\gamma) \cdot \cos(\omega t)$

Summe zweier gegenläufiger Wanderwellen:  $V_U(\gamma, t) = \frac{\hat{V}}{2} \cdot \cos(\gamma + \omega t) + \frac{\hat{V}}{2} \cdot \cos(\gamma - \omega t)$



# Grundwelle des Luftspaltfelds $\nu = 1$

- **Summenwirkung** der drei Wechselfelder U, V, W:

$$V(\gamma, t) = \sum_{\nu=1,3,5,\dots}^{\infty} (V_{U\nu}(\gamma, t) + V_{V\nu}(\gamma, t) + V_{W\nu}(\gamma, t)) = \sum_{\nu=1,3,5,\dots}^{\infty} V_{\nu}(\gamma, t)$$

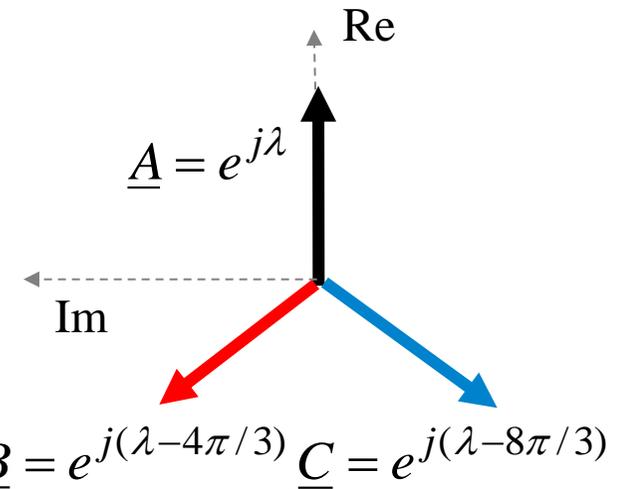
- **z. B.:  $\nu = 1$ : Grundwelle:**

$$V_{U1}(\gamma, t) = \frac{\hat{V}_{strang,1}}{2} \cdot \cos(\gamma + \omega t) + \frac{\hat{V}_{strang,1}}{2} \cdot \cos(\gamma - \omega t)$$

$$V_{V1}(\gamma, t) = \frac{\hat{V}_{strang,1}}{2} \cdot \cos(\gamma + \omega t - \frac{4\pi}{3}) + \frac{\hat{V}_{strang,1}}{2} \cdot \cos(\gamma - \omega t)$$

$$V_{W1}(\gamma, t) = \frac{\hat{V}_{strang,1}}{2} \cdot \cos(\gamma + \omega t - \frac{8\pi}{3}) + \frac{\hat{V}_{strang,1}}{2} \cdot \cos(\gamma - \omega t)$$

Mit  $\cos(\lambda) + \cos(\lambda - \frac{4\pi}{3}) + \cos(\lambda - \frac{8\pi}{3}) = 0$ ,  $\lambda = \gamma + \omega t$  folgt:



$$\underline{A} + \underline{B} + \underline{C} = 0$$

- Summe ist **Drehwelle**:  
(„Grundwelle“)

$$V_1(x, t) = \frac{3}{2} \cdot \hat{V}_{strang,1} \cdot \cos(\gamma - \omega t) \Rightarrow B_{\delta} = \mu_0 V / \delta$$

# Oberwellen des Luftspaltfelds $\nu > 1$ (1)

Herleitung

- Summieren der MIT- und GEGEN-Felder je Oberwellen-Ordnungszahl  $\nu$

$$\lambda_{\nu}^{+} = \nu \cdot \gamma + \omega t, \quad \lambda_{\nu}^{-} = \nu \cdot \gamma - \omega t$$

	$\nu = 3$		$\nu = 5$		$\nu = 7$	
	GEGEN	MIT	GEGEN	MIT	GEGEN	MIT
$a_{\nu} :$	$\lambda_3^{+}$	$\lambda_3^{-}$	$\lambda_5^{+}$	$\lambda_5^{-}$	$\lambda_7^{+}$	$\lambda_7^{-}$
$b_{\nu} :$	$\lambda_3^{+} - 2\pi - \frac{2\pi}{3}$	$\lambda_3^{-} - 2\pi + \frac{2\pi}{3}$	$\lambda_5^{+} - \frac{12\pi}{3}$	$\lambda_5^{-} - \frac{8\pi}{3}$	$\lambda_7^{+} - \frac{16\pi}{3}$	$\lambda_7^{-} - \frac{12\pi}{3}$
$c_{\nu} :$	$\lambda_3^{+} - 4\pi - \frac{4\pi}{3}$	$\lambda_3^{-} - 4\pi + \frac{4\pi}{3}$	$\lambda_5^{+} - \frac{24\pi}{3}$	$\lambda_5^{-} - \frac{16\pi}{3}$	$\lambda_7^{+} - \frac{32\pi}{3}$	$\lambda_7^{-} - \frac{24\pi}{3}$
$d_{\nu} :$	0	0	$3 \cdot \cos a_5$	0	0	$3 \cdot \cos a_7$

$$d_{\nu} = \cos(a_{\nu}) + \cos(b_{\nu}) + \cos(c_{\nu})$$

# Oberwellen des Luftspaltfelds $\nu > 1$ (2)

- Summenwirkung der drei Wicklungsstränge für  $\nu > 1$ :

$$\begin{aligned} V_3(\gamma, t) &= 0 + 0 = 0 & V_5(\gamma, t) &= \frac{3}{2} \cdot \hat{V}_{\text{strang},5} \cdot \cos(5\gamma + \omega t) \\ V_7(\gamma, t) &= \frac{3}{2} \cdot \hat{V}_{\text{strang},7} \cdot \cos(7\gamma - \omega t) & V_9(\gamma, t) &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

- Für  $\nu = 3, 9, 15, \dots$  (Ordnungszahlen  $\nu$ , **die durch drei teilbar sind**), ist die Summenwirkung der drei Stränge stets **Null**:  
Die 3 mit- und 3 gegenlaufenden Teildrehwellen löschen einander aus.
- Für  $\nu = 7, 13, 19, \dots$  **löschen** sich die drei **gegen**laufenden Teilwellen aus, die drei **mit**-laufenden Teildrehwellen addieren sich gleichphasig.  
Diese Oberwellen laufen MIT der Grundwelle  $\nu = 1$ .
- Für  $\nu = 5, 11, 17, \dots$  **löschen** sich die drei **mit**laufenden Teilwellen aus, die drei **gegen**-laufenden Teildrehwellen addieren sich gleichphasig.  
Diese Oberwellen laufen GEGEN die Grundwelle.

# Feld-Summenwirkung der drei Stränge

- Eine **dreisträngige Drehfeldwicklung**, gespeist von einem symmetr. Drehstromsystem, erregt eine treppenförmige Durchflutungsverteilung  $V(x,t)$ , die in Grund- und Oberwellen zerlegt werden kann.
- Es treten nur **ungerade, nicht durch 3 teilbare** Ordnungszahlen  $\nu = 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \dots$  auf.

- **Summenwirkung der drei** Wicklungsstränge:

$$V_\nu(\gamma, t) = \frac{3}{2} \cdot \hat{V}_{strang, \nu} \cos(\nu\gamma \mp \omega t)$$

MIT  
GEGEN  
MIT  
GEGEN  
MIT  
GEGEN  
MIT

- Strangfeldamplitude x 3/2 = Drehfeldamplitude !
- Allgemein: Summenwirkung der  $m$  Wicklungsstränge, gespeist durch  $m$ -Phasen-Stromsystem:

$$V_\nu(\gamma, t) = \frac{m}{2} \cdot \hat{V}_{strang, \nu} \cos(\nu\gamma \mp \omega t)$$

- **Strangfeldamplitude** ·  $m/2$  = Drehfeldamplitude !

# Ordnungszahl $\nu$ der Oberwellen des Luftspaltfelds

$$\begin{aligned} V(x, t) = & \hat{V}_1 \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{\tau_p} - \omega t\right) + \\ & + \hat{V}_5 \cdot \cos\left(\frac{5\pi x}{\tau_p} + \omega t\right) + \hat{V}_7 \cdot \cos\left(\frac{7\pi x}{\tau_p} - \omega t\right) + \hat{V}_{11} \cdot \cos\left(\frac{11\pi x}{\tau_p} + \omega t\right) + \hat{V}_{13} \cdot \cos\left(\frac{13\pi x}{\tau_p} - \omega t\right) + \dots \\ & \underbrace{\hat{V}_5 \cdot \cos\left(-\frac{5\pi x}{\tau_p} - \omega t\right)} \quad \underbrace{\hat{V}_{11} \cdot \cos\left(-\frac{11\pi x}{\tau_p} - \omega t\right)} \end{aligned}$$

$$V(x, t) = \sum_{\nu=1, -5, 7, -11, 13, \dots}^{\infty} \hat{V}_{\nu} \cdot \cos\left(\frac{\nu\pi x}{\tau_p} - \omega t\right)$$

Strangzahl  $m$ : meist 3       $m = 3$ :  $\nu = 1, -5, 7, -11, 13, -17, \dots$

$$\nu = 1 + 2 \cdot m \cdot g \quad g = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad \nu = 1 + 6 \cdot g = 1, -5, 7, -11, 13, \dots$$

$$V(x,t) = \sum_{\nu=1,\dots}^{\infty} V_{\nu}(x,t) = \sum_{\nu=1,\dots}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{m}{p} N \frac{k_{w,\nu}}{\nu} I \cdot \cos\left(\frac{\nu\pi x}{\tau_p} - \omega t\right)$$

$$B_{\delta}(\gamma) = \mu_0 \cdot V(\gamma) / \delta$$

$m = 3$ :  $\nu = 1, -5, 7, -11, 13, -17, \dots$

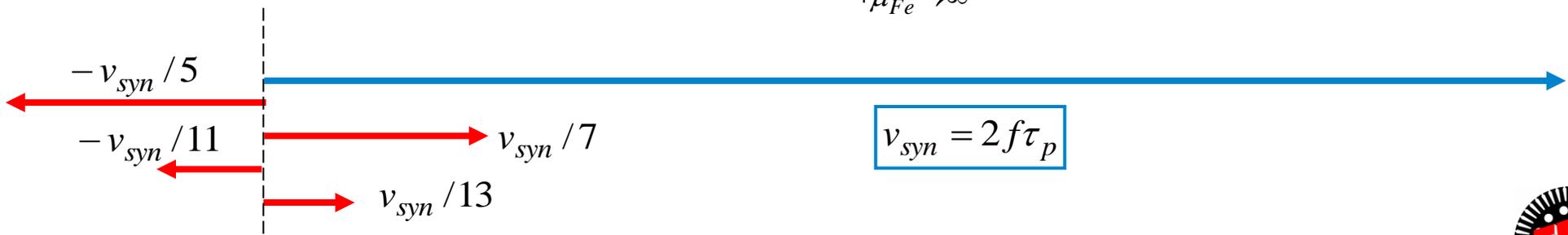
Strangzahl  $m$ : meist 3

• **Vorzeichenbehaftete Ordnungszahl:**  $\nu = 1 + 2mg$   $g = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

• Die Umlaufgeschwindigkeiten der Oberwellen **sinken** mit  $1/\nu$ :  $v_{syn,\nu} = 2f\tau_p / \nu$

• **Amplituden, bezogen auf Grundwelle:**

$$\left. \frac{\hat{B}_{\delta\nu}}{\hat{B}_{\delta 1}} \right|_{\mu_{Fe} \rightarrow \infty} = \frac{\hat{V}_{\nu}}{\hat{V}_1} = \frac{1}{\nu} \cdot \frac{k_{w\nu}}{k_{w1}}$$



$$\left. \frac{\hat{B}_{\delta\nu}}{\hat{B}_{\delta 1}} \right|_{\mu_{Fe} \rightarrow \infty} = \frac{1}{\nu} \cdot \frac{k_{w\nu}}{k_{w1}}$$

## Beispiele:

Amplituden, bezogen auf Grundwelle:  $\hat{B}_{\delta\nu} / \hat{B}_{\delta 1}$  (%), unterstrichen: **Nutharmonische**

$\nu$	$q = 1, W/\tau_p = 2/3, Q/p = 6$	$q = 2, W/\tau_p = 5/6, Q/p = 12$	$q = 3, W/\tau_p = 7/9, Q/p = 18$
1	<b>100</b>	<b>100</b>	<b>100</b>
-5	<u>-20</u>	1.4	-0.8
7	<u>14.3</u>	-1.0	-2.2
-11	<u>-9.1</u>	<u>-9.1</u>	-1.4
13	<u>7.7</u>	<u>7.7</u>	-0.3
-17	<u>-5.9</u>	-0.4	<u>5.9</u>
19	<u>5.3</u>	0.38	<u>-5.3</u>

$$\nu_Q = 1 + 6 \cdot g_Q$$

$$\nu_Q = 1 + 12 \cdot g_Q$$

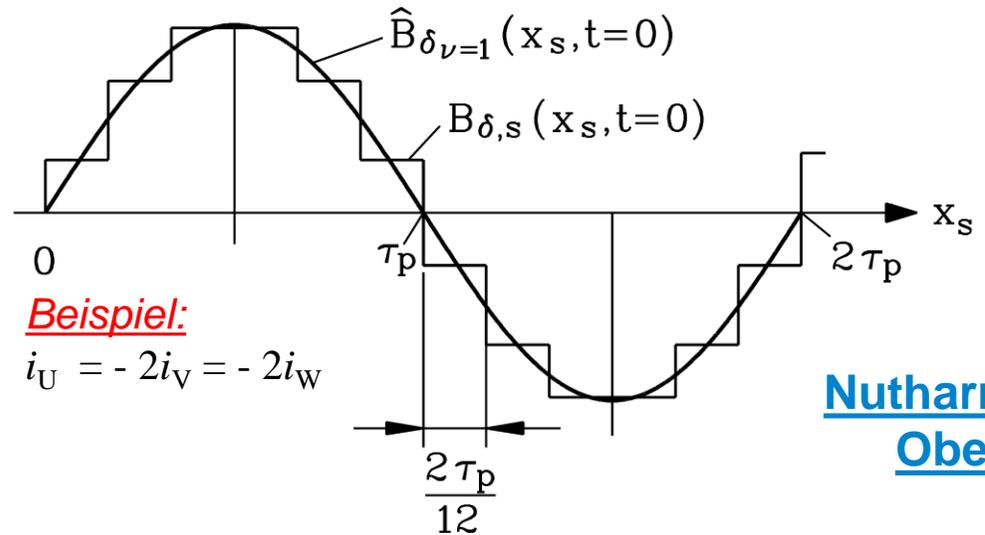
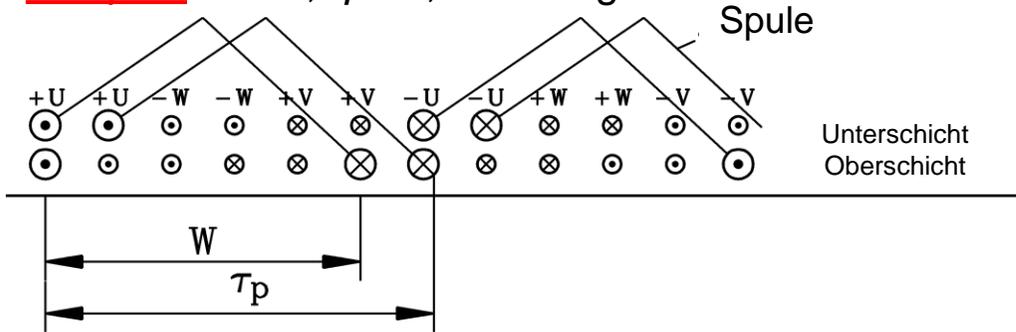
$$\nu_Q = 1 + 18 \cdot g_Q$$

**Nutharmonische Oberwellen:** Haben denselben Wicklungsfaktor wie Grundwelle!

$$\nu_Q = 1 + (Q/p) \cdot g_Q \quad g_Q = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

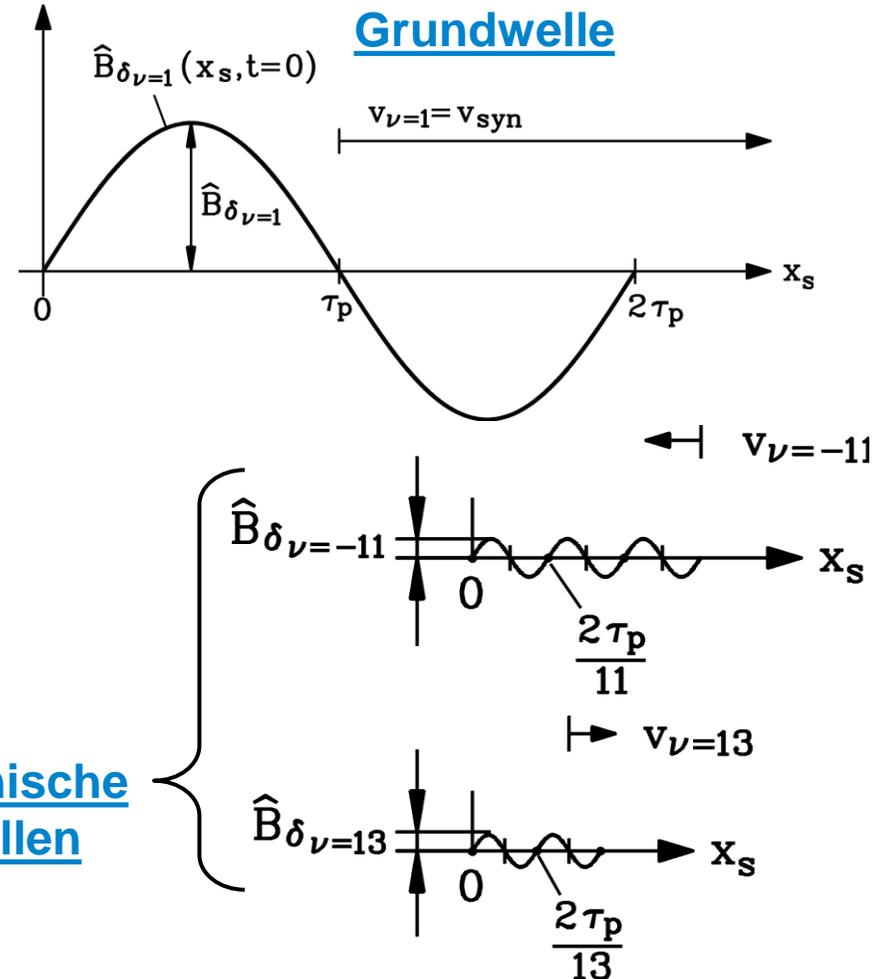
# Beispiel: Ständer-Luftspaltfeld: Grund- und Oberwellen

**Beispiel:**  $m = 3$ ,  $q = 2$ , Sehnung  $5/6$



**Beispiel:**  
 $i_U = -2i_V = -2i_W$

## Nutharmonische Oberwellen



## Oberwellen:

Amplitude, Wellenlänge, Geschwindigkeit sinken mit steigender Ordnungszahl  $\nu$

# Beispiel: FOURIER-Spektrum: Grund- und Oberwellen

$$\left| \frac{\hat{B}_{\delta\nu}}{\hat{B}_{\delta 1}} \right| = \left| \frac{1}{\nu} \cdot \frac{k_{w\nu}}{k_{w1}} \right|$$

Beispiel:  $m = 3, q = 2$ , Sehnung 5/6

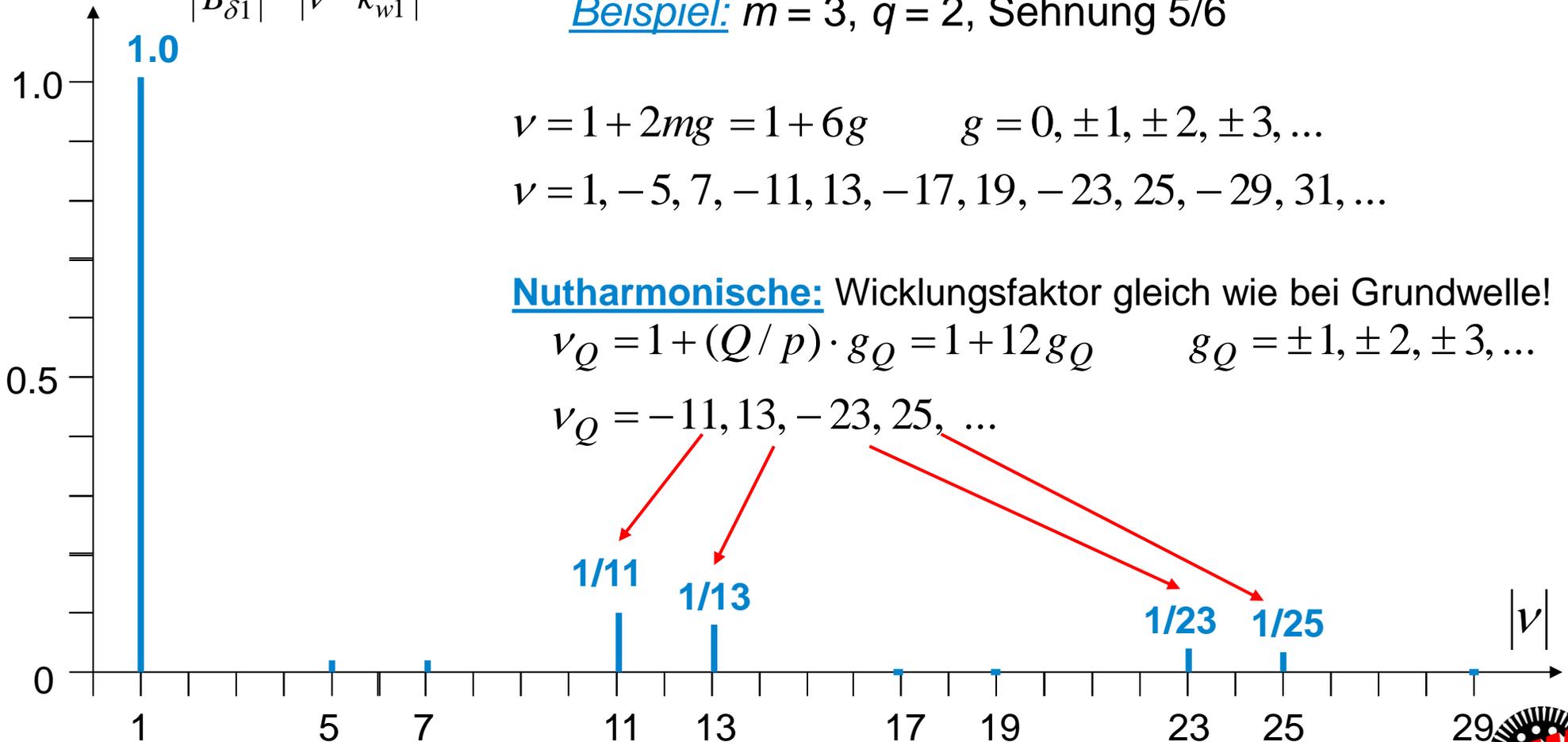
$$\nu = 1 + 2mg = 1 + 6g \quad g = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

$$\nu = 1, -5, 7, -11, 13, -17, 19, -23, 25, -29, 31, \dots$$

Nutharmonische: Wicklungsfaktor gleich wie bei Grundwelle!

$$\nu_Q = 1 + (Q/p) \cdot g_Q = 1 + 12g_Q \quad g_Q = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

$$\nu_Q = -11, 13, -23, 25, \dots$$



## Zusammenfassung:

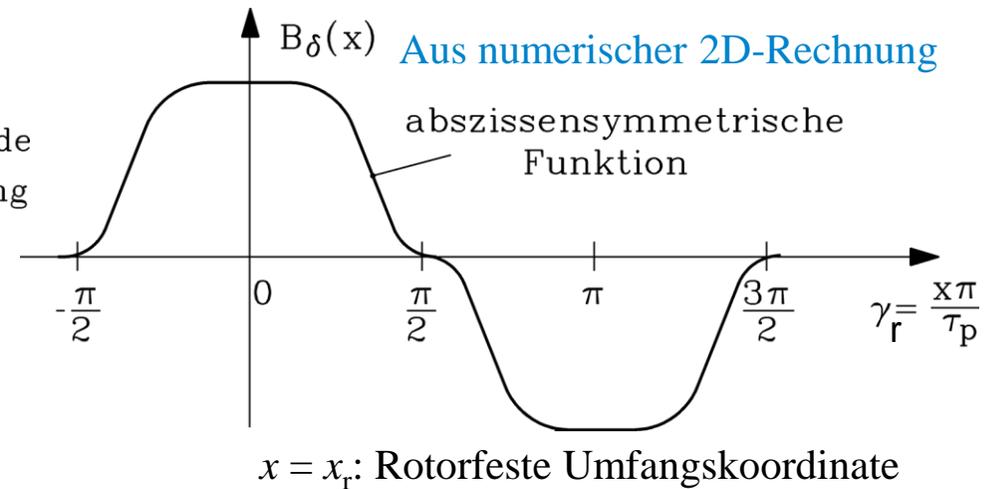
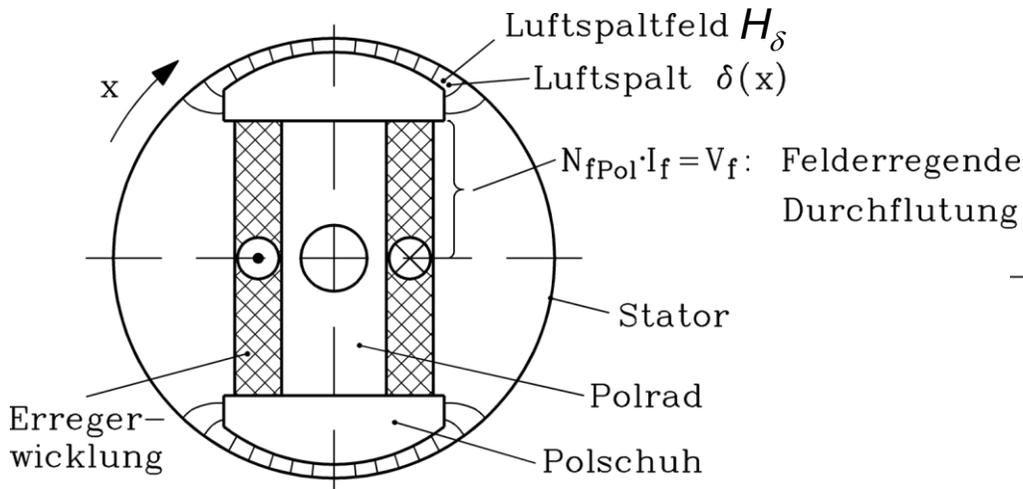
## FOURIER-Reihenentwicklung zur Ermittlung von Grund- und Oberwellen

- Ordnungszahl  $\nu$  einer Welle = Wellenlängenzahl pro Polpaar  $2\tau_p$
- Dreisträngige Wicklungen:
  - Es treten nur ungeradzahlige, nicht durch 3 teilbare Ordnungszahlen  $\nu$  auf
- Die Wellenamplitude ist proportional zu Wicklungsfaktor/Ordnungszahl  $k_{w\nu}/\nu$
- Negative Ordnungszahlen = gegen die Grundwelle laufende Oberwellen
- Nutharmonische Oberwellen haben relativ große Amplitude:
  - „Amplitude  $\sim 1/\text{Ordnungszahl}$ “ ( $\sim 1/\nu$ )

- 3. Mathematische Analyse von Luftspaltfeldern
  - 3.1 Grund- und Oberwellen von Luftspaltfeldern
  - 3.2 FOURIER-Reihenentwicklung zur Ermittlung von Grund- und Oberwellen
  - 3.3 **FOURIER-Reihe von gleichstromerregten Polradfeldern**

# Gleichstromerregtes Polradfeld

- **Luftspaltfeld**  $H_\delta$ : Zweipoliges Polrad (Läufer) einer Schenkelpol-Synchronmaschine, Läuferdurchflutung  $N_{fPol} \cdot I_f$ , ( $N_{fPol}$ : Spulenwindungszahl pro Pol)
- **Luftspalt** vergrößert sich zu den Pollücken als Funktion der Umfangskoordinate  $\delta(x)$



- Berechnung der **Radialkomponente**  $B_\delta$  des Luftspaltfelds mit Durchflutungssatz:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = 2 \cdot N_{fPol} \cdot I_f = 2 \cdot V_f = 2 \cdot H_\delta \cdot \delta(x) + 2 \cdot H_{Fe} \cdot \Delta_{Fe} = 2 \cdot H_\delta \cdot \delta(x)$$

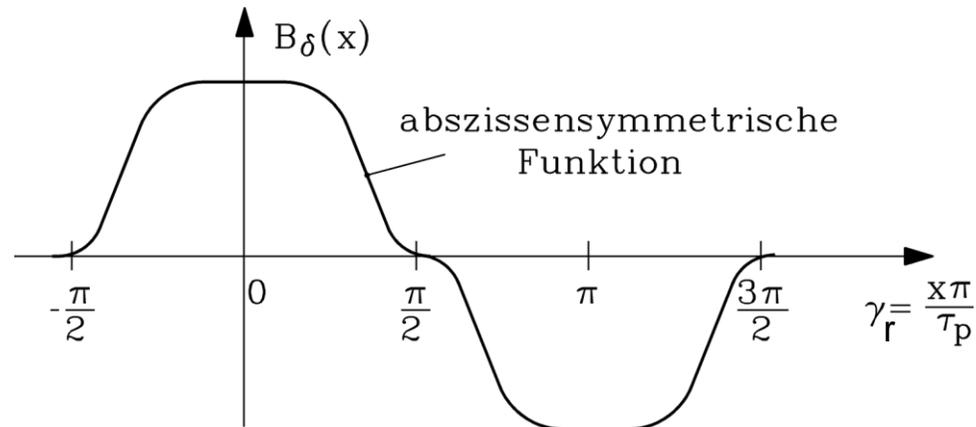
$2\Delta_{Fe}$ : C-Anteil im Eisen

Im Eisen:  $\mu_{Fe} \rightarrow \infty$ :  $H_{Fe} = 0$

$$B_\delta(x) = \mu_0 \cdot H_\delta(x) = \mu_0 \cdot \frac{V_f}{\delta(x)}$$

1D-Näherungsrechnung

- Feldkurve ist **abszissensymmetrische** Funktion  $B_\delta(\gamma_r) = -B_\delta(\gamma_r + \pi)$  :  
➔ nur Oberwellen mit **ungeradzahlig**er Ordnung  $\mu$   
Feldkurve z. B. als **FOURIER-Cosinus-Reihe**: 
$$B_\delta(\gamma_r) = \sum_{\mu=1,3,5,\dots}^{\infty} \hat{B}_{\delta\mu} \cdot \cos(\mu\gamma_r)$$
  
 $\mu = 1, 3, 5, 7, 9, \dots$
- Form der Feldkurve** ist durch Funktion  $\delta(x)$  (= Kontur des Polschuhs) bestimmt;  
**hier auch durch 3 teilbare Ordnungszahlen  $\mu$ !**



$\gamma_r$ : Rotorfester Umfangswinkel

## Zusammenfassung: **FOURIER-Reihe von gleichstromerregten Polradfeldern**

- Einsträngige gleichstromerregte Läuferwicklung =  
= stehende („ruhende“) Feldwelle bzgl. Läufer-Koordinatensystem  $\gamma_r$
- FOURIER-Reihenentwicklung der Feldkurve muss i. A. numerisch erfolgen
- Dominante Grundwelle  $\mu = 1$ , Oberwellen  $\mu > 1$  unerwünscht, weil  
Läuferoberwellen induzieren Ständerwicklung höherfrequent