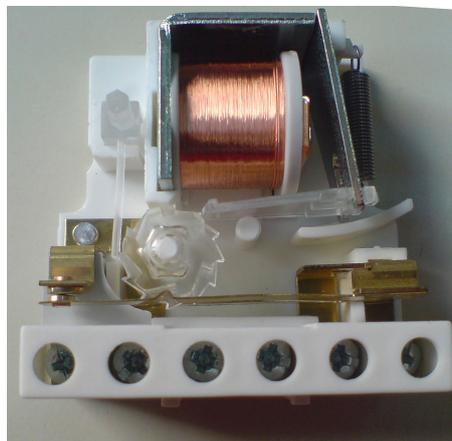
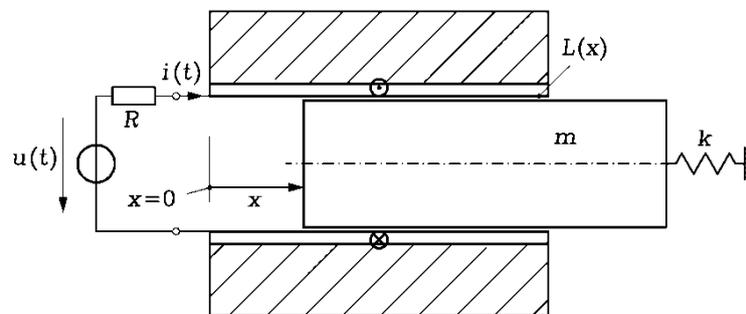




## Elektromechanische Systeme

*Vorlesungsskript zum Teil von Prof. Binder:  
„Mathematische Analyse von Wandlern & Aktoren“*



Quelle: Wikipedia.de

## Inhaltsverzeichnis

### Elektromechanische Systeme - Mathematische Analyse von Wandlern & Aktoren (Vorlesungsteil von Prof. Binder)

#### 1. Einführung

#### 2. Grundlagen

2.1 Dynamische Grundgesetze der Mechanik und Elektromagnetik

2.2 Materialgesetze

2.3 Kraftgesetze

2.4 Energiebegriffe

2.5 Einführendes Beispiel: Kopplung eines mechanischen mit einem el.-magn. System

#### 3. Formale Behandlung elektromechanischer diskreter Systeme

3.1 Bezugspfeile, Leistungsfluss, Energiefluss

3.2 Potentielle Energiespeicher

3.3 Beispiel: Beweglicher Plattenkondensator

3.4 Kinetische Energiespeicher

3.5 Beispiel: Bewegliche gekoppelte Spulen

3.6 Energiedissipation

3.7 Elektrische Ersatzelemente

#### 4. Methode der *Lagrange-Gleichungen*

4.1 Verallgemeinerte unabhängige Koordinaten

4.2 Virtuelle Verschiebungen

4.3 Variationsrechnung anstelle der klassischen dynamischen Grundgesetze:  
*Lagrange-Gleichungen*

4.4 Beispiele zum mechanischen System

4.5 Beispiele zum elektrischen Netzwerk

#### 5. Elektromechanische Grundsysteme

5.1 Magnetisches Grundsystem

5.2 Magnetisches Grundsystem, stationäres Verhalten: Beispiele

5.3 Elektrisches Grundsystem

5.4 Elektrisches Grundsystem, stationäres Verhalten: Beispiele

#### 6. Dynamische Untersuchung des Wandlerverhaltens

6.1 Gleichgewicht

6.2 Linearisierung

6.3 Kleinsignalverhalten

6.4 Stabilität

6.5 Statische Instabilität

6.6 Dynamische Instabilität

6.7 Beispiel: Lineares System mit konstanten Koeffizienten

#### 7. Analyse ausgewählter elektromechanischer Wandler

7.1 Magnetischer Wandler „Typ 1“

7.2 Magnetischer Wandler „Typ 2“

7.3 Kapazitiver Wandler „Typ 3“

7.4 Kapazitiver Wandler „Typ 4“

## 1. Einführung

Der erste Teil der Vorlesung "Elektromechanische Systeme" umfasst die mathematische Analyse von Wandlern und Aktoren und fokussiert bei den Beispielen mehrheitlich auf magnetischen elektromechanischen Wandler-Systemen. Die Vorlesungsziele sind dabei:

- Physikalisches Verständnis der elektromechanischen Wandlungsprinzipien,
- Methoden zur Analyse und mathematischen Beschreibung elektromech. Wandler,
- Untersuchung ausgewählter Wandler-Grundanordnungen.

Das vorliegende Skript umfasst diesen ersten Teil des Stoffumfangs der Vorlesung "Elektromechanische Systeme" und damit etwa die Hälfte dieser Vorlesung. Er basiert u. a. auf Vorlesungen von *Prof. Fritz Paschke, Allgemeine Elektrotechnik 1*, und *Prof. Adalbert Prechtl, Dynamik elektromechanischer Systeme*, beide TU Wien. Dabei wird an die bereits in den Vorlesungen „Physik“ und "Grundlagen der Elektrotechnik" gebrachten Inhalte angeknüpft. Weiter existiert neben den in den Übungen vorgerechneten Beispielen zu diesem Vorlesungsteil eine **Aufgabensammlung** mit ausgearbeiteten Beispielen. Dort finden Sie **Kontrollfragen** zum Verständnis des Lehrinhalts dieses Vorlesungsteils. Die Beispiele und Kontrollfragen grenzen den Prüfungsstoff zu diesem Vorlesungsteil ein, der damit deutlich enger gehalten ist als die vorgetragenen Inhalte, die aber nichtsdestoweniger für das spätere einschlägige Berufsleben praxisrelevant sind. Relevante Literatur zu den Vorkenntnissen und weitere einführende Literatur ist nachstehend angegeben.

### Grundlegende Bücher:

Gerthsen, Ch.; (Meschede, D.): Gerthsen Physik, 24. Aufl.; Springer, Heidelberg, 2013

Dirschmid, H.-J.: Mathematische Grundlagen der Elektrotechnik, 4. Aufl.; Vieweg, Braunschweig – Wiesbaden, 1990

Dirschmid, H.-J.: Mathematische Grundlagen der Elektrotechnik - Begleitband: Lösungen u. Hinweise, 4. Aufl.; Vieweg, Braunschweig – Wiesbaden, 1996

Arens, T. u. a.: Mathematik, 3. Aufl.; Spektrum Akad. Verlag, Heidelberg, 2012

Prechtl, A.: Vorlesungen über die Grundlagen der Elektrotechnik, Springer-Verlag, Wien, Band 1: 2. Aufl., 2005, Band 2: 2. Aufl., 2007

Clausert, H.; Wieseemann, G.; Stenzel, J.; Hinrichsen, V.: Grundgebiete der Elektrotechnik, Bände 1 und 2, Oldenbourg-Verlag, München, 11. Aufl., 2011

Harriehausen et al.; Moeller Grundlagen der Elektrotechnik; 23. Aufl., Springer-Vieweg, Wiesbaden, 2013

Mathis, W.; Reibiger, A.: Küpfmüller Theoretische Elektrotechnik, 20. Aufl. 2017. Springer, Berlin Heidelberg

### Weiterführende Literatur:

Woodson, H. H.; Melcher, J. R.: Electromechanical Dynamics, Part 1: Discrete Systems, Wiley, New York, 1968

Meisel, J.: Principles Of Electromechanical Energy Conversion, McGraw-Hill, New York, 1966

Ballas, R. G.; Pfeifer, G.; Werthschützky, R.: Elektromechanische Systeme der Mikrotechnik und Mechatronik: Dynamischer Entwurf - Grundlagen und Anwendungen, Springer, Heidelberg, 2009

Lenk, A.; Ballas, R. G.; Mayer, K.; Werthschützky, R.; Pfeifer, G.: Electromechanical Systems in Microtechnology and Mechatronics: Electrical, Mechanical and Acoustic Networks, their Interactions and Applications, Springer, Heidelberg, 2011

Marschner, U.; Werthschützky, R.: Aufgaben und Lösungen zur Schaltungsdarstellung und Simulation elektromechanischer Systeme: In Mikrotechnik und Mechatronik, Springer, Heidelberg 2015

**Das griechische Alphabet**

|                 |          |                 |       |                   |         |                    |          |
|-----------------|----------|-----------------|-------|-------------------|---------|--------------------|----------|
| $A \alpha$      | Alpha    | $B \beta$       | Beta  | $\Gamma \gamma$   | Gamma   | $\Delta \delta$    | Delta    |
| $E \varepsilon$ | Epsilon  | $Z \zeta$       | Zeta  | $H \eta$          | Eta     | $\Theta \vartheta$ | Theta    |
| $I \iota$       | Jota     | $K \kappa$      | Kappa | $\Lambda \lambda$ | Lambda  | $M \mu$            | My (mue) |
| $N \nu$         | Ny (nue) | $\Xi \xi$       | Xi    | $O \omicron$      | Omikron | $\Pi \pi$          | Pi       |
| $P \rho$        | Rho      | $\Sigma \sigma$ | Sigma | $T \tau$          | Tau     | $Y \upsilon$       | Ypsilon  |
| $\Phi \varphi$  | Phi      | $X \chi$        | Chi   | $\Psi \psi$       | Psi     | $\Omega \omega$    | Omega    |

**Verwendete wichtige Formelzeichen**

|          |                   |   |
|----------|-------------------|---|
| $A$      | $m^2$             | Fläche  |
| $A$      | Vs/m              | magnetisches Vektorpotential  |
| $A$      | Nm                | Arbeit  |
| $b$      | m                 | Breite  |
| $B$      | T                 | magnetische Induktion (Flussdichte) (1 T = 1 Tesla = 1Vs/m <sup>2</sup> ) |
| $C$      | F                 | Kapazität   |
| $d$      | m                 | Durchmesser bzw. Abstand  |
| $d$      | Ns/m              | Dämpfungsbeiwert  |
| $D$      | As/m <sup>2</sup> | elektrische Flussdichte (dielektrische Verschiebung)                      |
| $Det(.)$ | -                 | Determinante von (.)  |
| $e$      | m                 | Abstand   |
| $E$      | V/m               | elektrische Feldstärke  |
| $E$      | N/m <sup>2</sup>  | Elastizitätsmodul   |
| $f$      | Hz                | Frequenz (1 Hz = 1 Hertz = 1/s)   |
| $F$      | N                 | Kraft   |
| $g$      | N·s               | Höhe  |
| $h$      | m                 | Impuls  |
| $H$      | A/m               | magnetische Feldstärke  |
| $I$      | A                 | elektrische Stromstärke   |
| $I$      | W/m <sup>2</sup>  | Intensität  |
| $j$      | -                 | imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$   |
| $J$      | kg·m <sup>2</sup> | Trägheitsmoment   |
| $J$      | T                 | magnetische Polarisation  |
| $J$      | A/m <sup>2</sup>  | Stromdichte   |
| $k$      | N/m               | Federkonstante  |
| $K_0$    | *)                | Kopplungsterm (*) Einheit Wandler-abhängig)                               |
| $l$      | m                 | Länge   |
| $L$      | H                 | Selbstinduktivität (1 H = 1 Henry = 1 Vs/A)                               |
| $L$      | dB                | Pegel (1 dB = 1 Dezibel, 1 B = 1 Bel)                                     |
| $L$      | J                 | <i>Lagrange</i> -Funktion   |
| $m$      | kg                | Masse   |
| $M$      | H                 | Gegeninduktivität   |
| $M$      | Nm                | Drehmoment  |
| $M$      | A/m               | Magnetisierung  |
| $n$      | 1/s               | Drehzahl  |

|               |                   |  |
|---------------|-------------------|--|
| $N$           | -                 | Windungszahl je Strang   |
| $N_c$         | -                 | Spulenwindungszahl   |
| $r$           | m                 | Radius   |
| $p$           | N/m <sup>2</sup>  | Druck  |
| $P$           | W                 | Leistung (1 W = 1 Watt = 1 V·A)  |
| $P$           | As/m <sup>2</sup> | elektrische Polarisierung  |
| $q$           | *)                | verallgemeinerte Koordinate (*) Einheit je nach physik. Größe unterschiedlich) |
| $Q$           | VAr               | Blindleistung (1 VAr = 1 VA reaktiv)   |
| $Q$           | As                | elektrische Ladungsmenge   |
| $R$           | $\Omega$          | elektrischer Widerstand (1 $\Omega$ = 1 Ohm = 1V/A)                            |
| $s$           | m                 | Weglänge   |
| $S$           | VA                | Scheinleistung   |
| $S$           | J·s               | Wirkung  |
| $t$           | s                 | Zeit   |
| $T$           | s                 | Schwingungsperiodendauer   |
| $T$           | K                 | absolute Temperatur  |
| $U$           | V                 | elektrische Spannung   |
| $\ddot{u}$    | -                 | Übersetzungsverhältnis bzw. Amplitudenverhältnis                               |
| $v$           | m/s               | Geschwindigkeit  |
| $W$           | J                 | Energie (work)   |
| $W^*$         | J                 | Ko-Energie (Ergänzungsenergie)   |
| $x$           | m                 | Koordinate   |
| $X$           | $\Omega$          | Reaktanz   |
| $y$           | m                 | Koordinate   |
| $z$           | m                 | Koordinate   |
| $\gamma$      | rad               | Drehwinkel   |
| $\gamma$      | kg/m <sup>3</sup> | Massendichte   |
| $\delta$      | m                 | Luftspaltweite   |
| $\varepsilon$ | As/(Vm)           | Dielektrizitätskonstante   |
| $\varepsilon$ | -                 | relative Dehnung   |
| $\varphi$     | rad               | Phasenwinkel   |
| $\varphi$     | V                 | elektrisches Potential   |
| $\Phi$        | Wb                | magnetischer Fluss (1 Wb = 1 Weber = 1 Vs)                                     |
| $\Psi$        | Vs                | magnetische Flussverkettung (nicht „Weber“ zur Unterscheidung von $\Phi$ )     |
| $\mu$         | Vs/(Am)           | magnetische Permeabilität  |
| $\eta$        | -                 | Wirkungsgrad   |
| $\vartheta$   | rad               | Drehwinkel   |
| $\Theta$      | A                 | elektrische Durchflutung   |
| $\kappa$      | S/m               | elektrische Leitfähigkeit (1 S = 1 „Siemens“ = 1 A/V)                          |
| $\kappa$      | -                 | Kopplungsfaktor  |
| $\lambda$     | 1/s               | Eigenwert  |
| $\sigma$      | N/m <sup>2</sup>  | mechanische Zugspannung  |
| $\sigma$      | As/m <sup>2</sup> | Flächenladung  |
| $\tau$        | s                 | Dämpfungszeitkonstante   |
| $\tau$        | N/m <sup>2</sup>  | mechanische Schubspannung  |
| $\omega$      | 1/s               | elektrische Kreisfrequenz  |
| $\Omega_m$    | 1/s               | mechanische Winkelgeschwindigkeit  |

**Indizes**

|          |  |
|----------|--|
| av       | Mittelwert (average)                               |
| b        | Blindkomponente                                    |
| c        | Spule (coil)                                       |
| C        | Koerzitiv-   |
| Cu       | Kupfer   |
| d        | Verluste (dissipation) bzw. Resonanz bzw. Dämpfung |
| e        | elektrostatisch bzw. Eigen-                        |
| eff      | effektiv (r.m.s.: root means square)               |
| el       | elektrisch   |
| F        | Feder  |
| Fe       | Eisen  |
| h        | Hauptfeld bzw. homogen                             |
| i        | induziert bzw. innere                              |
| in       | zugeführt bzw. innere                              |
| k        | kinetisch  |
| L        | induktiv bzw. <i>Lehr</i> 'sches Maß               |
| mec      | mechanisch   |
| m        | magnetisch   |
| M        | Magnet   |
| max      | maximal  |
| opt      | optimal  |
| out      | abgegeben  |
| p        | potentiell bzw. partikulär                         |
| r        | relativ bzw. radial                                |
| res      | resultierend                                       |
| R        | Remanenz bzw. Reibung                              |
| Res      | Resonanz   |
| S        | Schall   |
| x        | in $x$ -Richtung                                   |
| y        | in $y$ -Richtung                                   |
| w        | Wirkkomponente                                     |
| z        | in $z$ -Richtung                                   |
| $\delta$ | Luftspalt  |
| $\sigma$ | Streufeld  |

**Notationen**

|  |   |
|--|---|
| $i$  | Kleinbuchstabe: Augenblickswert z. B.: der elektrischen Stromstärke         |
| $\Delta i$   | kleine Schwankungsgröße z. B. der elektrischen Stromstärke                  |
| $I$  | Großbuchstabe: Effektivwert bzw. Gleichstromwert z. B.: der el. Stromstärke |
| $\underline{I}$  | unterstrichen: komplexe Größe   |
| $\hat{I}$  | Spitzenwert bzw. Amplitude  |
| $\text{Re}(\dots)$   | Realteil von ...  |
| $\text{Im}(\dots)$   | Imaginärteil von ...  |
| Multiplikation vor Addition/Subtraktion: $a \cdot b \pm c \cdot d = (a \cdot b) \pm (c \cdot d)$ |   |

**Wichtige Naturkonstanten**

|  |  |
|--|--|
| $c_0 = 299\,792\,458$ m/s                      | Vakuumlichtgeschwindigkeit                                       |
| $e = 1.6021 \cdot 10^{-19}$ As                 | elektrische Elementarladung                                      |
| $g = 9.80665$ m/s <sup>2</sup>                 | Normwert der Fallbeschleunigung                                  |
| $\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}$ As/(Vm) | elektrische Feldkonstante (Dielektrizitätszahl des leeren Raums) |
| $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Vs/(Am)           | magnetische Feldkonstante (Permeabilität des leeren Raums)       |

## 2. Grundlagen

### 2.1 Dynamische Grundgesetze der Mechanik und Elektromagnetik

Die **mechanischen Grundgleichungen** geben Bewegungen von massebehafteten Körpern durch Kräfte und Drehmomente bezüglich eines Beobachters  $\mathcal{B}$ , der das **Bezugssystem** mit dem z. B. kartesischen dreidimensionalen Koordinatensystem  $(x_B, y_B, z_B)$  darstellt, wieder (Bild 2.1-1). Wenn die Geschwindigkeit  $v$  der Bewegung bezüglich  $\mathcal{B}$  KLEIN gegenüber der Vakuumlichtgeschwindigkeit  $c_0 \cong 3 \cdot 10^8$  m/s ist, gelten die drei **NEWTON'schen Gesetze**.

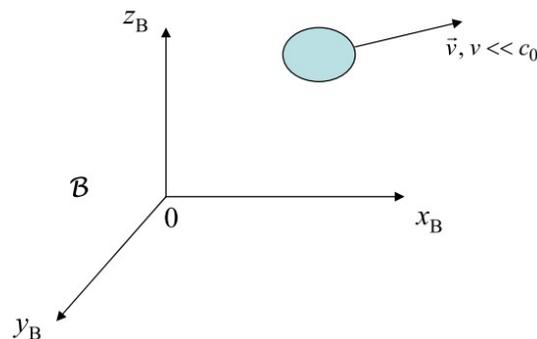


Bild 2.1-1: Ein bewegter Körper hat bezüglich des Koordinatensystems  $(x_B, y_B, z_B)$  als Bezugssystem die Geschwindigkeit als Vektor  $\vec{v}$ , wobei bei elektromechanischen Wandlern diese Geschwindigkeit deutlich kleiner als die Vakuumlichtgeschwindigkeit  $c_0 \cong 3 \cdot 10^8$  m/s ist.

Bei hohen Geschwindigkeiten  $v$  müssen mit den Gesetzen der speziellen Relativitätstheorie diese **NEWTON'schen Gesetze** korrigiert werden. Die Umrechnung der **NEWTON-Gesetze** von bewegtem System zum o. g. ruhenden Bezugssystem  $\mathcal{B}$  erfolgt mit der **LORENTZ-Transformation**, wobei sich die „Formeln“ ändern. Bewegte Körper erscheinen von  $\mathcal{B}$  aus in Bewegungsrichtung verkürzt, die Zeit im bewegten System vergeht aus Sicht von  $\mathcal{B}$  aus langsamer. Der Formelapparat für das relativ zu  $\mathcal{B}$  bewegte System ändert sich bezüglich des Beobachters  $\mathcal{B}$ . Elektromechanische Wandler haben gegenüber  $c_0$  kleine Geschwindigkeiten  $v$ . Daher kann statt der **LORENTZ-Transformation** näherungsweise die **GALILEI-Transformation**, also die Geschwindigkeitsaddition verwendet werden (Bild 2.1-2).

$$\vec{v}_{\text{rel. zu C}} + \vec{v}_C = \vec{v}_{\text{rel. zu B}} \tag{2.1-1}$$

Weiter bleiben die Abmessungen bewegter Körper bzgl.  $\mathcal{B}$  erhalten, und es gilt eine einheitliche Zeit bzgl. dem Beobachter  $\mathcal{B}$  und in allen anderen relativ dazu bewegten Systemen, so dass ein einheitlicher Formelapparat für ruhende und bewegte Systeme gilt.

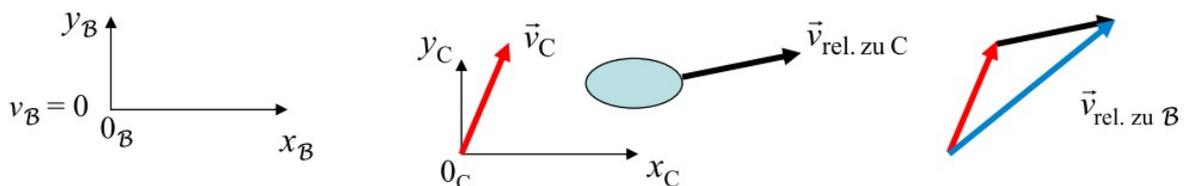


Bild 2.1-2: Bei Geschwindigkeiten deutlich kleiner als die Vakuumlichtgeschwindigkeit  $c_0 \cong 3 \cdot 10^8$  m/s gilt die Geschwindigkeitsaddition zwischen zueinander bewegten Bezugssystemen (**GALILEI-Transformation**).

Die nichtrelativistischen **mechanischen Grundgleichungen** („Bewegungsgleichungen eines massebehafteten Körpers“) können auf zwei Arten formuliert werden:

- a) Mit Verwendung der drei **NEWTON'schen Axiome**,
- b) Mit Verwendung des **LAGRANGE-Formalismus**.

**NEWTON'schen Axiome:**

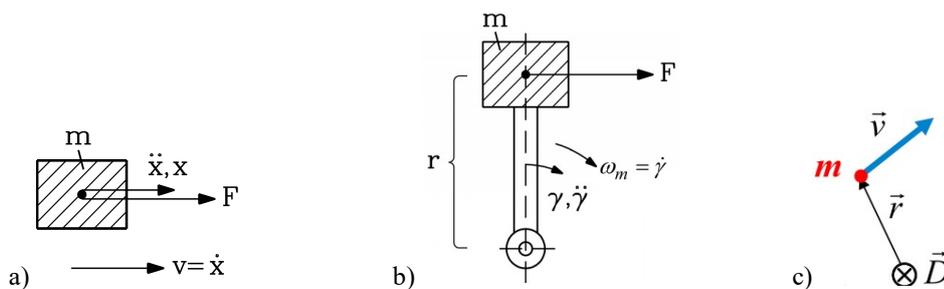
1. Ein kräftefreier massebehafteter Körper bleibt in Ruhe oder bewegt sich geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit.
2. Kraft ist gleich Masse mal Beschleunigung.
3. Eine Kraft von Körper **A** auf Körper **B** verursacht immer eine gleich große, aber entgegen gerichtete Kraft von Körper **B** auf Körper **A**.

Bei Verwendung des **LAGRANGE-Formalismus** ergeben sich folgende Merkmale:

1. Die Dynamik eines Systems wird durch eine einzige skalare (**LAGRANGE**)-Funktion beschrieben.
2. Aus der **LAGRANGE**-Funktion werden die Bewegungsgleichungen mit den **EULER-LAGRANGE**-Gleichungen der Variationsrechnung aus dem „Prinzip der kleinsten Wirkung“ bestimmt.

Der Vorteil des **LAGRANGE-Formalismus** ergibt sich bei Systemen mit vielen unterschiedlich bewegten Körpern (**Mehrkörpersystemen**). Hier können die Bewegungsgleichungen leichter angegeben werden als mit den **NEWTON**-Formeln, da das „Freischneiden“ der einzelnen Körper mit dem Aufstellen des Kräftegleichgewichts je Körper mit Einführung von Zwangskräften zwischen den Körpern entfällt.

Die **NEWTON**-Formeln führen auf den in der Mechanik geltenden **Impulserhaltungssatz**, dass der Gesamtimpuls in einem abgeschlossenen System konstant ist. Bei linearer Bewegung ist die Konstanz des Impulses  $\vec{g}$  bestimmt durch  $\vec{g} = m \cdot \vec{v} = \text{konst.}$  (Bild 2.1-3a). Bei Drehbewegungen gilt die Konstanz des Drehimpulses  $\vec{D}$  gemäß  $\vec{D} = \vec{r} \times \vec{g} = m \cdot (\vec{r} \times \vec{v}) = \text{konst.}$  (Bild 2.1-3c) mit dem Sonderfall der Kreisdrehbewegung Bild 2.2-3b.



**Bild 2.1-3:** a) Durch die Kraft  $F$  linear bewegte Masse  $m$  längs der Ortskoordinate  $x$  mit der Geschwindigkeit  $v$ , b) Durch die Kraft  $F$  auf einer Kreisbahn mit dem Radius  $r$  bewegte Masse  $m$  längs des Drehwinkels  $\gamma$  mit der mechanischen Winkelgeschwindigkeit  $\omega_m$ , c) Drehimpuls  $D$  einer mit  $v$  im Abstand  $r$  bewegten Masse  $m$ .

Die Trägheitskraft  $F$  ist die Impulsänderung  $\vec{F} = d\vec{g} / dt$  bei linearer Bewegung und das Trägheits-Drehmoment  $M$  die Drehimpulsänderung  $\vec{M} = d\vec{D} / dt$ . Für die lineare Bewegung folgt damit bei konstanter Masse  $m$  (2.1-2).

$$\text{Bei } m = \text{konst} : \vec{F} = m \cdot d\vec{v} / dt \Rightarrow F = m \cdot \ddot{x} . \tag{2.1-2}$$

**Beispiel 2.1-1:** Kreisdrehbewegung, also  $r = \text{konst.}$  Mit dem Drehwinkel  $\gamma$  und der mechanischen Drehzahl  $n = \omega_m / (2\pi)$ , die aus der Winkelgeschwindigkeit folgt, erhalten wir

für den zurückgelegten Kreisbogen  $x = r \cdot \gamma$  mit dem Drehmoment  $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$  die Größe des Drehmoments  $M = r \cdot F$  und mit (2.1-2)

$$M = r \cdot m \cdot \ddot{x} = r \cdot m \cdot r \cdot \ddot{\gamma} = m \cdot r^2 \cdot \dot{\omega}_m \Rightarrow M = J \cdot \dot{\omega}_m. \quad (2.1-3)$$

Dabei wurde der Begriff des **polaren Trägheitsmoments**  $J = m \cdot r^2$  eingeführt als Pendant zur trägen Masse  $m$  der linearen Bewegung.

Die **elektromagnetischen Grundgleichungen** geben die gekoppelt elektrischen und magnetischen Vorgänge im Vakuum, in elektrisch geladenen, in stromdurchflossenen, in polarisierbaren bzw. magnetisierbaren Körpern bezüglich eines Beobachters  $\mathcal{B}$ , der das Bezugssystem darstellt (Bild 2.1-1), wieder. Unabhängig, ob die Geschwindigkeit  $v$  der Bewegung bezüglich des Beobachters  $\mathcal{B}$  KLEIN gegenüber der Vakuumlichtgeschwindigkeit  $c_0 \cong 3 \cdot 10^8$  m/s ist oder nicht, gelten stets unverändert die vier *MAXWELL*'schen Gesetze. Die *MAXWELL*-Gesetze sind somit *LORENTZ*-invariant, d. h. bei der Umrechnung der *MAXWELL*-Gesetze von einem bewegtem System zu einem ruhenden Bezugssystem  $\mathcal{B}$  mit der *LORENTZ*-Transformation ändern sich die Gesetze nicht! Es ändern sich zwar bei der Umrechnung der *MAXWELL*-Gesetze vom bewegten System zum ruhenden Bezugssystem  $\mathcal{B}$  mit der *LORENTZ*-Transformation die *MAXWELL*-Gesetze nicht, wohl ABER die in ihnen vorkommenden elektromagnetischen Größen  $D, E, B, H$ !

Ein bewegtes magnetisches System ( $B, H$ ) hat daher aus der Sicht des ruhenden Beobachters  $\mathcal{B}$  geänderte Werte  $B', H'$  und zusätzlich auftretende elektrische Größen  $D', E'$ , die als „Bewegungsinduktion“ bezeichnet werden. Dieser große, von *FARADAY* entdeckte Effekt ist für die Funktionsweise elektromagnetischer Wandler bedeutend!

Ein bewegtes elektrisches System ( $D, E$ ) hat aus der Sicht des ruhenden Beobachters  $\mathcal{B}$  geänderte Werte  $D', E'$  und zusätzlich auftretende magnetische Größen  $B', H'$ , die als *RÖNTGEN*-Effekt und *ROWLAND*-Effekt über rotierende Kondensatoren schon vor 1900 experimentell nachgewiesen wurden! Die Unterschiede zwischen  $D, E$  und  $D', E'$  und die zusätzlichen Felder  $B', H'$  sind aber bei den bei elektromagnetischen Wandlern auftretenden Geschwindigkeiten  $v$  klein und werden hier vernachlässigt!

Zwar ändern sich also die elektromagnetischen Größen  $D, E, B, H$  in  $D', E', B', H'$  beim Übergang von einem Bezugssystem zu einem anderen, relativ mit  $v$  dazu bewegten Bezugssystem prinzipiell, aber die dabei auftretenden magnetischen Größenänderungen sind bei üblichen Größe  $v$  vernachlässigbar klein:  $B \approx B', H \approx H'$ . Lediglich die zusätzliche Größe der „**Bewegungsinduktion**“  $E' - E$  muss berücksichtigt werden (Bild 2.1-4).

Für  $v \ll c_0$  gilt:  $\vec{E}' \cong \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \Rightarrow \vec{E}'_b = \vec{v} \times \vec{B}$ . (2.1-4)

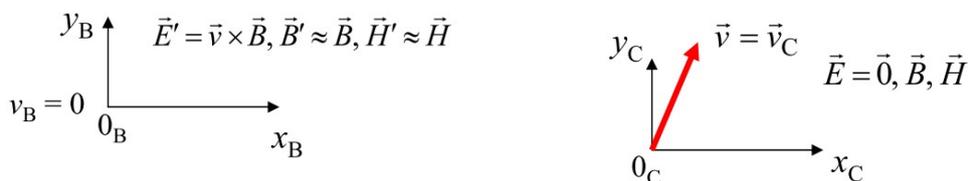
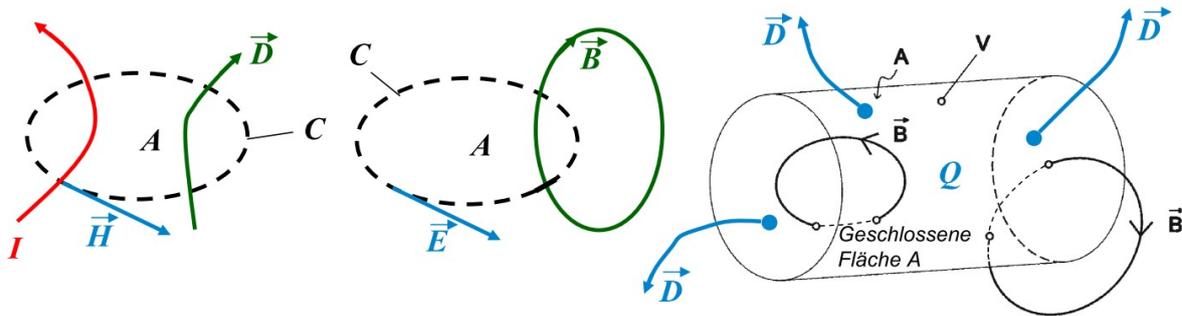


Bild 2.1-4: Ein gegenüber Bezugssystem  $B$  mit  $v_C$  bewegtes System  $C$  weist bzgl.  $C$  nur magnetische Feldgrößen  $B, H$  auf. Im Bezugssystem  $B$  werden sowohl magnetische Feldgrößen  $B', H'$  als auch elektrische Feldgrößen  $D', E'$  festgestellt. Die Unterschiede zwischen  $B, H$  und  $B', H'$  sind bei üblichen Geschwindigkeitsgrößen  $v_C$  klein, während  $D', E'$  als Bewegungsinduktion berücksichtigt werden muss.

Die elektromagnetischen Grundgesetze (*MAXWELL*-Gleichungen) in integraler Form lauten, ohne Berücksichtigung einer Relativbewegung  $v$ :

Ampere-Maxwell-Durchflutungsgesetz: 
$$\oint_{C=\partial A} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \Theta + \frac{\partial \Phi_e}{\partial t} \quad (\text{Bild 2.1-5a}) \quad (2.1-5)$$

Die el. Durchflutung  $\Theta = \sum_{k=1}^K N_k I_k$  wird von  $K$  i. A. unterschiedlichen Strömen  $I_k$  gebildet, die in el. Leitern fließen, die mit jeweils  $N_k$  Windungen mit der geschlossenen Kurve  $C$  verkettet sind, die ihrerseits als  $C = \partial A$  den Rand der Fläche  $A$  bildet, durch die diese Ströme und der elektrische Fluss  $\Phi_e = \oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A}$  hindurchtreten.



a) b) c)  
Bild 2.1-5: Geometrische Verhältnisse für die Bedeutung der vier MAXWELL-Gleichungen in integraler Form a) für das Ampere-Maxwell-Durchflutungsgesetz (Beispiel  $K = 1, N_1 = 1, I_1 = I$ ), b) für das Faraday-Induktionsgesetz, c) für die Gesetze vom magnetischen und elektrischen Hüllenfluss.

Faraday-Induktionsgesetz: 
$$\oint_{C=\partial A} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (\text{Bild 2.1-5b, ohne Bewegungsinduktion}) \quad (2.1-6)$$

mit dem magnetischen Fluss  $\Phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$ . Der magnetische Hüllenfluss ist der Fluss über eine geschlossene Fläche  $A$ , deren Rand somit Null ist ( $C = \partial A = 0$ ). Er ist stets Null, da keine magnetischen Monopole existieren.

Magnetischer Hüllenfluss: 
$$\oint_{A, \partial A=0} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (\text{Bild 2.1-5c}) \quad (2.1-7)$$

Der elektrische Hüllenfluss ist stets gleich groß wie die von der geschlossenen Fläche  $A$  eingeschlossene elektrische gesamte Ladungsmenge  $Q$  (Gauss'scher Satz).

Elektrischer Hüllenfluss: 
$$\oint_{A, \partial A=0} \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q \quad (\text{Bild 2.1-5c}) \quad (2.1-8)$$

Bei elektromagnetischen Wandlern sind die zeitlichen Änderungsraten üblicherweise so klein, dass in (2.1-5) mit  $\Theta \gg \partial \Phi_e / \partial t$  der Einfluss der el. Feldänderung auf die Erregung magnetischer Felder vernachlässigt werden kann, so dass anstelle von (2.1-5) der Ampere'sche Satz (2.1-9) verwendet wird, während die anderen drei Gesetze weiterhin gelten.

Ampere-Durchflutungsgesetz: 
$$\oint_{C=\partial A} \vec{H} \cdot d\vec{s} \approx \Theta \quad (2.1-9)$$

In einem magnetischen Feld ist das Linienintegral über die magnetische Feldstärke  $H$  für langsam zeitlich veränderliche Felder entlang einer geschlossenen Linie  $C$  gleich dem gesamten elektrischen Strom  $NI$  als Durchflutung  $\Theta$ , der durch die von dieser Linie gebildete Fläche  $A$  hindurch tritt. Streng gilt (2.1-9) nur für magnetostatische Felder, also reine Gleichstromerregung  $I = \text{konst.}$  Elektromagnetische Feldabstrahlungen (Antennenwirkung) können mit (2.1-9) nicht berechnet werden. Bei elektromechanischen Wandlern wird (2.1-9)

meist näherungsweise durch abschnittsweise Berechnung des Integrals entlang  $C$ , in  $n$  Abschnitte der Längen  $l_i, i = 1 \dots n$ , berechnet (Bild 2.1-6) ( $V_i$ :  $i$ -te „magnetische Spannung“).

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = \Theta = N \cdot I \cong \sum_{i=1}^n H_i \cdot l_i = H_1 \cdot l_1 + H_2 \cdot l_2 + \dots + H_n \cdot l_n, \quad V_i = H_i \cdot l_i \quad (2.1-9)$$

Beispiel 2.1-2: Magnetfelder  $H$  und  $B$  in einem Eisenkern mit der Luftspaltweite  $l_1$ , erregt vom Strom  $I$  in einer Spule mit  $N = 4$  Windungen (Bild 2.1-6). Die geschlossene Kurve  $C$  wird in  $n = 6$  Abschnitte zerlegt, längs deren Abschnittslängen  $H_i$  bzw.  $B_i$  konstant angenommen werden darf. Die magnetische Flussdichte  $B$  (Einheit: Tesla, T) und die magnetische Feldstärke  $H$  (Einheit: A/m) sind im  $i$ -ten Flussabschnitt über das Materialgesetz von Luft bzw. Eisen mit deren jeweiliger Permeabilität  $\mu_i$  verknüpft gemäß  $B_i = \mu_i \cdot H_i$ .

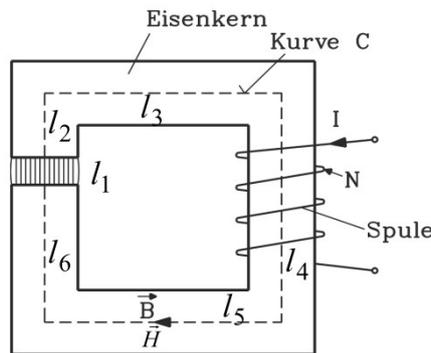


Bild 2.1-6: Näherungsweise Anwendung des Durchflutungssatzes für einen Eisenkern mit Luftspalt

Die Bewegungsinduktion im *Faraday*-Gesetz (2.1-6) kann mit erfasst werden, wenn eine Bewegung der betrachteten Kurve  $C$ , längs der die induzierte el. Feldstärke  $E$  auftritt, mit betrachtet wird. In Bild 2.1-7 ist eine zeitliche Änderung von  $\Phi$  dann möglich, wenn a)  $B(t)$  sich ändert, oder b) wenn sich die Fläche  $A(t)$  mit Geschwindigkeit  $v(t)$  der Bewegung ihrer Randkurve  $C$  ändert. Im ersten Fall ist  $B$  variabel und  $A$  konstant, im zweiten Fall ist  $A$  variabel und  $B$  konstant. In beiden Fällen wird eine el. Feldstärke gemäß (2.1-6) induziert, die fallweise bei a) als „Wirbelfeldstärke“  $E_{wi}$  und bei b) als Bewegungsfeldstärke  $E_b$  bezeichnet wird, denn jede Änderung des mit der Leiterschleife  $C$  verketteten Flusses  $\Phi$  ruft eine induzierte Spannung  $u_i$  hervor.

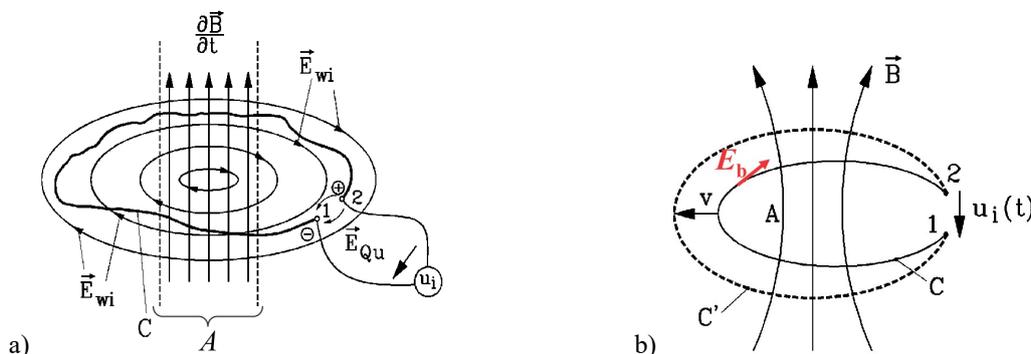


Bild 2.1-7: *Faraday*-Induktionsgesetz:  $B$ : Flussdichte,  $A$ : flussführende Fläche. A) Ruhinduktion der elektrischen Wirbelfeldstärke  $E_{wi}$ :  $B$  ist variabel und  $A$  konstant, b) Bewegungsinduktion der el. Bewegungsfeldstärke  $E_b$ :  $A$  ist variabel durch die Bewegung der Randkurve  $C$  nach  $C'$  mit  $v$ ,  $B$  ist konstant.

Es muss allerdings anstelle der partiellen Ableitung  $\partial \cdot / \partial t$ , die nur auf  $B(t)$  wirkt, die totale Ableitung  $d \cdot / dt$  verwendet werden, die auch auf die zeitlich veränderlichen Integralgrenzen

bei der Flussberechnung wirkt. Damit wird das allgemeine experimentelle Ergebnis *Faraday's* erfasst, dass die induzierte Spannung in einer Leiterschleife  $C$  die negative Änderung des mit dieser Schleife verketteten Flusses  $\Phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$  ist:  $u_i = -d\Phi/dt$ . Für

kleine Änderungen der Fläche  $A$  durch die Randkurven-Geschwindigkeit  $v \ll c_0$  ergibt dann die Produktregel der Differentiation

$$-u_i = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_{A=\text{konst.}} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A} - \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s} \quad (2.1-10)$$

Hat die betrachtete Leiterschleife  $N$  Windungen in Serie, so ist  $u_i$   $N$ -mal so groß:

$$u_i = \oint_{N \cdot C} (\vec{E}_{wi} + \vec{E}_b) \cdot d\vec{s} = N \cdot \int_A -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A} + N \cdot \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Psi}{dt} \quad (2.1-11)$$

Mit der Flussverkettung („Verkettungsfluss“)  $\Psi = N \cdot \Phi$  erhalten wir das *Faraday*-Gesetz für  $N$  Windungen gemäß

$$u_i = -d\Psi/dt \quad (2.1-12)$$

Anwendungen für Ruh- und Bewegungsinduktion sind in Tabelle 2.1-1 zusammengefasst.

| Ruhinduktion  | Bewegungsinduktion   |
|---|--|
| Flussdichte $B$ zeitlich veränderlich   | Flussdichte $B$ zeitlich konstant  |
| Spule ruht  | Spule bewegt sich mit Geschwindigkeit $v$  |
| $u_i = -d\Psi/dt = -N \cdot d\Phi/dt$   |  |
| $u_i = -\partial\Psi/\partial t = \oint \vec{E}_{wi} \cdot d\vec{s}$  | $u_i = \oint (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s} = \oint \vec{E}_b \cdot d\vec{s}$               |
| Wirbelfeldstärke $\vec{E}_{wi}$ $\text{rot}\vec{E}_{wi} = -\partial\vec{B}/\partial t$                                | Bewegungsfeldstärke $\vec{E}_b = \vec{v} \times \vec{B}$   |
| <b>Anwendung des Induktionsgesetzes: z. B.:</b>   |  |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>• Transformatorspulen</li> <li>• Ständerspulen in Drehfeldmaschinen</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Rotierende Ankerwicklung in Gleichstrommaschinen</li> </ul> |
| <i>Transformatorische Induktion</i>   | <i>Rotatorische Induktion</i>  |

Tabelle 2.1-1: *Faraday*-Induktionsgesetz, unterschieden in Ruh- und Bewegungsinduktion.

Für eine Leiterschleife mit außen angelegten Spannung  $u$  aus einer Spannungsquelle erhalten wir mit der *Kirchhoff*'schen Maschenregel und dem *ohm'schen* Schleifenwiderstand  $R$  bei einer Spannungsinduktion in die Schleife  $u + u_i = R \cdot i$  bzw.  $u = R \cdot i + d\Psi/dt$  (Bild 2.1-8). Mit der häufig verwendeten Bezeichnung „Quellenspannung“  $u_q = -u_i = d\Psi/dt$  (in Anlehnung an Batterien bei DC-Stromkreisen) schreibt man auch  $u = R \cdot i + u_q$ .

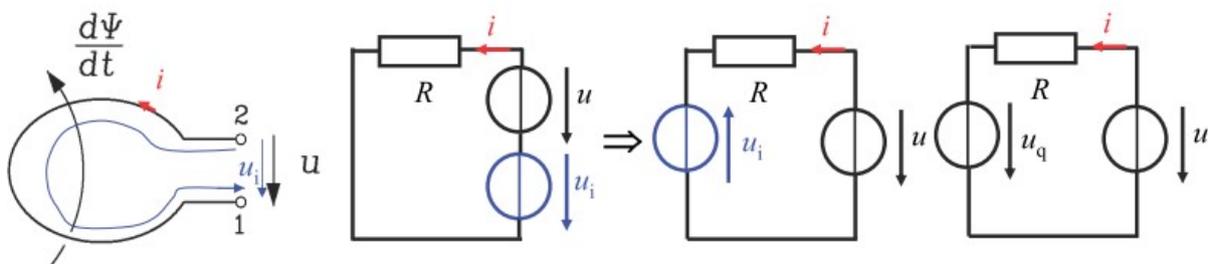


Bild 2.1-8: Spannungsinduktion in eine einwindige Leiterschleife.  $R$ : Schleifen-Widerstand,  $u$ : Außen angelegte Klemmenspannung,  $u_i$ : induzierte Spannung, auch bezeichnet als „Quellenspannung“  $u_q = -u_i$ . Zugehörige el. Ersatzschaltbilder mit dem Verbraucher-Zählfeilsystem für  $u, i$ .

**Beispiel 2.1-3:**

a) Leerlaufende (= stromlose) induzierte Leiterschleife:  $i = 0 \Rightarrow u = -u_i = u_q = d\Psi/dt$ . Wenn der Strom deshalb nicht fließen kann, weil die Klemmen offen sind, dann ist die dort

messbare (Leerlauf)-Spannung  $u$  die negative induzierte Spannung. Wird von außen eine Spannung  $u$  angelegt, so dass der Strom Null ist, so muss diese Spannung  $u$  den Wert der negativen induzierten Spannung aufweisen.

b) Kurzgeschlossene Leiterschleife: Durch die el. Verbindung beider Klemmen als „Kurzschluss“ ist  $u = 0$ . Daher ist  $i = u_i/R = -u_q/R = -(d\Psi/dt)/R$  ein zum vereinbarten Zählpfeilsinn NEGATIVER Strom! Das von ihm gemäß (2.1-8) erregte Eigenfeld  $B_e(i)$  ist gemäß den Vorzeichenregeln (z. B. „Rechte-Hand-Regel“) gegen das induzierende Feld  $B$  gerichtet und bremst damit die resultierende Feldänderung, was als „magnetische Trägheit“ bezeichnet wird (Bild 2.1-9)! Die Wirkung der induzierten Spannung ist derart, dass der von ihr bewirkte Stromfluss seiner Ursache, der magnetischen Feldänderung, entgegen wirkt (Lenz'sche Regel). Kurzgeschlossene Schleifen werden in elektromagnetischen Wandlern fallweise als elektrischer „Dämpfer“ eingesetzt.

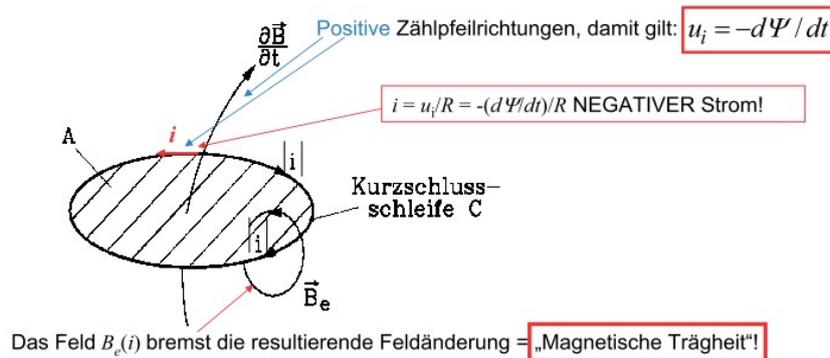


Bild 2.1-9: Eine kurzgeschlossene Leiterschleife, die mit einem zeitlich sich ändernden Magnetfeld verknüpft ist, verzögert dessen Feldänderung durch das Eigenfeld des in ihr fließenden induzierten Kurzschlussstroms (Lenz'sche Regel).

Das Eigenfeld  $B_e$  ist mit  $i$  ( $= i_1$ ) über die Selbstinduktivität  $L$  der (i. A.  $N$ -windigen) Schleife gemäß  $\Psi_e = N \cdot \Phi_e = N \int_A \vec{B}_e \cdot d\vec{A} = L \cdot i_1 = \Psi_1$  verknüpft. Das induzierende Fremdfeld  $B$  in Bild

2.1-9 wird von einem Fremdstrom  $i_2$  einer anderen Schleife erregt und hat mit der Kurzschlusschleife die Flussverknüpfung  $\Psi_2 = N \cdot \Phi = N \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = M \cdot i_2$ , was durch die

Gegeninduktivität  $M$  ausgedrückt wird. Die Gesamtflussverknüpfung der Schleife ist  $\Psi = L \cdot i_1 + M \cdot i_2$ . Sie kann auch geschrieben werden als

$$\Psi = (L - M) \cdot i_1 + M \cdot (i_1 + i_2) = L_\sigma \cdot i_1 + M \cdot (i_1 + i_2) = \Psi_\sigma + \Psi_h. \tag{2.1-13}$$

Streufeldverknüpfung:  $\Psi_\sigma = L_\sigma \cdot i_1$ , Hauptflussverknüpfung:  $\Psi_h = M \cdot (i_1 + i_2)$ . Die „Quellenspannung“ lautet damit

$$u_q = d\Psi_\sigma/dt + d\Psi_h/dt \tag{2.1-14}$$

und die Spannungsgleichung für eine induzierte, mit  $u$  gespeiste Leiterschleife bzw. Spule

$$u = R \cdot i_1 + L_\sigma \cdot di_1/dt + u_h \text{ (Bild 2.1-10)} \tag{2.1-14}$$

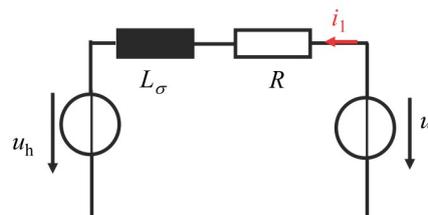


Bild 2.1-10: Ersatzschaltbild einer  $u$ -gespeisten, induzierten Spule mit Hauptfeldspannung und Streuinduktivität

Die **elektromagnetischen Grundgleichungen** können auf zwei Arten formuliert werden:

- a) Mit Verwendung der vier *MAXWELL*'schen Gleichungen,
- b) Mit Verwendung des *LAGRANGE*-Formalismus.

Mit Verwendung der vier *MAXWELL*'schen Gleichungen mit dem vereinfachten *AMPERE-MAXWELL*-Satz für kleine zeitliche Änderungen als *AMPERE*'scher Durchflutungssatz erfolgt diese Formulierung

- 1. in lokaler (= differentieller) Form mit den lokalen Feldgrößen  $D, E, B, H$  oder
- 2. in globaler (= integraler) Form mit den integralen Größen  $\Psi$  (bzw.  $\Phi$ ),  $\Phi_e, Q, i, \varphi, u, V$  als magnetische Spannung oder
- 3. mit den konzentrierten Größen  $L, C, R$  als elektrische Netzwerke und Anwendung der beiden *KIRCHHOFF*'schen Gesetze.

Mit Verwendung des *LAGRANGE*-Formalismus kann die Formulierung ebenfalls mit den lokalen Feldgrößen erfolgen.

- 1. Diese Formulierung mit lokalen Feldgrößen verwendet die skalare (*LAGRANGE*)-Funktion, die auf dem Vektorpotential  $A$  basiert, wobei  $\varphi$  das bereits o. g. elektrische Potential ist.

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A}, \quad \text{div}\vec{A} = -\frac{1}{c_0^2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (\vec{E} = -\text{grad}\varphi) \tag{2.1-15}$$

Für numerische Feldberechnungen wird **Verwendung der Methode der Finiten Elemente** für endlich große („finite“) Geometrielemente durch Variationsrechnung mit dem *EULER*'schen Prinzip der kleinsten Wirkung das elektromagnetische Feld bestimmt. Dabei wird  $A$  über jedem finiten Element als linear oder quadratisch von den Koordinaten  $(x, y, z)$  abhängige Größe angenähert.

- 2. Für die Formulierung mit integralen Größen  $u, i$  wird die *LAGRANGE*-Funktion wie in der Mechanik über den Energiebegriff gebildet. Mit der Variationsrechnung werden anstelle mit den *KIRCHHOFF*'schen Gesetzen die Strom- und Spannungsgleichungen aufgestellt.

## 2.2 Materialgesetze

### 2.2.1 Elastisch verformbare Materie

Als **Elastizität** versteht man jene Körpereigenschaft, unter Krafteinwirkung die Körperform zu verändern und bei Wegfall der einwirkenden Kraft in die Ursprungsform zurückzufedern. Ein **Sonderfall** ist der linear-elastische Körper, und dabei wieder der Sonderfall des einachsigen Spannungszustands, der durch das eindimensionale *HOOKE*'sche Gesetz (2.2.1-1) beschrieben wird.

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \tag{2.2.1-1}$$

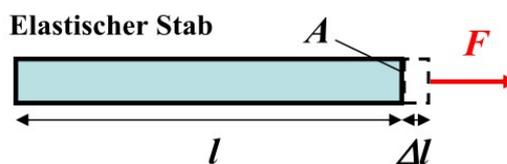


Bild 2.2.1-1: Ein elastischer Stab wird durch die in der Stabachse angreifende Kraft  $F$  um die Länge  $\Delta l$  gedehnt.

Ein Körper in der Form eines elastischen Stabs mit der Länge  $l$  und dem unverformten Querschnitt  $A$  wird dem Angriff einer äußeren Kraft  $F$  in der Stabachse ausgesetzt (Bild 2.2.1-1). Es tritt dadurch die mechanische Spannung  $\sigma = F/A$  in der Stabachse auf, die zu einer elastischen Verlängerung des Stabs  $\Delta l$  führt, die bezogen auf die Ursprungslänge  $l$  als „Dehnung“  $\varepsilon = \Delta l / l$  bezeichnet wird. Der **Elastizitätsmodul  $E$**  in (2.2.1-1) ist dabei eine Werkstoff-Eigenschaft und (2.2.1-1) das Materialgesetz des linear-elastischen Stabs.

Die **Thermoelastizität** beschreibt die elastische Körperversformung bei Wärmezufuhr, also z. B. eine elastische Wärmedehnung. Ist diese Dehnung bzw. allgemein Verformung nicht möglich, so ändern sich durch die Wärmeeinwirkung die mechanischen Spannungen („Wärmespannungen“).

### 2.2.2 Elektrisch polarisierbare und magnetisierbare Materie

**Dielektrika** sind i. A. elektrisch nicht oder schwach leitfähige Stoffe, deren Moleküle versuchen, sich im äußeren elektrischen Feld  $E$  in oder gegen die Feldrichtung  $E$  auszurichten („polarisieren“). Dadurch erregen sie ein zusätzliches elektrisch wirksames Feld, die **elektrische Polarisation  $P$** . Das resultierend wirksame elektrische Feld ist die **dielektrische Verschiebung (el. Flussdichte)  $D$** .

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P} \quad (2.2.2-1)$$

Bei „isotropen“ Dielektrika ist die Wirkung der Polarisierung unabhängig von der Raumrichtung des äußeren elektrischen Felds  $E$ .

Eine lineare Polarisierbarkeit meint, dass die el. Polarisation  $P$  linear von  $E$  abhängt.

$$\vec{P} \sim \vec{E} \Rightarrow \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon \cdot \vec{E} = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \vec{E} \quad (2.2.2-2)$$

In (2.2.2-2) ist die „relative Permittivität“  $\varepsilon_r \geq 1$  eine konstante Zahl. Bei der nichtlinearen Polarisierbarkeit hängt  $P$  nichtlinear von  $E$  ab, so dass  $\varepsilon_r(E)$  ebenfalls von  $E$  abhängt.

$$\vec{P} = \vec{P}(E) \Rightarrow \vec{D}(E) = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}(E) = \varepsilon(E) \cdot \vec{E} = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r(E) \cdot \vec{E} \quad E = |\vec{E}| \quad (2.2.2-3)$$

Ein Sonderfall ist der (real nicht existente) „ideal“ polarisierbare Werkstoff  $\varepsilon_r \rightarrow \infty$ , bei dem geringste äußere  $E$ -Felder eine unendlich große Polarisation  $P$  bewirken würden, so dass im Inneren solcher Werkstoffe  $E$  Null ist (Tab. 2.2.2-1).

Magnetisierbare Werkstoffe sind die **Ferromagnetika**, die **Anti-Ferromagnetika**, die **Ferri-Magnetika**, die **Diamagnetika** und die **Paramagnetika**. Es sind i. A. elektrisch leitfähige Stoffe, deren Moleküle versuchen, sich im äußeren magnetischen Feld  $H$  in oder gegen die Feldrichtung  $H$  auszurichten. Dadurch erregen sie ein zusätzliches magnetisch wirksames Feld, das **magnetische Polarisation  $J_M$**  bzw. Magnetisierung  $M = J_M/\mu_0$  genannt wird. Das resultierend wirksame magnetische Feld ist die **magnetische Induktion (magnetische Flussdichte)  $B$** .

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H} + \vec{J}_M = \mu_0 \cdot \vec{H} + \mu_0 \cdot \vec{M} \quad (2.2.2-4)$$

Bei „isotropen“ Magnetika ist die Magnetisierungswirkung unabhängig von der Raumrichtung des äußeren  $H$ -Felds.

Eine lineare Magnetisierbarkeit meint, dass die magn. Polarisation  $J_M$  linear von  $H$  abhängt.

$$\vec{J}_M \sim \vec{H} \Rightarrow \vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{J}_M = \mu \cdot \vec{H} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \vec{H} \quad (2.2.2-5)$$

In (2.2.2-5) ist die „relative Permittivität“  $\mu_r$  eine konstante Zahl. Sie ist für Ferromagnetika, Anti-Ferromagnetika, Ferri-Magnetika und die Paramagnetika  $\mu_r \geq 1$  und für Diamagnetika  $0 \leq \mu_r \leq 1$ . Bei der nichtlinearen Magnetisierbarkeit hängt  $J_M$  nichtlinear von  $H$  ab, so dass  $\mu_r(H)$  ebenfalls von  $H$  abhängt.

$$\vec{J}_M = \vec{J}_M(H) \Rightarrow \vec{B}(H) = \mu_0 \vec{H} + \vec{J}_M(H) = \mu(H) \cdot \vec{H} = \mu_0 \cdot \mu_r(H) \cdot \vec{H} \quad H = |\vec{H}| \quad (2.2.2-6)$$

Ein Sonderfall ist der (real nicht existente) „ideal“ magnetisierbare Werkstoff  $\mu_r \rightarrow \infty$ , bei dem geringste äußere  $H$ -Felder eine unendlich große Polarisation  $J_M$  bewirken würden, so dass im Inneren solcher Werkstoffe  $H$  Null ist. Während bei der el. Polarisation wegen der bei typischen Werkstoffen nicht allzu großen rel. Permittivitäten  $\varepsilon_r < 10 \dots 100$  das Modell der idealen Polarisierbarkeit i. A. wenig zur Anwendung kommt, ist v. A. bei den ungesättigten Ferromagnetika  $\mu_r$  mit Werten bis ca. 8000 so groß, dass „ideal“ magnetisierbare Werkstoffmodelle bei der mathematischen Beschreibung Verwendung finden (Tab. 2.2.2-1).

Während die atomaren magnetischen Dipole aller üblichen Stoffe sich im äußeren Feld ausrichten und so eine schwache magn. Polarisation erzeugen (Paramagnetismus), überwiegt bei den Diamagnetika eine gegen das Feld auftretende Orientierung der Magnetdipole (z. B. Graphit), so dass das eindringende externe Feld nicht verstärkt, sondern geschwächt wird. Bei den Ferromagnetika sind große Bereiche von Gitteratomen magnetisch gekoppelt in *Weiss'schen* Bezirken, so dass diese Bezirke einheitlich in eine bestimmte Raumrichtung magnetisiert sind. In einem äußeren Feld werden die Bezirke in Richtung des externen Felds ausgerichtet, was die großen Werte  $\mu_r$  erklärt. Beim Antiferromagnetismus richten sich diese Bezirke gegen das eindringende Feld aus und schwächen es. Ferrite enthalten in „Untergittern“ sowohl ferromagnetische als auch antiferromagnetische Strukturen, die sich gegenseitig schwächen und damit die deutlich geringeren Remanenzflussdichten bis ca. 0,4 T der Ferritmagnete erklären. Oberhalb der **CURIE-Temperatur**  $T_c$  (in K) bzw.  $\vartheta_c$  (in °C) verschwindet die *Weiss'sche* magnetische Kopplung, so dass die Bezirksstruktur verschwindet und damit der Effekt des Ferro- und des Anti-Ferromagnetismus! Es verbleibt der Paramagnetismus.

Beispiel 2.2.2-1:

Curie-Temperaturen ausgewählter Werkstoffe:

Reineisen Fe:  $\vartheta_c = 768^\circ\text{C}$ , Nickel Ni:  $\vartheta_c = 350^\circ\text{C}$ , Kobalt Co:  $\vartheta_c = 1150^\circ\text{C}$ , Ba- u. Sr-Ferrite:  $\vartheta_c = 100 \dots 460^\circ\text{C}$  je nach Ferrit-Typ.

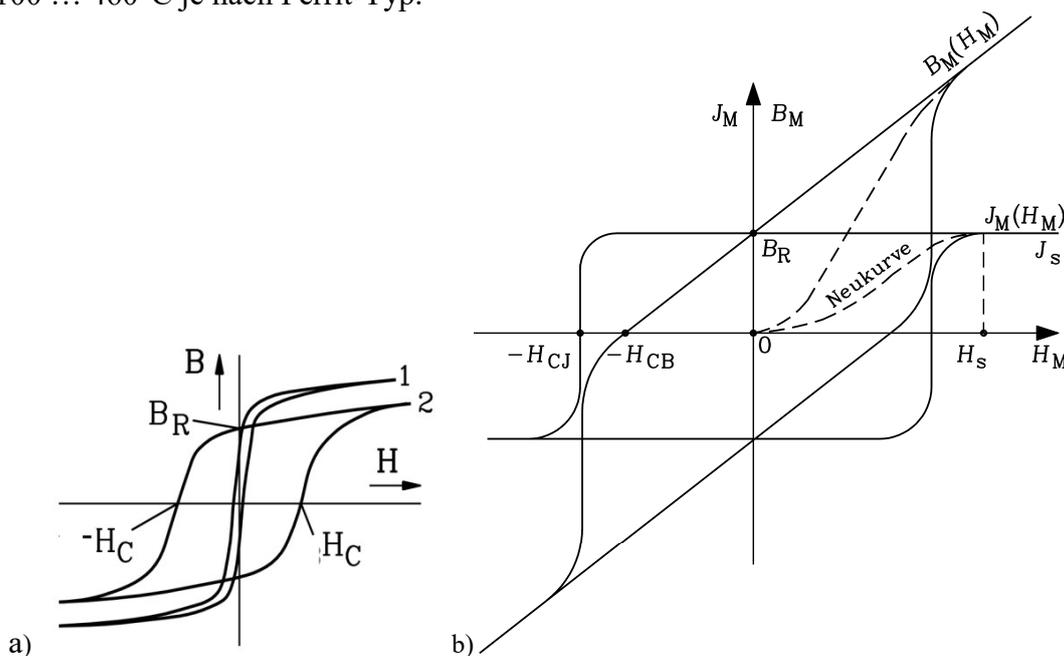


Bild 2.2.2-1: a)  $B(H)$ -Hystereseschleifen von Ferromagnetika (1) für Wechselfeldanwendungen mit schmaler Hystereseschleife und damit kleinen Hystereseverlusten und (2) für Gleichfeldanwendungen in Permanentmagneten mit großer Koerzitivfeldstärke  $H_C$ . b)  $B_M(H_M)$ - und  $J_M(H_M)$ -Hystereseschleife eines Seltenerd-Dauermagnetmaterials mit linearer  $B_M(H_M)$ -Kennlinie im 2. und 4. Quadranten der  $B_M-H_M$ -Ebene (Remanenzflussdichte:  $B_R = J_R \approx J_s$ , Koerzitivfeldstärken  $H_{CJ}$  und  $H_{CB}$ ).

Bei den im Folgenden hier isotrop angenommenen ferromagnetischen Werkstoffen hängt die  $B(H)$ -Kurve nichtlinear von  $H$  ab (2.2.2-6), was als „Sättigung“ bezeichnet wird. Die **relative Permeabilität**  $\mu_r(H)$  beträgt in speziellen Eisenblechen bis zu  $\mu_{r,max} \approx 5000 \dots 7000$ . Aufgrund der polykristallinen Werkstoffstruktur und Gitterfehlstellen haben  $B(H)$ -Kurven der Ferromagnetika eine „Hysterese“, d. h. eine Schleifenform der  $B(H)$ -Kennlinie. Es treten damit die Remanenzflussdichte  $\pm B_R$  und die Koerzitivfeldstärke  $\pm H_C$  auf. In Bild 2.2.2-1a stellt die Schleife 1 „weichmagnetisches“ Material mit kleinem  $H_C$  dar (z. B. Eisen, Nickel,

Kobalt, ...), Schleife 2 „hartmagnetisches“ Material mit großem  $H_C$  für Permanentmagnete (z. B. Ferrite, Al-Ni-Co-Magnete, Selten-Erd-Hochenergiemagnete wie NdFeB, SmCo<sub>5</sub>, Sm<sub>2</sub>Co<sub>17</sub> ...).

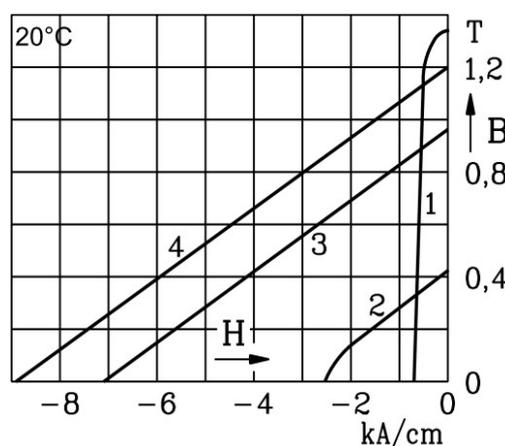
„Sättigung“ des Werkstoffs meint, dass sich  $B$  trotz weiterer  $H$ -Vergrößerung kaum mehr erhöhen lässt, da alle atomaren „Elementarmagnete“ im Werkstoffkristall bereits parallel zu  $H$  ausgerichtet sind. Daher wächst  $B$  nur noch gemäß  $\vec{B}(H) = \mu_0 \vec{H}$ , so dass die in Bild 2.2.2-1a gezeigten Krümmungen in den  $B(H)$ -Kurven auftreten. Diese Sättigung setzt bei Eisen ab etwa  $B = 1.7$  T ein, bei Kobalt ab etwa 2 T!

Es gibt auch el. polarisierbare Stoffe, die eine Hystereseschleife  $D(E)$  aufweisen und deshalb **Ferroelektrika (Elektrete, in Anlehnung an „Magnete“)** heißen.

Bei den Permanentmagneten (Dauermagneten) werden die drei Gruppen der AlNiCo-Magnete, der Ba-Ferrite und Sr-Ferrite sowie der Selten-Erd-Dauermagnete (z. B. Sm<sub>2</sub>Co<sub>17</sub>, NdFeB ...) unterschieden. Die magnetische Flussdichte im Permanentmagnetmaterial  $B_M = \mu_0 H_M + J_M$  wird maßgeblich durch die Hystereseschleife der magnetischen Polarisation  $J_M(H_M)$  bestimmt. Während wegen  $H_M = 0$  die Remanenzflussdichte  $B_R$  für die  $J_M(H_M)$ -Schleife und  $B_M(H_M)$ -Schleife identisch ist, tritt für die  $J_M(H_M)$ -Schleife die größere Koerzitivfeldstärke  $H_{CJ} > H_{CB}$  der  $B_M(H_M)$ -Schleife auf. In Bild 2.2.2-1b ist  $J_M$  ab dem Wert  $H_s$  vollständig gesättigt und nimmt daher nicht mehr zu ( $J_M = J_{M,max} = J_s$ ), so dass  $B_M = \mu_0 H_M + J_s$  prop.  $\mu_0 H_M$  zunimmt. Bild 2.2.2-1b ist für die Kennlinien von Selten-Erd- und Ferritmagneten typisch. Für  $-H_{CJ} < H_M < H_{CJ}$  gilt näherungsweise  $J_M(H_M) \approx \pm J_s = \text{konst.}$  und deshalb  $B_M \approx \mu_0 H_M \pm J_s$ , was den linearen  $B_M(H_M)$ -Kennlinienverlauf im 2. und 4. Quadranten der  $B_M$ - $H_M$ -Ebene erklärt. Mit  $J_M = B_R$  folgt

$$B_M = \mu_M H_M \pm B_R = \mu_M H_M \pm J_s, \quad \mu_M \approx \mu_0 \text{ (typisch : } \mu_M \approx 1.05 \cdot \mu_0 \text{)}. \quad (2.2.2-7)$$

Wenn ein Dauermagnet einen Magnetfluss über einen extern angefügten isotropen Eisenkreis treibt, sind  $B$  und  $H$  im externen Kreis parallel gerichtet ( $B \uparrow \uparrow H$ ), im Dauermagneten daher antiparallel ( $B \uparrow \downarrow H$ ). Zu einem positiven Wert  $B$  tritt im Magnet ein negativer Wert  $H$  auf, was den Kennlinienabschnitten im 2. und 4. Quadranten der  $B_M$ - $H_M$ -Ebene entspricht. In Bild 2.2.2-2 sind die  $B_M(H_M)$ -Kennlinien der o. g. Dauermagnettypen im 2. Quadranten dargestellt.



**Bild 2.2.2-2:**  $B(H)$ -Dauermagnetkennlinien im 2. Quadranten: 1: Al-Ni-Co, 2: Ba-Ferrit, 3: Sm<sub>2</sub>Co<sub>17</sub>, 4: NdFeB (Quelle: Fischer, R., Ele. Maschinen, Hanser-Verlag).

Bei den  $B(H)$ -Hystereseschleifen sinken i. A.  $B_R, H_C$  mit steigender Temperatur bis  $T_c$ . Die Dauermagnete werden mit einem externen Feld  $H > H_s$  (Bild 2.2.2-1b) entlang der **Neukurve** bleibend aufmagnetisiert. Die kostengünstigen Al-Ni-Co-Magnete haben ein hohes  $B_R$ , aber

nur ein kleines  $H_C$ , weshalb sie leicht durch ein äußeres Gegenfeld bleibend entmagnetisiert werden können, aber auch mit entsprechend kleinem Feld aufmagnetisiert werden können. Bei den Ba-Ferriten und Sr-Ferriten steigt sogar  $H_C$  mit steigender Temperatur in einem gewissen Temperaturbereich. Die Selten-Erd-Dauermagnete vom Typ  $\text{Sm}_2\text{Co}_{17}$  sind wegen der hohen CURIE-Temperatur von Kobalt für hohe Dauertemperaturen  $\vartheta_{\text{max}} = 350^\circ\text{C}$  geeignet. Die Selten-Erd-Dauermagnete NdFeB sind i. A. kostengünstiger als SmCo, haben höhere Remanenzflussdichten, aber niedrigere max. zulässige Dauertemperaturen  $\vartheta_{\text{max}} = 180^\circ\text{C}$ !

Somit stehen zur Erregung magnetischer Felder (Tab. 2.2.2-2) die Stromerregung gemäß dem *Ampere'schen* Durchflutungssatz mit den (mit elektrischer Isolierung umhüllten) Leitermaterialien Kupfer und Aluminium zur Verfügung, und alternativ nur für Gleichfelder die Dauermagnete auf Basis der Eisen-Nickel-Kobalt-Legierungen, der Ferrite und der Sinterwerkstoffe mit Seltenen Erden.

|                                   | Elektrostatik   | Magnetostatik   |
|-----------------------------------|---|---|
| Flussdichte                       | $D \text{ (A}\cdot\text{s/m}^2\text{)}$                                     | $B \text{ (V}\cdot\text{s/m}^2\text{)}$                                     |
| Feldstärke                        | $E \text{ (V/m)}$   | $H \text{ (A/m)}$   |
| Polarisation                      | $P \text{ (A}\cdot\text{s/m}^2\text{)}$                                     | $J_M \text{ (V}\cdot\text{s/m}^2\text{)}$                                   |
| rel. Werkstoffparameter           | $\epsilon_r \text{ (-)}$  | $\mu_r \text{ (-)}$   |
| Feldkonstante                     | $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ A}\cdot\text{s/(V}\cdot\text{m)}$ | $\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \text{ V}\cdot\text{s/(A}\cdot\text{m)}$ |
| "Geometriefaktor"                 | $C \text{ (A}\cdot\text{s/V)}$ $C = Q / U$                                  | $L \text{ (V}\cdot\text{s/A)}$ $L = \Psi / I$                               |
| Energiedichte (lineares Material) | $\vec{D} \cdot \vec{E} / 2$   | $\vec{B} \cdot \vec{H} / 2$   |
| Energie (lineares Material)       | $C \cdot U^2 / 2 = Q \cdot U / 2$   | $L \cdot I^2 / 2 = \Psi \cdot I / 2$  |

Tabelle 2.2.2-1: Elektrische vs. magnetische Größen

| Stromdurchflossene Spulen                 | Permanentmagnete                         |
|---|--|
| - Erregerverluste (Abhilfe: Supraleitung) | + keine Verluste                         |
| - Stromversorgung nötig                   | + einfacher Aufbau der el.-mech. Wandler |
| + (beliebig) hohe Felder möglich          | - Magnetfeld begrenzt auf ca. 1 T        |
| + Magnetfeld veränderbar                  | - Gefahr der Entmagnetisierung           |
| + fallweise kostengünstiger               |  |

Tabelle 2.2.2-2: Erregung magnetischer Felder

### 2.2.3 Elektromagnetisch-mechanisch wechselwirkende Materie

Neben den elastischen Materialien (2.2.1), den Dielektrika und Magnetika (2.2.2) gibt es zahlreiche weitere Materialarten, die für die Anwendung in elektromechanischen Systemen interessant sind:

**a) Piezoelektrizität:** Dabei ändert sich die elektrische Polarisation  $P$  eines Festkörpers, wenn dieser elastisch durch Anlegen einer Druck- oder Zugspannung verformt wird. Umgekehrt

ändern sich die Längenabmessungen des Körpers, wenn eine elektrische Spannung an den Körper angelegt wird („Elektrostriktion“).

**b) Piezoresistiver Effekt:** Dabei ändert sich der elektrische Widerstand  $R$  des Materials eines Körpers, wenn auf diesen eine Druck- oder Zugspannung ausgeübt wird.

**c) Piezomagnetismus:** Dabei ändert sich die magnetische Polarisation  $J_M$  eines magnetisierbaren Festkörpers, wenn dieser durch Ausübung einer Druck- oder Zugspannung elastisch verformt wird. Umgekehrt ändern sich die Längenabmessungen des Körpers, wenn dieser einem externen Magnetfeld ausgesetzt wird („Magnetostruktion“). Bekannt ist die mit 100 Hz auftretende Längenänderung der geblechten Transformatorkerne im 50 Hz-Magnetwechselfeld bei Betrieb der Transformatorwicklungen am 50 Hz-Netz. Die durch die Längenänderung angeregte Luftschallwelle mit 100 Hz als „Trafo-Brummen“ kann bei Leistungstransformatoren im Bereich einiger 100 MVA Bemessungsscheinleistung Schalldruckpegel von 100 dB(A) und mehr erreichen (Schallschutz erforderlich!).

#### 2.2.4 Elektromagnetisch-thermisch wechselwirkende Materie

Bei **thermoelektrischen Materialien** erfolgt eine gegenseitige Beeinflussung von Temperatur und Elektrizität.

**a) Seebeck-Effekt:** In einem Stromkreis aus zwei verschiedenen elektrischen Leitermaterialien entsteht bei einer Temperaturdifferenz zwischen beiden Materialien an der Kontaktstelle eine elektrische Potentialdifferenz als Kontaktspannung.

**b) Der Peltier-Effekt** ist der „reziproke“ Effekt zum Seebeck-Effekt. Ein elektrischer Stromfluss durch eine Kontaktstelle aus zwei verschiedenen elektrischen Leitermaterialien bewirkt eine Änderung der Kontakttemperatur. Je nach Materialpaarung führt dies zu einer Erhöhung oder Absenkung der Kontakttemperatur, so dass entweder Wärmeerzeugung oder Kühlung erfolgt.

**c) Thomson-Effekt:** Jeder stromdurchflossene Leiter mit einer Temperaturdifferenz zwischen zwei Punkten am Leiter wird entweder mehr oder weniger Wärme transportieren, als dies ohne Stromfluss aufgrund der Wärmeleitfähigkeit und Temperaturdifferenz der Fall wäre.

### 2.3 Kraftgesetze

#### 2.3.1 Federkraft $F_F$ und Reibungskraft $F_R$

Eine **Federkraft  $F_F$**  tritt an elastisch verformbaren Materialien auf als Rückstellkraft gegen eine äußere verformend wirkende Kraft.

*Beispiel 2.3.1-1:* Der Dehnungsstab von Abschn. 2.2.1 wird als linear elastische Feder verwendet. Gemäß Bild 2.2.1-1 folgt aus (2.2.1-1)  $\sigma = E \cdot \varepsilon = E \cdot \Delta l / l = (E/l) \cdot \Delta l$  die Federkraft

$$F_F = A \cdot \sigma = (E \cdot A/l) \cdot \Delta l = k \cdot \Delta l \quad (2.3.1-1)$$

mit der **Federkonstanten**

$$k = E \cdot A/l. \quad (2.3.1-2)$$

Eine **Reibungskraft  $F_R$**  tritt zwischen einander berührenden Körpern als Reaktionskraft gegen eine äußere Krafteinwirkung auf. Sie muss bei einer Bewegung z. B. einer Strecke  $\Delta l$  der Körper gegeneinander durch äußere Arbeitszufuhr  $W$  überwunden werden, um diese Bewegung aufrecht zu erhalten:  $W = F_R \cdot \Delta l$ . Die Arbeit  $W$  äußert sich in Reibungswärme und/oder in ihrer Auswirkung als plastische Verformungsarbeit beim „Verschleiß“ der reibenden Oberflächen. Diese Art von Reibung heißt **äußere Reibung** als Reibung zwischen sich berührenden Außenflächen von Festkörpern. Im Gegensatz dazu tritt **innere Reibung**

zwischen benachbarten Teilchen bei Verformungsvorgängen innerhalb von Festkörpern, Flüssigkeiten und Gasen auf (z. B. Flüssigkeitsreibung).

**2.3.2 Elektromagnetische Kraft (Lorentz-Kraft)  $F$**

Ein mit der Geschwindigkeit  $v$  bewegtes Teilchen mit der elektrischen Ladung  $Q$  erfährt im elektrischen Feld  $E$  und im magnetischen Feld  $B$  eine Kraft  $F$ , die **Lorentz-Kraft**. Diese Formel ist invariant gegenüber der Lorentz-Transformation, deshalb der Name.

$$\vec{F} = Q \cdot (\vec{v} \times \vec{B} + \vec{E}) \tag{2.3.2-1}$$

a) Der **Coulomb-Anteil dieser Kraft** heißt *Coulomb-Kraft* und wirkt auch beim ruhenden Teilchen  $v = 0$ :  $\vec{F} = Q \cdot \vec{E}$ .

Beispiel 2.3.2-1: Ein ruhendes geladenes Teilchen mit der Ladung  $Q = Q_1$  liegt im  $E_2$ -Feld der „Punktladung“  $Q_2$  im Abstand  $r$  (Bild 2.3.2-1). Mit  $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}$  As/(Vm) als Dielektrizitätszahl des leeren Raums folgt aus dem vierten MAXWELL-Gesetz  $\vec{E}_2 = \frac{Q_2}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} \cdot \vec{e}_{r'}$ . Die *Coulomb-Kraft*  $\vec{F} = Q_1 \cdot \vec{E}_2$  auf das Teilchen ist  $\vec{F} = -\frac{Q_1 \cdot Q_2}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} \cdot \vec{e}_r$  mit  $\vec{e}_r = -\vec{e}_{r'}$ .

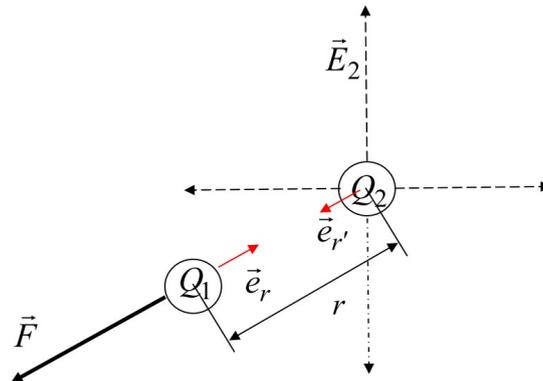


Bild 2.3.2-1: *Coulomb-Kraft*  $F$  auf die el. Ladung  $Q_1$  im elektrischen Feld  $E_2$  der el. Ladung  $Q_2$

b) Der **Lorentz-Anteil** von (2.3.2-1) wirkt NUR bei relativ zum Magnetfeld  $B$  bewegten geladenen Teilchen  $v \neq 0$ :  $\vec{F} = Q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$ . Häufig wird dieser Anteil alleine in Unterscheidung zu a) als *Lorentz-Kraft* bezeichnet. Dieser *Lorentz-Kraftanteil*  $F$  ist normal auf die Bewegungs- und  $B$ -Feldrichtung gerichtet! Daher kann der *Lorentz-Kraftanteil* KEINE mechanische Arbeit  $W$  am geladenen Teilchen verrichten, wie (2.3.2-2), (2.3.2-3) zeigen!

Beispiel 2.3.2-2: *Lorentz-Anteil der Lorentz-Kraft* auf ein bewegtes positiv el. geladenes Teilchen  $Q_1 > 0$  im Magnetfeld  $B$ :  $\vec{F} = Q_1 \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$  (Bild 2.3.2-2a).

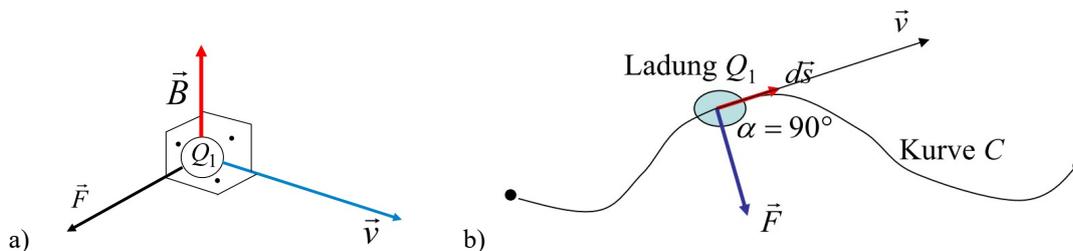


Bild 2.3.2-2: a) *Lorentz-Anteil der Lorentz-Kraft*  $F$  auf die bewegte el. Ladung  $Q_1$  im magnetischen Feld  $B$ , b) Der *Lorentz-Kraftanteil* kann KEINE mechanische Arbeit am geladenen Teilchen verrichten!

$$W = \int_C dW = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_C F \cdot \cos \alpha \cdot ds = \int_C F \cdot \cos 90^\circ \cdot ds = 0 \quad (2.3.2-2)$$

bzw.

$$\vec{F} \cdot d\vec{s} = Q_1 \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s} = Q_1 \cdot \left( \frac{d\vec{s}}{dt} \times \vec{B} \right) \cdot d\vec{s} = 0 \quad (2.3.2-3)$$

Beispiel 2.3.2-3: Bild 2.3.2-3a: Die Elektronenbewegung bei Gleichstrom  $I = 10 \text{ A}$  in einem Kupferleiter führt auf eine mittlere Elektronendriftgeschwindigkeit  $v = 0.7 \text{ mm/s}$ . Dieser Stromfluss soll in einem externen Magnetfeld  $B = 1 \text{ T}$  stattfinden. Der el. Strom ist die bewegte Ladungsmenge  $\Delta Q$  durch die Leiterquerschnittsfläche  $A$  je Zeiteinheit  $\Delta t$  gemäß  $I = \Delta Q / \Delta t$ . Der Lorentz-Kraftanteil  $\Delta F$  auf diese bewegte Ladungsmenge ist

$$\Delta \vec{F} = \Delta Q \cdot \vec{v} \times \vec{B} = \Delta Q \cdot \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t} \times \vec{B} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \cdot \Delta \vec{s} \times \vec{B} = I \cdot \Delta \vec{s} \times \vec{B} \quad (2.3.2-4)$$

Die Kraft auf ein differentiell kurzes Leiterstück der Länge  $ds$  ist demnach mit dem Richtungsvektor  $d\vec{s}$  in Richtung der Achse des Leiterstücks

$$d\vec{F} = I \cdot d\vec{s} \times \vec{B} \quad (2.3.2-5)$$

Daher ist der Lorentz-Kraftanteil auf ein gerades Leiterstück der Länge  $l$ , bei dem das externe Magnetfeld  $B$  homogen längs  $l$  verteilt ist,

$$\vec{F} = \int_0^l d\vec{F} = \int_0^l I \cdot d\vec{s} \times \vec{B} = I \cdot \vec{l} \times \vec{B} \quad (2.3.2-6)$$

Beispiel 2.3.2-4:

Gerader Leiter mit der Leiterlänge  $l = 1 \text{ m}$ , Leiter-Gleichstrom  $I = 10 \text{ A}$ , Homogen-Magnetfeld  $B = 1 \text{ T}$ : Betrag des Lorentz-Kraftanteils  $\vec{F} = I \cdot \vec{l} \times \vec{B}$  auf das Leiterstück:

$$|\vec{F}| = |I \cdot \vec{l} \times \vec{B}| = I \cdot l \cdot B = 10 \cdot 1 \cdot 1 = 10 \text{ N}.$$

Bsp. 2.3.2-4 zeigt, dass der Lorentz-Kraftanteil bei technischen Anwendungen mit Magnetfeldern in noch schwach gesättigten Eisenkreisen  $B < 1.7 \text{ T}$  selbst bei relativ kleinen Strömen i. A. groß ist, so dass viele elektromechanische Wandler mit Magnetkräften und nicht mit elektrostatischen Coulomb-Kräften arbeiten!

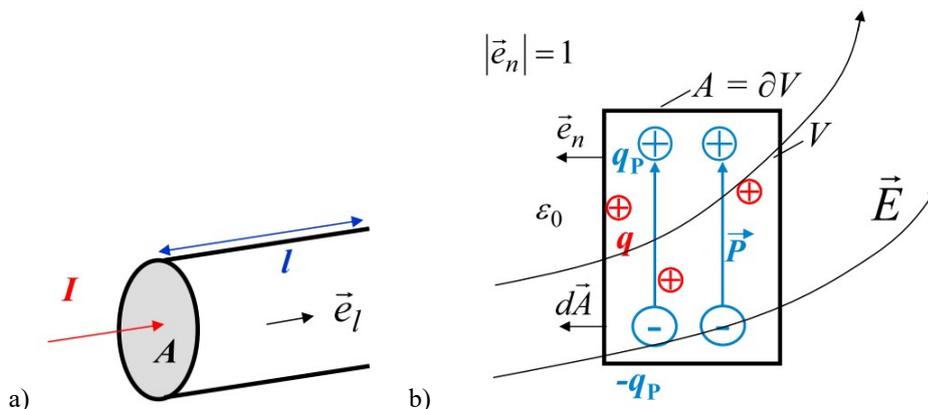


Bild 2.3.2-3: a) Strom  $I$  in einem Leiter der Länge  $l$  mit dem Richtungsvektor  $\vec{e}_l$ ,  $|\vec{e}_l|=1$ , b) El. polarisierbarer Körper (Volumen  $V$ , Polarisation  $P$  mit den Dipolladungen  $q_p$ ) und den freien Ladungen  $q$  als Gesamtladung  $Q$  im externen Feld  $E$ .

Die lokal wirksame elektromagnetische Kraftdichte  $f$  als Kraft pro Volumeneinheit z. B. eines Leiters folgt aus (2.3.2-6) und Bild 2.3.2-3a.

$$\vec{f} = \vec{F}/V = (I \cdot (\vec{l} \times \vec{B})/V) + ((Q/V) \cdot \vec{E}) = (I \cdot (\vec{l} \times \vec{B})/(A \cdot l)) + ((Q/V) \cdot \vec{E}) . \quad (2.3.2-7)$$

Mit dem Übergang auf die differentiell kleine Kraft  $dF$  auf ein differentiell kleines Volumenelement  $dV$  folgt mit  $\vec{f} = d\vec{F}/dV = (I \cdot (d\vec{l} \times \vec{B})/dV) + ((dQ/dV) \cdot \vec{E})$  dann

$$\vec{f} = (I \cdot (d\vec{l} \times \vec{B})/(dA \cdot dl)) + ((dQ/dV) \cdot \vec{E}) . \quad (2.3.2-8)$$

Mit dem Richtungsvektor des betrachteten Leiterstücks  $\vec{l} = l \cdot \vec{e}_l$ ,  $|\vec{e}_l|=1$ , folgt für den Übergang zu einem differentiell kleinen Leiterquerschnitt  $A \Rightarrow dA$  normal zur Stromrichtung die **elektrische Stromdichte  $J$**  (2.3.2-9).

$$I \cdot d\vec{l} / (dA \cdot dl) = ((\int_A \vec{J} \cdot d\vec{A}) / dA) \cdot (d\vec{l} / dl) \Rightarrow ((J \cdot dA) / dA) \cdot \vec{e}_l = J \cdot \vec{e}_l = \vec{J} \quad (2.3.2-9)$$

Mit Verwendung der **elektrischen Ladungsdichte  $\rho$**  als  $\rho = dQ/dV$  erhalten wir aus (2.3.2-8) die **Lorentz-Kraftdichte**

$$\vec{f} = (\vec{J} \times \vec{B}) + (\rho \cdot \vec{E}) . \quad (2.3.2-10)$$

Mit (2.3.2-10) wird die elektromagnetische **Kraft auf el. polarisierbare und magnetisierbare Körper** berechnet, wobei zunächst die el. polarisierte und el. geladene Körper im äußeren  $D$ -Feld betrachtet werden (Bild 2.3.2-3b). Der lokale Kraftangriff des  $D$ -Felds am Ort  $\vec{x}$  im Körpervolumen auf die el. Ladungen  $Q$  auf dem Körper und die Körpermoleküle als „Kraftdichte“  $f_e = F_e/V$  führt über Integration über das Körpervolumen zur Kraft  $F_e$ .

$$\vec{F}_e(t) = \int_V \vec{f}_e(\vec{D}, \vec{x}, t) \cdot dV = \oint_{A=\partial V} \vec{p}_e \cdot dA , \vec{x} = (x, y, z) . \quad (2.3.2-11)$$

Magnetisierbare Körper mit zusätzlich auch vorhandenem elektrischem Stromfluss  $I$  im Körper im äußeren  $B$ -Feld erfahren einen lokalen Kraftangriff des  $B$ -Felds am Ort  $\vec{x}$  der in den Körperatomen bewegten el. Ladungen (= AMPERE'sches „Kreisstrommodell“ der Atomelektronen um den Atomkern) und der am Stromfluss beteiligten Leitungselektronen als „Kraftdichte“  $f_m = F_m/V$ . Mit der Integration über das Körpervolumen  $V$  folgt die Kraft  $F_m$ .

$$\vec{F}_m(t) = \int_V \vec{f}_m(\vec{B}, \vec{x}, t) \cdot dV = \oint_{A=\partial V} \vec{p}_m \cdot dA , \vec{x} = (x, y, z) . \quad (2.3.2-12)$$

Je nach Materialart existieren unterschiedliche, empirisch beschriebene Gesetze für den lokalen Kraftangriff  $f_e, f_m$ . Wenn die räumliche Verteilung des resultierenden  $D$ - bzw.  $B$ -Felds bekannt ist, kann gemäß (2.3.2-11, 12) über sogenannte „**Maxwell'sche Spannungen  $p_e$  bzw.  $p_m$** “ die Kraft auf den polarisierbaren bzw. magnetisierbaren Körper auch über geschlossene Flächen  $A$ , die den betrachteten Körper vollständig einschließen, als Oberflächenintegral berechnet werden. Im Bild 2.3.2-3b liegt im Fremdfeld  $E$  ein el. polarisierter und el. geladener Körper. Er trägt die freien („wahren“) Ladungen  $q$  und die körperfesten Polarisationsladungen  $q_p$ , die hier als Dipole dargestellt sind. Auf die Anzahl  $i = 1 \dots N$  der freien Ladungen  $q$  von unterschiedlicher Größe  $q_i$  und die Anzahl  $i = 1 \dots N_p$  der Dipolladungen von unterschiedlicher Größe  $q_{p,j}, -q_{p,j}$  wirkt jeweils eine Einzelkraft, die zur Gesamtkraft  $F_e$  summiert wird (2.3.2-15). Der „wahren“ Ladungsdichte  $\rho(V)$  entspricht bei Betrachtung echter einzelner freier Ladungen der Ausdruck

$$\rho \rightarrow Q = \sum_{i=1}^N q_i = \int_V \rho(V) \cdot dV . \quad (2.3.2-13)$$

Der Polarisationsladungsdichte  $\rho_p(V)$  entspricht bei Betrachtung echter einzelner Dipole der Ausdruck

$$\rho_P \rightarrow \sum_{j=1}^{N_p} q_{P,j} = \int_V \rho_P(V) \cdot dV \quad (2.3.2-14)$$

Die resultierende Ladungsdichte  $\rho'(V) = \rho(V) + \rho_P(V)$  als Ersatz für die diskreten Ladungen wird je Volumeneinheit  $dV = dx \cdot dy \cdot dz$  „im Kontinuum“ rechnerisch verwendet.

$$\vec{F}_e(t) = \sum_i \vec{E}(\vec{x}_i, t) \cdot q_i(t) + \sum_j \vec{E}(\vec{x}_j, t) \cdot q_{P,j}(t) = \int_V \vec{E}(x, y, z, t) \cdot \rho'(x, y, z, t) \cdot dV \quad (2.3.2-15)$$

Wird nun der Körper mit einer geschlossenen Fläche  $A$ , die ganz im leeren Raum außerhalb des Körpers verläuft, umgeben, so kann die resultierende Kraft auf den Körper (s. o.) auch als Flächenintegral über die *Maxwell'schen* Spannungen (2.3.2-16) berechnet werden.

$$\vec{F}_e = \oint_{A=\partial V} \vec{p}_e \cdot dA, \quad \vec{p}_e = \varepsilon_0 \cdot (\vec{e}_n \cdot \vec{E}) \cdot \vec{E} - \varepsilon_0 \cdot (\vec{e}_n \cdot \vec{E}^2) / 2 \quad (2.3.2-16)$$

Die Herleitung des Ausdrucks  $p_e$  in (2.3.2-16) ist im Anhang A2.1 für Interessierte angegeben. Die geschlossene Oberfläche  $A$  liegt außerhalb des Körpers im materiefreien Raum; dort gilt  $\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \vec{E}$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_0$  und  $P = 0!$  Daher wird (2.3.2-16) auch als (2.3.2-17) geschrieben.

$$\vec{p}_e = (\vec{e}_n \cdot \vec{D}) \cdot \vec{D} / \varepsilon_0 - (\vec{e}_n \cdot \vec{D}^2) / (2\varepsilon_0) \quad (2.3.2-17)$$

Ist ein Teil der Fläche  $A$  so orientiert, dass ihr Normalenvektor in  $x$ -Richtung weist  $\vec{e}_n = \vec{e}_x$ , so ist der zugehörige Vektor der *Maxwell-Spannung*

$$\vec{p}_{e,x} = (\vec{e}_x \cdot \vec{D}) \cdot \vec{D} / \varepsilon_0 - (\vec{e}_x \cdot \vec{D}^2) / (2\varepsilon_0) = (D_x) \cdot \vec{D} / \varepsilon_0 - (\vec{e}_x \cdot D^2) / (2\varepsilon_0). \quad (2.3.2-18)$$

bzw.

$$\vec{p}_{e,x} = \frac{D_x}{\varepsilon_0} \cdot (D_x, D_y, D_z) - \frac{D^2}{2\varepsilon_0} \cdot (1, 0, 0) = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot (D_x^2, D_x D_y, D_x D_z) - \frac{D_x^2 + D_y^2 + D_z^2}{2\varepsilon_0} \cdot (1, 0, 0). \quad (2.3.2-19)$$

oder

$$\vec{p}_{e,x} = \frac{D_x^2 - D_y^2 - D_z^2}{2\varepsilon_0} \cdot \vec{e}_x + \frac{D_x D_y}{\varepsilon_0} \cdot \vec{e}_y + \frac{D_x D_z}{\varepsilon_0} \cdot \vec{e}_z. \quad (2.3.2-20)$$

Für den  $y$ - und  $z$ -Vektor der *Maxwell-Spannung* ist die Rechnung analog,

$$\vec{p}_{e,y} = \frac{D_x D_y}{\varepsilon_0} \cdot \vec{e}_x + \frac{D_y^2 - D_x^2 - D_z^2}{2\varepsilon_0} \cdot \vec{e}_y + \frac{D_y D_z}{\varepsilon_0} \cdot \vec{e}_z, \quad (2.3.2-21)$$

$$\vec{p}_{e,z} = \frac{D_x D_z}{\varepsilon_0} \cdot \vec{e}_x + \frac{D_y D_z}{\varepsilon_0} \cdot \vec{e}_y + \frac{D_z^2 - D_x^2 - D_y^2}{2\varepsilon_0} \cdot \vec{e}_z, \quad (2.3.2-22)$$

so dass sich neun Spannungskomponenten als Tensor 2. Stufe ergeben, wobei sechs unabhängig sind, was als diagonalsymmetrische  $3 \times 3$ -Matrix darstellbar ist.

$$\vec{T}_e(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} \vec{p}_{e,x} \\ \vec{p}_{e,y} \\ \vec{p}_{e,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{D_x^2 - D_y^2 - D_z^2}{2\varepsilon_0} & \frac{D_x D_y}{\varepsilon_0} & \frac{D_x D_z}{\varepsilon_0} \\ \frac{D_x D_y}{\varepsilon_0} & \frac{D_y^2 - D_x^2 - D_z^2}{2\varepsilon_0} & \frac{D_y D_z}{\varepsilon_0} \\ \frac{D_x D_z}{\varepsilon_0} & \frac{D_y D_z}{\varepsilon_0} & \frac{D_z^2 - D_x^2 - D_y^2}{2\varepsilon_0} \end{pmatrix} \quad (2.3.2-23)$$

In dieser Nomenklatur ist die räumliche el. Ladungsdichteverteilung  $\rho(x, y, z, t)$  ein Skalarfeld, wobei ein Skalar als Tensor 0. Stufe bezeichnet wird. Die dielektrische

Verschiebung ist ein Vektorfeld  $\vec{D}(x, y, z, t) = \vec{D}(\vec{x}, t) = (D_x(\vec{x}, t), D_y(\vec{x}, t), D_z(\vec{x}, t))$ , also ein Tensor 1. Stufe. Im zweidimensionalen Sonderfall gelten  $\rho(x, y, t)$ ,  $\vec{D}(x, y, t) = (D_x, D_y)$  und

$$\vec{T}_e(x, y, t) = \begin{pmatrix} \vec{p}_{e,x} \\ \vec{p}_{e,y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{D_x^2 - D_y^2}{2\epsilon_0} & \frac{D_x D_y}{\epsilon_0} \\ \frac{D_x D_y}{\epsilon_0} & \frac{D_y^2 - D_x^2}{2\epsilon_0} \end{pmatrix} \quad (2.3.2-24)$$

und im eindimensionalen Fall  $\rho(x, t)$ ,  $\vec{D}(x, t) = D_x(x, t) \cdot \vec{e}_x$ ,

$$\vec{T}_e(x, t) = (\vec{p}_{e,x}) = (D_x^2 / (2\epsilon_0)) = (D_x E_x / 2). \quad (2.3.2-25)$$

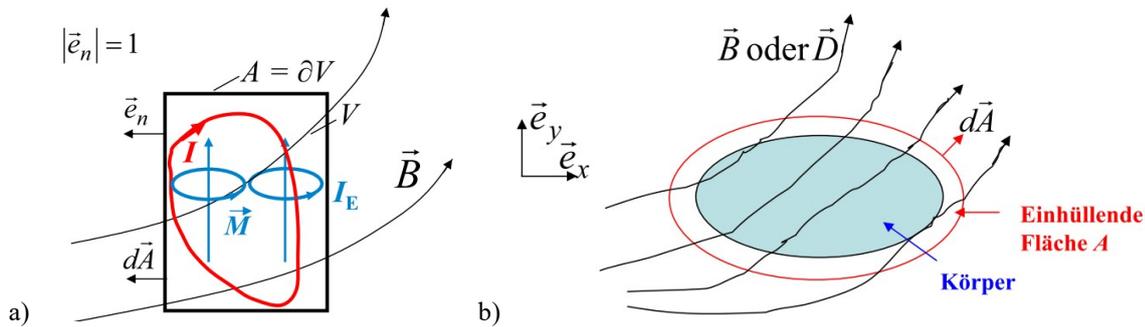


Bild 2.3.2-4: a) Magnetisierter Körper im externen Feld  $B$  (Körpervolumen  $V$ , Magnetisierung  $M = J_M / \mu_0$  infolge der magnetischen Dipole atomarer Kreisströme  $I_E$ ) mit zusätzlichem el. Stromfluss  $I$  der Leitungselektronen, b) Hüllfläche  $A$  um den Körper.

Im Bild 2.3.2-4a liegt ein magnetisierter Körper im Fremdfeld  $B$ . Seine atomaren, im Fremdfeld ausgerichteten Dipole bilden dessen Magnetisierung  $M$ . Atomare „elementare“ Kreisströme  $I_E$  bilden diese Dipole. Zusätzlich ist der Körper stromdurchflossen mit dem Strom  $I$ . Auf  $I$  und  $I_E$  bzw. die zugehörigen Stromdichten  $\vec{J} \Leftrightarrow I, \vec{J}_E \Leftrightarrow I_E$  wirken Lorentz-Kräfte zufolge  $B$ , die zur Gesamtkraft  $F_m$  zu summieren bzw. zu integrieren sind.

$$\vec{F}_m(t) = \int_V \vec{f}_m(\vec{B}, \vec{x}, t) \cdot dV = \int_V (\vec{J}(\vec{x}, t) + \vec{J}_E(\vec{x}, t)) \times \vec{B}(\vec{x}, t) \cdot dV. \quad (2.3.2-26)$$

Wird der Körper mit einer geschlossenen Fläche  $A$ , die im leeren Raum außerhalb des Körpers liegt, umgeben (Bild 2.3.2-4b), so kann die resultierende Kraft  $F_m$  auf den Körper als Flächenintegral über die Maxwell'schen Spannungen  $p_m$  (2.3.2-27) berechnet werden.

$$\vec{F}_m = \oint_{A=\partial V} \vec{p}_m \cdot d\vec{A}, \quad \vec{p}_m = (\vec{e}_n \cdot \vec{B}) \cdot \vec{B} / \mu_0 - (\vec{e}_n \cdot \vec{B}^2) / (2\mu_0) \quad (2.3.2-27)$$

Die Herleitung des Ausdrucks  $p_m$  in (2.3.2-27) ist im Anhang A2.1 für Interessierte angegeben. Der zu (2.3.2-23) entsprechende **Maxwell'sche Spannungstensor** 2. Stufe der magnetischen Kraftverteilung ist wie (2.3.2-23) als diagonalsymmetrische Matrix darstellbar.

$$\vec{T}_m(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} \vec{p}_{m,x} \\ \vec{p}_{m,y} \\ \vec{p}_{m,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{B_x^2 - B_y^2 - B_z^2}{2\mu_0} & \frac{B_x B_y}{\mu_0} & \frac{B_x B_z}{\mu_0} \\ \frac{B_x B_y}{\mu_0} & \frac{B_y^2 - B_x^2 - B_z^2}{2\mu_0} & \frac{B_y B_z}{\mu_0} \\ \frac{B_x B_z}{\mu_0} & \frac{B_y B_z}{\mu_0} & \frac{B_z^2 - B_x^2 - B_y^2}{2\mu_0} \end{pmatrix} \quad (2.3.2-28)$$

Das allgemeine Ergebnis zum *Maxwell*'schen Spannungstensor lautet: Die resultierende Kraft  $F$  auf einen polarisierten bzw. magnetisierten Körper wird berechnet, indem a) aus den resultierenden Feldkomponenten  $(D_x, D_y, D_z)$  bzw.  $(B_x, B_y, B_z)$  an einer geschlossenen Hüllfläche  $A$  um den Körper die  $3^2 = 9$  Komponenten des *Maxwell*'schen Spannungstensors  $T$  („Tensor 2. Stufe“) gebildet werden, b) diese über die GESCHLOSSENE Fläche  $A$  (Bild 2.3.2-4b) (2.3.2-29) integriert werden.

$$\vec{F} = \oint_A \vec{T} \cdot d\vec{A} = \oint_A \vec{p} \cdot dA \tag{2.3.2-29}$$

Allgemein hat nur das Integral der Spannungen über die Hüllfläche  $A$  (2.3.2-29) als resultierende Kraft auf den Körper  $F$  eine physikalische Bedeutung, nicht aber ihre lokale Verteilung  $\vec{p}$  an der Körperoberfläche, wie noch erläutert wird.

Beispiel 2.3.2-5: Der betrachtete Körper ist die linke positiv geladene Kondensatorplatte des Kondensators in Bild 2.3.2-5a mit dem Dielektrikum  $\epsilon$ . Im linken Raum des Plattenäußeren, wo  $\epsilon = \epsilon_0$  ist, ist das Feld  $E \approx 0$  (Näherung!). Daher führt (2.3.2-29) zur Berechnung der Kraft  $F_e$  auf die linke Platte über die geschlossene Fläche  $O$  nur auf das Flächenintegral der rechten (nicht gestrichelten) Teilfläche  $A$ . Die Kraft wirkt nach rechts; positiv und negativ geladene Platten ziehen einander an.

$$\vec{F}_e = \oint_O \vec{T}_e \cdot d\vec{A} \approx \int_A \vec{T}_e \cdot d\vec{A} \Rightarrow \vec{F}_e = \int_A \vec{p}_x \cdot dA = \int_A (\epsilon \cdot E_x^2 / 2) \cdot \vec{e}_x \cdot dA = (\epsilon \cdot E_x^2 / 2) \cdot A \cdot \vec{e}_x$$

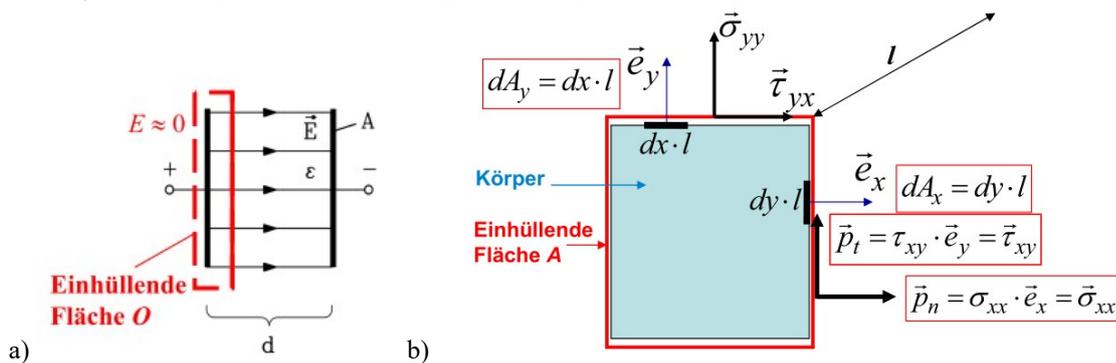


Bild 2.3.2-5: a) Kondensator mit (vereinfachtem) Homogenfeld  $E_x = E$ , b) Polarisierter oder magnetisierter Körper im zweidimensionalen Feld mit den *Maxwell*-Spannungen an der einhüllenden Oberfläche  $A$ .

Die Anwendung des *Maxwell*'schen Spannungstensors  $T$  in zwei Dimensionen  $x, y$  (er hat  $2^2 = 4$  Komponenten  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}, \tau_{yx}$ ) im zweidimensionalen z. B.  $B$ -Feld  $(B_x, B_y)$  folgt aus (2.3.2-28). Drei Komponenten sind unabhängig wegen  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ . Die orthogonalen Einheitsvektoren sind  $|\vec{e}_x| = |\vec{e}_y| = 1$ .

$$\vec{T} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{B_x^2 - B_y^2}{2\mu_0} & \frac{B_x B_y}{\mu_0} \\ \frac{B_y B_x}{\mu_0} & \frac{B_y^2 - B_x^2}{2\mu_0} \end{pmatrix} \tag{2.3.2-30}$$

Aus (2.3.2-30) folgen die *Maxwell*-Spannungen  $p_{m,x}$  und  $p_{m,y}$  an den in  $x$ - und in  $y$ -Richtung orientierten Flächenelementen  $dA_x, dA_y$  und ihren Parallelseiten  $-dA_x, -dA_y$ .

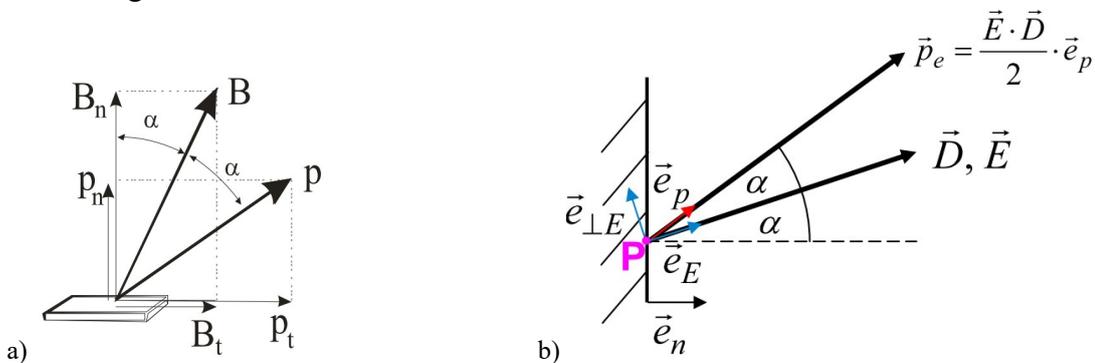
$$\vec{p}_{m,x} = \sigma_{xx} \cdot \vec{e}_x + \tau_{xy} \cdot \vec{e}_y, \vec{p}_{m,y} = \tau_{yx} \cdot \vec{e}_x + \sigma_{yy} \cdot \vec{e}_y \tag{2.3.2-31}$$

Wenn das Feld an einem Flächenelement in eine Normal- und Tangentialkomponente zerlegt wird  $\vec{B} = \vec{B}_n + \vec{B}_t$ , so ist mit (2.3.2-30) die Spannungsnormalkomponente  $\sigma = \frac{B_n^2 - B_t^2}{2\mu_0} = p_n$

und die Tangentialkomponente  $\tau = \frac{B_n B_t}{\mu_0} = p_t$ . Mit dem Vektor  $\vec{B} = \vec{B}_n + \vec{B}_t$  ist der Tangens des Feld-Neigungswinkels zur Flächennormalen  $\tan \alpha = B_t / B_n$  (Bild 2.3.2-6a). Mit  $\vec{p} = \vec{p}_n + \vec{p}_t$  und dem Tangens des Spannungsvektor-Neigungswinkels

$$\frac{p_t}{p_n} = \frac{2B_n B_t}{B_n^2 - B_t^2} = \frac{2}{(B_n / B_t) - (B_t / B_n)} = \frac{2}{\frac{1}{\tan \alpha} - \tan \alpha} = \tan(2\alpha) \quad (2.3.2-32)$$

ist der Spannungs-Neigungswinkel doppelt so groß. Die Krafrichtung der Spannungen  $p$  ist daher nur ähnlich wie die der Feldrichtungen  $D$  bzw.  $B$ , aber nicht identisch, sondern tritt mit dem doppelten Winkel zur Flächennormalen auf (Bild 2.3.2-6a)! Nur bei senkrecht auf  $A$  auftretenden Feldlinien  $\alpha = 0$  ist auch die Richtung von  $p$  senkrecht auf  $A$  und hat damit dieselbe Richtung wie das Feld.



**Bild 2.3.2-6:** a) Zweidimensionale  $B$ -Feldkomponenten und  $p$ -Komponenten an einem Flächenelement. Wenn der  $B$ -Vektor zur Flächennormalen den Winkel  $\alpha$  bildet, so bildet der  $p$ -Vektor den Winkel  $2\alpha$ . b) Wie a), jedoch Darstellung im elektrostatischen Feld  $E$  bzw.  $D$ .

Bild 2.3.2-6b zeigt, dass der Betrag der lokalen *MAXWELL*-Zugspannung (2.3.2-17) bzw. (2.3.2-27) gegeben ist durch

$$|\vec{p}_e| = D \cdot E / 2 = \vec{D} \cdot \vec{E} / 2 \quad \text{bzw.} \quad |\vec{p}_m| = B \cdot H / 2 = \vec{B} \cdot \vec{H} / 2. \quad (2.3.2-33)$$

Beweis:

Ausgehend von (2.3.2-17)  $\vec{p}_e = \epsilon_0 \cdot (\vec{e}_n \cdot \vec{E}) \cdot \vec{E} - \epsilon_0 \cdot (\vec{e}_n \cdot \vec{E}^2) / 2 = (\vec{e}_n \cdot \vec{D}) \cdot \vec{E} - \vec{e}_n \cdot (\vec{D} \cdot \vec{E}) / 2$  im Punkt P folgt mit den Einheitsvektoren  $|\vec{e}_n| = |\vec{e}_p| = |\vec{e}_E| = |\vec{e}_{\perp E}| = 1$  und der Zerlegung des Normalenvektors in zwei Komponenten  $\vec{e}_n = \vec{e}_E \cdot \cos \alpha - \vec{e}_{\perp E} \cdot \sin \alpha$  in Richtung von  $E$  und normal zu  $E$  für die lokale *MAXWELL*-Spannung in P:

$$\vec{p}_e = D \cdot \cos \alpha \cdot E \cdot \vec{e}_E - \frac{D \cdot E}{2} \cdot (\vec{e}_E \cdot \cos \alpha - \vec{e}_{\perp E} \cdot \sin \alpha) = \frac{D \cdot E}{2} \cdot \cos \alpha \cdot \vec{e}_E + \frac{D \cdot E}{2} \cdot \sin \alpha \cdot \vec{e}_{\perp E}.$$

Davon wird der Betrag gebildet:  $\vec{p}_e = |\vec{p}_e| \cdot \vec{e}_p$ , so dass sich (2.3.2-33) ergibt.

$$|\vec{p}_e| = \frac{D \cdot E}{2} \cdot \sqrt{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = \frac{D \cdot E}{2} = \frac{\vec{D} \cdot \vec{E}}{2} \quad (2.3.2-34)$$

Dies wird in gleicher Weise für das magnetische Feld ermittelt:  $|\vec{p}_m| = B \cdot H / 2 = \vec{B} \cdot \vec{H} / 2$ . Das Ergebnis ist identisch mit der lokalen Energiedichte als Energie  $W$  pro Volumen  $V$  im Punkt P im elektrischen bzw. magnetischen Feld (siehe Kap. 2.4.3, 2.4.4).

$$w_e = \frac{dW_e}{dV} = \frac{\vec{D} \cdot \vec{E}}{2} \text{ bzw. } w_m = \frac{dW_m}{dV} = \frac{\vec{B} \cdot \vec{H}}{2} \tag{2.3.2-35}$$

Daher sind die Einheiten der Energiedichte  $J/m^3 = N \cdot m/m^3 = N/m^2$  und der *MAXWELL*-Zugspannung identisch. Der Betrag der *MAXWELL*-Zugspannung ist (nicht zufällig!) ebenso groß wie die elektrische bzw. magnetische Energiedichte  $w_e, w_m$  im betrachteten Raumpunkt P. Die lokale Kraft/Fläche kann auch aus der Energie zum Verschieben des betrachteten polarisierbaren bzw. magnetisierbaren Körpers um eine gegenüber den Körperabmessungen kleine Strecke im Feld berechnet werden. Diese, bei „festgehaltener“ Zeit ausgeführte Verschiebung ist natürlich nur gedacht möglich (deshalb „virtuelle Verschiebung“). In numerischen Feldberechnungsprogrammen (z. B. mit der Methode der Finiten Elemente) wird daher die Kraft auf polarisierbare oder magnetisierbare Körper aus der „Feldlösung“ wahlweise durch Integration der *MAXWELL*-Spannungen über die Körper einhüllende Flächen (2.3.2-29) oder durch die „virtuelle“ Verschiebung des Körpers im Feld berechnet. Wegen (2.3.2-29) haben die lokalen Werte  $p \cdot dA$  für sich i. A. KEINE physikalische Bedeutung, sondern nur ihre Integration, da sie ja mit Verwendung des *Gauss*'schen Integralsatzes entstanden sind, also mit einem mathematischen „Trick“ (siehe Anhang A2.1). Die echten Kraftdichten  $f_e$  bzw.  $f_m$  sind im Körperinneren je nach Feldverteilung und Verteilung  $\epsilon(x, y, z)$  bzw.  $\mu(x, y, z)$  i. A. ungleichmäßig verteilt. Daher hat diese physikalisch wirksame Kraftverteilung  $f_e$  bzw.  $f_m$  i. A. NICHTS mit der zugehörigen lokalen Verteilung der *MAXWELL*-Spannungstensor-Komponenten  $p_e, p_m$  an einer gedachten Hüllfläche  $A$  zu tun.

Beim **Sonderfall** ungeladener Körper  $\rho(x, y, z) = 0$  bzw. stromloser Körper  $J_x(x, y, z) = 0, J_y(x, y, z) = 0, J_z(x, y, z) = 0$ , die gleichzeitig homogen isotrop polarisierbar sind, d. h.  $\epsilon(x, y, z) = \epsilon = \text{konst.}$  bzw. homogen isotrop magnetisierbar sind, d. h.  $\mu(x, y, z) = \mu = \text{konst.}$ , ist die lokale Kraftdichte im Körperinneren Null:  $f = 0$ . Die Kraft tritt ausschließlich an der Körperoberfläche auf, wie Bild 2.3.2-7 veranschaulicht, ist aber i. A. NICHT identisch mit den *MAXWELL*-Spannungstensor-Komponenten. Erst wenn diese Körper **ideal polarisierbar bzw. magnetisierbar** sind ( $\epsilon(x, y, z) \rightarrow \infty$  bzw.  $\mu(x, y, z) \rightarrow \infty$ ), tritt die lokale Kraftdichte nicht nur an der Körperoberfläche auf, sondern sie ist auch identisch mit den *MAXWELL*-Spannungstensor-Komponenten:  $d\vec{F}(x, y, z) / dA = \vec{p}(x, y, z)$ .

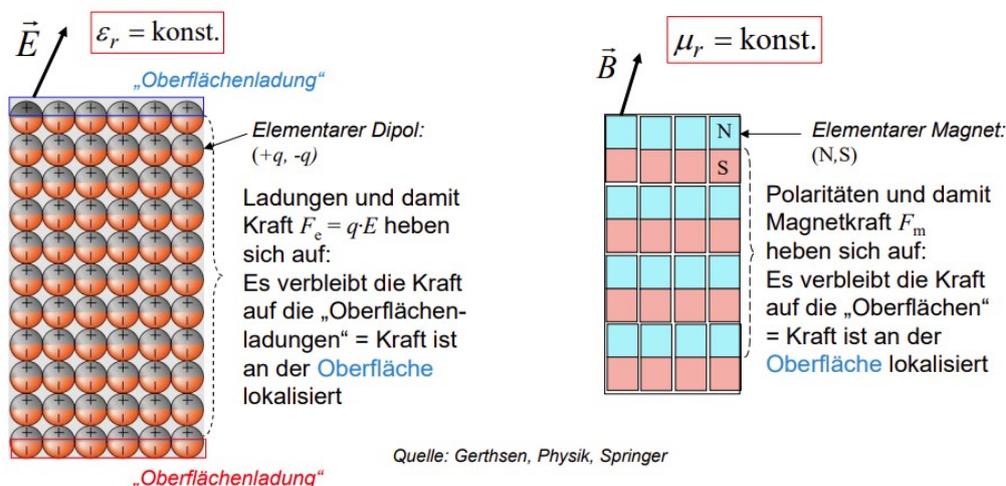


Bild 2.3.2-7: Bei räumlich konstantem  $\epsilon$  (links) bzw.  $\mu$  (rechts) des betrachteten Körpers ist die el. Kraft (links) bzw. die Magnetkraft (rechts) eine Oberflächenkraft.

Beispiel 2.3.2-6: Kraft auf unendlich langen, geraden stromdurchflossenen Kupferleiter im  $B_f$ -Feld (Bild 2.3.2-8)

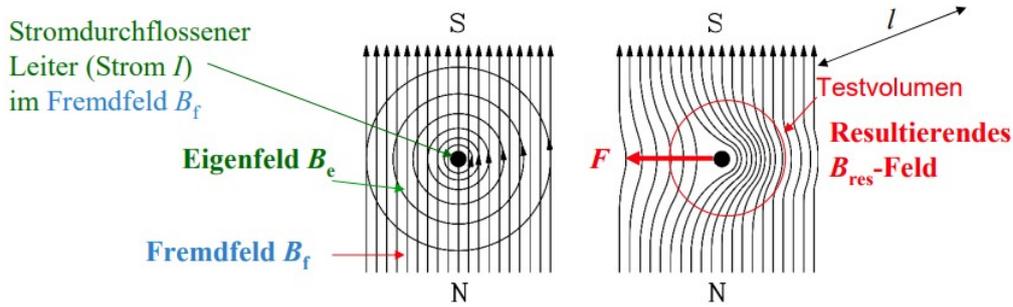


Bild 2.3.2-8: Kraft auf einen unendlich langen geraden stromdurchflossenen Leiter im Homogen-Magnetfeld  $B_f$

Das Fremd-Magnetfeld  $B_f$  ist als homogenes Feld in Bild 2.3.2-8 links, von unten nach oben gerichtet. Der Strom  $I$  fließt im Leiter auf den Betrachter zu und erregt ein kreisförmiges Eigenfeld  $B_e$  nach der Rechtsschraubenregel. Die Überlagerung von  $B_f$  und  $B_e$  ergibt das resultierende Feld  $B_{res}$  (Bild 2.3.2-8 rechts). Der Kupferleiter ist nicht magnetisierbar, daher tritt längs der Leiterlänge  $l$  nur die *LORENTZ*-Kraft auf, die wegen der rechten Winkel zwischen Leiterachse und  $B_f$ -Feldrichtung nach links gerichtet ist:

$\vec{F} = I \cdot (\vec{l} \times \vec{B}_f) \rightarrow F = I \cdot B_f \cdot l$ . Alternativ kann mit (2.3.2-28), (2.3.2-29) die Kraft mit den *MAXWELL*'schen Zugspannungen mit identischem Ergebnis berechnet werden, wobei die einhüllende Fläche  $A$ , als Kurve in Bild 2.3.2-8 rechts sichtbar, beliebig gewählt werden kann, solange sie nur den Leiter auf der Länge  $l$  einhüllt. Anschaulich verhalten sich die Feldlinien wie „elastische Gummischnüre“, die sich verkürzen wollen, so dass die Kraft  $F$  nach links auf den Leiter zustande kommt.

Beispiel 2.3.2-7: Kraft  $F$  auf einen seitlich um  $\Delta$  verschobenen, ideal magnetisierbaren Körper der Länge  $l_{Fe}$ , Breite und Höhe  $b$  (Bild 2.3.2-9a):

Die vertikal orientierte magnetische Flussdichte  $B_0 = B_\eta$  sei eingepreßt durch die zwei Eisen-Polschuhe der Breite  $b$  als magnetischer N- und S-Pol und magnetisiert den um  $\Delta$  seitlich verschobenen Körper. Im Körperinneren gilt  $\mu \rightarrow \infty$ , daher ist dort  $H_{Fe} = 0$ .

Die magnetischen Feldlinien treten folglich normal zur Körperoberfläche aus. Es gibt daher dort keine tangentialen Feldkomponenten, so dass gemäß (2.3.2-31) im kartesischen  $\xi$ - $\eta$ -Koordinatensystem dort die tangentialen *MAXWELL*-Spannungen Null sind:  $\tau_{\eta\xi} = \tau_{\xi\eta} = 0$ .

Die Vertikalkraft  $F_\eta$  auf den Körper wird mit (2.3.2-31) aus den Feld-Normalkomponenten an

der Körperoberfläche berechnet über  $\sigma_{\eta\eta} = \frac{B_\eta^2 - B_\xi^2}{2\mu_0} = \frac{B_\eta^2}{2\mu_0}$  als Oberflächenintegral (2.3.2-

36), wobei die Seitenflächen wegen  $\tau_{\eta\xi} = \tau_{\xi\eta} = 0$  keinen Beitrag liefern.  $F_\eta$  ist wegen der Feldsymmetrie oben und unten Null.

$$\vec{F}_\eta = \oint_A \vec{T} \cdot d\vec{A}_\eta = \left( \int_0^b B_\eta^2(A_{oben}) \cdot d\xi - \int_0^b B_\eta^2(A_{unten}) \cdot d\xi \right) \cdot \frac{l_{Fe}}{2\mu_0} \cdot \vec{e}_\eta = 0 \quad (2.3.2-36)$$

Die Horizontalkraft  $F_\xi$  auf den Körper wird mit (2.3.2-31) ebenfalls aus den Feld-

Normalkomponenten an der Körperoberfläche berechnet über  $\sigma_{\xi\xi} = \frac{B_\xi^2 - B_\eta^2}{2\mu_0} = \frac{B_\xi^2}{2\mu_0}$  als

Oberflächenintegral (2.3.2-37), wobei wieder die Seitenflächen wegen  $\tau_{\eta\xi} = \tau_{\xi\eta} = 0$  keinen Beitrag liefern.  $F_\xi$  ist wegen der größeren Felddichte rechts  $B_\xi(A_{links}) \ll B_\xi(A_{rechts})$  nach

rechts gerichtet. Der „magnetische Widerstand“ (**Reluktanz**) gegen die Ausbreitung des Magnetfelds ist links vom Körper also größer als rechts, wo die Polschuhe den Körper überragen.

$$\vec{F}_\xi = \oint_A \vec{T} \cdot d\vec{A}_\xi = \left( - \int_0^b B_\xi^2(A_{\text{links}}) \cdot d\eta + \int_0^b B_\xi^2(A_{\text{rechts}}) \cdot d\eta \right) \cdot \frac{l_{\text{Fe}}}{2\mu_0} \cdot \vec{e}_\xi = \vec{F} \quad (2.3.2-37)$$

Der nach links zwischen zwei Polschuhen verschobene magnetisierbare (Eisen)-Körper erfährt somit eine resultierende (Reluktanz)-Magnetkraft nach rechts (2.3.2-38).

$$B_\xi(A_{\text{links}}) \ll B_\xi(A_{\text{rechts}}): \vec{F} \approx \int_0^b B_\xi^2(A_{\text{rechts}}) \cdot d\eta \cdot \frac{l_{\text{Fe}}}{2\mu_0} \cdot \vec{e}_\xi \quad (2.3.2-38)$$

Die Feldkomponente  $B_\xi$  bei  $A_{\text{rechts}}$  muss aus einer 2D-Feldberechnung erst ermittelt werden, so dass ein Zahlenwert für  $F$  analytisch nicht unmittelbar angegeben werden kann. Bei  $\Delta = 0$  ist  $B_\xi$  bei  $A_{\text{rechts}}$  und  $A_{\text{links}}$  identisch, so dass dann gemäß (2.3.2-37)  $F_\xi = 0$  ist.

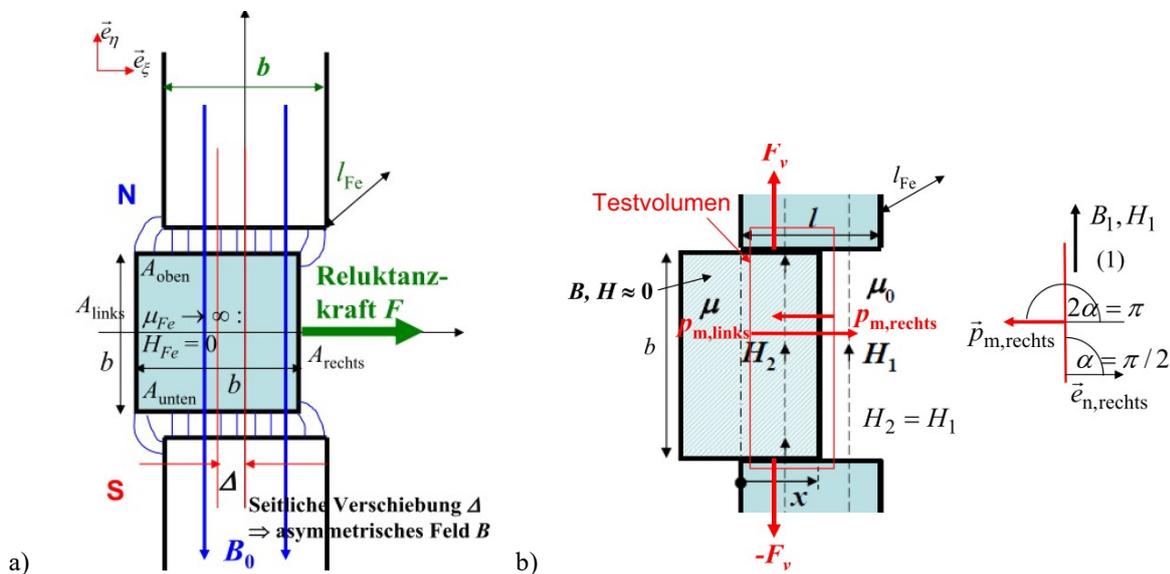


Bild 2.3.2-9: a) Seitliche (Reluktanz)-Magnetkraft  $F$  auf einen um  $\Delta$  nach links verschobenen, ideal magnetisierbaren Körper der Länge und Breite  $b$  und Tiefe  $l_{\text{Fe}}$  im Magnetfeld  $B_0$  zwischen zwei Polschuhen. b) Idealisiertes Feldlinienbild zu a) bei Vernachlässigung des oberen und unteren Luftspalts zwischen Körper und Polschuhen (konstante endliche Permeabilität  $\mu$  des Körpers angenommen).

Eine analytische Berechnung der seitlichen Kraft  $F$  gelingt bei vereinfachter Feldgeometrie (Bild 2.3.2-9b). Der Luftspalt ober- und unterhalb des Körpers zu den Polschuhen wird vernachlässigt. Dadurch ist die magnetische Feldstärke  $H_1$  zwischen den Polschuhen rechts vom Körper durch ein Homogenfeld annähernd beschreibbar und wegen der Stetigkeit der Tangentialkomponente von  $H$  identisch mit  $H_2 = H_1$  im Körperinneren. Der links herausragende Teil des Körpers ist annähernd feldfrei. Die Kraft auf den Körper wird durch Anlegen eines Testvolumens mit der geschlossenen Oberfläche  $A$  berechnet, wobei sich die beiden Vertikalkraftkomponenten  $F_v - F_v = 0$  wegen der Symmetrie analog zu (2.3.2-36) aufheben. Die Vertikalflussdichte rechts im Körperinneren  $B_2 = \mu \cdot H_2$  ist wegen  $\mu > \mu_0$  größer als rechts außerhalb des Körpers  $B_1 = \mu_0 \cdot H_1 = \mu_0 \cdot H_2 < B_2$ . Gemäß (2.3.2-32) und Bild 2.3.2-9b ist an der rechten Seitenfläche des Testvolumens die MAXWELL-Zugspannung, berechnet aus den Tangentialfeldkomponenten  $B_1, H_1$ , wegen deren Feldwinkel  $\alpha = \pi/2$  zu Flächennormalen mit  $2\alpha = \pi$  ins Innere des Testvolumens gerichtet, also gegen den Flächennormalen-Einheitsvektor  $\vec{e}_{n,\text{rechts}}$ .

$$\vec{p}_{m, \text{rechts}} = -\frac{B_1 H_1}{2} \cdot \vec{e}_{n, \text{rechts}} \quad (2.3.2-39)$$

An der linken Testvolumen-Seitenfläche im Körperinneren gilt aus dem gleichen Grund

$$\vec{p}_{m, \text{links}} = -\frac{B_2 H_2}{2} \cdot \vec{e}_{n, \text{links}} = \frac{B_2 H_2}{2} \cdot \vec{e}_{n, \text{rechts}} \quad (2.3.2-40)$$

Aus (2.3.2-29) folgt mit der Seitenfläche  $A_S = b \cdot l_{Fe}$  die nach rechts wirkende Kraft  $F_m$ .

$$\vec{F}_m = \oint_A \vec{p} \cdot dA \rightarrow \vec{F}_m = (\vec{p}_{m, \text{rechts}} + \vec{p}_{m, \text{links}}) \cdot A_S \quad (2.3.2-41)$$

$$\vec{F}_m = \frac{B_2 H_2 - B_1 H_1}{2} \cdot b \cdot l_{Fe} \cdot \vec{e}_{n, \text{rechts}} = \frac{(B_2 - B_1) \cdot H_1}{2} \cdot b \cdot l_{Fe} \cdot \vec{e}_{n, \text{rechts}} \quad (2.3.2-42)$$

$$\vec{F}_m = \frac{(\mu - \mu_0) \cdot H_1^2}{2} \cdot b \cdot l_{Fe} \cdot \vec{e}_{n, \text{rechts}} \quad (2.3.2-43)$$

Bei vorgegebener Feldstärke  $H_1$  und Permeabilität  $\mu$  kann die Magnetkraft näherungsweise mit (2.3.2-43) analytisch berechnet werden.

## 2.4 Energiebegriffe

### 2.4.1 Kinetische Energie der Linear- und Drehbewegung

Die mechanische Energie  $W$  ist eine verrichtete Arbeit einer Kraft  $F$  längs einem Weg  $x$  und ist für den einfachen Fall einer konstanten, in  $x$ -Richtung gerichteten Kraft „Kraft  $\times$  Weg“ gemäß  $W = F \cdot x$ . Wirkt die Kraft längs eines Kreisbogenwegstücks  $x = \gamma \cdot r$  mit dem Bogenwinkel  $\gamma$  und dem Radius  $r$ , so folgt mit dem Drehmoment  $M = F \cdot r$

$$W = F \cdot x = (F \cdot r) \cdot (x / r) = M \cdot \gamma, \quad (2.4.1-1)$$

dass die Arbeit  $W$  auch „Drehmoment  $\times$  Bogenwinkel“ ist. Allgemein gilt

$$W = \int_x F \cdot dx = \int_\gamma M \cdot d\gamma. \quad (2.4.1-2)$$

Die zugehörige mechanische Leistung  $P$  als Energie/Zeit (bzw. Arbeit/Zeit) ist dann „Kraft  $\times$  Geschwindigkeit“ (2.4.1-3) mit der Geschwindigkeit  $v = x / t$ .

$$P = W / t = (F \cdot x) / t = F \cdot v. \quad (2.4.1-3)$$

Allgemein gilt für die Momentanleistung  $p(t)$

$$p = dW / dt = F \cdot dx / dt = F \cdot \dot{x} = F \cdot v. \quad (2.4.1-4)$$

Mit der augenblicklichen Winkelgeschwindigkeit  $\omega_m = d\gamma / dt$  bzw. der konstanten Winkelgeschwindigkeit  $\omega_m = \gamma / t$  folgt mit

$$P = W / t = (F \cdot r) \cdot (x / r) / t = M \cdot \gamma / t = M \cdot \omega_m, \quad (2.4.1-5)$$

dass Leistung als Energie / Zeit auch „Drehmoment  $\times$  Winkelgeschwindigkeit“ ist. Über die an ihm verrichtete Arbeit  $W$  ist im bewegten Körper der Masse  $m$  die gespeicherte mechanische Energie  $W$  die „kinetische“ Energie  $W_k$ , und zwar bei linearer Bewegung (translatorische Bewegung)

$$dW = p \cdot dt = F \cdot v \cdot dt = m \cdot \ddot{x} \cdot \dot{x} \cdot dt = m \cdot d(\dot{x}^2 / 2) \Rightarrow W_k = m \cdot v^2 / 2 \quad (2.4.1-6)$$

und bei Drehbewegung (rotatorische Bewegung) mit (2.1-3)

$$dW = p \cdot dt = M \cdot \omega_m \cdot dt = J \cdot \dot{\omega}_m \cdot \omega_m \cdot dt = J \cdot d(\omega_m^2 / 2) \Rightarrow W_k = J \cdot \omega_m^2 / 2. \quad (2.4.1-7)$$

### 2.4.2 Potentielle Energie

Das Arbeitsvermögen eines Körpers auf Grund seiner Lage in einem Kraftfeld ist seine potentielle Energie  $W_p$  (z. B. im Gravitationskraftfeld). Im homogenen Gravitationskraftfeld

der vereinfacht als Halbraum angenommenen Erde (Erddurchmesser  $\gg$  Körperabmessungen) ist die potentielle „Höhen“-Energie  $W_p$  die aufzuwendende Arbeit für eine Änderung der Höhenlage  $h$  des Körpers mit der Masse  $m$  in Bezug auf die Erdmasse

$$W_p = m \cdot g \cdot h . \tag{2.4.2-1}$$

Die Erdmasse erteilt dem Körper die Erdbeschleunigung  $g$ .

Die aufzuwendende Arbeit für eine Änderung der Form eines (elastisch oder plastisch) verformbaren Körpers ist die potentielle Verformungsenergie  $W_F$ , wie der Dehnungsstab gemäß Bild 2.2.1-1 zeigt. Die Dehnungsarbeit  $W_F$  für die elastische Längung  $x$  des Stabs mit der Federkonstante  $k$  ist

$$W_F = \int_0^x F_F \cdot dx = \int_0^x k \cdot x \cdot dx = k \cdot x^2 / 2 . \tag{2.4.2-2}$$

### 2.4.3 Elektrische Energiedichte $w_e$

Im für elektromechanische Systeme überwiegend relevanten Niederfrequenzbereich sind das elektrische Feld  $E$  bzw.  $D$  und das magnetische Feld  $H$  bzw.  $B$  näherungsweise getrennt betrachtbar. Es werden daher Magnetfelder zufolge  $\partial D/\partial t$  vernachlässigt. Dies gilt exakt nur bei statischen, also zeitinvarianten Feldern, wo  $\partial/\partial t = 0$  ist. Die elektrostatische Energiedichte  $w_e$  ist durch die vorhandene elektrische Ladungsmenge  $Q$  UND durch die polarisierte Materie, beschrieben durch das Vektorfeld der el. Polarisation  $P$ , bestimmt. Dabei ist gemäß (2.1-8)  $D$  aus  $Q$  bestimmt durch  $\oint_{A, \partial A=0} \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q$  und  $E$  aus  $(\vec{D} - \vec{P}(D))/\epsilon_0 = \vec{E}$ . Durch eine

(differenziell kleine) Verschiebung von el. Ladungen im el. Feld wird wegen der wirkenden el.-stat. Kräfte die (differenziell kleine) Arbeit  $dW$  verrichtet, die als el. Energiedichteänderung  $dw_e$  im vom Feld erfüllten Volumen  $V$  (Energiedichte  $w = W/V$ ) gespeichert ist (Bild 2.4.3-1a). Die mit der (differenziell kleinen) Verschiebung der Ladungen verbundene (differenziell kleine) Feldänderung  $dD$  bewirkt die Energiedichteänderung  $dw_e = \vec{E}(D) \cdot d\vec{D}$ , wie man aus der o. g. Arbeit  $dW$  herleiten kann. Wird durch Ladungsmengenerhöhung das Feld von 0 auf  $D$  im Volumen  $V$  erregt, so ist die zugehörige Energiedichte

$$w_e(E, D) = \int_0^D dw_e = \int_0^D \vec{E}(D') \cdot d\vec{D}' \text{ für } 0 \leq D' \leq D . \tag{2.4.3-1}$$

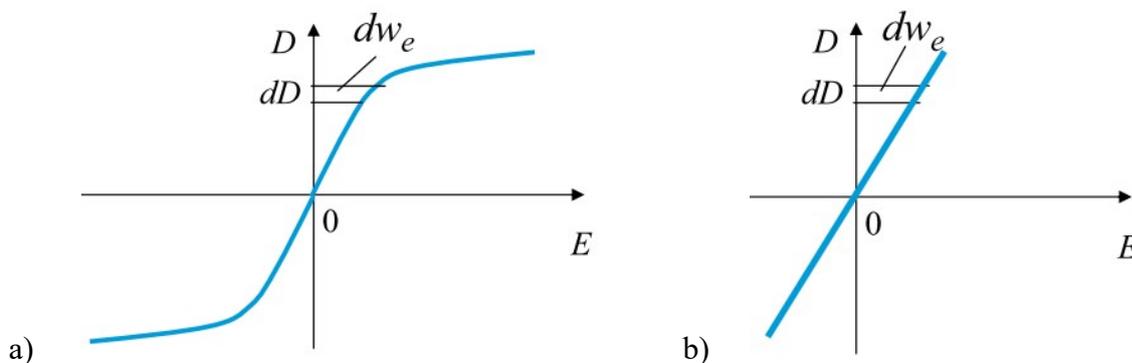


Bild 2.4.3-1: a)  $D(E)$  bei nichtlinear polarisierbarem, isotropen Werkstoff ohne Hysterese, b) wie a), jedoch linear polarisierbar.

Beim Sonderfall isotroper polarisierbarer Werkstoff sind die Feldvektoren parallel  $\vec{D} \uparrow \uparrow \vec{E}$ . (2.4.3-1) vereinfacht sich zu

$$w_e(E, D) = \int_0^D \vec{E}(D') \cdot d\vec{D}' = \int_0^D E(D') \cdot dD' , \quad (2.4.3-2)$$

wobei i. A.  $E(D)$  nichtlinear ist (Bild 2.4.3-1a). Die Fläche zwischen der  $D$ -Achse und der  $E(D)$ -Kurve ist  $w_e$ ! Bei anisotropen Werkstoffen wie z. B. piezoelektrischen Werkstoffen sind die in die drei Raumrichtungen unterschiedlichen Polarisierungen zu berücksichtigen, was wir am Sonderfall anisotroper linearer Werkstoffe zeigen. Wegen der Linearität sind die Permittivitäten feldunabhängig konstant:  $\epsilon_{xx}, \epsilon_{xy}, \text{etc.} = \text{konst.}$

$$\vec{D} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \cdot \vec{E} = \vec{\epsilon} \cdot \vec{E} \quad (2.4.3-3)$$

Mit (2.4.3-3) folgt mit (2.4.3-1) für die el. Energiedichte, wenn nur die Diagonalelemente ungleich Null sind ( $\epsilon_{xy} = \epsilon_{yx} = \epsilon_{xz} = \epsilon_{zx} = \epsilon_{yz} = \epsilon_{zy} = 0$ )

$$w_e(E, D) = \frac{\vec{D} \cdot \vec{E}}{2} . \quad (2.4.3-4)$$

(2.4.3-4) gilt auch für den Sonderfall des isotropen, linear polarisierbarer Werkstoffs  $\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E}$ , mit  $\epsilon = \text{konst.}$  und  $\vec{D} \uparrow \uparrow \vec{E}$  (Bild 2.4.3-1b).

$$w_e(E, D) = \int_0^D \vec{E}(D') \cdot d\vec{D}' = \frac{1}{\epsilon} \int_0^D D' \cdot dD' = \frac{D^2}{2\epsilon} = \frac{D \cdot E}{2} \quad (2.4.3-5)$$

$$w_e = \frac{\vec{D} \cdot \vec{E}}{2} \Big|_{\text{isotrop}} = \frac{1}{2\epsilon} \cdot |\vec{D}|^2 = \frac{1}{2\epsilon} \cdot D^2 \quad (2.4.3-6)$$

Der gesamte vom el. Feld erfüllte Raum  $V$  ist Ort der dort verteilten Energiedichte  $w_e$ , aus der die el. Energie  $W_e$  durch Integration berechnet wird.

$$W_e = \int_V w_e(E(x, y, z), D(x, y, z)) \cdot dV = \int_V w_e(V) \cdot dV \quad (2.4.3-7)$$

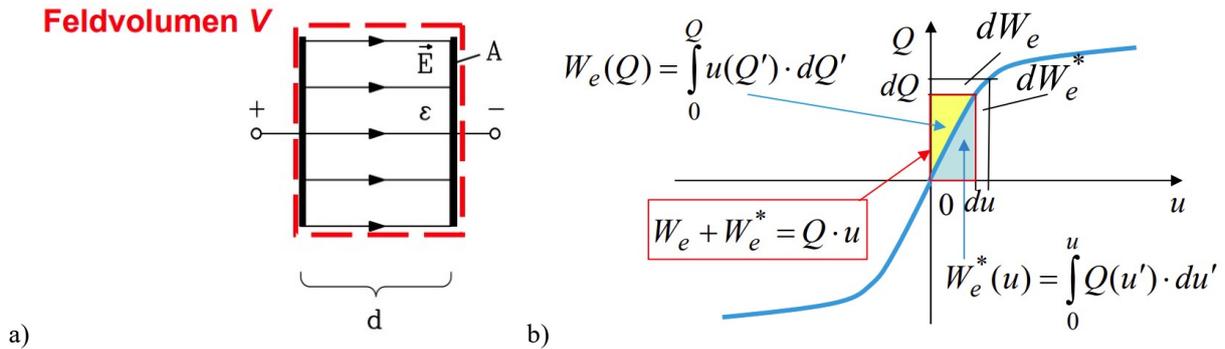
$$W_e = \int_V \int_0^D \vec{E}(D') \cdot d\vec{D}' \cdot dV = \oint_{A|0} \int_0^D \vec{E}(D') \cdot d\vec{D}' \cdot \underbrace{d\vec{A} \cdot d\vec{s}}_{dV} \quad (2.4.3-8)$$

$$W_e = \oint_{A|0} \int_0^D \vec{E}(D') \cdot d\vec{s} \cdot d\vec{D}' \cdot d\vec{A} = \oint_{A|0} \int_0^D u(D') \cdot d\vec{D}' \cdot d\vec{A} = \int_0^Q u \cdot d \left( \oint_A \vec{D}' \cdot d\vec{A} \right) = \int_0^Q u \cdot dQ' \quad (2.4.3-9)$$

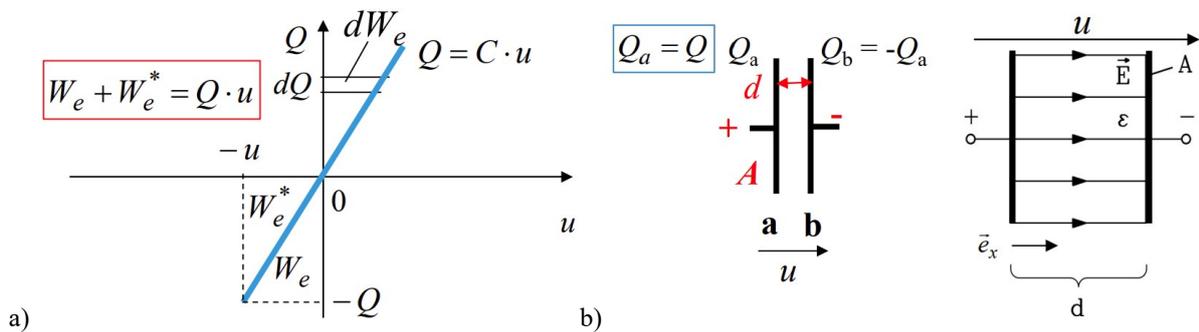
Die Umformung (2.4.3-8), (2.4.3-9) zeigt, dass die el. Energie ebenso als Integral über die el. Spannungsverteilung  $u$  auf Grund der Ladungsmenge  $Q$  berechnet werden kann, so dass die Entsprechung  $\vec{D} \Leftrightarrow Q \quad \vec{E} \Leftrightarrow u$  gilt. Am Beispiel des Plattenkondensators (Bild 2.4.3-2a) mit dem differentiellen Volumen  $dV = d\vec{A} \cdot d\vec{s}$  ist der elektrische Fluss  $\Phi_e$  durch das Integral über die geschlossene Fläche  $A$  um eine der beiden Platten (Elektroden) die Ladung  $Q$  auf dieser Platte, und das Wegintegral über die el. Feldstärke die el. Spannung  $u$  zwischen beiden ungleichnamig el. geladenen Elektrodenplatten.

$$\Phi_e = \oint_{A, \partial A=0} \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q, \quad u = \int_d \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (2.4.3-10)$$

Zwischen den beiden Platten befinde sich ein nichtlinear polarisierbares, isotropes Dielektrikum ohne Hysterese mit der Werkstoffkennlinie Bild 2.4.3-2b. Gemäß (2.4.3-9) ist die Fläche zwischen  $Q$ -Achse und  $u(Q)$ -Kurve ist die el. Feldenergie  $W_e$ . Die Fläche zwischen  $u$ -Achse und  $Q(u)$ -Kurve nennt man **el. Ergänzungsenergie  $W_e^*$**  („el. Ko-Energie“) als eine **Hilfsgröße**, da sie die fehlende Ergänzung auf die Rechteckfläche  $Q \cdot u$  darstellt.



**Bild 2.4.3-2:** a) Plattenkondensator mit Dielektrikum. Vereinfacht ist das Randfeld außerhalb der Elektroden vernachlässigt und zwischen den Elektroden homogen angenommen. b)  $Q(u)$  anstelle von  $D(E)$  (Bild 2.4.3-1a) bei nichtlinear polarisierbarem, isotropen Werkstoff ohne Hysterese.



**Bild 2.4.3-3:** a) Lineares Dielektrikum:  $Q(u)$ -Kennlinie mit Energie und Ko-Energie, b) Plattenkondensator mit Dielektrikum.

**Beispiel 2.4.3-1:**

Linear polarisierbares Dielektrikum  $D = \epsilon \cdot E$  im Kondensator:  $Q = C \cdot u$ .

Die el. Feldenergie  $W_e$  bei der anliegenden Spannung  $u$  ist eine Funktion der durch die el. Spannung angesammelten el. Ladungsmenge  $Q$  je Elektrode.

$$W_e(Q) = \int_0^Q u(Q') \cdot dQ' = \int_0^Q \frac{Q'}{C} \cdot dQ' = \frac{Q^2}{2C} \tag{2.4.3-11}$$

Die el. Ko-Energie bei der Kondensatorladung  $Q$  ist eine Funktion der durch die Ladungsdifferenz  $+Q, -Q$  zwischen den Elektroden auftretenden el. Spannung  $u$ .

$$W_e^*(u) = \int_0^u Q(u') \cdot du' = \int_0^u C \cdot u' \cdot du' = \frac{C \cdot u^2}{2} \tag{2.4.3-12}$$

Die Diagonale in Bild 2.4.3-3a durch 0 und den Arbeitspunkt  $(Q, u)$  halbiert das Rechteck mit der Fläche  $Q \cdot u$  in zwei gleich große Dreiecksflächen  $W_e$  und  $W_e^*$ . Beträgsmäßig sind im linear polarisierbaren Werkstoff el. Energie und el. Ko-Energie gleich groß, aber die el. Energie hängt von  $Q$  und die el. Ko-Energie von  $u$  ab.

$$W_e(Q) = \frac{Q^2}{2C} = \frac{(C \cdot u)^2}{2C} = \frac{C \cdot u^2}{2} = W_e^*(u), \quad W_e(Q) + W_e^*(u) = Q \cdot u \tag{2.4.3-13}$$

Die el. Feldenergie  $W_e$  ist im felderfüllten Raum (Bild 2.4.3-2a) lokalisiert, der mit der Energiedichte  $w_e$  „erfüllt“ ist! Die beiden Elektroden **a** und **b** (Bild 2.4.3-3b) stehen unter der mechanischen Spannung der sich gegenseitig anziehenden elektrischen Ladungsmengen  $Q_a$  und  $Q_b = -Q_a$ , die aufeinander die *Coulomb*-Kraft  $F_e$  ausüben. Im historisch älteren „Fernwirkungsmodell“ wirkt diese Kraft über die Distanz  $d$  aus der Ferne ohne jede Zeitverzögerung, so dass jede Ladungsänderung sofort als Kraftänderung wirksam wird. Dies

ist aber falsch, da sich jede Energieänderung maximal mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichts bemerkbar macht. Über den  $E$ -Feldbegriff wirkt diese Kraft wie durch eine durch „Gummischnüre“ ziehende Kraftwirkung des elektrischen Felds  $E$  zwischen den Elektroden als „Maxwell“scher Zug  $p_e$  (Bild 2.3.2-6b) aus der Nähe des überall vorhandenen Felds („Nahwirkungsmodell“). Dieses historisch jüngere Modell nimmt darauf Rücksicht, dass sich bei einer Ladungsänderung die zugehörige Feldänderung wellenartig mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet und ist somit physikalisch korrekt. Im stationären Fall nach Abschluss aller Änderungsvorgänge gilt für den Kondensator in Bild 2.4.3-3b:

$$W_e = \int_V w_e \cdot dV \approx \int_0^d \int_0^A w_e \cdot dx \cdot dA \quad (2.4.3-14)$$

Mit der Näherung  $w_e = \varepsilon \cdot E^2/2 = \text{konst.}$  folgt aus (2.4.3-14)  $W_e = \frac{\varepsilon \cdot E^2}{2} \cdot A \cdot d$ . Die elektrische Energie  $W_e$  ist auch beim realen Kondensatorfeld (inklusive kleinem Randfeld) nahezu zur Gänze im Volumen  $A \cdot d$  gespeichert. Mit der Kapazität  $C = \varepsilon \cdot A/d$  und der el.

Spannung  $u = \int_0^d \vec{E} \cdot d\vec{x} \cong E \cdot d$  folgt aus (2.4.3-14) in Übereinstimmung mit (2.4.3-13)

$$W_e = \frac{\varepsilon \cdot E^2}{2} \cdot A \cdot d = \frac{D^2}{2 \cdot \varepsilon} \cdot A \cdot d = \frac{(D \cdot A)^2}{2 \cdot \varepsilon \cdot A/d} = \frac{Q^2}{2C} = C \cdot \frac{u^2}{2} = \frac{\varepsilon \cdot A \cdot (E \cdot d)^2}{2 \cdot d} = W_e^* \quad (2.4.3-15)$$

Die Berechnung der elektrischen Kraft  $F_e$  kann alternativ zum *Coulomb*-Kraftgesetz bzw. der Methode über die *Maxwell*'schen Spannungen auch über die „Energiebilanz“ mit dem **Prinzip der „virtuellen“ Verschiebung** ermittelt werden. Im Bild 2.4.3-4 hängt die el. Energie  $W_e$  bei zueinander verschiebbaren Platten von den zwei Variablen  $x$  und  $Q$  ab, die el. Ko-Energie  $W_e^*$  von den zwei Variablen  $x$  und  $u$ . Ist der Kondensator in ein größeres Gesamtsystem eingebettet, treten weitere Variable als physikalische Größen im System auf, die sich ggf. ebenfalls ändern können. Bei einer „virtuellen“ (gedachten), durchaus endlich großen Verschiebung  $\delta s$  (hier vereinfacht differentiell klein angenommen  $\delta s = \delta x = dx$ ) der rechten Elektrode gegenüber der linken von der alten Koordinate  $x_1 = d$  auf die neue Koordinate  $x_2 = d + \delta s$  (Bild 2.3.4-4) ändert sich nur diese. Alle anderen Systemvariablen werden konstant gehalten. Die dabei verrichtete „el. Arbeit“  $dW_{el}$  (2.4.3-16) ist gesamte Energieänderung am Kondensator  $C(x)$ , die von der speisenden el. Spannungsquelle verrichtet wird. Diese el. Spannung  $u$  ist wegen der „virtuellen“ Abstandsänderung  $\delta s$  konstant zu halten. Dies entspricht einer idealen Spannungsquelle, die  $u = \text{konst.}$  eingepreist.

$$p_{el}(t) = u(t) \cdot i(t), \quad i(t) = dQ/dt, \quad dW_{el} = p_{el} \cdot dt = u \cdot i \cdot dt = u \cdot dQ \quad (2.4.3-16)$$

Bei einer Änderung des Plattenabstands ändert sich bei anliegender konstanter Spannung  $u$  wegen der  $C$ -Änderung auch die el. Ladung  $Q$  von  $Q_1$  auf  $Q_2 = Q_1 + dQ$ . Mit (2.4.3-13)

$$W_e(Q) + W_e^*(u) = Q \cdot u \text{ folgt aus (2.4.3-16) (mit } W_{e,2} = W_{e,1} + dW_e, W_{e,2}^* = W_{e,1}^* + dW_e^*)$$

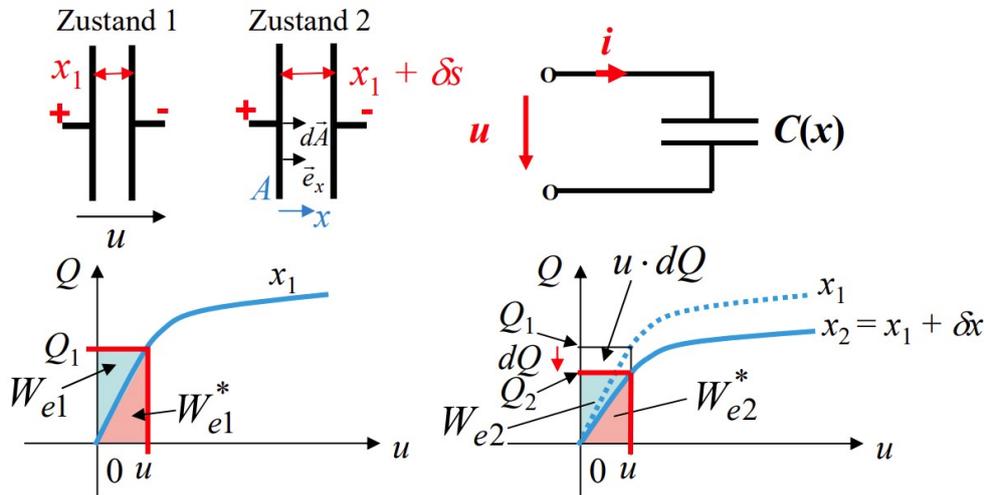
$$dW_{el} = u \cdot dQ = u \cdot Q_2 - u \cdot Q_1 = (W_{e,2} + W_{e,2}^*) - (W_{e,1} + W_{e,1}^*) \quad (2.4.3-17)$$

$$u \cdot dQ = (W_{e,2} - W_{e,1}) + (W_{e,2}^* - W_{e,1}^*) = dW_e + dW_e^* \quad (2.4.3-18)$$

In Bild 2.4.3-4 nimmt der Plattenabstand zu, dadurch sinkt die Kapazität  $C$  und die el. Ladung  $Q$  je Platte nimmt wegen  $u = \text{konst.}$  ab. Wegen der  $Q$ -Abnahme nimmt das  $D$ -Feld ab, folglich auch das  $E$ -Feld, und daher sinkt proportional  $D \cdot E$  etwa quadratisch die im Feld gespeicherte el. Energiedichte  $w_e$ . Die Feldvolumenzunahme  $\Delta V \sim x$  ist nur linear, so dass die el. Feldenergie  $W_e \sim w_e \cdot \Delta V$  und  $W_e^*$  abnehmen:  $W_{e,2} < W_{e,1}$ ,  $W_{e,2}^* < W_{e,1}^*$ . Wohin fließt diese Energiedifferenz? Da im Gesamtsystem „Spannungsquelle + Kondensator“ die Energie konstant ist, nimmt die Spannungsquelle el. Energie  $dW_{el}$  auf, so dass  $dW_{el} < 0$  im VZS gilt!

Bei endlich großer virtueller Verschiebung  $\delta s$  folgt für  $u = \text{konst.}$  die Abnahme der Ladungsmenge  $\Delta Q = Q_2 - Q_1 < 0$ .

Damit ist  $\Delta W_{el} = u \cdot \Delta Q = (W_{e,2} - W_{e,1}) + (W_{e,2}^* - W_{e,1}^*) = \Delta W_e + \Delta W_e^* < 0$  und  $W_{e,2} < W_{e,1}$ ,  $W_{e,2}^* < W_{e,1}^*$  bzw. differentiell  $dW_{el} = u \cdot dQ < 0$ ,  $W_{e,2} < W_{e,1}$ ,  $W_{e,2}^* < W_{e,1}^*$ .



**Bild 2.4.3-4:** Kondensator an konstanter el. Spannung  $u$  (Verbraucher-Zählpfeilsystem VZS) mit nichtlinearem Dielektrikum: Änderung der  $Q(u)$ -Kennlinie durch Ladungsabnahme bei Vergrößerung des Kondensator-Plattenabstands bei  $u = \text{konst.}$  mit Verringerung der el. Energie und Ko-Energie von 1 nach 2.

Die gesamte Energieänderung im abgeschlossenen System muss die Änderung der im Feld gespeicherten el. Feldenergie  $dW_e$  und die mechanische Arbeit zufolge der längs des Wegs  $x$  wirkenden *Coulomb*-Kraft  $F_e$  umfassen.

$$dW_{el} = u \cdot dQ = dW_e + dW_{mec} = dW_e + F_e \cdot dx \quad (2.4.3-19)$$

Gemäß (2.4.3-11) hängt die el. Feldenergie  $W_e$  im Kondensator von den unabhängigen Variablen  $Q$  und wegen  $C(x)$  auch von  $x$  ab (Bild 2.4.3-4):  $W_e(Q, x)$ . Die Spannung  $u$  stellt sich je nach  $C(x)$  gemäß  $u = Q/C$  ein. Die Änderung der gespeicherten el. Feldenergie  $W_e$  erfolgt somit bei Änderung von  $Q$  und/oder  $x$  gemäß dem vollständigen Differential

$$dW_e(Q, x) = (\partial W_e / \partial Q) \cdot dQ + (\partial W_e / \partial x) \cdot dx \quad (2.4.3-20)$$

Dieses wird mit (2.4.3-19) gemäß

$$dW_e = u \cdot dQ - F_e \cdot dx \quad (2.4.3-21)$$

in den Koeffizienten verglichen. Daraus folgt

$$u = \frac{\partial W_e(Q, x)}{\partial Q}, \quad F_e = -\frac{\partial W_e(Q, x)}{\partial x} \quad (2.4.3-22)$$

Eine el. Feldenergieänderung  $dW_e$  zufolge einer Ladungsänderung  $dQ$  ergibt die dafür erforderliche el. Spannung  $u$ . Eine negative Feldenergieänderung  $-dW_e$  zufolge einer Lageänderung  $dx$  der el. Ladungen ergibt die el. Kraft  $F_e$  zwischen den el. Ladungen.

Die el. Ko-Energie hängt gemäß (2.3.4-12) von den unabhängigen Variablen  $u$  und wegen  $C(x)$  auch von  $x$  ab:  $W_e^*(u, x)$ . Der Wechsel von der unabhängigen Variablen  $Q$  auf die neue unabhängige Variable  $u$  bedeutet einen Wechsel von  $W_e(Q, x)$  zu  $W_e^*(u, x)$  und erfolgt über die **LEGENDRE-Transformation** mit den vollständigen Differentialen

$$dW_e^*(u, x) = (\partial W_e^* / \partial u) \cdot du + (\partial W_e^* / \partial x) \cdot dx \quad (2.4.3-23)$$

$$d(Q \cdot u) = dQ \cdot u + Q \cdot du \quad (2.4.3-24)$$

Aus (2.4.3-18) erhalten wir mit (2.4.3-24) und (2.4.3-21)

$$dW_e^* = d(u \cdot Q) - dW_e = Q \cdot du + u \cdot dQ - dW_e = Q \cdot du + u \cdot dQ - (u \cdot dQ - F_e \cdot dx) , \quad (2.4.3-25)$$

$$dW_e^* = Q \cdot du + F_e \cdot dx , \quad (2.4.3-26)$$

und aus dem Koeffizientenvergleich von (2.4.3-26) mit (2.4.3-23)

$$Q = \frac{\partial W_e^*(u, x)}{\partial u}, \quad F_e = \frac{\partial W_e^*(u, x)}{\partial x} . \quad (2.4.3-27)$$

Eine el. Ko-Energieänderung zufolge einer Spannungsänderung  $du$  ergibt die sich einstellende el. Ladung  $Q$ . Eine Ko-Energieänderung zufolge einer Lageänderung  $dx$  dieser el. Ladungen ergibt die el. Kraft  $F_e$  zwischen den el. Ladungen. Somit wurde die el. Ko-Energie in Abhängigkeit ihrer Variablen  $u$  und  $x$  dargestellt.

In Bild 2.4.3-4 ist die el. Spannung  $u$  über die ideale Spannungsquelle vorgegeben und daher eingepreßt. Auf Grund der Kraftberechnungsmethode mit der virtuellen Verschiebung müssen bei der Kraftberechnung außer  $x$  alle anderen Variablen konstant gehalten werden. Bei Vorgabe von  $u$  ändert sich aber über  $x$  auch  $Q$ , so dass es nicht konstant ist. **Aber bei der Kraftberechnung  $F_e$  über  $W_e^*$  muss  $u$  jedenfalls konstant gehalten werden (2.4.3-27) und nur nach  $x$  abgeleitet werden. Bei der  $F_e$ -Berechnung aus  $W_e$  (2.4.3-22) muss jedenfalls  $Q$  konstant gehalten werden und nur nach  $x$  abgeleitet werden!**

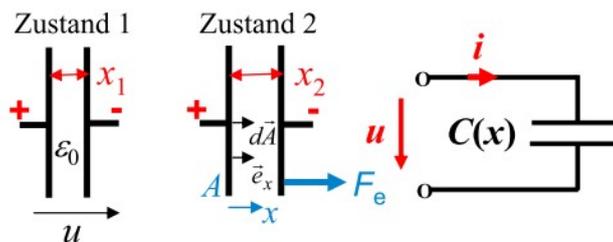


Bild 2.4.3-5: Plattenkondensator ohne Dielektrikum an konstanter el. Spannung  $u$  (Verbraucher-Zählpeilsystem VZS) mit von 1 nach 2 vergrößertem Plattenabstand

Beispiel 2.4.3-2:

Plattenkondensator ohne Dielektrikum  $D = \epsilon_0 \cdot E$  mit veränderlichem Plattenabstand  $x$  und eingepreßter Spannung  $u = U = \text{konst.}$  gemäß  $Q = C(x) \cdot u$  mit der Plattenoberfläche  $A$  (vgl. Bild 2.4.3-5):  $C(x) = \epsilon_0 \cdot A / x$ . Berechnen Sie die el. Kraft  $F_e$  und die Energiebilanz beim Vergrößern des Plattenabstands von  $x_1$  auf  $x_2 > x_1$  bei konstanter anliegender Spannung  $u$  allgemein!

Lösung:

Die Variablen sind  $Q$  und  $x$ . Mit zunehmendem Plattenabstand sinkt die Kapazität  $C$ , so dass bei konstanter Spannung  $u$  die el. Ladung  $Q$  um den Wert  $\Delta Q = Q_2 - Q_1 = Q(x_2) - Q(x_1) < 0$  abnimmt.  $\Delta Q$  fließt über die ideale Spannungsquelle von der positiven zur negativen Platte und gleicht dort diesen Ladungsanteil aus. Die el. Arbeit der Spannungsquelle ist wegen (2.4.3-19)  $dW_{el} = u \cdot dQ$ . Sie wird über das Integral (2.4.3-28) als negativer Wert im VZS berechnet. Die Spannungsquelle nimmt diese Energie  $\Delta W_{el} < 0$  in Form des teilweisen Entladevorgangs des Kondensators auf.

$$\Delta W_{el} = \int_{W_{el,1}}^{W_{el,2}} dW_{el} = \int_{Q(x_1)=Q_1}^{Q(x_2)=Q_2} u \cdot dQ = U \cdot \int_{Q_1}^{Q_2} dQ = U \cdot (Q_2 - Q_1) < 0 . \quad (2.4.3-28)$$

$$\Delta W_{el} = U \cdot (Q_2 - Q_1) = U^2 \cdot (C(x_2) - C(x_1)) = U^2 \cdot \epsilon_0 \cdot A \cdot \left( \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \right) < 0 . \quad (2.4.3-29)$$

Wie bei Bild 2.3.4-4 erläutert, nimmt die im  $E$ -Feld gespeicherte el. Energie ab:  $\Delta W_e < 0$ , wie (2.4.3-30) nachweist.

$$\Delta W_e = \int_{W_e(x_1)}^{W_e(x_2)} dW_e = W_e(x_2) - W_e(x_1) = \frac{Q_2^2}{2C(x_2)} - \frac{Q_1^2}{2C(x_1)},$$

$$\Delta W_e = \frac{U^2}{2} \cdot (C(x_2) - C(x_1)) = \frac{\epsilon_0 A \cdot U^2}{2} \cdot \left( \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \right) < 0. \quad (2.4.3-30)$$

Zur Kraftberechnung wird (2.4.3-27) mit der Ko-Energie  $W_e^* = C(x) \cdot U^2 / 2$  verwendet.

$$F_e(x) = \frac{dW_e^*}{dx} = \frac{d}{dx} \frac{C(x) \cdot U^2}{2} = C'(x) \cdot \frac{U^2}{2} = \frac{\epsilon_0 \cdot A \cdot U^2}{2} \cdot \frac{d(1/x)}{dx} = -\frac{\epsilon_0 \cdot A \cdot U^2}{2x^2} < 0 \quad (2.4.3-31)$$

Alternativ wird zur Kraftberechnung (2.4.3-22) mit der Energie  $W_e = Q^2 / (2 \cdot C(x))$  verwendet. Ungeachtet dessen, dass sich  $Q(x)$  bei  $u = U = \text{konst.}$  ändert, muss bei der  $F_e$ -Berechnung mit (2.4.3-22)  $Q$  konstant bleiben, womit wieder (2.4.3-31) erhalten wird.

$$F_e(x) = -\frac{dW_e}{dx} = -\frac{d}{dx} \frac{Q^2}{2C(x)} = \frac{Q^2 C'(x)}{2C^2(x)} = \frac{U^2}{2} \cdot C'(x) = -\frac{\epsilon_0 \cdot A \cdot U^2}{2x^2} < 0$$

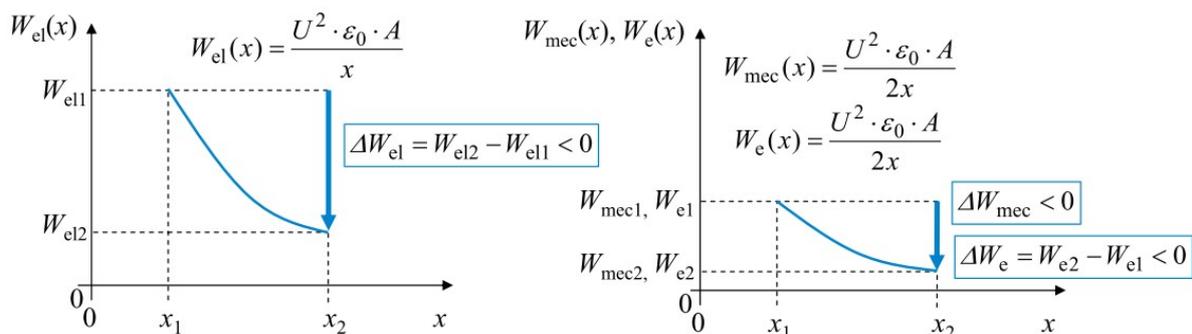
Die in positiver  $x$ -Richtung positiv gezählte Kraft  $F_e$  (Bild 2.4.3-5) auf die rechte Platte wirkt wegen  $F_e < 0$  folglich nach links. Die rechte Platte wird von der linken Platte angezogen. Gegen diese Anziehungskraft muss an der rechten Platte nach rechts gezogen werden, um den Plattenabstand zu vergrößern. Der Plattenabstand nimmt von  $x_1$  nach  $x_2$  zu, indem gegen die anziehende el. Kraft  $F_e$  von außen an dem System mech. Arbeit  $\Delta W_{\text{mec}}$  verrichtet wird. Daher ergibt sich im VZS aus negativer Kraft in positiver  $x$ -Richtung eine negative mech. Arbeit  $\Delta W_{\text{mec}} < 0$ , die von außen in das System eingebracht werden muss (Bild 2.4.3-6).

$$\Delta W_{\text{mec}} = \int_{x_1}^{x_2} F_e(x) \cdot dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dW_e^*}{dx} \cdot dx = \int_{W_{e1}^*}^{W_{e2}^*} dW_e^* = W_{e2}^* - W_{e1}^* = \frac{\epsilon_0 \cdot A \cdot U^2}{2} \cdot \left( \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \right) < 0 \quad (2.4.3-32)$$

Diese Arbeit  $\Delta W_{\text{mec}} < 0$  und die Abnahme der el. Feldenergie  $\Delta W_e < 0$  werden beide von der speisenden Spannungsquelle aufgenommen (Summe  $\Delta W_{\text{mec}} + \Delta W_e$ ) als el. Energie  $\Delta W_{\text{el}}$ , die im VZS ebenfalls negativ ist:  $\Delta W_{\text{el}} < 0$  (2.4.3-29)! Zur Rechnungskontrolle muss (2.4.3-33)  $\Delta W_{\text{el}} = \Delta W_{\text{mec}} + \Delta W_e < 0$  gelten. Der Kondensator arbeitet als **el. Generator**.

$$\Delta W_e + \Delta W_{\text{mec}} = \frac{\epsilon_0 A \cdot U^2}{2} \cdot \left[ \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \right] = \epsilon_0 A \cdot U^2 \cdot \left[ \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \right] = \Delta W_{\text{el}} < 0 \quad (2.4.3-33)$$

Die mechanische Arbeit  $\Delta W_{\text{mec}}$  und die Feldenergieänderung  $\Delta W_e$  sind gleich groß.



**Bild 2.4.3-6:** El. Arbeit  $\Delta W_{\text{el}}$  an der Spannungsquelle (links) und mech. Arbeit  $\Delta W_{\text{mec}}$  sowie Änderung der gespeicherten el. Feldenergie  $\Delta W_e$  (rechts) beim Plattenkondensator ohne Dielektrikum an konstanter el. Spannung  $u$  (VZS), wenn der Plattenabstand in Bild 2.4.3-5 von 1 nach 2 vergrößert wird.

Anmerkung:

Bei irrtümlicher Anwendung von (2.4.3-22) über  $W_e = Q^2 / (2C(x))$  mit  $Q(x) \neq \text{konst.}$  erhalten wir für  $F_e$  zwar denselben Betrag wie (2.4.3-31), aber mit falschem Vorzeichen. Die Platten stoßen sich gegen die physikalische Realität trotz ungleichnamiger Plattenladungen ab. Häufig wird diese Feinheit übersehen, weil man sich nicht um die korrekte Zählpfeilrichtung kümmert. Der Betrag stimmt ja, und dass sich die Platten abstoßen, „weiß man ja“, aber das Rechenergebnis ist falsch!

$$F_e(x) = -\frac{dW_e}{dx} = -\frac{d}{dx} \frac{Q(x)^2}{2C(x)} = -\frac{d}{dx} \frac{C^2(x) \cdot U^2}{2C(x)} = -C'(x) \cdot \frac{U^2}{2} = \frac{\epsilon_0 \cdot A \cdot U^2}{2x^2} > 0 \quad \text{Falsch!}$$

Beispiel 2.4.3-3:

Wie Bsp. 2.4.3-2, aber der Plattenabstand wird von  $x_1 > x_2$  auf  $x_2$  verkleinert (Bild 2.4.3-7). Dadurch nimmt die Plattenladung um  $\Delta Q = Q_2 - Q_1 > 0$  zu (in Bild 2.4.3-7 als Rechteckfläche  $dQ$  bei  $U = \text{konst.}$  sichtbar), denn wegen  $C(x) = \epsilon_0 \cdot A / x$  ist  $C(x_2) > C(x_1)$  und daher ist wegen  $u = U = \text{konst.}$   $Q_2 = U \cdot C(x_2) > Q_1 = U \cdot C(x_1)$ . Der Plattenabstand nimmt von  $x_1$  nach  $x_2$  AB, indem das System selbst über die zwischen den Platten anziehende el. Kraft  $F_e$  mech. Arbeit verrichtet  $\Delta W_{\text{mec}}$  (im VZS:  $\Delta W_{\text{mec}} > 0!$ ). Auch die im Feld gespeicherte el. Energie  $W_e$  STEIGT mit  $C$  wegen  $u = \text{konst.}$ :  $\Delta W_e > 0$ , wobei wieder  $\Delta W_{\text{mec}} = \Delta W_e$  ist. Die Spannungsquelle gibt die Summe  $\Delta W_{\text{mec}} + \Delta W_e = \Delta W_{\text{el}} > 0$  als el. Arbeit an den Kondensator AB! Der Kondensator arbeitet als el. Motor!

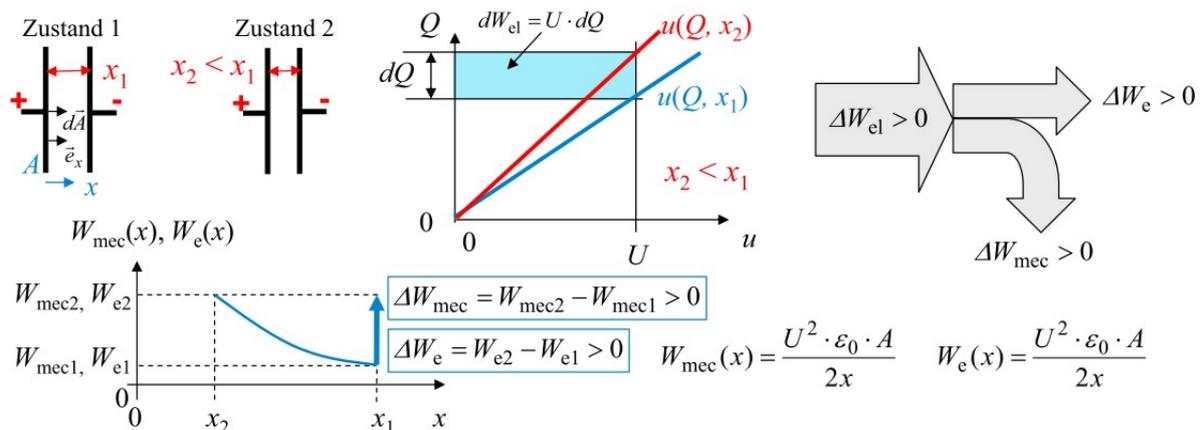


Bild 2.4.3-7: Mech. Arbeit  $\Delta W_{\text{mec}}$  und Änderung der gespeicherten el. Feldenergie  $\Delta W_e$  beim Plattenkondensator ohne Dielektrikum an konstanter el. Spannung  $u$  (VZS), wenn der Plattenabstand von 1 nach 2 verkleinert wird.

Beispiel 2.4.3-4:

Bei einem geladenen, el. linearen Plattenkondensator (Plattenladung  $Q$ , Plattenfläche  $A$ ,  $\epsilon = \text{konst.}$ , vereinfacht homogen angenommenes  $E$ -Feld ohne Randeffekte, Bild 2.4.3-8a) sind die beiden Platten von jeglicher el. Schaltung getrennt, so dass die Plattenladung unabhängig vom Plattenabstand  $x$  konstant ist.

- 1) Welche Kraftformel für die el. Plattenkraft  $F_e$  ist bei  $W_e$  zu verwenden?
- 2) Beschreiben Sie die Kraftformel anschaulich durch die Maxwell-Spannungen und im  $Q(u)$ -Diagramm des Kondensators, wenn der Plattenabstand  $x$  (virtuell) von  $x_1$  auf  $x_2 > x_1$  vergrößert wird!
- 3) Zeigen Sie die „falsche“ Anwendung der Kraftformel (2.4.3-27) anschaulich!

Lösung:

- 1) Mit der  $F_e$ -Berechnung aus  $W_e$  muss (2.4.3-22) verwendet werden:  $F_e = -dW_e(Q, x) / dx$ .

2) Bei Vergrößerung des Plattenabstands um  $\Delta x$  von  $x_1$  auf  $x_2 > x_1$  tritt eine Erhöhung der gespeicherten el. Feldenergie um  $\Delta W_e$  auf. Da die el. Ladung  $Q$  konstant bleibt, müssen das  $D$ -Feld  $D = Q \cdot A$  und wegen  $D = \varepsilon \cdot E$  auch das  $E$ -Feld und mit ihnen die Energiedichte  $w_e = D \cdot E / 2$  konstant bleiben. Daher nimmt die el. Spannung zwischen den beiden Platten

um  $\Delta u$  zu:  $\Delta u = \int_{x_1}^{x_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = E \cdot \Delta x = D \cdot \Delta x / \varepsilon = Q \cdot A \cdot \Delta x / \varepsilon$ . Das Feldvolumen erhöht sich um  $\Delta V = A \cdot \Delta x$ , so dass  $\Delta W_e = A \cdot \Delta x \cdot D \cdot E / 2 > 0$  ist. Die el. Kraft ist daher gemäß (2.4.3-34) negativ (anziehend, gegen die positive  $x$ -Richtung zeigend) und ist die Maxwell'sche Zugspannung  $p_{e,x}$  auf der Plattenfläche  $A$ . Sie ist unabhängig von  $x$  und damit konstant.

$$F_e = -\frac{dW_e(Q, x)}{dx} \Rightarrow F_e = -\frac{\Delta W_e}{\Delta x} = -D \cdot A \cdot E / 2 = -\frac{D \cdot A}{2} \cdot E = -p_{e,x} \cdot A \quad (2.4.3-34)$$

In Bild 2.4.3-8b ist zur Spannungserhöhung von  $u_1$  auf  $u_1 + \Delta u = u_2$  bei  $Q = \text{konst.}$  die Erhöhung  $\Delta W_e$  als Dreiecksfläche  $Q \cdot \Delta u / 2$  sichtbar. Dies folgt auch aus obiger Herleitung wegen  $\Delta W_e = \underbrace{D \cdot A}_Q \cdot \underbrace{E \cdot \Delta x}_{\Delta u} / 2 = Q \cdot \Delta u / 2$ . Somit ist anschaulich aus Bild 2.4.3-8b die Kraftformel  $F_e = -\Delta W_e / \Delta x = -Q \cdot \Delta u / (2 \Delta x) = -D \cdot A \cdot E / 2 = -p_{e,x} \cdot A$  erläutert.

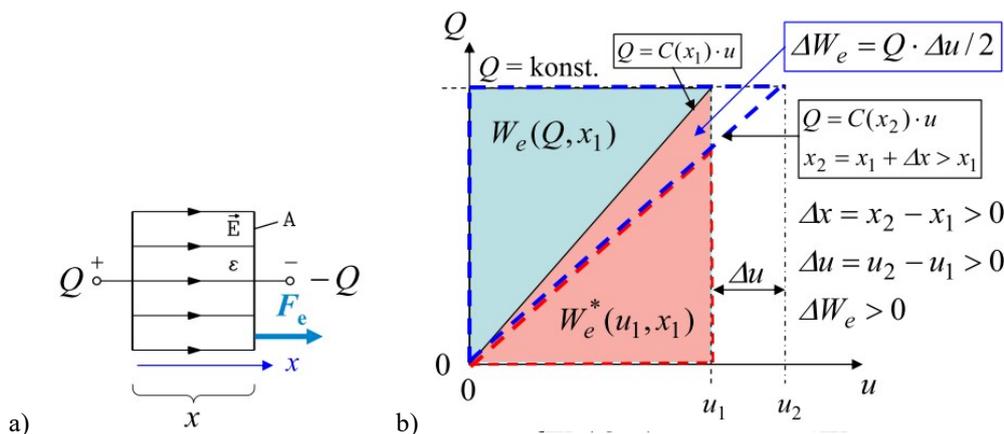


Bild 2.4.3-8: a) Idealisierter geladener Plattenkondensator bei offenen Klemmen ( $Q = \text{konst.}$ ),  
 b) Kraftberechnung aus der positiven Änderung von  $W_e$  bei (virtueller) Vergrößerung des Plattenabstands.

3) Falsche Verwendung der Kraftformel (2.4.3-27):  $F_e = dW_e^*(u, x) / dx \Rightarrow F_e = \Delta W_e^* / \Delta x$ .

$$\Delta W_e^* = \Delta(u^2 \cdot C) / 2, \quad u(x) = E \cdot x, \quad E = \text{konst.}, \quad C(x) = \varepsilon \cdot A / x,$$

$$F_e = \frac{\Delta W_e^*}{\Delta x} = \frac{\Delta(u^2 \cdot C) / 2}{\Delta x} = \frac{\Delta((E \cdot x)^2 \cdot \varepsilon \cdot A / x)}{2 \cdot \Delta x} = \frac{\varepsilon \cdot E^2 \cdot A}{2} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta x} = \frac{D \cdot E}{2} \cdot A = p_{e,x} \cdot A.$$

Es ergibt sich derselbe Betrag der Kraft, aber mit dem falschen Vorzeichen (unphysikalische, abstoßende Kraft). Die zweite unabhängige Variable ist bei der Kraftformel mit  $W_e^*$  die Spannung  $u$ , die bei der Ableitung nach  $x$  KONSTANT gehalten werden muss, was wegen  $\Delta u$  nicht der Fall ist. Richtig wäre mit  $u = \text{konst.}$

$$F_e = \frac{\Delta W_e^*}{\Delta x} = \frac{\Delta(u^2 \cdot C)}{2 \cdot \Delta x} = \frac{u^2 \cdot \Delta C}{2 \cdot \Delta x} = \frac{u^2 \cdot \Delta(\varepsilon \cdot A / x)}{2 \cdot \Delta x} = -\frac{u^2}{x^2} \cdot \frac{\varepsilon \cdot A}{2} = -\frac{\varepsilon E^2 \cdot A}{2} = -\frac{D \cdot E}{2} \cdot A = -p_{e,x} \cdot A$$

Beispiel 2.4.3-5:

Wie Bsp. 2.4.3-4, jedoch ist der Plattenkondensator an eine ideale Spannungsquelle  $u = \text{konst.}$  angeschlossen (Bild 2.4.3-9a), so dass die Plattenladung  $Q$  zu- und abfließen kann. Beschreiben Sie die zu verwendende Kraftformel anschaulich durch die Maxwell-Spannungen

und im  $Q(u)$ -Diagramm des Kondensators, wenn der Plattenabstand  $x$  (virtuell) von  $x_1$  auf  $x_2 > x_1$  vergrößert wird!

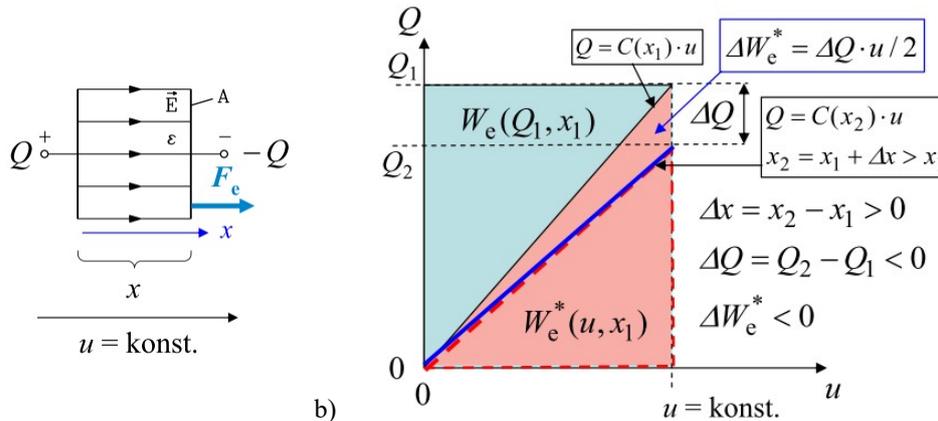
Lösung:

Kraftformel (2.4.3-27) führt auf eine negative Kraft  $F_e = dW_e^*(u, x)/dx \Rightarrow F_e = \Delta W_e^*/\Delta x < 0$ . Denn bei Vergrößerung des Plattenabstands um  $\Delta x$  von  $x_1$  auf  $x_2 > x_1$  tritt eine Abnahme der gespeicherten el. Feldenergie  $\Delta W_e$  auf. Da die el. Spannung  $u$  konstant bleibt, muss das  $E$ -Feld abnehmen:  $E = u/x$ , so dass wegen  $D = \epsilon \cdot E$  auch das  $D$ -Feld  $D = Q \cdot A$  sinkt und damit die el. Ladung um  $\Delta Q < 0$  abnimmt. In Bild 2.4.3-9b ist bei  $u = \text{konst.}$   $\Delta W_e^*$  bei  $x_2 > x_1$  als Dreiecksfläche sichtbar:  $\Delta W_e^* = \Delta Q \cdot u/2 < 0$ . Damit folgt die Kraft mit  $\Delta Q = u \cdot \Delta C$

$$F_e = \Delta W_e^*/\Delta x = \frac{\Delta Q}{2} \cdot \frac{u}{\Delta x} = \frac{u \cdot \Delta C}{2 \Delta x} \cdot u = \frac{u^2 \cdot \epsilon \cdot A \cdot \Delta(1/x)}{2 \Delta x} = -\frac{(u/x)^2 \cdot \epsilon \cdot A \cdot \Delta x}{2 \Delta x}$$

$$F_e = -\frac{(u/x)^2 \cdot \epsilon \cdot A}{2} = -\frac{E^2 \cdot \epsilon \cdot A}{2} = -\frac{D \cdot E}{2} \cdot A = -p_{e,x} \cdot A \tag{2.4.3-35}$$

negativ (anziehend, gegen die positive  $x$ -Richtung zeigend) als *Maxwell'sche* Zugspannung  $p_{e,x}$  auf der Plattenfläche  $A$ . Sie nimmt mit  $1/x^2$  ab und ist daher NICHT konstant.



a) b) Bild 2.4.3-9: a) Idealisierter Plattenkondensator an konstanter Spannung  $u = \text{konst.}$ , b) Kraftberechnung aus der negativen Änderung von  $W_e^*$  bei (virtueller) Vergrößerung des Plattenabstands.

Beispiel 2.4.3-6:

Die beiden el. geladenen Plattenelektroden eines Kondensators mit  $\epsilon = \text{konst.}$  sind von der Spannungsquelle getrennt, so dass  $Q = \text{konst.}$  ist (Bild 2.4.3-8a). Der variable Plattenabstand  $x$  wird von  $x_1$  auf  $x_2 > x_1$  vergrößert.

- 1) Wie groß ist die *Coulomb-Kraft*  $F_e$  beim Plattenabstand  $x$ , berechnet aus  $W_e$ ? Zeigen Sie, dass die falsche Formel  $W_e = C(x) \cdot u^2 / 2$  zu einer falschen Kraft führt.
- 2) Berechnen Sie alternativ die Kraft  $F_e$  über  $W_e^*$ ! Erstellen Sie die Energiebilanz für den Vorgang  $x_1 \rightarrow x_2$ ! Diskutieren Sie dies anschaulich im  $Q(u)$ -Diagramm!

Lösung:

1) Kapazität  $C(x) = \epsilon \cdot A/x$ , el. Feldenergie  $W_e(Q, x) = Q^2/(2C(x))$ , die el. Kraft ist konstant:

$$F_e = -\left. \frac{\partial W_e(Q, x)}{\partial x} \right|_{Q=\text{konst.}} = -\frac{Q^2}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{C(x)} = -\frac{Q^2}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{\epsilon \cdot A} = -\frac{Q^2}{2} \cdot \frac{1}{\epsilon \cdot A} < 0 \tag{2.4.3-36}$$

Die Kraft  $F_e$  ist gegen die positive  $x$ -Zählrichtung gerichtet, wirkt also Platten-anziehend!

Die falsche Formel  $W_e = C(x) \cdot u^2 / 2$  ergibt eine falsche, Platten-abstoßende Kraft.

$$F_e = -\partial(C(x) \cdot u^2 / 2) / \partial x = -C'(x) \cdot u^2 / 2 = \varepsilon \cdot A \cdot (u/x)^2 / 2 = \frac{Q^2}{2} \cdot \frac{1}{\varepsilon \cdot A} > 0$$

2) Rechnung mit „virtueller Verschiebung“  $x$  aus  $W_e^*(u, x) = C(x) \cdot u^2 / 2$ , wobei  $u \sim x$ :

$$F_e = \left. \frac{\partial W_e^*(u, x)}{\partial x} \right|_{u=\text{konstant gehalten}} = \frac{u^2}{2} \cdot \frac{\partial C(x)}{\partial x} = \frac{u^2}{2} \cdot \frac{\partial \varepsilon \cdot A}{\partial x} = -\frac{u^2}{2} \cdot \frac{\varepsilon \cdot A}{x^2} \quad (2.4.3-37)$$

Beide Rechnungen 1), 2) führen zur gleichen konstanten Kraft  $F_e$ , denn beim Plattenabstand  $x$  ist die Ladung  $Q$  mit der Spannung  $u$  gemäß  $Q(x) = C(x) \cdot u(x)$  verknüpft, so dass  $u \sim x$ .

$$F_e = -\frac{u^2}{2} \cdot \frac{\varepsilon \cdot A}{x^2} = -\frac{(Q/C(x))^2}{2} \cdot \frac{\varepsilon \cdot A}{x^2} = -\frac{Q^2}{2} \cdot \frac{x^2}{(\varepsilon \cdot A)^2} \cdot \frac{\varepsilon \cdot A}{x^2} = -\frac{Q^2}{2} \cdot \frac{1}{\varepsilon \cdot A} < 0 \quad (2.4.3-38)$$

Gemäß Bild 2.4.3-10 erhöht sich die Feldenergie  $W_e$  bei  $Q = \text{konst.}$  wegen des vergrößerten Feldvolumens bei konstantem Feld  $E$  und  $D$  und damit konstanter Energiedichte  $w_e$  von  $W_e = w_e \cdot (A \cdot x_1)$  auf  $W_e + \Delta W_e = w_e \cdot A \cdot (x_1 + \Delta x) = w_e \cdot A \cdot x_2$ . Bei der Energiebilanz für diesen Vorgang  $x_1 \rightarrow x_2$  ist wegen  $Q = \text{konst.}$  bzw.  $dQ = 0$  die el. Arbeit Null:

$$dW_{el} = u \cdot dQ = dW_e + F_e \cdot dx = 0. \quad (2.4.3-39)$$

Daher ist die von außen verrichtete mech. Arbeit zur Abstandsvergrößerung gegen die anziehende Kraft  $F_e$  in der vergrößerten Feldenergie  $W_e + \Delta W_e$  gespeichert (Bild 2.4.3-11).

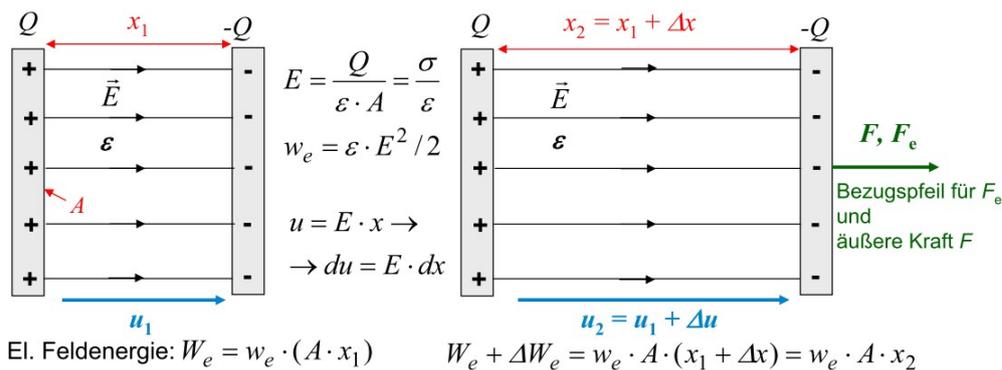


Bild 2.4.3-10: El. Feldenergie im idealisierten Plattenkondensator bei konstanter el. Ladung  $Q = \text{konst.}$

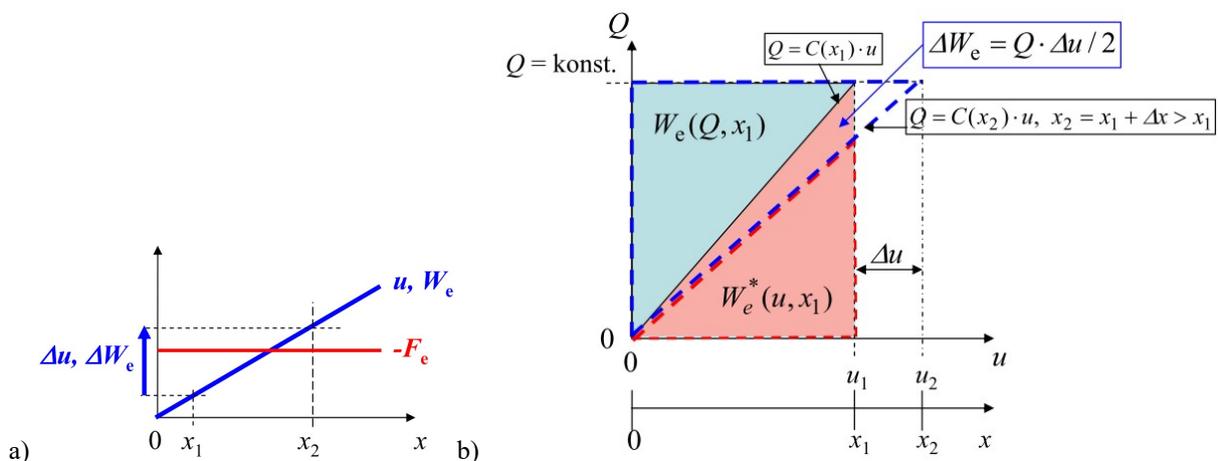


Bild 2.4.3-11: a) Zuwachs an el. Feldenergie  $W_e$  und el. Spannung  $u$  bei Vergrößerung des Plattenabstands  $x$  mit den Plattenladungen  $Q, -Q$  ( $Q = \text{konst.}$ ). Die Kraft ist konstant. b) Zuwachs der el. Feldenergie  $W_e$  als Fläche und der el. Spannung  $u$  als Strecke bei Vergrößerung des Plattenabstands im  $Q(u)$ -Diagramm.

$$dW_e = -F_e \cdot dx \Rightarrow \Delta W_e = \int_{W_e(x_1)}^{W_e(x_2)} dW_e = W_e(x_2) - W_e(x_1) = - \int_{x_1}^{x_2} F_e \cdot dx = -\Delta W_{\text{mec}} \quad (2.4.3-40)$$

Mit  $W_e(x_2) = w_e \cdot A \cdot x_2 = (D \cdot E / 2) \cdot A \cdot x_2 = (D \cdot A)^2 \cdot x_2 / (2\varepsilon \cdot A) = Q^2 \cdot x_2 / (2\varepsilon \cdot A)$  folgt

$$\Delta W_e = \frac{Q^2 \cdot (x_2 - x_1)}{2 \cdot \varepsilon \cdot A} \quad (2.4.3-41)$$

$$\Delta W_{\text{mec}} = \int_{x_1}^{x_2} F_e \cdot dx = - \frac{Q^2}{2 \cdot \varepsilon \cdot A} \cdot \int_{x_1}^{x_2} dx = - \frac{Q^2 \cdot (x_2 - x_1)}{2 \cdot \varepsilon \cdot A} = -\Delta W_e \quad (2.4.3-42)$$

Mit der **äußeren Kraft**  $F$  wurde in Bild 2.4.3-10 die el. geladenen rechte Elektrode von der linken um den Weg  $\Delta x = x_2 - x_1$  wegbewegt gegen die anziehende (bremsende) elektrische Kraft  $F_e < 0$ . Dabei wurde die **mechanische Arbeit**  $\Delta W_{\text{mec}} < 0$  verrichtet, also dem System zugeführt. Daher ist sie gemäß dem VZS negativ! Wegen  $\Delta W_e = -\Delta W_{\text{mec}}$  ist diese mech. Arbeit in Form **erhöhter elektrischer Feldenergie**  $\Delta W_e$  im erhöhten Feldvolumen  $A \cdot (x_2 - x_1)$  des  $E$ -Felds gespeichert (Energieerhaltung im abgeschlossenen System „Kondensator“!). Beim umgekehrten Vorgang des Annäherns der beiden Plattenelektroden von  $x_1 \rightarrow x_2 < x_1$  bewegen sich die Platten durch die anziehende Kraft  $F_e$  von selbst aufeinander zu und verrichten dabei Arbeit  $\Delta W_{\text{mec}} > 0$  auf Kosten der abnehmenden el. Feldenergie  $\Delta W_e = -\Delta W_{\text{mec}} < 0$ ! Der Kondensator wirkt als el. Motor.

Im  $Q(u)$ -Diagramm Bild 2.4.3-11b ist  $W_e(Q, x) = \frac{Q^2}{2C(x)} = \frac{Q^2 \cdot x}{2 \cdot \varepsilon \cdot A} \sim x$  als obere

Dreiecksfläche proportional zu  $x$ . Der Zuwachs bei Vergrößerung des Plattenabstands ist wegen  $Q = \text{konst.}$  die schiefwinklige schmale Dreiecksfläche

$$\Delta W_e(Q, x) = \frac{Q^2 \cdot \Delta x}{2 \cdot \varepsilon \cdot A} = \frac{Q \cdot Q \cdot \Delta x}{2 \cdot \varepsilon \cdot A} = \frac{Q \cdot E \cdot \Delta x}{2} = \frac{Q \cdot \Delta u}{2} \quad (2.4.3-43)$$

Bei  $x$ -Vergrößerung steigt  $W_e$  bei  $Q = \text{konst.}$  gemäß dieser Dreiecksfläche. Die in  $x$ -Richtung bremsende (negative) Kraft  $F_e$  ist proportional zur negativen Zunahme von  $W_e$ :  $F_e = -\partial W_e(Q, x) / \partial x < 0$ , im  $Q(u)$ -Diagramm  $F_e = -\Delta W_e / \Delta x$ , was gemäß (2.4.3-44) mit (2.4.3-36) übereinstimmt.

$$F_e = - \frac{\Delta W_e}{\Delta x} = - \frac{Q \cdot \Delta u}{2 \cdot \Delta x} = - \frac{Q \cdot \Delta(Q/C)}{2 \cdot \Delta x} = - \frac{Q^2 \cdot \Delta(1/C)}{2 \cdot \Delta x} = - \frac{Q^2 \cdot \Delta x}{2 \cdot \varepsilon \cdot A \cdot \Delta x} = - \frac{Q^2}{2 \cdot \varepsilon \cdot A} \quad (2.4.3-44)$$

### 2.4.4 Magnetische Energiedichte $w_m$

Durch elektrischen Gleichstrom  $I$  UND magnetisierte Materie (magnetische Polarisation  $J_M$  mit  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{J}_M(H)$ ) werden statische Magnetfelder  $B$  erregt, die im von ihnen erfüllten Feldraum  $V$  die magnetostatische Feldenergie  $W_m$  speichern. Bei einer Änderung von  $I$  ändert sich  $H$  und damit i. A. auch  $\vec{J}_M(H)$  und  $\vec{B}$ . Die differentiell kleine Änderung der magnetischen Energiedichte  $w_m = dW_m/dV$  ist (ohne Herleitung!)

$$dw_m = \vec{H}(B) \cdot d\vec{B} \quad (2.4.4-1)$$

und führt für bestimmte Werte  $I$  und  $J_M$  über das zugehörige  $B, H$  auf die Energiedichte

$$w_m(H, B) = \int_0^B dw_m = \int_0^B \vec{H}(B') \cdot d\vec{B}' \quad \text{für } 0 \leq B' \leq B \quad (2.4.4-2)$$

Es sind i. A. anisotrope, nichtlineare, hysteretisch magnetisierbare Werkstoffe in Verwendung. Ihre Stoffwerte (Permeabilitäten) haben eine Hysterese, wie z. B. kaltgewalzte

Transformatorbleche mit magnetischer Vorzugsrichtung in Walzrichtung. Für Wechselfeldanwendungen treten daher Hystereseverluste auf, weshalb man sich bemüht, solche Werkstoffe mit möglichst schmaler Hystereseschleife herzustellen, die daher in (2.4.4-3) vernachlässigt ist.

$$\vec{B}(H) = \begin{pmatrix} \mu_{xx}(H) & \mu_{xy}(H) & \mu_{xz}(H) \\ \mu_{yx}(H) & \mu_{yy}(H) & \mu_{yz}(H) \\ \mu_{zx}(H) & \mu_{zy}(H) & \mu_{zz}(H) \end{pmatrix} \cdot \vec{H} = \vec{\mu}(H) \cdot \vec{H} \quad (2.4.4-3)$$

Für den Sonderfall linear magnetisierbarer Werkstoffe gilt

$$\vec{B}(H) = \begin{pmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{pmatrix} \cdot \vec{H} = \vec{\mu} \cdot \vec{H} . \quad (2.4.4-4)$$

Im speziellen Fall  $\mu_{yx} = \mu_{xy} = \mu_{yz} = \mu_{zy} = \mu_{zx} = \mu_{xz} = 0$  folgt aus (2.4.4-2)

$$w_m(B, H) = \frac{\vec{B} \cdot \vec{H}}{2} . \quad (2.4.4-5)$$

Im noch spezielleren Fall isotroper nichtlinearer Werkstoffe (Kennlinie Bild 2.4.4-1a)

$\mu_{xx}(H) = \mu_{yy}(H) = \mu_{zz}(H)$  erhalten wir mit  $dw_m = \vec{H}(B) \cdot d\vec{B}$  wegen  $\vec{B} \uparrow \vec{H}$

$$w_m(H, B) = \int_0^B \vec{H}(B') \cdot d\vec{B}' = \int_0^B H(B') \cdot dB' . \quad (2.4.4-6)$$

Die Fläche zwischen der  $B$ -Achse und der  $H(B)$ -Kurve in Bild 2.4.4-1a ist die magn. Feldenergiedichte  $w_m$  zum Wertepaar  $(B, H)$ .

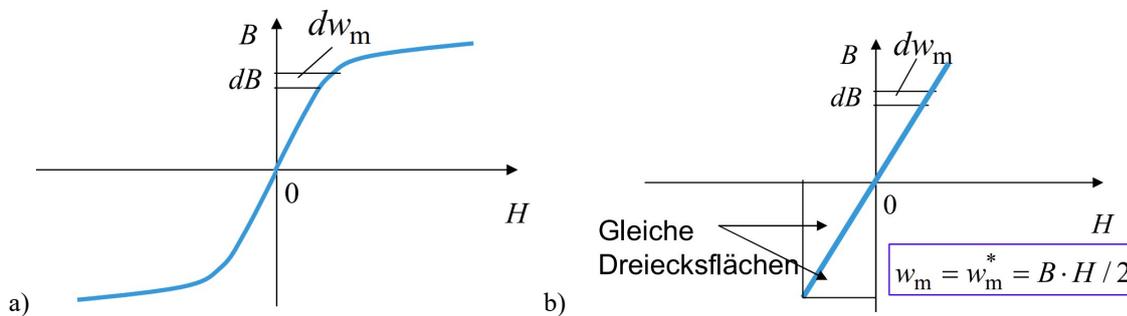


Bild 2.4.4-1:  $B(H)$ -Kennlinie eines isotrop magnetisierbaren Werkstoffs ohne Hysterese a) nichtlinear, b) linear.

Für den Sonderfall des isotropen, linear magnetisierbaren Werkstoffs (Bild 2.4.4-1b) gilt wegen  $\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$ ,  $\mu = \text{konst.}$ ,  $\vec{B} \uparrow \vec{H}$

$$w_m(H, B) = \int_0^B \vec{H}(B') \cdot d\vec{B}' = \frac{1}{\mu} \int_0^B B' \cdot dB' = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{B \cdot H}{2} \quad (2.4.4-7)$$

und stellt die Dreiecksfläche zwischen der  $B$ -Achse und der  $H(B)$ -Geraden in Bild 2.4.4-1b zum Wertepaar  $(B, H)$  dar.

Der gesamte vom magn. Feld erfüllte Raum mit dem Volumen  $V$  ist der Ort der dort verteilten Energiedichte  $w_m$  und führt über Integration mit dem differentiellen Volumen  $dV = d\vec{A} \cdot d\vec{s}$  zur gespeicherten magn. Feldenergie

$$W_m = \int_V w_m(H, B) \cdot dV = \int_V w_m(V) \cdot dV . \quad (2.4.4-8)$$

Wir betrachten als Beispiel eine vom el. Strom  $i$  stromdurchflossene Spule mit  $N$  Windungen. Aus (2.4.4-8) folgt

$$W_m = \int_V \int_0^B \vec{H}(B') \cdot d\vec{B}' \cdot dV = \oint_C \int_A \vec{H}(B') \cdot d\vec{B}' \cdot d\vec{A} \cdot d\vec{s} \text{ für } 0 \leq B' \leq B. \quad (2.4.4-9)$$

Wir spannen das Volumen  $V$  längs einer geschlossenen  $B$ -Feldlinie mit der Kurvenform  $C$  (differentiell kurzer Tangentenvektor  $d\vec{s}$ ) auf, auf die normal das differentielle kleine Flächenelement  $dA$  mit dem Flächennormalenvektor  $d\vec{A} \uparrow \uparrow d\vec{s}$  steht. Durch Integration über die Querschnittsfläche  $A$  des Feldraums längs der Integration über die Kurve  $C$  wird das gesamte Feldvolumen erfasst. Dabei ist  $\Phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$  der magnetische Fluss durch diese

Fläche  $A$ . Wir vereinfachen an, dass die  $N$  Windungen so eng beieinander liegen, dass ihre el. Durchflutung  $\Theta = N \cdot i$  von allen  $B$ -Feldlinien umschlossen wird. Somit ist der magn. Fluss mit allen  $N$  Windungen gleichermaßen verkettet. Wir definieren daher die magn. Flussverkettung  $\Psi = N \cdot \Phi$ . Mit dem Ampere-Durchflutungssatz  $\Theta = N \cdot i = \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s}$  folgt:

$$W_m = \int_A \int_0^B \oint_C \vec{H}(B') \cdot d\vec{s} \cdot d\vec{B}' \cdot d\vec{A} = \int_A \int_0^B N \cdot i \cdot d\vec{B}' \cdot d\vec{A} = \int_0^\Psi i \cdot d \left( N \cdot \int_A \vec{B}' \cdot d\vec{A} \right) = \int_0^\Psi i \cdot d\Psi' \quad (2.4.4-10)$$

Wir erkennen in Analogie zur der elektrostatischen Energie, dass die Energiedichte  $w_m$  aus dem  $B(H)$ -Diagramm abgelesen werden kann ( $w_e$  aus dem  $D(E)$ -Diagramm!), und die Energie  $W_m$  wegen  $\vec{B} \Leftrightarrow \Psi, \vec{H} \Leftrightarrow i$  aus dem  $\Psi(i)$ -Diagramm ( $W_e$  aus dem  $Q(u)$ -Diagramm!). Denn es entsprechen einander

$$\Psi = N \cdot \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} \text{ und } Q = \oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} \text{ bzw. } i = \frac{1}{N} \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} \text{ und } u = \int_l \vec{E} \cdot d\vec{s}.$$

Daher ist gemäß (2.4.4-10) die Fläche zwischen der  $\Psi$ -Achse und der  $i(\Psi)$ -Kurve die **magn. Feldenergie**  $W_m$  zum Wertepaar  $(i, \Psi)$  in Bild 2.4.4-2. Die Fläche zwischen der  $i$ -Achse und der  $\Psi(i)$ -Kurve nennt man **magn. Ergänzungsenergie**  $W_m^*$  („magn. Ko-Energie“), und es gilt daher  $W_m + W_m^* = \Psi \cdot i$ . Es bestehen die Abhängigkeiten  $W_m(\Psi)$  und  $W_m^*(i)$ .

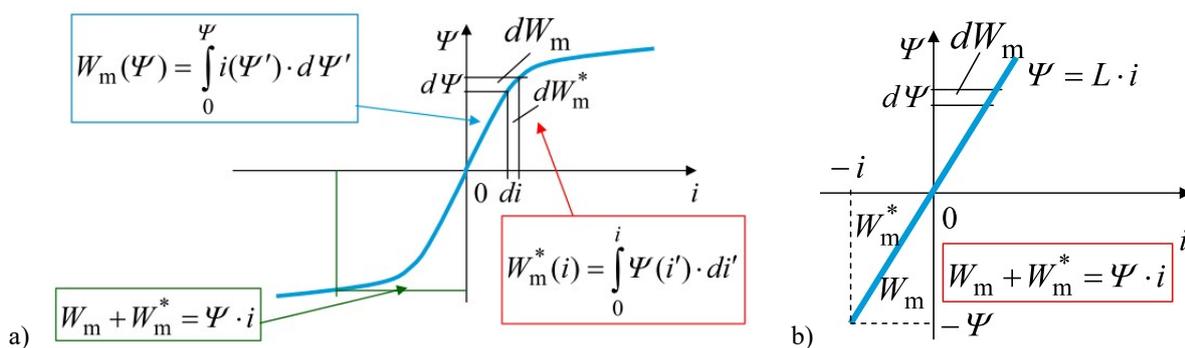


Bild 2.4.4-2:  $\Psi(i)$ -Kurve einer Selbstinduktivität  $L = \Psi / i$  ohne Hysterese a) nichtlinear, b) linear.

In Bild 2.4.4-2b ist der Sonderfall des linear magnetisierbaren Werkstoffs  $\Psi = L \cdot i$  mit  $L = \text{konst.}$  dargestellt.

$$W_m(\Psi) = \int_0^\Psi i(\Psi') \cdot d\Psi' = \int_0^\Psi \frac{\Psi'}{L} \cdot d\Psi' = \frac{\Psi^2}{2L} \text{ für } 0 \leq \Psi' \leq \Psi. \quad (2.4.4-11)$$

$$W_m^*(i) = \int_0^i \Psi(i') \cdot di' = \int_0^i L \cdot i' \cdot di' = \frac{L \cdot i^2}{2} \text{ für } 0 \leq i' \leq i. \tag{2.4.4-12}$$

Die Kurve  $\Psi = L \cdot i$  in Bild 2.4.4-2b als Diagonale halbiert das Rechteck mit der Fläche  $\Psi \cdot i$  in zwei gleiche Dreiecksflächen  $W_m$  und  $W_m^*$ , denn es gilt

$$W_m(\Psi) = \frac{\Psi^2}{2L} = \frac{(L \cdot i)^2}{2L} = \frac{L \cdot i^2}{2} = W_m^*(i). \tag{2.4.4-13}$$

Eine häufige Anwendung bei elektromechanischen Wandlern ist das Magnetfeld zwischen zwei magnetisierten Eisenpolflächen  $A$  (Bild 2.4.4-3a). Ein z. B. C-förmig gebogener Eisenkern bildet zwischen den beiden Polflächen die Luftspaltweite  $\delta$ . Eine um den Eisenkern gewickelte, mit dem Strom  $i$  durchflossene Spule mit  $N$  Windungen erregt das Magnetfeld  $H$ , das im Eisen  $H_{Fe}$  und im Luftspalt  $H_\delta$  beträgt, während die magnetische Flussdichte  $B$  (bei gleichem Luftspalt- wie Eisenquerschnitt  $A$ ) im vereinfachten Fall eines homogen verteilten Felds in Eisen und Luft identisch ist:  $\mu_{Fe} \cdot H_{Fe} = B_{Fe} = \Phi / A = B_\delta = \mu_0 \cdot H_\delta$ . Die beiden Polschuhe 1 und 2 stehen unter mechanischer Spannung der sich gegenseitig anziehenden magnetisierten Eisenflächen, die als N- und S-Pol wirken. Im „Fernwirkungsmodell“ wirken diese Magnetkräfte sofort (instantan) über die Luftspaltweite  $\delta$  hinweg. Tatsächlich aber wird diese Kraft lokal durch die wie „Gummischnüre“ ziehende Kraftwirkung  $F_m$  des magnetischen Felds  $B_\delta$  zwischen den Polschuhen als „Maxwell“scher Zug  $p_m$  vermittelt.

$$F_m = p_m \cdot A = (B_\delta \cdot H_\delta / 2) \cdot A. \tag{2.4.4-14}$$

Dabei ist der Ausdruck  $w_m = B_\delta \cdot H_\delta / 2$  die magn. Feldenergiedichte im Luftspalt. Dieses „Nahwirkungsmodell“ berücksichtigt korrekt, dass sich bei einer Änderung des Magnetisierungszustands z. B. eines Pols die Kraft über die Feldwellenausbreitung maximal mit Lichtgeschwindigkeit ändern kann, also nicht „instantan“. Häufig ist das Eisen nur mäßig gesättigt ( $B_{Fe} < 1.7 \text{ T}$ ), so dass  $\mu_{Fe} \gg \mu_0$  ist. Dann ist  $H_{Fe} \ll H_\delta$  bzw.  $H_{Fe} \approx 0$ , so dass die magn. Energiedichte im Eisen nahezu Null ist. Die magnetische Feldenergie  $W_m$  ist folglich (fast) zur Gänze im Volumen  $A \cdot \delta$  des Luftspalts gespeichert.

$$W_m = \int_V w_m \cdot dV \Big|_{H_{Fe} \ll H_\delta} \approx \int_0^\delta \int_0^A w_m \cdot dx \cdot dA = \frac{\mu_0 \cdot H_\delta^2}{2} \cdot A \cdot \delta = \frac{B_\delta^2}{2\mu_0} \cdot A \cdot \delta. \tag{2.4.4-14}$$

Die el. Spulendurchflutung erregt längs der geschlossenen Kurve  $C = s_{Fe} + \delta$  nur den Luftspalt  $\Theta = N \cdot i \approx H_\delta \cdot \delta$ , denn mit  $s_{Fe}$  als  $B$ -Feldlinienlänge im Eisen (Fe) ist

$$N \cdot i = \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = H_{Fe} \cdot s_{Fe} + H_\delta \cdot \delta \approx 0 \cdot s_{Fe} + H_\delta \cdot \delta = H_\delta \cdot \delta. \tag{2.4.4-15}$$

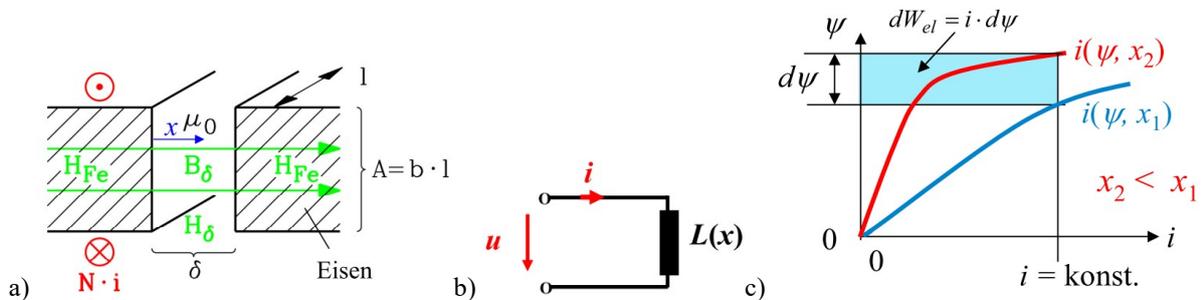


Bild 2.4.4-3: a) Magnetfeld zwischen zwei magnetisierten Eisenpolflächen  $A$  im Abstand  $\delta = x$ , b) Speisung der Spule aus einer Spannungsquelle  $u$ , c)  $\psi(i)$ -Diagramm der Spule für den allgemeinen Fall eines über den Luftspalt dominierenden nichtlinearen Eisens und zwei Luftspaltweiten  $x_1 > x_2$ . Wegen  $\Delta x < 0$  ist  $L_2 > L_1$ .

Mit dem Magnetfluss  $\Phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = B_\delta \cdot A = B_{Fe} \cdot A = \Psi / N$  und mit  $H_\delta = B_\delta / \mu_0$ ,

$H_{Fe} = B_{Fe} / \mu_{Fe} = B_\delta / \mu_{Fe} \ll H_\delta$  folgt  $H_{Fe} \approx 0$ ,  $B_\delta = \mu_0 \cdot N \cdot i / \delta$  und daraus die Selbstinduktivität  $L$  des Eisen-Luftspalt-Kreises

$$L = \Psi / i = N \cdot \Phi / i = N \cdot B_\delta \cdot A / i = \mu_0 N^2 A / \delta. \quad (2.4.4-16)$$

Der Ausdruck (2.4.4-11)  $W_m(\Psi) = \Psi^2 / (2L)$  wird durch (2.4.4-14), (2.4.4-16) bestätigt.

$$W_m = \frac{B_\delta^2}{2\mu_0} \cdot A \cdot \delta = \frac{N^2 \cdot (A \cdot B_\delta)^2}{2N^2 A \mu_0} \cdot \delta = \frac{\Psi^2}{2N^2 A \mu_0} \cdot \delta = \frac{\Psi^2}{2L} \Rightarrow L = N^2 A \mu_0 / \delta. \quad (2.4.4-17)$$

Wie im elektrostatischen Fall kann auch hier im magnetostatischen Fall die Berechnung von  $F_m$  als Anziehungskraft zwischen den beiden Polen über eine „Energiebetrachtung“ mit dem **Prinzip der virtuellen Verschiebung** erfolgen. Es wird die Änderung aller im System „stromdurchflossene Spule“ vorkommenden Energien bei einer gedachten (= virtuellen) Verschiebung  $\delta s = dx$  der beiden Polflächen betrachtet, wenn sich also nur  $\delta = x$ , aber nicht  $i$  oder  $\psi$  in der Spule ändert. Wegen der  $x$ -Änderung ändert sich  $L(x)$  (2.4.4-16) und damit die magnetische Energie. Daher ist  $\Psi$  zeitlich veränderlich, so dass der Kleinbuchstabe  $\psi$  verwendet wird. Wird die Spule aus einer idealen Spannungsquelle gespeist (Innenwiderstand ist Null) und wird der *ohm'sche* Widerstand der Spule  $R$  vernachlässigt, so treten an der Spule nur die äußere Spannung  $u$  und bei Änderung von  $\psi$  gemäß dem *FARADAY'schen* Induktionsgesetz die induzierte Spannung  $u_i$  auf.

$$R = 0: \quad u + u_i = R \cdot i = 0 \rightarrow u - d\psi / dt = 0 \rightarrow u = d\psi / dt. \quad (2.4.4-18)$$

Die elektrische Arbeit der Spannungsquelle  $dW_{el}$  an  $L(x)$  wird aus der elektrischen Leistung  $p_{el}(t) = u(t) \cdot i(t)$  ermittelt.

$$dW_{el} = p_{el} \cdot dt = u \cdot i \cdot dt = \frac{d\psi}{dt} \cdot i \cdot dt = i \cdot d\psi \quad (\text{Bild 2.4.4-3c}). \quad (2.4.4-19)$$

Mit  $\psi_2 = \psi_1 + d\psi$ ,  $W_{m,2} = W_{m,1} + dW_m$ ,  $W_{m,2}^* = W_{m,1}^* + dW_m^*$  folgt

$i \cdot d\psi = (W_{m,2} - W_{m,1}) + (W_{m,2}^* - W_{m,1}^*) = dW_m + dW_m^*$ . Es bestehen die Abhängigkeiten  $W_m(x, \Psi)$  und  $W_m^*(x, i)$ . Die elektrische Arbeit der Spannungsquelle  $dW_{el}$  muss in dem abgeschlossenen System gleich der Änderung der gespeicherten magn. Feldenergie  $dW_m$  und der von der Kraft  $F_m$  verrichteten mechanischen Arbeit  $F_m \cdot dx$  sein.

$$dW_{el} = dW_m + F_m \cdot dx = dW_m + dW_m^* \Rightarrow F_m \cdot dx = dW_m^* \Rightarrow F_m = \partial W_m^*(x, i) / \partial x \quad (2.4.4-20)$$

Die magnetostatische Kraft  $F_m$  wird bei Verwendung der beiden unabhängigen Variablen  $i$ ,  $x$  aus der partiellen Änderung der magn. Ko-Energie  $W_m^*$  mit  $x$  berechnet! Die Abhängigkeit  $W_m(x, \Psi)$  folgt auch aus

$$dW_m = dW_{el} - F_m \cdot dx = i \cdot d\psi - F_m \cdot dx \Rightarrow W_m = W_m(\psi, x), \quad (2.4.4-21)$$

denn das vollständige Differential der magnetischen Energie ist

$$dW_m(\psi, x) = \frac{\partial W_m}{\partial \psi} \cdot d\psi + \frac{\partial W_m}{\partial x} \cdot dx = i \cdot d\psi - F_m \cdot dx. \quad (2.4.4-22)$$

Der Koeffizientenvergleich ergibt die alternative Kraftformel mit  $W_m$ .

$$i = \frac{\partial W_m(\psi, x)}{\partial \psi}, \quad F_m = -\frac{\partial W_m(\psi, x)}{\partial x}. \quad (2.4.4-23)$$

Der Wechsel von der unabhängigen Variablen  $\psi$  auf  $i$  erfolgt wie im elektrostatischen Fall über die *LEGENDRE-Transformation* und bestätigt (2.4.4-20).

$$d(\psi \cdot i) = d\psi \cdot i + \psi \cdot di \Rightarrow dW_m = d(\psi \cdot i) - \psi \cdot di - F_m \cdot dx. \quad (2.4.4-24)$$

$$d(\psi \cdot i) - dW_m = dW_m^* = \psi \cdot di + F_m \cdot dx = \frac{\partial W_m^*}{\partial i} \cdot di + \frac{\partial W_m^*}{\partial x} \cdot dx \Rightarrow W_m^* = W_m^*(i, x) \quad (2.4.4-25)$$

$$\psi = \frac{\partial W_m^*(i, x)}{\partial i}, \quad F_m = \frac{\partial W_m^*(i, x)}{\partial x}. \quad (2.4.4-26)$$

Bei Verwendung der unabhängigen Variablen  $\psi$  wird  $F_m$  aus  $W_m$  (mit NEGATIVEM Vorzeichen) berechnet, bei Verwendung von  $i$  aus  $W_m^*$  (mit POSITIVEM Vorzeichen)!

Beispiel 2.4.4-1: Magnetfeld zwischen zwei Polschuhen (Bild 2.4.4-3a).

Daten:  $b = l = 5 \text{ cm}$ ,  $\delta = 1 \text{ mm}$ ,  $N = 500$ ,  $i = 1 \text{ A}$ .

Nehmen Sie an, dass das Eisen ideal magnetisierbar ist:  $\mu_{\text{Fe}} \rightarrow \infty$ . Berechnen Sie die Feldgrößen, die Spuleninduktivität, die Magnetkraft, die Feldenergie und die Feldenergiedichte!

Lösung:

$$H_\delta = N \cdot i / \delta = 500 \cdot 1 / 10^{-3} = 500 \text{ kA/m}, \quad B_\delta = \mu_0 H_\delta = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 0.5 \cdot 10^6 = 0.628 \text{ T},$$

$$L = \mu_0 N^2 A / \delta = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 500^2 \cdot 5^2 \cdot 10^{-4} / 10^{-3} = 0.785 \text{ H},$$

$$W_m = L \cdot i^2 / 2 = 0.785 \cdot 1^2 / 2 = 0.39 \text{ J}, \quad A = b \cdot l = 25 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2,$$

$$F_m = -\frac{\partial W_m}{\partial x} = -\frac{\partial \psi^2}{\partial x} \frac{1}{2L} = -\frac{\psi^2}{2\mu_0 N^2 A} \cdot \frac{\partial x}{\partial x} = -\frac{\psi^2}{2\mu_0 N^2 A} = -\frac{(N \cdot B_\delta A)^2}{2\mu_0 N^2 A} = -\frac{B_\delta H_\delta A}{2} = -w_m \cdot A$$

$$w_m = 0.628 \cdot 500 \cdot 10^3 / 2 = 157 \text{ kJ/m}^3, \quad F_m = 25 \cdot 10^{-4} \cdot 157 \cdot 10^3 = 392.5 \text{ N}.$$

Wird bei der Kraftberechnung über die virtuelle Verschiebung die falsche Formel für  $W_m$  gewählt, ist auch die berechnete Kraft  $F_m$  FALSCH, wie am Beispiel der Magnetkraft zwischen zwei ideal magnetisierten Polen aus Bsp. 2.4.4-1 gezeigt wird. Aus den Daten der Polfläche  $A$ , der Luftspaltweite  $x$  und der Spulenwindungszahl  $N$  folgt die  $x$ -abhängige Selbstinduktivität  $L(x) = \mu_0 N^2 A / x$ . Statt  $W_m(\Psi, x) = \Psi^2 / (2L(x))$  wird fälschlich der Ausdruck  $W_m(i, x) = L(x) \cdot i^2 / 2$  gewählt. Damit ergibt sich die Magnetkraft mit falschem Vorzeichen, so dass die Polflächen sich abstoßen müssten:

$$\text{Falsch: } F_m = -\frac{\partial W_m(i, x)}{\partial x} = -\frac{\mu_0 N^2 A \cdot i^2}{2} \cdot \frac{\partial(1/x)}{\partial x} = \frac{\mu_0 N^2 A \cdot i^2}{2x^2} > 0.$$

Richtig wird die bei  $i = \text{konst.}$  mit  $1/x^2$  abnehmende Kraft über  $W_m$  mit

$$F_m = -\frac{\partial W_m(\Psi, x)}{\partial x} = -\frac{\Psi^2}{2\mu_0 N^2 A} \cdot \frac{\partial(x)}{\partial x} = -\frac{\Psi^2}{2\mu_0 N^2 A} = -\frac{L(x)^2 \cdot i^2}{2\mu_0 N^2 A} = -\frac{\mu_0 N^2 A \cdot i^2}{2x^2} < 0$$

negativ, also anziehend berechnet. Wenn mit dem Ausdruck  $L(x) \cdot i^2 / 2$  gerechnet werden soll, so muss beachtet werden, dass dies die magn. Ko-Energie ist  $W_m^*(i, x) = L(x) \cdot i^2 / 2$ . Mit (2.4.4-26) folgt richtig

$$F_m = \frac{\partial W_m^*(i, x)}{\partial x} = \frac{\mu_0 N^2 A \cdot i^2}{2} \cdot \frac{\partial(1/x)}{\partial x} = -\frac{\mu_0 N^2 A \cdot i^2}{2x^2} < 0.$$

Bei der falschen Rechnung erhält man (wegen der hier linear angenommenen Verhältnisse) zwar denselben Kraftbetrag, aber das falsche Vorzeichen. Es wird anstelle einer anziehenden eine abstoßende Kraft berechnet!

Im Folgenden wird (2.4.4-23) im  $\Psi(i)$ -Diagramm in Bild 2.4.4-4a bei Vergrößerung des Polabstands bei eingepprägtem Fluss und damit konstanter Flussverkettung betrachtet.

Dies ist der Fall bei kurzgeschlossener verlustloser Spule gemäß  $R = 0$  wegen  $u = d\psi / dt = 0$  und führt deshalb auf  $\Psi = \text{konst.}$  trotz Änderung von  $x$ . Für die Kraftformel (2.4.4-23)  $F_m = -\Delta W_m / \Delta x$  zeigt Bild 2.4.4-4a  $\Delta W_m = \Psi \cdot \Delta i / 2 > 0$  als Dreiecksfläche. Der Strom muss zunehmen  $\Delta i > 0$ , damit trotz größerem Polabstand  $\Psi = \text{konst.}$  bleibt.

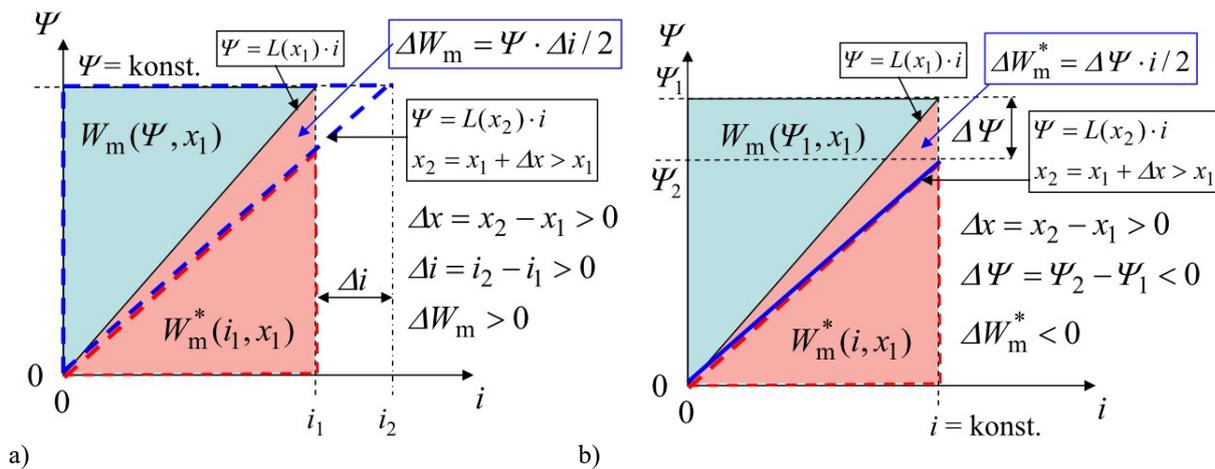
$$F_m = -\frac{\Psi}{2} \cdot \frac{\Delta i}{\Delta x} = -\frac{N \cdot B_\delta \cdot A}{2} \cdot \frac{\Delta i}{\Delta x} = -\frac{B_\delta \cdot A}{2} \cdot \frac{\Delta(N \cdot i)}{\Delta x} = -\frac{B_\delta \cdot H_\delta}{2} \cdot A = -p_{m,x} \cdot A \quad (2.4.4-27)$$

Die Kraft ist wegen  $\Delta i \sim \Delta x$  konstant. Gemäß Bild 2.4.4-4a ist bei  $\Delta x = x_2 - x_1 > 0$  auch  $\Delta W_m > 0$ , so dass  $F_m = -\Delta W_m / \Delta x < 0$  negativ ist.

In Bild 2.4.4-4b ist nun der Spulenstrom  $i = \text{konst.}$  konstant eingepreßt aus einer idealen Stromquelle. Es wird die Ko-Energie zur Kraftberechnung (2.4.4-26)  $F_m = \Delta W_m^* / \Delta x$  verwendet. Es muss die Variable  $i$  konstant gehalten werden, was hier ohnehin der Fall ist. Bild 2.4.4-4b zeigt  $\Delta W_m^* = i \cdot \Delta \Psi / 2 < 0$  als abziehende Dreiecksfläche, da bei konstantem Strom  $i$  die Flussverketzung bei zunehmendem Polabstand abnimmt:  $\Delta \Psi < 0$ . Aus (2.4.4-26):

$$F_m = \frac{\Delta \Psi}{2} \cdot \frac{i}{\Delta x} = \frac{i \cdot \Delta L}{2 \Delta x} \cdot i = \frac{i^2 \cdot \mu \cdot A \cdot N^2 \cdot \Delta(1/x)}{2 \Delta x} = -\frac{(N \cdot i / x)^2 \cdot \mu_0 \cdot A \cdot \Delta x}{2 \Delta x} = -\frac{H_\delta^2 \cdot \mu_0 \cdot A}{2} < 0$$

$$F_m = -((B_\delta \cdot H_\delta) / 2) \cdot A = -p_{m,x} \cdot A \sim 1/x^2. \quad (2.4.4-28)$$



**Bild 2.4.4-4:** Zu Bild 2.4.4-3a: Vergrößerung des Polabstands  $\delta = x$  von  $x_1$  auf  $x_2 > x_1$ . a) Eingepreßte Flussverketzung  $\Psi = \text{konst.}$ : Die magnetische Feldenergie zwischen den beiden Polflächen  $A$  erhöht sich dank des vergrößerten Volumens  $V$  und konstantem  $B_\delta$ . Die Kraft ist konstant. b) Eingepreßter Spulenstrom  $i = \text{konst.}$ : Die magnetische Feldenergie zwischen den beiden Polflächen  $A$  verringert sich trotz vergrößertem Volumens  $V$ , weil  $B_\delta$  sinkt. Die Kraft sinkt  $\sim 1/x^2$ .

**Beispiel 2.4.4-2:** Das Magnetfeld zwischen zwei Polschuhen (Bild 2.4.4-3a) wird über eine Spule erregt, die mit  $i = I = \text{konst.}$  durchflossen ist (Speisung aus idealer Stromquelle). Der Polabstand wird vergrößert von  $x_1$  auf  $x_2 > x_1$ , so dass die Spulenflussverketzung abnimmt um  $\Delta \Psi = \Psi_2 - \Psi_1 < 0$ . Der Eisenkern ist ideal magnetisierbar  $\mu_{Fe} \rightarrow \infty$ , so dass gilt:

$L(x) = \mu_0 N^2 A / x$ . Geben Sie für den Vorgang  $x_1 \rightarrow x_2$  die Energiebilanz an!

**Lösung:**

Die el. Arbeit der Stromquelle ist im VZS negativ, d. h. es wird ihr  $\Delta W_{el}$  zugeführt.

$$\Delta W_{el} = \int_{\Psi(x_1)=\Psi_1}^{\Psi(x_2)=\Psi_2} i \cdot d\Psi = I \cdot \int_{\Psi_1}^{\Psi_2} d\Psi = I \cdot (\Psi_2 - \Psi_1) = I^2 \cdot (L(x_2) - L(x_1)) = I^2 \cdot \mu_0 \cdot N^2 A \cdot \left( \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \right) < 0$$

Die magn. Ko-Energie enthält  $x$  und  $i$  als Variable. Es muss  $i$  konstant gehalten werden, um

die Magnetkraft  $F_m$  mit (2.4.4-26) zu ermitteln.  $F_m$  ist in positiver  $x$ -Richtung gezählt eine negative Kraft und wirkt daher anziehend zwischen beiden Polen.

$$W_m^* = \frac{L(x) \cdot I^2}{2} \rightarrow F_m = \frac{\partial W_m^*}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{L(x) \cdot I^2}{2} = L'(x) \cdot \frac{I^2}{2} < 0,$$

$$F_m(x) = \frac{\partial W_m^*}{\partial x} = \frac{\mu_0 \cdot A \cdot (N \cdot I)^2}{2} \cdot \frac{\partial(1/x)}{\partial x} = -\frac{\mu_0 \cdot A \cdot (N \cdot I)^2}{2x^2} < 0.$$

Gegen die anziehende Magnetkraft muss eine äußere Kraft  $F$  die Pole auseinander ziehen. Die damit verbundene mech. Arbeit wird von außen am System verrichtet und ist im VZS negativ.

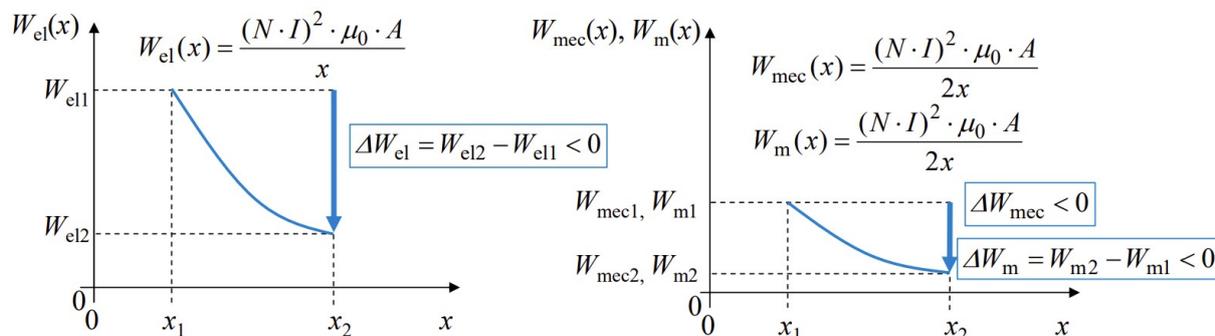
$$\Delta W_{mec} = \int_{x_1}^{x_2} F_m(x) \cdot dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dW_m^*}{dx} \cdot dx = \int_{W_{m1}^*}^{W_{m2}^*} dW_m^* = W_{m2}^* - W_{m1}^* = \frac{\mu_0 \cdot A \cdot (N \cdot I)^2}{2} \cdot \left( \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \right) < 0$$

Das Feldvolumen (Luftspaltvolumen  $V_\delta = \delta A$ ) nimmt zwar linear mit  $\delta = x$  zu, aber die Flussdichte nimmt hyperbolisch mit  $1/x$  ab, daher die Energiedichte  $w_m$  quadratisch  $1/x^2$ , so dass die im Luftspaltvolumen gespeicherte magn. Feldenergie  $W_m = w_m \cdot V_\delta$  sinkt.

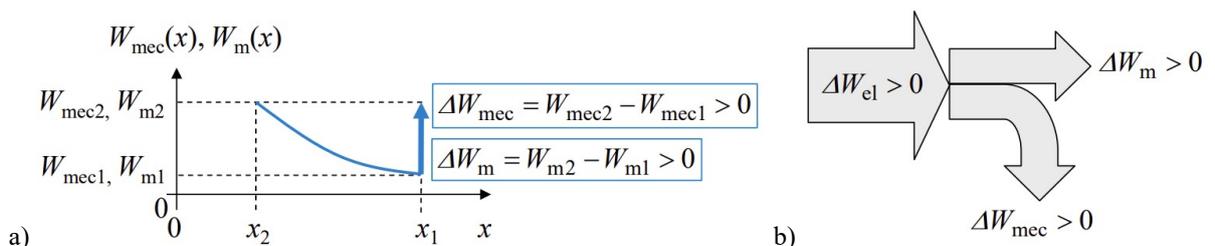
$$\Delta W_m = \int_{W_m(x_1)}^{W_m(x_2)} dW_m = W_m(x_2) - W_m(x_1) = \frac{\Psi_2^2}{2L(x_2)} - \frac{\Psi_1^2}{2L(x_1)} = \frac{I^2 \cdot (L(x_2) - L(x_1))}{2} < 0,$$

$$\Delta W_m = \frac{\mu_0 A \cdot (N \cdot I)^2}{2} \cdot \left( \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \right) < 0 \Rightarrow \Delta W_{el} = \Delta W_{mec} + \Delta W_m < 0.$$

**Fazit:** Der Polabstand nimmt von  $x_1$  nach  $x_2$  zu, indem gegen die anziehende magn. Kraft  $F_m$  von außen mit  $F$  am System mech. Arbeit verrichtet wird, daher im VZS:  $\Delta W_{mec} < 0$ ! Auch die im  $B$ -Luftspaltfeld gespeicherte magn. Energie  $W_m$  sinkt wegen  $i = \text{konst.}$ :  $\Delta W_m < 0$ ! Im betrachteten abgeschlossenen System nimmt die Stromquelle die Summe  $\Delta W_{mec} + \Delta W_m$  als el. Arbeit  $\Delta W_{el}$  auf:  $\Delta W_{el} < 0$  (Bild 2.4.4-5)! Das System arbeitet als **el. Generator**.



**Bild 2.4.4-5:** Zu Bild 2.4.4-3a: Vergrößerung des Polabstands  $\delta = x$  von  $x_1$  auf  $x_2 > x_1$ . Links: An der Stromquelle verrichtete el. Arbeit. Rechts: Die an den Magnetpolen verrichtete Arbeit ist gleich groß wie die Abnahme der magn. Feldenergie im Luftspalt.



**Bild 2.4.4-6:** Zu Bild 2.4.4-3a: Verkleinerung des Polabstands  $\delta = x$  von  $x_1$  auf  $x_2 < x_1$ . a) Die von den Magnetpolen verrichtete Arbeit ist gleich groß wie die Zunahme der magn. Feldenergie im Luftspalt. b) Die Stromquelle liefert die el. Energie für die verrichtete Arbeit und die Zunahme der magn. Feldenergie.

Beispiel 2.4.4-3: Wie Bsp. 2.4.4-2, jedoch wird der Polabstand verkleinert von  $x_1$  auf  $x_2 < x_1$ . Geben Sie für den Vorgang  $x_1 \rightarrow x_2$  die Energiebilanz an!

Lösung:

Es ist nun  $L(x_2) > L(x_1)$ . Der Polabstand nimmt von  $x_1$  nach  $x_2$  AB, indem das System über die anziehende magn. Kraft  $F_m$  mech. Arbeit verrichtet, die daher im VZS als  $\Delta W_{mec} > 0$  positiv ist. Auch die im B-Luftspaltfeld gespeicherte magn. Energie  $W_m$  STEIGT mit  $L$  wegen  $i = \text{konst.}$ :  $\Delta W_m > 0$ ! Die Stromquelle gibt die Summe  $\Delta W_{mec} + \Delta W_m$  als el. Energie  $\Delta W_{el}$  AB:  $\Delta W_{el} > 0$  (Bild 2.4.4-6)! Das System arbeitet als **Motor**.

Beispiel 2.4.4-4: Wie Bsp. 2.4.4-2, jedoch wird trotz vergrößerten Polabstand  $x_2 > x_1$  die Spulenflussverketzung durch Stromänderung konstant gehalten:  $\Psi = \text{konst.}$  (Bild 2.4.4-7) und damit auch die Magnetkraft. Geben Sie für den Vorgang  $x_1 \rightarrow x_2$  die Energiebilanz an!

Lösung:

Wegen  $\Psi = \text{konst.}$  sind  $B_\delta = \text{konst.}$  und  $w_m \sim (B_\delta)^2 = \text{konst.}$ , so dass mit steigendem  $x$  (= zunehmendes Luftspaltvolumen  $V_\delta$ )  $W_m$  zunimmt, da für  $\Psi = \text{konst.}$  der Spulenstrom  $i$  prop.  $x$  erhöht werden muss:  $x_2 > x_1$ :  $W_m(\Psi, x_2) > W_m(\Psi, x_1)$ . In gleicher Weise nimmt  $W_m^*$  zu (Bild 2.4.4-7)  $W_m^*(i_2, x_2) > W_m^*(i_1, x_1)$ . Die el. Arbeit  $\Delta W_{el}$  an der speisenden Stromquelle ist Null:  $\Psi = \text{konst.}$ :  $d\Psi = 0$ ,  $dW_{el} = i \cdot d\Psi = 0 \Rightarrow W_{el} = \text{konst.} \Rightarrow \Delta W_{el} = W_{el} - W_{el} = 0$ .

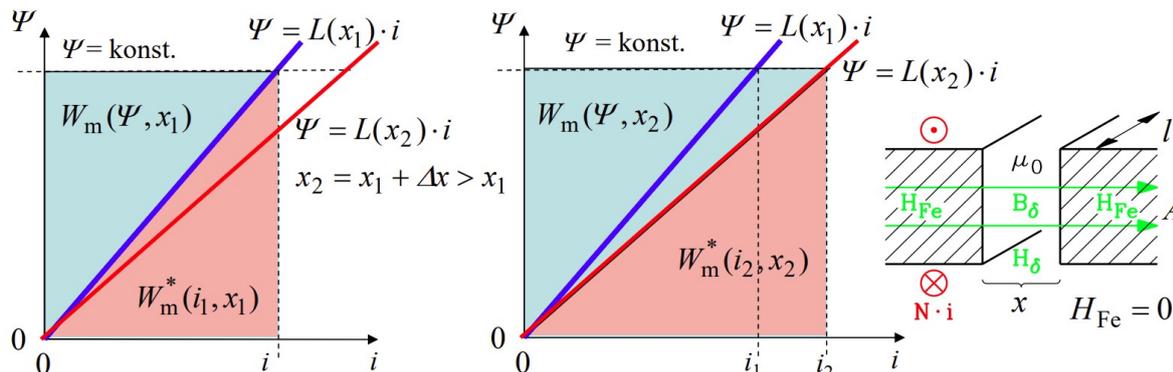


Bild 2.4.4-7: Vergrößerung des Polabstands  $\delta = x$  von  $x_1$  auf  $x_2 > x_1$  bei  $\Psi = \text{konst.}$ : Im  $\Psi(i)$ -Diagramm ist die Erhöhung von  $W_m$  und  $W_m^*$  als Dreiecksfläche  $\Psi \cdot (i_2 - i_1)/2$  bei  $i_2 > i_1$  sichtbar.

Die dem System von außen zugeführte mech. Arbeit  $\Delta W_{mec} < 0$  wird in erhöhter Feldenergie  $\Delta W_m > 0$  gespeichert! Wenn für die Magnetkraftberechnung  $W_m$  verwendet wird, so dass die zweite Variable  $\psi$  ist, muss diese konstant gehalten werden:  $F_m = -\frac{\partial W_m(\Psi, x)}{\partial x} < 0$ . Diese

Kraft ist wegen  $p_{m,x} \sim (B_\delta)^2 = \text{konst.}$  ebenfalls konstant:  $F_m = -\frac{B_\delta^2 \cdot A}{2\mu_0}$ , siehe (2.4.4-27).

$$dW_{el} = 0 = dW_m + dW_{mec} \Rightarrow dW_m = -dW_{mec} \Rightarrow \Delta W_{mec} = \int_{x_1}^{x_2} F_m \cdot dx = -\frac{B_\delta^2 \cdot A}{2\mu_0} \int_{x_1}^{x_2} dx = -\frac{B_\delta^2 \cdot A \cdot \Delta x}{2\mu_0}$$

$$\text{bzw. } \Delta W_{mec} = \int_{x_1}^{x_2} F_m \cdot dx = -\int_{x_1}^{x_2} \frac{dW_m}{dx} \cdot dx = -\int_{x_1}^{x_2} dW_m = -(W_{m2} - W_{m1}) = -\Delta W_m$$

Zusammenfassung:

Bei  $\mu_{Fe} \rightarrow \infty$  sind die parallelen Eisenpole mit ihrem  $B_\delta$ -Luftspaltfeld die Entsprechung zum

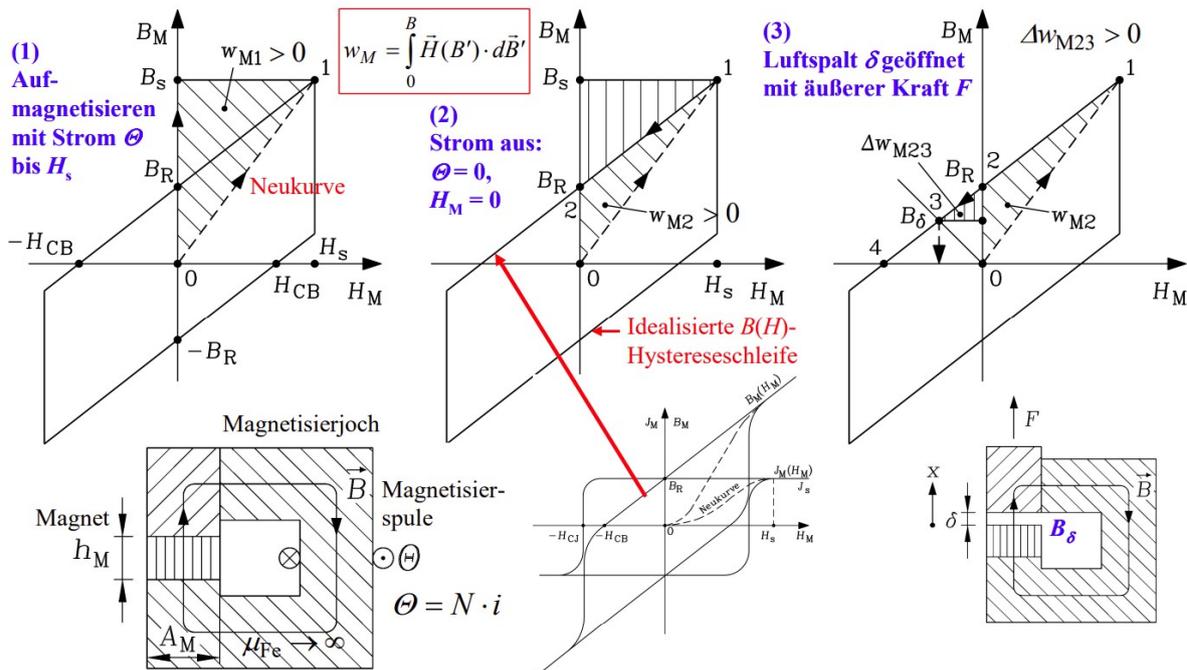
Plattenkondensator mit homogenem  $D$ -Plattenfeld. Daher treten analoge Energiebilanzen und Feldkräfte auf, wobei einander die Größen  $N \cdot I$  und  $U$ ,  $L$  und  $C$ ,  $\mu_0$  und  $\varepsilon_0$  sowie  $\Psi$  und  $Q$  entsprechen. Die Pol- bzw. Plattenverschiebungen a) in  $x$ -Richtung (Längsrichtung) und b) seitliche Pol- bzw. Plattenverschiebungen (in Querrichtung) führen auf vergleichbare in  $x$  (a) nichtlineare und b) lineare Formeln für die Kräfte  $F_e$  bzw.  $F_m$  und auf analoge Energiebilanzen. Die Kräfte  $F_e$  bzw.  $F_m$  bei Querverschiebung (Fall b) werden in Kap. 5 für  $F_e$  behandelt. Elektromagnetische Wandler mit Magnetkräften  $F_m$  an magnetisierten Eisenteilen haben bei Längsverschiebung der Polflächen gemäß Beispiel 2.4.4-1 ein nichtlineares Großsignal-Verhalten  $F_m \sim 1/x^2$ , siehe Kap. 7: Wandler „Typ 1“. Häufig werden sie in einem Arbeitspunkt  $x = x_0 = \text{konst.}$  mit kleinen Abweichungen  $\Delta x/x_0 \ll 1$  betrieben. Dieses (linearisierte) Kleinsignalverhalten wird ebenfalls in Kap. 7 behandelt. In gleicher Weise verhält sich ein plattenlängsverschieblicher kapazitiver Wandler  $F_e \sim 1/x^2$  (Kap. 7: „Typ 3“). Wandler mit seitlicher Pol- bzw. Plattenverschiebung, als kapazitiver Wandler „Typ 4“ in Kap. 7 benannt, haben ein lineares Großsignalverhalten:  $F_e = \text{konst.}$  Auch elektrodynamische Wandler mit einer bewegten Spule im Magnetfeld, (in Kap. 7 „Typ 2“ genannt) haben ein lineares Großsignal-Verhalten  $F_m = \text{konst.}$  Sie entsprechen aber im physikalischen Aufbau nicht den linearen magnetischen und kapazitiven Wandlern „Typ 4“.

Ein Sonderfall ist die magnetische Energiedichte  $w_m$  in **hartmagnetischen Materialien**. Wir betrachten gemäß Bild 2.2.2-1b  $B_M(H_M)$ - und  $J_M(H_M)$ -Hystereseschleifen eines Selten-Erd-Dauermagnetmaterials mit linearer  $B_M(H_M)$ -Kennlinie im 2. und 4. Quadranten der  $B_M$ - $H_M$ -Ebene (Remanenzflussdichte  $B_R = J_R \approx J_s$ , Koerzitivfeldstärken  $H_{CJ}$  und  $H_{CB}$ , Bild 2.4.4-8, unten Mitte). Wir nähern die  $J_M(H_M)$ -Hystereseschleife durch ein Rechteck mit der Höhe  $2B_R = 2J_R$  und Breite  $2H_{CJ}$  an. Mit  $B_M = \mu_0 H_M + J_M(H_M)$  wird die  $B_M(H_M)$ -Hystereseschleife als Trapez erhalten (Bild 2.4.4-8 oben links). Wir bestimmen die magn. Feldenergie in einem quaderförmigen Permanentmagnet mit der Grundfläche  $A_M$  und Höhe  $h_M$  in Magnetisierungsrichtung. Er ist in einem mit einer Spule (el. Durchflutung  $\Theta = N \cdot i$ ) versehenen Eisenjoch ( $\mu_{Fe} \rightarrow \infty$ ) als „Magnetisierjoch“ eingebaut (Bild 2.4.4-8, unten links) und ist zunächst unmagnetisiert. Über die Durchflutung  $\Theta$  wird ein Magnetfeld  $H_s \geq H_{CJ}$  erregt, so dass der Permanentmagnet (PM) entlang seiner Neukurve remanent aufmagnetisiert wird von  $(B_M, H_M) = (0, 0)$  in den Arbeitspunkt  $(B_s, H_s)$ . Werte  $H_s > H_{CJ}$  sind reversibel, so dass zumindest bis  $H_s = H_{CJ}$  aufmagnetisiert werden muss. Im Eisen ist  $H_{Fe} = 0$ . Der Durchflutungssatz ergibt  $\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = s_{Fe} \cdot H_{Fe} + h_M \cdot H_M = \Theta$  bzw.  $H_M = \Theta / h_M = H_s$  und

$B_M = \mu_0 H_s + J_M(H_s) = \mu_0 H_s + J_R = B_s$ . Die dabei in das System eingebrachte magnetische Feldenergie ist wegen  $H_{Fe} = 0$  im PM gespeichert als  $W_M = w_{M1} V_M$  ( $V_M = A_M h_M$ ) mit  $w_{M1} = B_s H_s / 2$  (Bild 2.4.4-8 (1)). Wird nun der Strom in der Spule ausgeschaltet, ist  $H_M = 0$ . Daraus folgt  $B_M = \mu_0 \cdot 0 + J_M(0) = J_R = B_R$ . Die im PM verbleibende magn. Feldenergiedichte  $w_{M2} = B_R H_s / 2 = J_R H_{CJ} / 2$  (Bild 2.4.4-8 (2)) ergibt die „Aufmagnetisierungsenergie“  $W_{M2} = w_{M2} V_M$ . Mit der äußeren Kraft  $F$  wird nun der verschiebbare Teil des Eisenjochs um den Luftspalt  $\delta$  nach oben gezogen. Der Durchflutungssatz liefert  $\delta \cdot H_\delta + h_M \cdot H_M = \Theta = 0$ , und mit  $B_M = \mu_0 H_M + J_R = B_\delta$  folgt  $B_\delta = -\mu_0 H_M h_M / \delta$ . Diese Luftspalt-Arbeitsgerade liegt im 2. und 4. Quadranten der  $(B_M, H_M)$ -Ebene (Bild 2.4.4-8 (3)) und legt im Schnittpunkt mit der  $B_M(H_M)$ -Magnetkennlinie den magnetischen Arbeitspunkt 3 des PM fest. Mit  $B_M = \mu_0 H_M + J_R = B_\delta$  bzw.  $H_M = (B_\delta - J_R) / \mu_0$  folgt:

$$B_\delta = -(B_\delta - J_R) \cdot h_M / \delta \Rightarrow B_\delta = \frac{J_R \cdot h_M}{\delta + h_M} = \frac{B_R \cdot h_M}{\delta + h_M}. \quad (2.4.4-29)$$

Je größer die Magnethöhe  $h_M$  im Vergleich zur Luftspaltweite  $h_M/\delta$ , desto größer ist die vom PM erregte Luftspaltflussdichte  $B_\delta$ , die bei  $\delta = 0$  maximal wird:  $B_{\max} = B_R$ . Wegen  $B_\delta < B_R$  bei  $\delta > 0$  ist der PM von 2 nach 3 reversibel entmagnetisiert. Dabei hat die magn. Energiedichte  $\Delta w_{M23} = (B_\delta - B_R) \cdot H_M / 2 > 0$  im PM ( $B_\delta - B_R < 0, H_M < 0!$ ) zugenommen. Die magn. Energiedichte  $\Delta w_{\delta 23} = B_\delta \cdot H_\delta / 2 > 0$  ist im Luftspaltvolumen gespeichert. Im System ist dadurch die magn. Energie  $\Delta W_m = \Delta W_{M23} + \Delta W_{\delta 23} = \Delta w_{M23} V_M + \Delta w_{\delta 23} V_\delta$  zusätzlich gespeichert. Sie ist gleich der am System über  $F$  verrichteten Arbeit  $W_{\text{mec,außen}}$ , um den Luftspalt  $\delta$  herzustellen.



**Bild 2.4.4-8:** (1) Aufmagnetisierung eines Permanentmagnets PM mit (vereinfacht) rechteckförmiger  $J_M(H_M)$ -Hystereseschleife (z. B.: Ferrit- oder Seltenerd-PM) über eine Magnetisiererspule  $\Theta$ , (2) Einstellen der Remanenz als magn. Arbeitspunkt des PM, (3) Magnetisierung der Luftspaltweite  $\delta$  durch den PM.

**Beispiel 2.4.4-5:** Berechnen Sie die Kraft  $F$  zum Einstellen einer Luftspaltweite  $x$

a) aus der Änderung der magn. Feldenergie,

b) mit den Maxwell-Spannungen.

Bestimmen Sie die mittlere Kraft  $F_{\text{av}}$  auf den zwei unterschiedlichen Wegen a) und b).

**Lösung:**

a) Die Kraft  $F(x) = -F_m$  wird aus  $-F_m = dW_m / dx$  berechnet. Mit  $x$  statt  $\delta$  folgt mit (2.4.4-29):

$$\Delta W_{M23} = \frac{A_M h_M x}{2\mu_0} \cdot \frac{J_R^2 \cdot x}{(x + h_M)^2}, \quad \Delta W_{\delta 23} = \frac{A_M h_M x}{2\mu_0} \cdot \frac{J_R^2 \cdot h_M}{(x + h_M)^2}, \quad \frac{\Delta W_{M23}}{\Delta W_{\delta 23}} = \frac{x}{h_M}, \quad (2.4.4-30)$$

$$\Delta W_m = \Delta W_{M23} + \Delta W_{\delta 23} = \frac{A_M h_M x}{2\mu_0} \cdot \frac{J_R^2}{x + h_M}, \quad F(x) = \frac{d\Delta W_m}{dx} = \frac{1}{2\mu_0} \cdot \frac{A_M h_M^2 J_R^2}{(x + h_M)^2} \quad (2.4.4-31)$$

b) Für die Vertikalkraft  $F$  liefert das Integral auf der Hüllfläche  $O$  um den verschiebbaren Eisenteil, da oberhalb das Feld Null ist, nur einen Beitrag über die Maxwell-Zugspannung  $p_{m,x}$  unten (Flächenanteil  $A_M$  von  $O$ ), identisch mit (2.4.4-31).

$$F(x) = -F_m(x) = -(p_{m,x} A_M) = -\left(-\frac{B_\delta^2}{2\mu_0} A_M\right) = \frac{1}{2\mu_0} \cdot \frac{A_M h_M^2 J_R^2}{(x + h_M)^2} \quad (2.4.4-32)$$

Die mittlere Kraft ergibt sich entweder aus (2.4.4-32) oder aus (2.4.4-31) gemäß (2.4.4-34).

$$(2.4.4-32) : F_{av} = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta F(x) \cdot dx = \frac{A_M h_M}{2\mu_0} \cdot \frac{J_R^2}{\delta + h_M} \quad (2.4.4-33)$$

$$W_{mec,außen} = F_{av} \cdot \delta = \Delta W_m(x = \delta) = \frac{A_M h_M \delta}{2\mu_0} \cdot \frac{J_R^2}{\delta + h_M}, \quad F_{av} = \frac{A_M h_M}{2\mu_0} \cdot \frac{J_R^2}{\delta + h_M} \quad (2.4.4-34)$$

Die erforderliche mittlere Kraft  $F_{av}$  zur Öffnung des Luftspalts ist umso größer, je „stärker“ der PM ( $J_R^2$ !) ist, und umso kleiner, je größer die Luftspaltweite  $\delta$  ist, da mit steigender Luftspaltweite die Flussdichte  $B_\delta$  (2.4.4-29) und damit quadratisch die Kraft  $F_{av}$  sinkt.

Beispiel 2.4.4-6: Vergleich der elektrostatischen und magnetostatischen Energie bzw. Kraft!

Bei ideal magnetisierbarem Eisen können die Feldverhältnisse zwischen den Polflächen analog zu jenen zwischen den ungleichnamig geladenen Elektroden eines Plattenkondensators betrachtet werden (Bild 2.4.4-9).

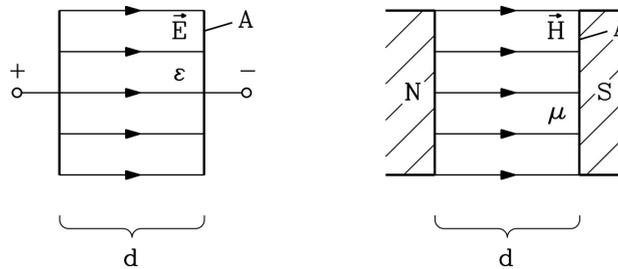


Bild 2.4.4-9: Idealisiert homogenes Feld: links: Plattenkondensator, rechts: Magnetfeld zwischen planparallelen Polflächen.

Bei gleichen Abmessungen ( $A = 1 \text{ m}^2, d = 1 \text{ mm}$ ) und Luft als Dielektrikum ( $\epsilon = \epsilon_0$ ) bzw. als nichtmagnetisierbares Medium ( $\mu = \mu_0$ ) existieren folgende Beschränkungen für die Ausführung als Wandler:

- $E_D = 40 \text{ kV/cm}$  als Durchschlagsfeldstärke in Luft bei  $d = 1 \text{ mm}$  im Homogenfeld!  
Bei kleineren Abmessungen steigt  $E_D$  an, was für die Miniaturisierung kapazitiver Wandler vorteilhaft ist.
- Die magn. Flussdichte im Eisen ist auf  $B < 1.7 \text{ T}$  als Sättigungsflussdichte von Eisen beschränkt. Bei  $B > 1.7 \text{ T}$  muss auch Strom für die Eisenmagnetisierung verwendet werden. Die „Kondensator“-Näherung des Luftspaltfelds verliert ihre Gültigkeit.

1) Energie im elektrostatischen Feld bei  $x = 0$  (keine Plattenverschiebung):

$$W_e(0) = A \cdot d \cdot \frac{\epsilon \cdot E^2}{2} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \frac{8.854 \cdot 10^{-12} \text{ As/(Vm)} \cdot (4 \cdot 10^6)^2 \left(\frac{\text{V}}{\text{m}}\right)^2}{2} = 0.071 \text{ J}$$

2) Energie im magnetostatischen Feld:

$$W_m(0) = A \cdot d \cdot \frac{B^2}{2\mu} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \frac{1^2 (\text{Vs/m}^2)^2}{2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/(Am)}} = 397.9 \text{ J}, \quad W_m / W_e = 5700 !$$

Kraft im  $E$ -Feld (Spannungsvorgabe  $u$ ) und im  $H$ -Feld (Stromvorgabe  $i$ ):

$$F_e(x) = \frac{dW_e^*}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{\epsilon \cdot A}{d+x} \cdot \frac{u^2}{2} \right) = - \frac{\epsilon \cdot A}{(d+x)^2} \cdot \frac{u^2}{2},$$

$$F_e(x=0) = - \frac{\epsilon \cdot A}{d^2} \cdot \frac{u^2}{2} = - \frac{C}{d} \cdot \frac{u^2}{2} = - \frac{1}{d} \cdot \frac{Q^2}{2C} = - \frac{W_e(0)}{d},$$

$$F_m(x) = \frac{dW_m^*}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{\mu_0 \cdot N^2 \cdot A}{d+x} \cdot \frac{i^2}{2} \right) = - \frac{\mu_0 \cdot N^2 \cdot A}{(d+x)^2} \cdot \frac{i^2}{2},$$

$$F_m(x=0) = - \frac{\mu_0 \cdot N^2 \cdot A}{d^2} \cdot \frac{i^2}{2} = - \frac{L}{d} \cdot \frac{i^2}{2} = - \frac{1}{d} \cdot \frac{\Psi^2}{2L} = - \frac{W_m(0)}{d}.$$

Die magnetische Kraft ist um  $\frac{F_m(x=0)}{F_e(x=0)} = \frac{W_m(0)}{W_e(0)} = 5700$  größer als die elektrische Kraft.

Das magnetische Feld erlaubt wesentlich größere Energiedichten bzw. Kräfte bei gleichem Volumen. Daher werden bei größeren Leistungen bzw. Kräften bevorzugt elektromagnetische Wandler eingesetzt! Mikro-Wandler sind aber meist elektrische Wandler. Hier werden elektrostatische Kräfte z. B. als Piezoeffekt-Kräfte verwendet, weil

- 1) Ladungsanordnungen sich wesentlich besser miniaturisieren lassen als elektrisch isolierte Drahtspulen-Körper,
- 2) bei kleinen Abständen im Sub- $\mu\text{m}$ -Bereich die Durchschlagsfeldstärke  $E_D$  deutlich erhöht ist. Die Kräfte in elektrischen Wandlern sind aber i. A. sehr klein.

#### 2.4.5 Elektromagnetische Energie- und Kraftberechnung mit numerischen Programmen

Es werden für die numerische zwei- und dreidimensionale Feldberechnung unterschiedliche Methoden zur Diskretisierung des Feldraums angewandt.

Bei der **Methode der Finiten Differenzen** wird die Geometrie mit einem regelmäßigen Netz diskretisiert (3D: Quader- od. Tetraederelemente, 2D: Rechteck- od. Dreieckelemente). Aus den *Maxwell*-Differential-Gleichungen werden damit Differenzgleichungen für z. B.  $B$ ,  $H$  gebildet und für Vorgaben der Quellen (el. Ladungen, el. Ströme) gelöst. Nachteilig ist die stufige Approximation von i. A. gekrümmten Konturflächen (3D) bzw. Konturlinien (2D), die unterschiedliche Feldbereiche abgrenzen.

Bei der **Methode der Finiten Integration** wird die Geometrie ähnlich diskretisiert, aber die *Maxwell*-Differential-Gleichungen werden mit ihren Operatoren rot:  $\nabla \times (\cdot)$ , div:  $\nabla(\cdot)$ , grad:  $\nabla(\cdot)$  weiterhin als Differentialoperatoren-Gleichungen geführt, die auf zwei zueinander um eine halbe Gitternetzteilung verschobenen Gittern formuliert werden.

Bei der **Methode der Finiten Elemente** wird die Geometrie mit einem i. A. UNregelmäßigen Netz diskretisiert, das z. B. in 3D aus Tetraedern und 2D aus Dreiecken besteht. Dadurch können die Konturflächen bzw. Konturlinien der realen Geometrie BESSER angenähert wird. Anstelle der *Maxwell*-Differential-Gleichungen wird über den *Lagrange*-Formalismus (Kap. 4) das zugehörige Variationsproblem der „minimalen Wirkung“ formuliert. Damit wird z. B. das Vektorpotential  $A$  in den Knoten (Ecken der finiten Elemente) und daraus mit linearen oder quadratischen Interpolationsfunktionen das Feld  $B$  gemäß  $\vec{B} = \text{rot}\vec{A} = \nabla \times \vec{A}$  annähernd (abhängig von der Feinheit der Diskretisierung und der numerischen Auflösung) berechnet.

Eine weitere, weniger häufig verwendete Methode ist die **Boundary-Element**-Methode.

Mit der Feldlösung über eine dieser o. g. Methoden wird die **el.-magn. Kraftberechnung auf einen Körper** mit zwei unterschiedlichen Methoden ausgeführt.

##### a) Berechnung aus der Feldenergieänderung über die „virtuelle“ Verschiebung $\delta s$ :

Mit dieser „virtuellen“ Verschiebung  $\delta s$  des betrachteten Körpers wird das Feld für je zwei benachbarte Körperlagen infolge einer Verschiebung der Körper-Netzknöten um den Vorgabewert  $\delta s$  berechnet. Aus beiden Feldlösungen wird über die Feldenergie-Differenz  $\delta W_e$  bzw.  $\delta W_m$  die Kraft  $F_e = -\delta W_e / \delta s$  bzw.  $F_m = -\delta W_m / \delta s$  auf den Körper in  $s$ -Richtung berechnet.

##### b) Berechnung mit den *Maxwell*-Spannungen:

Aus den Feldwerten der Feldlösung werden die 4 oder 9 Komponenten des *Maxwell*'schen Spannungstensors auf einer vorgegebenen (geschlossenen) Oberfläche um den Körper

berechnet, und daraus die resultierende Kraft auf den eingeschlossenen Körper mit ihrer Richtung anhand der einzelnen Kraftkomponenten ermittelt.

**2.5 Einführendes Beispiel: Kopplung eines mechanischen mit einem el.-magn. System**

In Bild 2.5-1 ist die Kopplung eines mechanischen mit einem el.-magn. System dargestellt. Die Spule wird aus einer idealen Spannungsquelle  $u = \text{konst.}$  (Innenwiderstand = 0) mit dem Strom  $i$  gespeist. Diese spannungsgespeiste Spule hat den Innenwiderstand  $R$  und die lageabhängige Induktivität  $L(x)$ . Sie ist eine „dünne Spule“ mit gegenüber den sonstigen Abmessungen sehr kleiner Spulendicke  $d$  (Bild 2.5-2), hat die Windungszahl  $N$  und einen ideal magnetisierbaren Eisenhohlzylinder ( $\mu \rightarrow \infty$ ) außen als Träger. In ihrem Inneren bewegt sich mit dem Luftspalt  $\delta$  reibungsfrei ein längsverschiebbarer, ideal magnetisierbarer Eisenzylinder mit der Masse  $m$  und der Positionscoordinate  $x$ , der über eine masselose lineare Feder (Federkonstante  $k = \text{konst.!$ ) an einem festen, nicht näher dargestellten Rahmen fixiert ist. Der Schwerkräfteinfluss wird vernachlässigt.

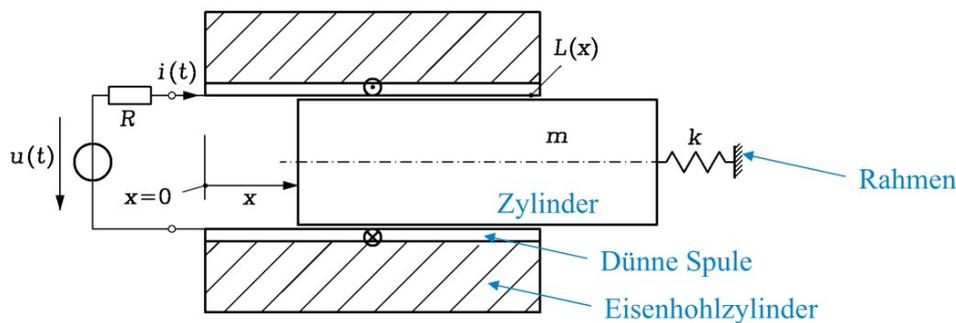


Bild 2.5-1: Kopplung eines mechanischen mit einem el.-magn. System

In der symmetrischen Lage des Eisenzylinders bei  $x = 0$  wird angenähert die Spuleninduktivität mit dem Feldbild Bild 2.5-2 berechnet.

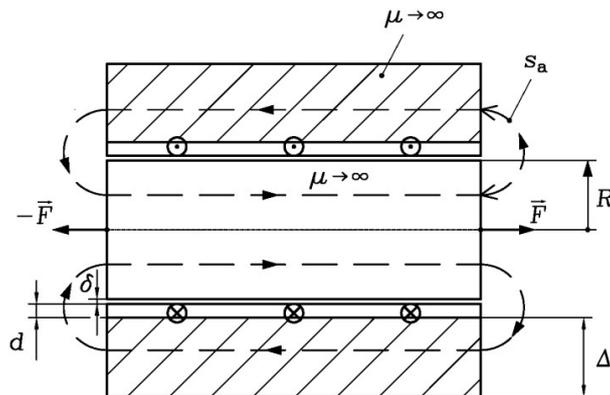


Bild 2.5-2: Stark vereinfachtes Feldbild der stromdurchflossenen Spule bei symmetrischer Lage des Eisenzylinders, weshalb mit diesem Feldbild die Selbstinduktivität  $L$  viel zu klein berechnet wird.

Bei der symmetrischen Lage bei  $x = 0$  ergibt sich ein symmetrisches  $B$ -Feld, so dass sich die in  $x$ -Richtung gerichteten Magnetkräfte  $F = F_m$  links und rechts aufheben! Wegen der Eisenpermeabilität  $\mu \gg \mu_0$  ist  $H_{Fe}$  sowohl im Eisenträger als auch im Eisenzylinder Null. Die stirnseitigen „mittleren“ Streufeldlinienlängen  $s_a$  werden halbkreisförmig angenähert. Der

Durchflutungssatz (2.5-1) mit der geschlossenen Kurve  $C$  als Feldlinie  $B$  liefert für das stirnseitige Feld, das links und rechts gleich groß ist,

$$\Theta = N \cdot i = \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} \approx H_{Fe} \cdot s_{Fe} + H_a \cdot 2s_a \approx H_a \cdot 2s_a \Rightarrow B_a = \mu_0 H_a = \mu_0 \cdot \Theta / (2s_a). \quad (2.5-1)$$

Der *Maxwell'scher* Zug  $F$  ist wegen des links und rechts gleich großen Felds nach beiden Seiten entgegengesetzt gleich groß, so dass der Eisenzylinder mit der Masse  $m$  kräftefrei ist!  
Die Flussverkettung der Spule

$$\Psi = N \cdot \Phi = N \cdot \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} \approx N \cdot B_a \cdot A = \mu_0 \cdot N^2 \cdot i \cdot A / (2s_a) \quad (2.5-2)$$

führt zur Selbstinduktivität bei  $x = 0$

$$L(x=0) = \Psi / i = \mu_0 \cdot N^2 \cdot A / (2s_a) = \mu_0 \cdot N^2 \cdot R^2 \pi / (2s_a). \quad (2.5-3)$$

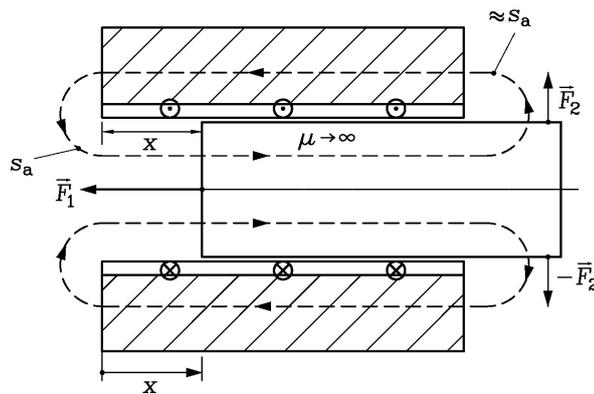


Bild 2.5-3: Stark vereinfachtes Feldbild der stromdurchflossenen Spule bei unsymmetrischer Lage des Eisenzylinders.

Wird der Eisenzylinder z. B. nach rechts um  $x$  verschoben (Bild 2.5-3), so werden die stirnseitigen „mittleren“ Feldlinien in Luft gegenüber der symmetrischen Lage verzerrt. Ihre Länge wird links mit  $x + s_a$  und rechts weiterhin mit  $s_a$  abgeschätzt. Wieder wird der Durchflutungssatz (2.5-4) für eine geschlossene Kurve  $C$  als Feldlinie  $B$  angewendet, wobei weiterhin  $H_{Fe}$  im Eisen Null ist.

$$x > 0: \Theta = N \cdot i = \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} \approx H_a \cdot x + H_a \cdot 2s_a \Rightarrow B_a = \mu_0 H_a = \frac{\mu_0 \cdot \Theta}{x + 2s_a}. \quad (2.5-4)$$

Die stirnseitige Flussdichte  $B_a$  tritt rechts nach oben und unten aus dem Eisenzylinder aus, links aber horizontal. Das Hüllflächenintegral der *Maxwell-Zugspannungen* (2.5-7) über den Eisenzylinder ergibt die Teilkräfte  $F_1$  und  $\pm F_2$ . Die Kräfte  $\pm F_2$  heben sich au. Es verbleibt ein *Maxwell'scher* Zug  $F_1$  nach links, so dass der Eisenzylinder  $m$  magnetisch nach links gezogen wird. Mit der Spulen-Flussverkettung analog zu (2.5-2), aber mit dem Feld (2.5-4) wird die Spulenselbstinduktivität in Abhängigkeit von  $x$  (2.5-5) bestimmt.

$$x > 0: L(x) = \Psi(x) / i \approx N \cdot B_a(x) \cdot A / i = \mu_0 \cdot N^2 \cdot A / (x + 2s_a). \quad (2.5-5)$$

Für  $x = 0$  wird als Kontrolle der Rechnung wieder (2.5-3) erhalten. Dieselbe Rechnung wird auch für  $x < 0$  durchgeführt mit dem Ergebnis (2.5-6) und  $L(0) = \mu_0 \cdot N^2 \cdot A / (2s_a)$ .

$$x \geq 0: \frac{L(x)}{L(0)} = \frac{1}{1 + x/(2s_a)}, \quad x \leq 0: \frac{L(x)}{L(0)} = \frac{1}{1 - x/(2s_a)} \text{ bzw. } \frac{L(x)}{L(0)} = \frac{1}{1 + |x|/(2s_a)}. \quad (2.5-6)$$

Die graphische Darstellung von (2.5-6) in Bild 2.5-4 zeigt bei  $x = 0$  einen unphysikalischen Knick im Kurvenverlauf auf Grund der gemachten Feldvereinfachung.

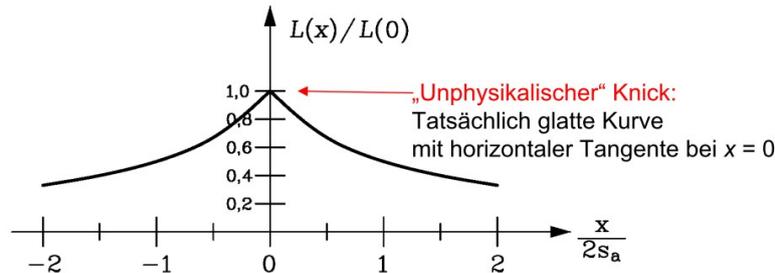


Bild 2.5-4: Stark vereinfacht berechnete Spulenselbstinduktivität in Abhängigkeit der Lage des Eisenzylinders.

Die zu Bild 2.5-3 gehörende, nach links wirkende Magnetkraft (= negative  $x$ -Richtung) ist

$$-F_1 \cdot \vec{e}_x = \oint_A \vec{T} \cdot d\vec{A} = -\vec{e}_x \cdot \int_A B_a^2 / (2\mu_0) \cdot dA = -\frac{\mu_0 \cdot (N \cdot i)^2 \cdot A}{2 \cdot (x + 2s_a)^2} \cdot \vec{e}_x. \tag{2.5-7}$$

Die alternative Kraftberechnung über die „virtuelle“ Verschiebung des Eisenzylinders muss so durchgeführt werden, dass sich nur  $x$  als virtuelle Verschiebung ändert, während die ggf. zeitlich veränderlichen Größen  $u, i$  wegen der festgehaltenen Zeit konstant gehalten werden! Es wird für die in  $x$ -Richtung auf den Eisenzylinder positiv gezählte Kraft  $F_m$  z. B. die magn. Ko-Energie zur Berechnung verwendet.

$$F_m \cdot \vec{e}_x = -F_1 \cdot \vec{e}_x = \frac{dW_m^*}{dx} \cdot \vec{e}_x = \frac{d}{dx} \left( L(x) \cdot \frac{i^2}{2} \right) \cdot \vec{e}_x = \frac{i^2}{2} \cdot \frac{d}{dx} \left( \mu_0 \cdot \frac{N^2 A}{x + 2s_a} \right) \cdot \vec{e}_x, \tag{2.5-8}$$

$$F_1 = \frac{i^2}{2} \cdot \mu_0 \cdot \frac{N^2 A}{(x + 2s_a)^2}, \text{ identisch mit (2.5-7)}. \tag{2.5-9}$$

Bei  $x = 0$  ist der Eisenzylinder wegen der Feldsymmetrie magnetisch kräftefrei; die resultierende Magnetkraft muss Null sein. Mit der Induktivität (2.5-6) ist sie das aber nicht,

denn für z. B.  $x \geq 0$ :  $\frac{L(x)}{L(0)} = \frac{1}{1 + x/(2s_a)}$  folgt

$$-F_1(0) \cdot \vec{e}_x = \frac{dW_m^*}{dx}(x=0) \cdot \vec{e}_x = \vec{e}_x \cdot \frac{d}{dx} \left( L(x) \cdot \frac{i^2}{2} \right) \Big|_{x=0} = \vec{e}_x \cdot \underbrace{L'(0)}_{<0} \cdot \frac{i^2}{2} \neq 0, \text{ denn}$$

$$L'(x) = -\frac{L(0)}{(1 + (x/(2s_a)))^2} \cdot \frac{1}{2s_a} \Rightarrow L'(0) = -\frac{L(0)}{2s_a} < 0.$$

Dies liegt am unphysikalische Knick in Bild 2.5-4. Es ist also eine genauere Induktivitätsberechnung erforderlich z. B. über eine numerische Feldberechnung, die im Folgenden dargestellt wird. Aus ihr lässt sich folgender Näherungs-Ausdruck für  $L(x)$  mit einem „glatten“ Verlauf ermitteln:

$$\frac{L(x)}{L(0)} \approx \frac{1}{1 + (x/s_a)^2} \Rightarrow L'(0) = -L(0) \cdot \frac{2x/s_a^2}{(1 + (x/s_a)^2)^2} \Big|_{x=0} = 0, \tag{2.5-10}$$

der dann auch die Magnetkraft Null bei  $x = 0$  ergibt.

$$-F_1(0) = \frac{dW_m^*}{dx}(x=0) = \frac{d}{dx} \left( L(x) \cdot \frac{i^2}{2} \right) \Big|_{x=0} = L'(0) \cdot \frac{i^2}{2} = 0. \tag{2.5-11}$$

Für eine numerische Feldberechnung muss allerdings die Geometrie des Systems zahlenmäßig festgelegt werden, so dass wir eine einfache Dimensionierung des Wandlers in Bild 2.5-5 vornehmen müssen. Wir machen diese Dimensionierung so, dass der Wandler mit diesen Angaben auch gebaut werden kann. Wir wählen runden lackisolierten Kupferdraht mit der Leiterquerschnittsfläche  $q_c$  ( $q_c$  gilt ohne Isolierung) für die Spule.

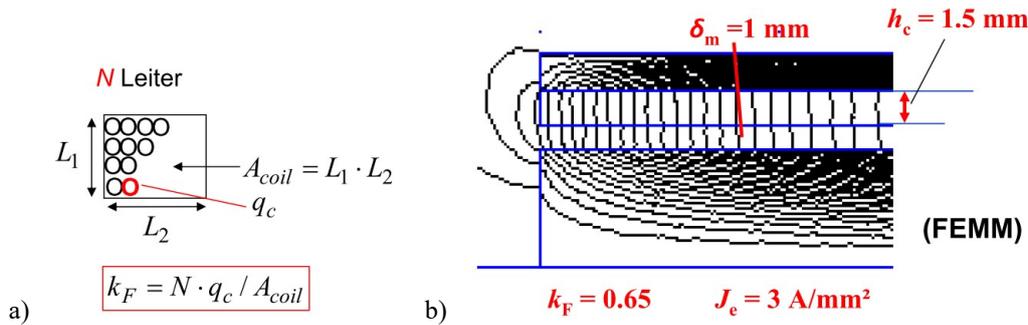


Bild 2.5-5: a) Runddraht-Spulenfüllfaktor, b) Numerisch berechnetes rotationssymmetrisches  $B$ -Feldbild der Spule bei symmetrischer Lage des Eisenzylinders (Finite-Elemente-Programm  $FEMM$ ).

Der ausführbare **Runddrahtspulen-Füllfaktor**  $k_F$  ist definiert als Leiter-Summenquerschnittsfläche, dividiert durch die Spulenquerschnittsfläche  $A_{coil}$  (Bild 2.5-5a). Bei  $N$  Windungen und el. Serienschaltung aller Windungen ist die Leiter-Summenquerschnittsfläche  $N \cdot q_c$  und

$$k_F = N \cdot q_c / A_{coil} \tag{2.5-12}$$

Typisch erreichbare Werte auf der Wickelmaschine bei ausreichend großer Drahtvorspannung sind  $k_F = 0.65$ .

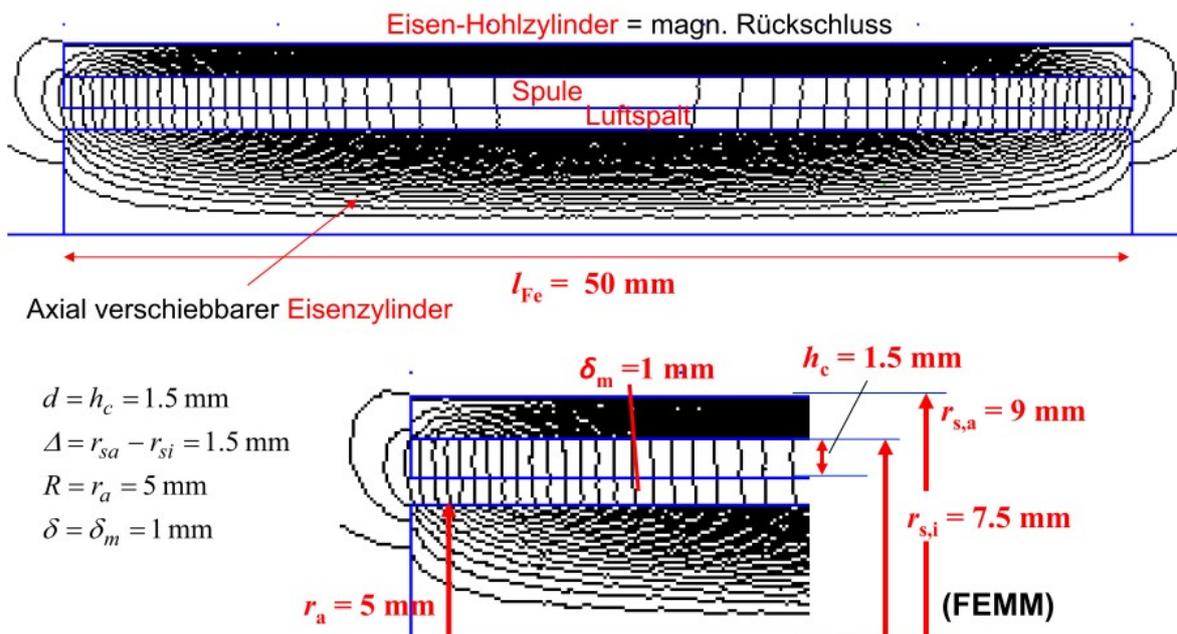


Bild 2.5-6: Modell-Abmessungen des Wandlers von Bild 2.5-1 und numerisch berechnetes rotationssymmetrisches  $B$ -Feldbild der Spule bei symm. Lage des Eisenzylinders (Finite-Elemente-Programm  $FEMM$ ).

**Beispiel 2.5-1:** Auslegungsbeispiel zum Wandler Bild 2.5-1:

Durchmesser und Querschnittsfläche des blanken Kupferrunddrahts:

$d_c = 0.75 \text{ mm}$ ,  $q_c = d_c^2 \cdot \pi / 4 = 0.44 \text{ mm}^2$ . Wird keine forcierte Luftkühlung vorgesehen, so muss die natürliche Luftbewegung die Spule so kühlen, dass die für den verwendeten Lackisolerstoff zulässige maximale Dauertemperatur nicht überschritten wird. Gemäß IEC 60034-1 ist für gängige Isolierstoffe der Wärmeklasse F eine Dauertemperatur von  $155 \text{ }^\circ\text{C}$  zulässig, wobei die Umgebungstemperatur und damit die „kühlende“ Luft  $40 \text{ }^\circ\text{C}$  betragen dürfen. Dann sollte eine Dauerstromdichte von ca.  $4 \dots 5 \text{ A/mm}^2$  nicht überschritten werden. Wir wählen  $I = 2 \text{ A}$ ,  $J = I / q_c = 4.6 \text{ A/mm}^2$  und  $N = 110$  Windungen. Für die „dünne“ Spule

ist die Spulenhöhe  $h_c = 1.5 \text{ mm}$  viel kleiner als die Spulenlänge  $l_{Fe} = 50 \text{ mm}$ . Wir erhalten so zwei Drahtlagen  $2d_c = 2 \cdot 0.75 = 1.5 \text{ mm} = h_c$  mit  $110/2 = 55$  Windungen je Lage, was einer Mindest-Spulenlänge  $55d_c = 55 \cdot 0.75 = 41.25 \text{ mm} < l_{Fe} = 50 \text{ mm}$  entspricht, wobei der Lackauftrag nicht berücksichtigt ist. Er wird im Füllfaktor erfasst.

$$k_F = N \cdot q_c / A_{\text{coil}} = N \cdot q_c / (h_c \cdot l_{Fe}) = 110 \cdot 0.44 / (1.5 \cdot 50) = 0.645 < 0.65.$$

Die weiteren Abmessungen sind in Bild 2.5-6 angegeben.

Im numerischen Modell wird häufig, um den Modellierungsaufwand klein zu halten, nicht jede Drahtwindung einzeln modelliert, sondern für die Felderregung in die Spulen-Querschnittsfläche  $A_{\text{coil}}$  eine kleinere **Ersatzstromdichte**  $J_e$  gleichmäßig eingeprägt. Die Ersatzstromdichte  $J_e$  ist die geforderte el. Durchflutung  $\Theta = N \cdot I$ , geteilt durch die Spulen-Querschnittsfläche  $A_{\text{coil}}$ .

$$J_e = \frac{N \cdot I}{A_{\text{coil}}} = \frac{N \cdot I}{N \cdot q_c / k_F} = k_F \cdot (I / q_c) = k_F \cdot J \Rightarrow J_e = 0.65 \cdot 4.6 = 3 \text{ A/mm}^2. \quad (2.5-13)$$

Mit dieser Ersatzstromdichte wurden u. a. die Feldbilder in Bild 2.5-5 und 2.5-6 berechnet. Die  $B(H)$ -Kennlinien für die Eisenteile müssen ebenfalls festgelegt werden. Hier soll das mathematische Modell  $\mu_{Fe} \rightarrow \infty$  möglichst gut angenähert werden, deshalb wird der unrealistisch hohe Wert  $\mu_{Fe} / \mu_0 = 100\,000$  gewählt (Bild 2.5-7). Weiter muss dem Programm mitgeteilt werden, welche willkürlich festzulegenden Grenzen für den Feldraum gewählt werden. Da das Feld innerhalb dieser Grenzen eingeschlossen ist, kann bei zu engen Grenzen die Feldgröße ggf. zu groß berechnet werden. Hier wird etwa ein Abstand  $l_{Fe}$  vom Wandler zur Grenze festgelegt. Eine zweite Rechnung mit doppelt so großem Abstand und entsprechend mehr finiten Elementen brachte zwar eine längere Rechenzeit, aber nur ein sehr kleine Änderung im hier interessierenden Luftspaltfeld innerhalb  $\delta = \delta_m = 1 \text{ mm}$ . Da der Wandler rotationssymmetrisch ist, wird für das Programm eine 2D-Rechnung im Zylinderkoordinatensystem  $(r, \varphi, z)$  verwendet mit der Zylinderachse als  $z$ -Achse des Wandlers, so dass  $z$  dem Symbol  $x$  der analytischen Rechnung (2.5-5, 2.5-6) entspricht. Es ist die Stromdichte in Umfangsrichtung einzuprägen  $(0, J_e, 0)$ . Es wird der Feldvektor  $(B_r, 0, B_z)$  aus dem Vektorpotential  $(0, A_\varphi, 0)$  erhalten. Die Vernetzung des Feldbereichs macht das Programm automatisch. Es sollen aber die Wandlergeometrie und v. a. der Luftspaltbereich hinreichend fein vernetzt sein. Die Luftbereiche um den Wandler dürfen wegen der dort geringeren Streufeldgröße mit ihrem relativ kleinen Gradienten (Feldänderung je Längeneinheit) ohne große Genauigkeitseinbuße gröber vernetzt werden, wodurch auch Rechenzeit gespart wird. Im Luftspaltbereich selbst sollen zumindest drei Lagen von finiten Elementen verwendet werden als möglichst gleichseitige Dreiecke (2D) (wie bei FEMM) oder Tetraeder (3D) bzw. etwa quadratische Rechtecke (2D) oder würfelförmige Quader (3D).

Bei asymmetrischer Lage des Eisenzyllinders nimmt das Streufeld zu, so dass größere Feldbereiche um den Wandler bei der numerischen Berechnung berücksichtigt werden müssen (Bild 2.5-8 und 2.5-9).

Im „Post-processing“ berechnet das Programm aus den Felddaten des Vektorpotentials in den Knoten (Ecken) der finiten Elemente die magnetische Feldenergie  $W_m$  im modellierten Feldraum, die wegen der hier linear gewählten Verhältnisse ( $\mu = \text{konst.}!$ ) numerisch identisch mit der Ko-Energie ist. Aus ihr wird die Spuleninduktivität gemäß  $L \cdot I^2 / 2 = W_m = W_m^*$  an den sechs Stützstellen  $x = 0, l_{Fe}/4, l_{Fe}/2, 3l_{Fe}/4, l_{Fe}, 5l_{Fe}/4$  bestimmt (Bild 2.5-11). Bei  $x = 0$  tritt im  $L(x)$ -Verlauf eine horizontale Tangente auf, so dass die Magnetkraft dort Null ist! Mit den Abmessungen aus Bild 2.5-5 und Bild 2.5-6 erhalten wir zunächst

$$s_a = (R + \Delta + 2d + 2\delta) \cdot \pi / 4 = (5 + 1.5 + 2 \cdot (1.5 + 1)) \cdot \pi / 4 = 9 \text{ mm} \text{ und damit}$$

$L(x=0) = \mu_0 \cdot N^2 \cdot R^2 \pi / (2s_a) = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 110^2 \cdot 0.005^2 \cdot \pi / (2 \cdot 0.009) = 0.066 \text{ mH}$ , also eine mit 5% viel kleinere Induktivität als 1.21 mH in Bild 2.5-11. Es wurde ein wesentlicher Feldanteil in Bild 2.5-2 nicht berücksichtigt: das Feld im Spulenraum (Bild 2.5-12)! Dieses Feld im Spulenraum kann analytisch näherungsweise berechnet werden (Bild 2.5-13), wobei die Krümmung der Rotationssymmetrie der Einfachheit halber vernachlässigt wird. Mit den Angaben aus Bild 2.5-13 wird der Durchflutungssatz (2.5-14) angeschrieben. Mit  $l_{Fe} = l$  und mit  $\mu_{Fe} \rightarrow \infty \Rightarrow H_{Fe} = 0$  folgt die Spulen-Radialfeldkomponente  $B(\xi)$  an der Stelle  $\xi$ .

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = \Theta : \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = 2H(\xi) \cdot (h_c + \delta_m) = \Theta(\xi) = \underbrace{2\xi \cdot h_c \cdot J_e}_{N \cdot i \cdot 2\xi / l} \quad (2.5-14)$$

$$B(\xi) = \mu_0 \cdot N \cdot i \cdot \xi / (l \cdot (h_c + \delta_m)), \quad -l/2 \leq \xi \leq l/2. \quad (2.5-15)$$

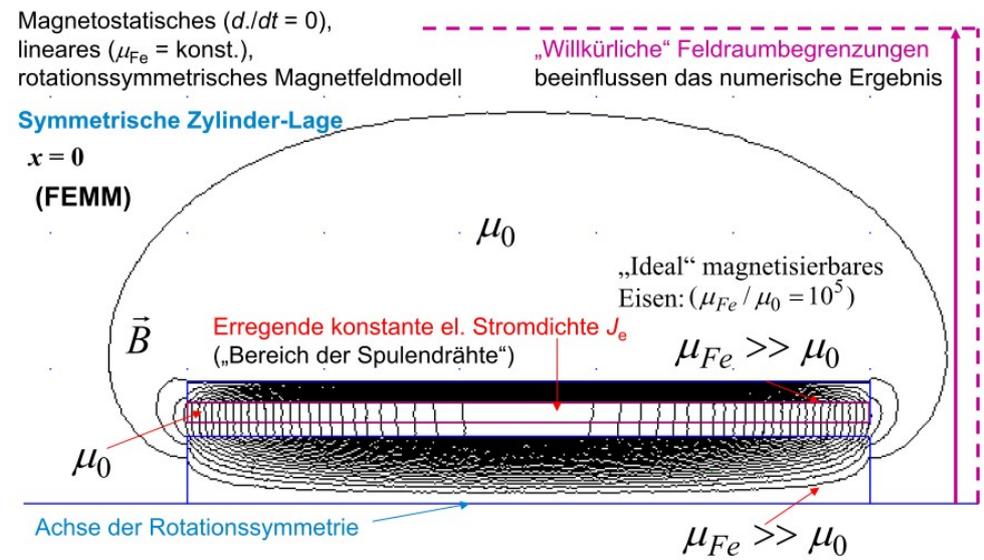


Bild 2.5-7: Modellgrenzen für das numerisch berechnete rotationssymmetrische  $B$ -Feldbild der Spule des Wandlers von Bild 2.5-1 bei symmetrischer Lage des Eisenzylinders (Finite-Elemente-Programm FEMM).

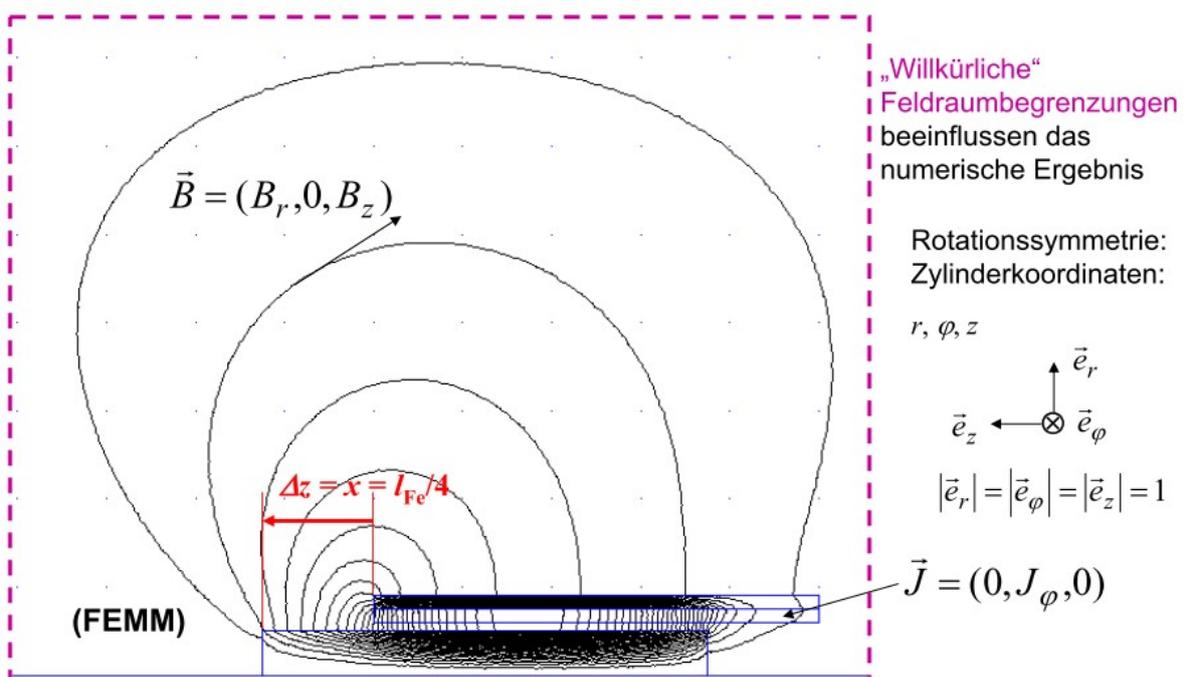


Bild 2.5-8: Erweiterte Modellgrenzen für das numerisch berechnete rotationssymmetrische  $B$ -Feldbild der Spule des Wandlers von Bild 2.5-1 bei asymmetrischer Lage  $\Delta z = l_{Fe}/4$  des Eisenzylinders (Programm FEMM).

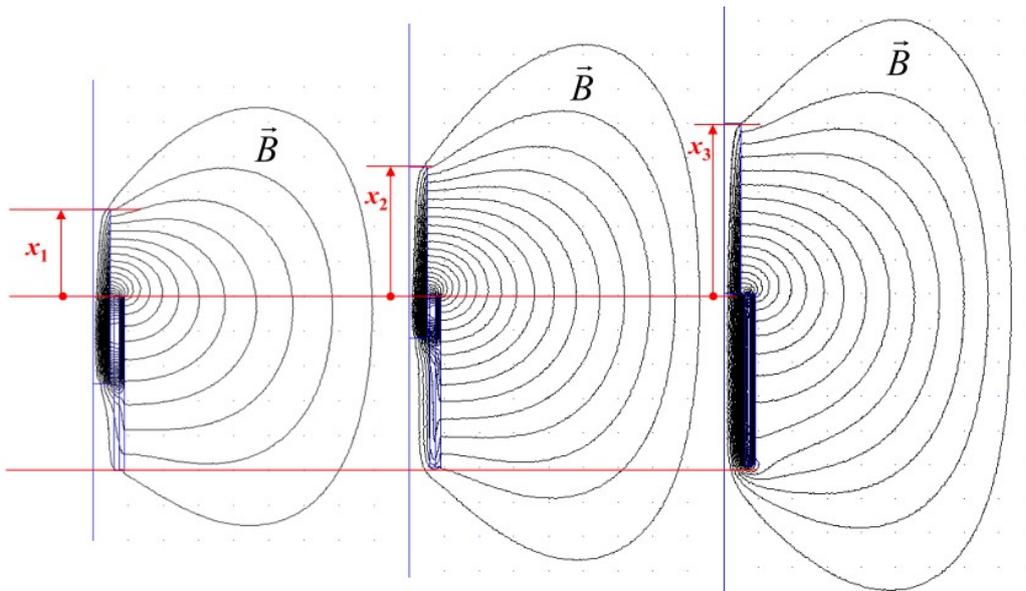


Bild 2.5-9: Erweiterte Modellgrenzen für das numerisch berechnete rotationssymmetrische  $B$ -Feldbild der Spule des Wandlers von Bild 2.5-1 bei variabler asymmetrische Zylinderlage  $\Delta z$ :  $x_1 = l_{Fe}/2 < x_2 = 3l_{Fe}/4 < x_3 = l_{Fe}$  (Programm *FEMM*).

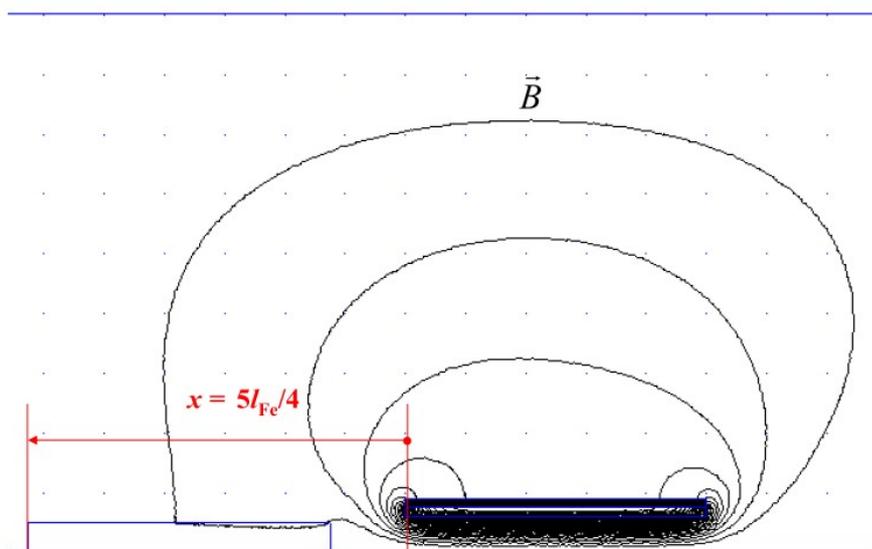


Bild 2.5-10: Der Zylinder befindet sich mit  $\Delta z = x = 5l_{Fe}/4$  außerhalb der Spule, so dass das  $B$ -Feld sich hauptsächlich über Luftbereiche schließen muss und daher sehr klein wird. Es sind gegenüber Bild 2.5-9 nochmals erweiterte Modellgrenzen nötig (Programm *FEMM*).

Der Induktivitätsanteil  $L_1$  dieses Felds im Spulenkörper  $h_c$  und Luftspalt  $\delta_m$  bei mittig liegendem Zylinder  $x = 0$  wird aus der magn. Ko-Energie mit der „Ringfläche  $A$ “ berechnet.

$$L_1 \cdot i^2 / 2 = \int_V w_m^* \cdot dV = 2A \cdot \int_0^{l/2} \frac{B^2(\xi)}{2\mu_0} \cdot d\xi, \quad A = \left( R + \frac{h_c + \delta_m}{2} \right) \cdot 2\pi \cdot (h_c + \delta_m), \quad (2.5-16)$$

$$2 \cdot \int_0^{l/2} \frac{B^2(\xi)}{2\mu_0} \cdot d\xi = \frac{[\mu_0 \cdot N \cdot i / (l \cdot (h_c + \delta_m))]^2}{\mu_0} \cdot \underbrace{\int_0^{l/2} \xi^2 \cdot d\xi}_{(l/2)^3 / 3}, \quad (2.5-17)$$

$$L_1 = 2A \cdot \frac{[\mu_0 \cdot N / (l \cdot (h_c + \delta_m))]^2}{3\mu_0} \cdot \left( \frac{l}{2} \right)^3 = \left( 1 + \frac{2R}{h_c + \delta_m} \right) \cdot \pi \cdot (h_c + \delta_m)^2 \cdot \frac{\mu_0 \cdot N^2 \cdot l}{12 \cdot (h_c + \delta_m)^2}, \quad (2.5-18)$$

$$L_1 = \frac{\mu_0 \cdot N^2 \cdot l_{Fe}}{12} \cdot \left(1 + \frac{2R}{h_c + \delta_m}\right) \cdot \pi = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 110^2 \cdot 0.05}{12} \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot 5}{1.5 + 1}\right) \cdot \pi = 0.995 \text{ mH}. \quad (2.5-19)$$

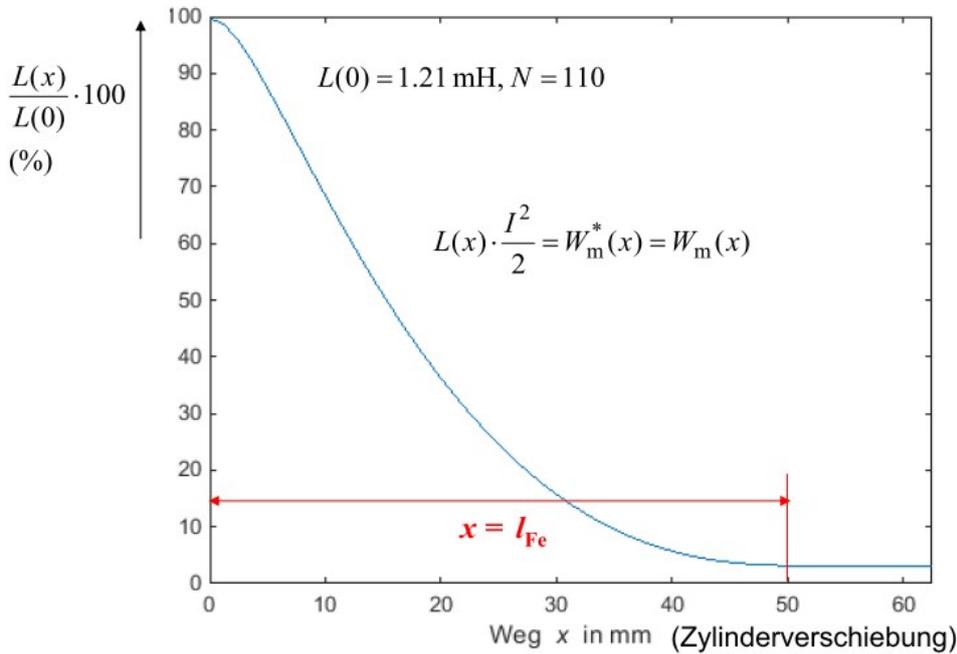


Bild 2.5-11: Numerisch berechnete Spuleninduktivität  $L(x)$  aus der Feldenergie  $W_m$ , wobei die gezeigte Darstellung  $L(x)$  im Anschluss mit MATLAB erfolgte.

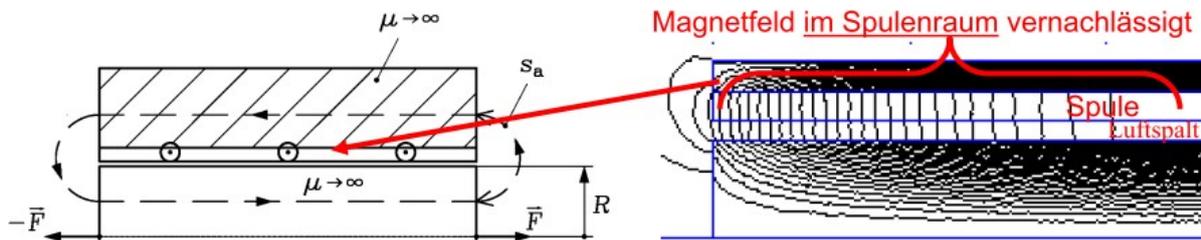


Bild 2.5-12: Die vereinfacht analytisch berechnete Selbstinduktivität  $L$  ist um ca. 1/20 viel zu klein, weil das Magnetfeld im Spulenraum vernachlässigt wurde! Dieses Feld ist aber der Hauptanteil des Spulenfelds!

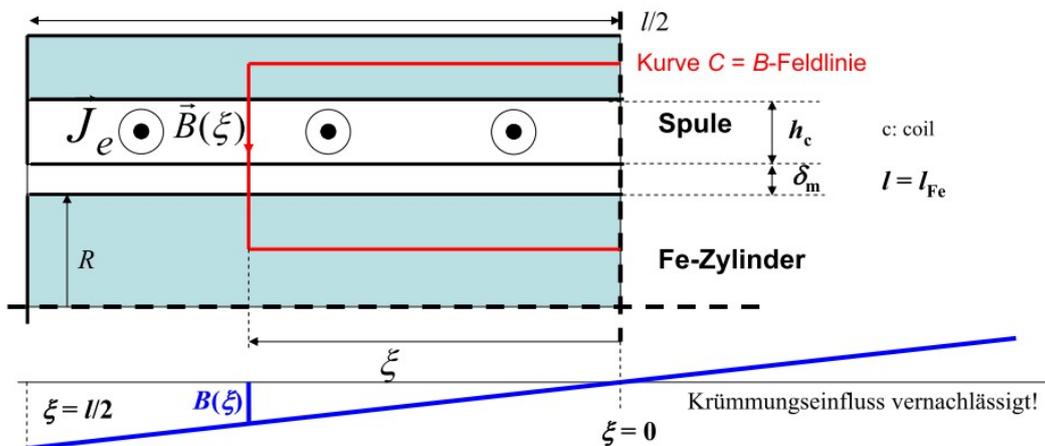


Bild 2.5-13: Halber Wandler: Modell zur analytischen Berechnung der Radialkomponente  $B(\xi)$  im Spulenraum

Mit dem bereits berechneten Anteil  $L_2 = 0.066$  mH des Stirnstreifelfelds ergibt sich die Spulenselbstinduktivität  $L = L_1 + L_2 = 0.995 + 0.066 = 1.06$  mH in brauchbarer Übereinstimmung mit dem numerisch ermittelten Wert 1.21 mH. Der numerische Wert ist um 14% größer ( $1.21/1.06 = 1.14$ ), weil die Krümmung vernachlässigt wurde und das reale Streufeld deutlich größer ist als das analytisch modellierte Streufeld! Die Magnetkraft  $F_1$  kann über das Programm aus den *Maxwell*-Spannungen (Kurve A in Bild 2.5-14) oder gemäß (2.5-11) aus der Induktivitätsänderung berechnet werden ( $F_1(x) = -L'(x) \cdot I^2 / 2$ , Kurve B in Bild 2.5-14). Bei dieser Methode wird die Kurve  $L(x)$  in Bild 2.5-11 über MATLAB an ihren Stützstellen durch eine Spline-Funktion angenähert und deren Ableitung gebildet. Die maximale positive/negative Kraft  $F_1$  tritt numerisch bei einer Zylinderverschiebung  $x^* = \pm 7.5$  mm auf, am Ort der Wendetangente an die Kurve  $L(x)$ . Wird die numerisch ermittelte Kurve  $L(x)$  in Bild 2.5-11 durch die Formel (2.5-10) grob angenähert, so folgt für den Kraftverlauf mit  $\tilde{x} = x/s_a$  (2.5-20) und daraus für den Ort maximaler Kraft mit (2.5-21)  $x^* = \pm s_a = \pm 9$  mm. Diese Abweichung vom numerisch korrekt ermittelten Wert 7.5 mm ist durch die grobe Annäherung (2.5-10) bedingt (Bild 2.5-15).

$$F_1 = \frac{L(0) \cdot I^2}{2} \cdot \frac{2x/s_a^2}{(1+(x/s_a)^2)^2} = \frac{L(0) \cdot I^2}{s_a} \cdot \frac{\tilde{x}}{(1+\tilde{x}^2)^2} \tag{2.5-20}$$

$$\frac{dF_1}{d\tilde{x}} = 0 \rightarrow \frac{1}{(1+\tilde{x}^2)^2} - \frac{\tilde{x} \cdot 2\tilde{x}}{(1+\tilde{x}^2)^3} = 0 \rightarrow \tilde{x}^* = 1 \rightarrow x^* = \pm s_a = \pm 9 \text{ mm} \tag{2.5-21}$$

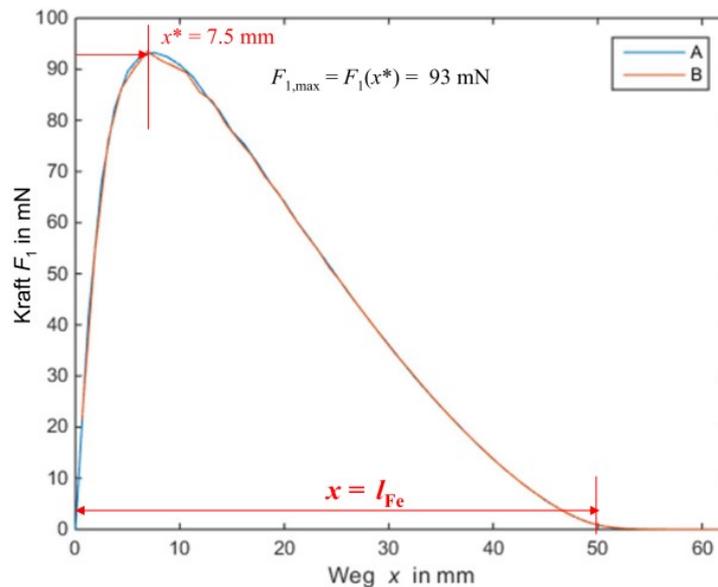


Bild 2.5-14: Die Magnetkraft  $F_1$  wird numerisch A) über das Programm *FEMM* aus den *Maxwell*-Spannungen berechnet oder B) über MATLAB aus der Induktivitätsänderung. Beide Kurven A und B sind nahezu deckungsgleich.

Mit  $x^* = 7.5$  mm und  $L(0) = 1.21$  mH folgt die Maximalkraft bei  $I = 2$  A aus  $F_1(x) = -L'(x) \cdot I^2 / 2$  mit dem numerisch bestimmten Wert  $L'(x^*)/L(0) = -1/(26 \text{ mm})$  zu

$$F_{1,max} = \frac{2^2}{2} \cdot \frac{1.21}{0.026} = 0.093 \text{ N. Mit } x^* = 9 \text{ mm und } L(0) = 1.06 \text{ mH folgt die ca. 25% zu groß}$$

berechnete Maximalkraft mit dem analytisch bestimmten Wert  $L'(x^*)/L(0) = -1/(18 \text{ mm})$  zu

$$F_{1,max} = \frac{2^2}{2} \cdot \frac{1.061}{0.018} = 0.1178 \text{ N.}$$

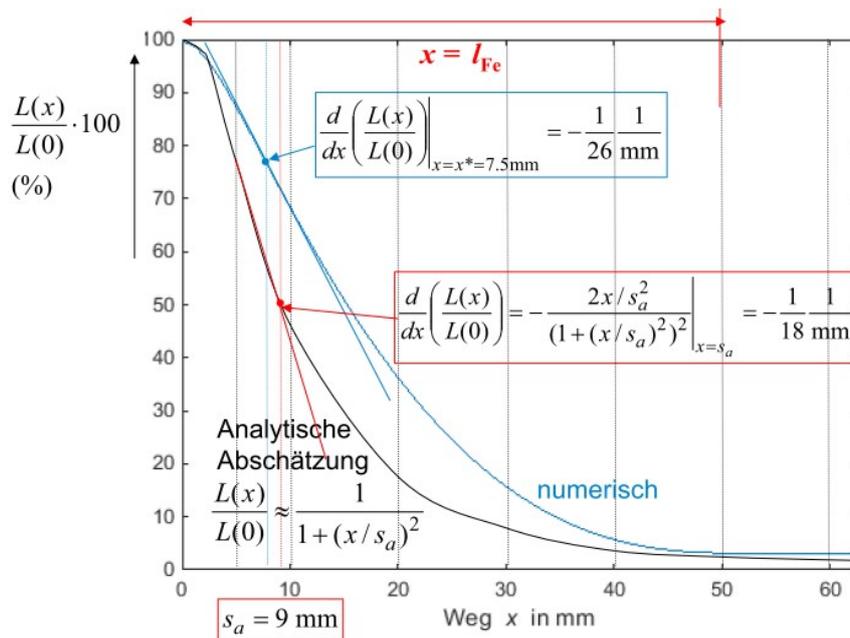


Bild 2.5-15: Vergleich des Verlaufs der Spulenselbstinduktivität  $L(x)$  aus der numerischen Feldberechnung und der analytischen Näherungsformel (2.5-10).

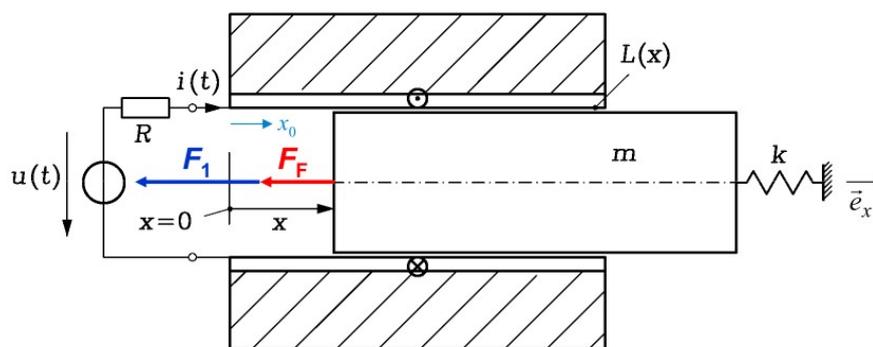


Bild 2.5-16: Elektromechanischer Wandler von Bild 2.5-1 mit eingezeichneten Zählpfeilen für positive Bewegungsrichtung  $x$  und Strom- und Spannungsrichtung  $i, u$  im VZS. Bei  $x = x_0$  ist die Feder  $k$  entspannt.

Der Eisenzylinder (Bild 2.5-16) als starrer Körper wird auf seinen Schwerpunkt mit der dort punktförmig konzentrierten Masse  $m$  reduziert. Die aus Magnetkraft und Federkraft resultierende Kraft auf Körper  $m$  ist mit der Trägheitskraft im Gleichgewicht (Schwerpunktssatz).

$$\text{Trägheitskraft} = m \cdot \ddot{x} \cdot \vec{e}_x = \sum \text{Äußere Kräfte} = -F_F \cdot \vec{e}_x - F_1 \cdot \vec{e}_x \tag{2.5-22}$$

Die lineare Feder  $k$  ist bei  $x = x_0 > 0$  entspannt, so dass die Feder bei  $x > x_0$  nach links drückt (Bild 2.5-16):  $\vec{F}_F = -F_F \cdot \vec{e}_x = -k \cdot (x - x_0) \cdot \vec{e}_x$ . Aus (2.5-22) erhalten wir damit

$$m \cdot \ddot{x} = -F_F - F_1 = -k \cdot (x - x_0) + \frac{i^2}{2} \cdot \frac{dL}{dx} \quad \text{bzw.} \quad m \cdot \ddot{x} + k \cdot (x - x_0) - \frac{i^2}{2} \cdot \frac{dL}{dx} = 0 \tag{2.5-23}$$

als mechanische Systemgleichung. Die elektrische Systemgleichung folgt aus der Kirchhoff'schen Maschengleichung im Verbraucher-Zählpeilsystem (VZS, Bild 2.5-16). Die anliegende äußere, vorgegebene Spannung  $u(t)$  und die an den Klemmen wirksame, durch die Zylinderbewegung und Stromänderung bewirkte induzierte Spannung  $u_i(t) = -d\psi/dt$  (Faraday'sches Induktionsgesetz) müssen den ohm'schen Spannungsfall in der Spule decken.  $u(t) + u_i(t) = R \cdot i(t) \Rightarrow u(t) - d\psi/dt = R \cdot i(t)$ ,  $u(t) = R \cdot i(t) + d(L(x) \cdot i)/dt$  (2.5-24)

Dabei ist mit der Produktregel und der Kettenregel der Differentiation  $u_{i,b}$  die el. Spannung der Bewegungsinduktion zufolge der Zylindergeschwindigkeit  $v(t) = dx/dt$  und  $u_{i,wi}$  die Selbstinduktionsspannung bei ruhendem Zylinder (Ruhinduktion), aber veränderlichem Strom  $i(t)$  zufolge des von ihm verursachten el. Wirbelfelds  $E_{wi}$ .

$$-u_i(t) = \frac{d(L(x) \cdot i)}{dt} = i \cdot \frac{dL(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} + L(x) \cdot \frac{di}{dt} = -u_{i,b}(t) - u_{i,wi}(t) \tag{2.5-25}$$

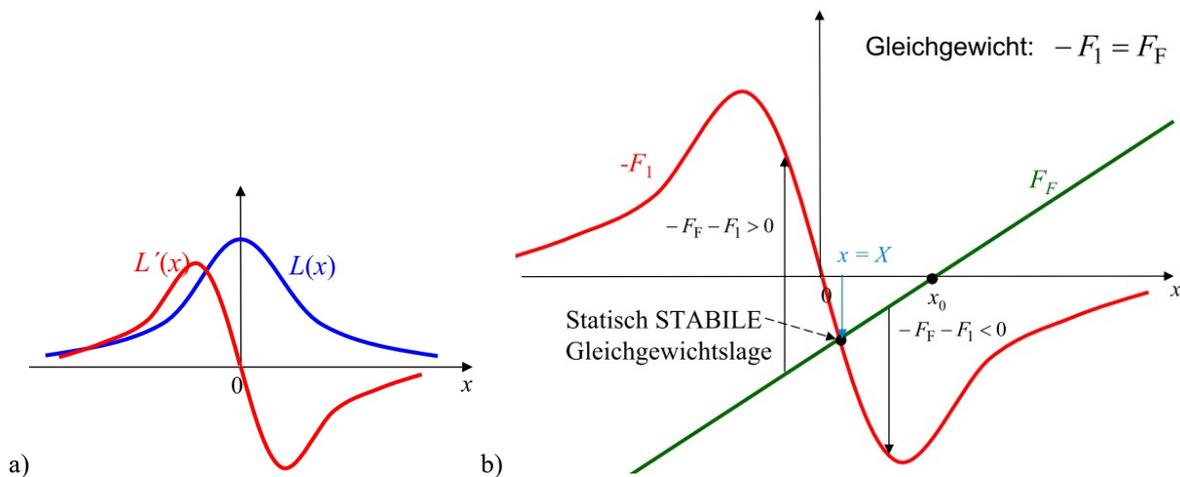
Die Systemgleichungen (2.5-23), (2.5-24) beschreiben das dynamische Verhalten des gekoppelten el.-mech. Systems mit den zwei Unbekannten  $x, i$  bei vorgegebener Spannung  $u(t)$ . Zusätzlich kann eine äußere Kraft  $F$  am Zylinder in  $x$ -Richtung eingeprägt werden, die in (2.5-23) zu berücksichtigen wäre. Das Differentialgleichungssystem (2.5-23), (2.5-24) ist wegen  $L(x), i^2$  und den Produkten aus  $L$  und  $i$  nichtlinear. Das statische Verhalten (= keine zeitlichen Änderungen:  $d./dt = 0 \rightarrow \ddot{x} = \dot{i} = 0$ ) des gekoppelten el.-mech. Systems folgt aus der statischen Strom-Lage-Kennlinie  $i(x) = I(X)$  bei „Gleichgewichtslagen“  $x = X = \text{konst.}$  bei  $i = I = \text{konst.}$  Aus (2.5-23), (2.5-24) folgt

$$0 = m \cdot \ddot{x} = -F_F - F_1 = -k \cdot (x - x_0) + \frac{i^2}{2} \cdot \frac{dL}{dx} \quad \text{und} \quad u = R \cdot I = U = \text{konst.} \tag{2.5-26}$$

Der Gleichstrom  $I$  wird nur durch  $R$  begrenzt und durch die Gleichspannung  $U$  vorgegeben. Bei Fehlen äußerer Kräfte sind Federkraft und Magnetkraft am Ort  $x = X = \text{konst.}$  des Eisenzylinders im statischen Gleichgewicht; die Trägheitskraft ist Null.

$$F_F = k \cdot (X - x_0) = \frac{I^2}{2} \cdot \frac{dL}{dx} \Big|_{x=X} = -F_1 \Leftrightarrow F_F(X) = -F_1(X) \tag{2.5-27}$$

Die **Gleichgewichtslagen**  $X(I)$  sind somit die Schnittpunkte der statischen Kraftkennlinien  $F_F(X)$  und  $-F_1(X)$ . Bei den in Bild 2.5-17b gewählten Werten  $x_0, k$  der Feder und  $I$  ergibt sich nur ein Schnittpunkt und somit nur eine Gleichgewichtslage.



**Bild 2.5-17:** a) Die Magnetkraft  $F_1(x)$  ist gemäß Bild 2.5-12, 2.5-14 zur Änderung der Induktivität  $L'(x)$  proportional. b) Statische Magnetkraft- und Federkennlinie ergeben im Schnittpunkt die Gleichgewichtslage  $X$  des Eisenzylinders bei einem bestimmten Stromwert  $I$ .

Bei  $x_0 < 0$  sind auch drei Schnittpunkte möglich. Sind alle drei Gleichgewichtslagen als „Arbeitspunkte“ stabil, also gegen kleine Störungen der Gleichgewichtslage unempfindlich? Diese Frage wird durch die Methode der **Stabilitätsuntersuchung** der Gleichgewichtslagen  $X(I)$  in Kap. 6 beantwortet. Im Vorgriff auf Kap. 6 sehen wir, dass in Bild 2.5-17 der Arbeitspunkt  $X$  „statisch“ (also anhand der statischen Kennlinien betrachtet) stabil ist. Wird durch eine von außen eingebrachte Störung der Zylinder gegenüber seiner Gleichgewichtslage

$X$  nach links  $x < X$  oder rechts  $x > X$  ausgelenkt, so ist stets die auftretende Differenzkraft  $-F_F(x) - F_1(x)$  gegen diese Auslenkungsrichtung gerichtet und treibt den Eisenzylinder nach  $X$  zurück, so dass der Zylinder stabil gegen (kleine) äußere Störungen in  $X$  verbleibt.

$$m \cdot \ddot{x} = -F_F - F_1 < 0, x > X \quad m \cdot \ddot{x} = -F_F - F_1 > 0, x < X \quad (2.5-28)$$

Die Lösung der nichtlinearen Differentialgleichungen zur Bestimmung der Strom- und Bewegungsabläufe z. B. beim Einschalten des el. Stroms („**Großsignalverhalten**“) ist häufig nur numerisch z. B. mit der Methode von *RUNGE* und *KUTTA* möglich. Häufig werden Wandler in einem stabilen Arbeitspunkt mit einer den Gleichgrößen überlagerten kleinen Wechselgröße (z. B.  $u(t) = U + \hat{U} \cdot \cos \omega t$ ,  $\hat{U} \ll U$ ) bei fester Frequenz  $f = \omega / (2\pi)$  betrieben z. B. als Schwingungsmesser (Kap. 7.1). Für die Berechnung dieses „Kleinsignalverhaltens“ darf das nichtlineare Differentialgleichungssystem in der Umgebung des Arbeitspunkts linearisiert werden, so dass ein lineares Differentialgleichungssystem entsteht, das auch für z. B. dynamische Ausgleichsvorgänge analytisch gelöst werden kann (Kap. 6). Für den eingeschwingenen Stationärbetrieb mit der Frequenz  $f$  wird mit Vorteil die komplexe Wechselstromrechnung verwendet und das Wandlerverhalten durch *Bode-Diagramme* charakterisiert (siehe die Aufgabensammlung zu typischen Bode-Diagrammen).

### Anhang A2.1: Herleitung der *Maxwell'schen Spannungen*

#### A2.1.1: Kraft auf el. geladene, el. polarisierte Körper

Ausgehend von der elektrischen resultierenden Ladungsdichte  $\rho'(x, y, z, t)$  und der resultierenden dielektrischen Flussdichte  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$  verwenden wir den *Gauß'schen Integralsatz*

$$\oint_{A=\partial V, \partial A=0} \vec{D} \cdot d\vec{A} = \int_V (\nabla \cdot \vec{D}) \cdot dV \quad (A2.1.1-1)$$

mit dem Abkürzungsbegriff des „Nabla“-Vektors  $\nabla = (\partial./\partial x, \partial./\partial y, \partial./\partial z)$  als Differentialoperator z. B. als Skalarprodukt  $\nabla \cdot \vec{D} = (\partial D_x / \partial x) + (\partial D_y / \partial y) + (\partial D_z / \partial z)$ . Aus der 4. *Maxwell-Gleichung* folgt dann

$$\Phi_e = \oint_{A=\partial V, \partial A=0} \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q = \int_V \rho \cdot dV = \int_V (\nabla \cdot \vec{D}) \cdot dV, \quad (A2.1.1-2)$$

was auf  $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$  führt (differentielle Form der 4. *Maxwell-Gleichung*). Weil nun  $\rho_p$  definitionsgemäß die Polarisation  $P$  gemäß  $\nabla \cdot \vec{P} = -\rho_p$  erregt, so folgt mit  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$  aus

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} + \nabla \cdot \vec{P} \Rightarrow \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \rho + \rho_p = \rho'. \quad (A2.1.1-3)$$

Daraus ergibt sich für die elektrostatische Kraft aus der Kraftdichte  $\vec{f} = \rho' \cdot \vec{E}$  zunächst

$$\vec{F}_e = \int_V \vec{f}_e \cdot dV = \int_V \vec{E} \cdot \rho' \cdot dV = \int_V \vec{E} \cdot \epsilon_0 \cdot (\nabla \cdot \vec{E}) \cdot dV. \quad (A2.1.1-4)$$

Wir beachten, dass die elektrostatischen Felder  $D, E$  Quellenfelder sind, für die keine Feldwirbel auftreten:  $\text{rot} \vec{E} = \nabla \times \vec{E} = \vec{0} = (0,0,0)$ . Dies wird mit einem Hilfssatz der Vektorrechnung (A2.1.1-5) weiter verwendet.

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{A} \cdot \vec{C}) - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \cdot \vec{C} \quad (A2.1.1-5)$$

Wird darin auch der Nabla-Vektor verwendet, und mit  $\nabla \cdot \vec{E}_c := 0$  gemeint, dass die Ableitung konstanter Vektoren ( $c = \text{konst.}$ ) natürlich Null ist, so folgt mit  $\vec{0} = (0,0,0)$

$$\vec{0} = \vec{E} \times \vec{0} = \vec{E} \times (\nabla \times \vec{E}) = \vec{E}_c \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla \cdot (\vec{E}_c \cdot \vec{E}) - (\vec{E}_c \cdot \nabla) \cdot \vec{E}. \quad (A2.1.1-6)$$

Der erste Term darin wird weiter umgeformt mit der Differenzier-Produktregel,

$$\nabla \cdot (\vec{E}_c \cdot \vec{E}) = \left[ \nabla \cdot (\vec{E}_c \cdot \vec{E}) + \nabla \cdot (\vec{E}_c \cdot \vec{E}) \right] / 2 = \left[ \nabla \cdot (\vec{E} \cdot \vec{E}_c) + \nabla \cdot (\vec{E}_c \cdot \vec{E}) \right] / 2, \quad (\text{A2.1.1-7})$$

$$\left[ \nabla \cdot (\vec{E} \cdot \vec{E}_c) + \nabla \cdot (\vec{E}_c \cdot \vec{E}) \right] / 2 = \left[ \nabla \cdot (\vec{E} \cdot \vec{E}) \right] / 2 = \left[ \nabla \cdot \vec{E}^2 \right] / 2, \quad (\text{A2.1.1-8})$$

so dass aus (A2.1.1-6) sich ergibt

$$\vec{0} = \left[ \nabla \cdot \vec{E}^2 \right] / 2 - (\vec{E}_c \cdot \nabla) \cdot \vec{E}. \quad (\text{A2.1.1-9})$$

Damit wird (A2.1.1-4) erweitert als

$$\vec{F}_c = \varepsilon_0 \int_V \vec{E} \cdot (\nabla \cdot \vec{E}) \cdot dV = \varepsilon_0 \cdot \int_V \underbrace{(\vec{E}_c \cdot (\nabla \cdot \vec{E}) - (\nabla \cdot \vec{E})^2 / 2 + (\vec{E}_c \cdot \nabla) \cdot \vec{E})}_{\vec{0}} \cdot dV. \quad (\text{A2.1.1-10})$$

Darin ist der Ausdruck auch schreibbar als

$$\vec{E}_c \cdot (\nabla \cdot \vec{E}) + (\vec{E}_c \cdot \nabla) \cdot \vec{E} = (\nabla \cdot \vec{E}) \cdot \vec{E}_c + (\nabla \cdot \vec{E}_c) \cdot \vec{E} = (\nabla \cdot \vec{E}) \cdot \vec{E}, \quad (\text{A2.1.1-11})$$

so dass die Kraft (A2.1.1-10) nunmehr als (A2.1.1-12) geschrieben wird.

$$\vec{F}_c = \varepsilon_0 \cdot \int_V ((\nabla \cdot \vec{E}) \cdot \vec{E} - (\nabla \cdot \vec{E}^2) / 2) \cdot dV = \varepsilon_0 \cdot \int_V (\nabla \cdot \vec{E}) \cdot \vec{E} \cdot dV - \frac{\varepsilon_0}{2} \cdot \int_V (\nabla \cdot \vec{E}^2) \cdot dV. \quad (\text{A2.1.1-12})$$

Die nochmalige Anwendung des *Gauß'schen* Integralsatzes für einen ortsabhängigen Vektor  $\vec{K}(x, y, z)$  in der Form

$$\oint_{A=\partial V, \partial A=0} d\vec{A} \cdot \vec{K} = \int_V dV \cdot (\nabla \cdot \vec{K}) \Rightarrow \oint_{A=\partial V, \partial A=0} d\vec{A} \cdot \dots = \int_V dV \cdot (\nabla \cdot \dots) \quad (\text{A2.1.1-13})$$

wird angewandt auf (A2.1.1-12) und führt auf

$$\vec{F}_c = \varepsilon_0 \cdot \int_V dV \cdot (\nabla \cdot \vec{E}) \cdot \vec{E} - \frac{\varepsilon_0}{2} \cdot \int_V dV \cdot (\nabla \cdot \vec{E}^2) = \varepsilon_0 \cdot \oint_{A=\partial V} (d\vec{A} \cdot \vec{E}) \cdot \vec{E} - \frac{\varepsilon_0}{2} \cdot \oint_{A=\partial V} (d\vec{A} \cdot \vec{E}^2) \quad (\text{A2.1.1-14})$$

als ein Oberflächenintegral (A2.1.1-15) über die *MAXWELL*-Spannungen (A2.1.1-16) an den Körper einschließenden Hülloberfläche  $A$  mit  $d\vec{A} = \vec{e}_n \cdot dA$ .

$$\vec{F}_c = \varepsilon_0 \cdot \oint_{A=\partial V} \left[ (\vec{e}_n \cdot \vec{E}) \cdot \vec{E} - (\vec{e}_n \cdot \vec{E}^2) / 2 \right] \cdot dA = \oint_{A=\partial V} \vec{p}_e \cdot dA, \quad (\text{A2.1.1-15})$$

$$\vec{p}_e = \varepsilon_0 \cdot (\vec{e}_n \cdot \vec{E}) \cdot \vec{E} - \varepsilon_0 \cdot (\vec{e}_n \cdot \vec{E}^2) / 2. \quad (\text{A2.1.1-16})$$

### A2.1.2: Kraft auf stromdurchflossene, magnetisierte Körper

Die den elektrische Ströme  $I$ ,  $I_E$  zugeordneten el. Stromdichten sind  $\vec{J}(x, y, z, t)$ ,  $\vec{J}_E(x, y, z, t)$ .

Auf sie wirkt im  $B$ -Feld die Kraftdichte  $\vec{f}_m = (\vec{J} + \vec{J}_E) \times \vec{B}$ . Dabei ist  $\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H} + \mu_0 \cdot \vec{M}$  das resultierende Magnetfeld. Mit dem *Stokes'schen* Integralsatz für einen Vektor  $\vec{K}(x, y, z)$

$$\oint_{C=\partial A} \vec{K} \cdot d\vec{s} = \int_A \text{rot} \vec{K} \cdot d\vec{A} = \int_A (\nabla \times \vec{K}) \cdot d\vec{A} \quad (\text{A2.1.2-1})$$

erhalten wir für die 1. *Maxwell*-Gleichung für zeitlich langsam veränderliche Vorgänge

$$\frac{\partial \Phi_e}{\partial t} \approx 0: \oint_{C=\partial A} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \Theta = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = \int_A (\nabla \times \vec{H}) \cdot d\vec{A}, \quad (\text{A2.1.2-2})$$

was auf  $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$  führt (differentielle Form der 1. *Maxwell*-Gleichung bei  $\partial \Phi_e / \partial t \approx 0$ ). So

wie  $J$  das Feld  $H$  erregt, erregt  $J_E$  das Feld  $M = J_M / \mu_0$  gemäß  $\nabla \times \vec{M} = \vec{J}_E$ . Daher gilt:

$$\vec{J} + \vec{J}_E = (\nabla \times \vec{H}) + (\nabla \times \vec{M}) = \nabla \times (\vec{H} + \vec{M}) = (\nabla \times \vec{B}) / \mu_0. \quad (\text{A2.1.2-3})$$

Aus der Kraftdichte  $\vec{f}_m = (\vec{J} + \vec{J}_E) \times \vec{B}$  erhalten wir die Kraft

$$\vec{F}_m = \int_V ((\vec{J} + \vec{J}_E) \times \vec{B}) \cdot dV = \frac{1}{\mu_0} \int_V ((\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B}_c) \cdot dV = -\frac{1}{\mu_0} \int_V (\vec{B}_c \times (\nabla \times \vec{B})) \cdot dV. \quad (\text{A2.1.2-4})$$

Wiederum wirkt der Differentialoperator Nabla nicht auf Vektoren mit dem Index c, z. B.  $\nabla \cdot \vec{B}_c = 0$ . Mit dem Hilfssatz der Vektorrechnung (A2.1.1-5)

$$\vec{A} \times (\vec{G} \times \vec{C}) = \vec{G} \cdot (\vec{A} \cdot \vec{C}) - (\vec{A} \cdot \vec{G}) \cdot \vec{C} \quad (\text{A2.1.2-5})$$

folgt

$$\vec{B}_c \times (\nabla \times \vec{B}) = \nabla \cdot (\vec{B}_c \cdot \vec{B}) - (\vec{B}_c \cdot \nabla) \cdot \vec{B}. \quad (\text{A2.1.2-6})$$

Für den ersten Term darin folgt gemäß (A2.1.1-7)

$$\nabla \cdot (\vec{B}_c \cdot \vec{B}) = \left[ \nabla \cdot (\vec{B}_c \cdot \vec{B}) + \nabla \cdot (\vec{B}_c \cdot \vec{B}) \right] / 2 = \left[ \nabla \cdot (\vec{B} \cdot \vec{B}_c) + \nabla \cdot (\vec{B}_c \cdot \vec{B}) \right] / 2 \quad (\text{A2.1.2-7})$$

und durch Anwendung der Produktregel beim Differenzieren wie bei (A2.1.1-8)

$$\left[ \nabla \cdot (\vec{B} \cdot \vec{B}_c) + \nabla \cdot (\vec{B}_c \cdot \vec{B}) \right] / 2 = \left[ \nabla \cdot (\vec{B} \cdot \vec{B}) \right] / 2 = \left[ \nabla \cdot \vec{B}^2 \right] / 2. \quad (\text{A2.1.2-8})$$

Mit der 3. Maxwell-Gleichung

$$\Phi_m = \oint_{A=\partial V, \partial A=0} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 = \int_V (\nabla \cdot \vec{B}) \cdot dV \quad \text{bzw.} \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{A2.1.2-9})$$

wird aus (A2.1.2-6) mit (A2.1.2-8) der Ausdruck

$$\vec{B}_c \times (\nabla \times \vec{B}) = \left[ \nabla \cdot \vec{B}^2 \right] / 2 - (\vec{B}_c \cdot \nabla) \cdot \vec{B} = \left[ \nabla \cdot \vec{B}^2 \right] / 2 - (\vec{B}_c \cdot \nabla) \cdot \vec{B} - \vec{B} \cdot \underbrace{(\nabla \cdot \vec{B})}_0 \quad (\text{A2.1.2-10})$$

erhalten. Der zweite und dritte Term darin können auch so geschrieben werden:

$$(\vec{B}_c \cdot \nabla) \cdot \vec{B} + \vec{B} \cdot (\nabla \cdot \vec{B}) = (\nabla \cdot \vec{B}_c) \cdot \vec{B} + (\nabla \cdot \vec{B}) \cdot \vec{B}_c, \quad (\text{A2.1.2-11})$$

so dass mit der Produktregel beim Differenzieren (A2.1.2-12) entsteht.

$$(\nabla \cdot \vec{B}_c) \cdot \vec{B} + (\nabla \cdot \vec{B}) \cdot \vec{B}_c = (\nabla \cdot \vec{B}) \cdot \vec{B} \quad (\text{A2.1.2-12})$$

Damit lautet (A2.1.2-10):

$$\vec{B}_c \times (\nabla \times \vec{B}) = \left[ \nabla \cdot \vec{B}^2 \right] / 2 - (\vec{B}_c \cdot \nabla) \cdot \vec{B} = \left[ \nabla \cdot \vec{B}^2 \right] / 2 - (\nabla \cdot \vec{B}) \cdot \vec{B}. \quad (\text{A2.1.2-13})$$

Eingesetzt in die Formel für die Kraft (A2.1.2-4) ergibt

$$\vec{F}_m = - \int_V (\vec{B}_c \times (\nabla \times \vec{B} / \mu_0)) \cdot dV = \frac{1}{\mu_0} \int_V - \left( \left[ \nabla \cdot \vec{B}^2 \right] / 2 + (\nabla \cdot \vec{B}) \cdot \vec{B} \right) \cdot dV. \quad (\text{A2.1.2-14})$$

Mit Anwendung des Gauß'schen Integralsatzes (z. B. für einen ortsabhängigen Vektor  $\vec{K}(x, y, z)$ ) gemäß (A2.1.1-13)

$$\oint_{A=\partial V, \partial A=0} d\vec{A} \cdot \vec{K} = \int_V dV \cdot (\nabla \cdot \vec{K}) \Rightarrow \oint_{A=\partial V, \partial A=0} d\vec{A} \cdot \dots = \int_V dV \cdot (\nabla \cdot \dots) \quad (\text{A2.1.2-15})$$

folgt mit dem differentiellen Flächenelement  $d\vec{A} = \vec{e}_n \cdot dA$

$$\vec{F}_m = \frac{1}{\mu_0} \int_V dV \cdot (\nabla \cdot \vec{B}) \cdot \vec{B} - \frac{1}{\mu_0} \int_V dV \cdot \left( \left[ \nabla \cdot \vec{B}^2 \right] / 2 \right), \quad (\text{A2.1.2-16})$$

$$\vec{F}_m = \frac{1}{\mu_0} \cdot \oint_{A=\partial V} (d\vec{A} \cdot \vec{B}) \cdot \vec{B} - \frac{1}{\mu_0} \cdot \oint_{A=\partial V} d\vec{A} \cdot \vec{B}^2 / 2, \quad (\text{A2.1.2-17})$$

$$\vec{F}_m = \frac{1}{\mu_0} \cdot \oint_{A=\partial V} \left[ (\vec{e}_n \cdot \vec{B}) \cdot \vec{B} - \vec{e}_n \cdot \vec{B}^2 / 2 \right] \cdot dA = \oint_{A=\partial V} \vec{p}_m \cdot dA. \quad (\text{A2.1.2-18})$$

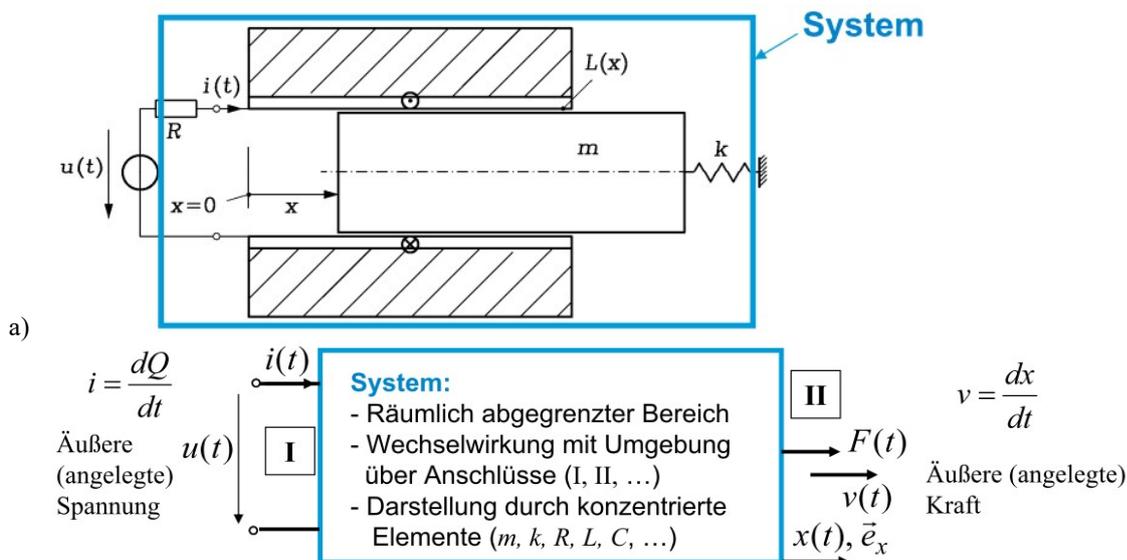
Somit ist die Maxwell'sche Spannung  $p_m$  an der geschlossenen Hüllfläche um den Körper, wo  $B = \mu_0 H$  gilt,

$$\vec{p}_m = (\vec{e}_n \cdot \vec{B}) \cdot \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{e}_n \cdot \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} \quad \text{bzw.} \quad \vec{p}_m = (\vec{e}_n \cdot \mu_0 \vec{H}) \cdot \vec{H} - \vec{e}_n \cdot \frac{\mu_0 \vec{H}^2}{2}. \quad (\text{A2.1.2-18})$$

### 3. Formale Behandlung elektromechanischer diskreter Systeme

#### 3.1 Bezugspfeile, Leistungsfluss, Energiefluss

Ein elektromechanischer Wandler ist ein System, das gegenüber seiner Umgebung räumlich abzugrenzen ist, und der über diese Systemgrenzen hinweg mit seiner Umgebung in elektrischer und/oder mechanischer Wechselwirkung ist. Als Beispiel wird der ele.-magn. Wandler aus Kap. 2.5 betrachtet. Er ist in Wechselwirkung mit seiner Umgebung über ZWEI Anschlüsse I und II, die auch gemäß der Vierpoltheorie als „Tore“ bezeichnet werden. Er ist ein Zweitor mit einem elektrischen (Index el) und einem mechanischen (Index mec) Anschluss (Bild 3.1-1). Dieses System wird mathematisch durch konzentrierte el. und mech. Ersatzelemente ( $m, k, R, L, C, \dots$ ) beschrieben.



b)  $Q$ : Dem System zugeführte el. Ladungsmenge

Bild 3.1-1: a) Der ele.-mech. Wandler von Kap. 2.5 wird als System betrachtet, b) das mit seiner Umgebung (el: Spannungsversorgung, mech: räumliche Krafteinleitung) über Schnittstellen („Tore“) in Wechselwirkung ist.

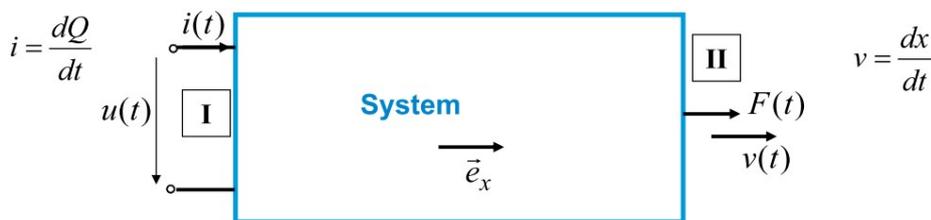


Bild 3.1-2: Im Verbraucher-Zählpfeilsystem (VZS) wirkt  $u$  in Richtung  $i$ ,  $F$  wirkt in Richtung  $v$ .

Am el. Tor wird die ideale Spannungsquelle angeschlossen (Zweipol), wobei für Strom und Spannung das VZS verwendet wird. Am mech. Tor werden als Zweipol eine ggf. vorhandene äußere Kraft  $F$  und eine aufgeprägte Geschwindigkeit  $v$  als Vektoren (= gerichtete Größen) angeschlossen, die in positiver räumlicher  $x$ -Richtung positiv gezählt werden. Über  $i = dQ/dt$  und  $v = dx/dt$  werden  $Q$  und  $x$  als **el. und mech. Systemgröße oder verallgemeinerte Koordinaten** bezeichnet, die in Abhängigkeit der Zeit  $t$  veränderlich sind, ihre zeitlichen Ableitungen sinngemäß als **Flussgrößen oder verallgemeinerte Geschwindigkeiten**. Im Verbraucher-Zählpfeilsystem (VZS) wirkt  $u$  in Richtung  $i$ ,  $F$  wirkt in Richtung  $v$  (Bild 3.1-2). Die Momentanleistung ist elektrisch  $p_{el}(t) = u(t) \cdot i(t)$  und mechanisch  $p_{mec}(t) = F(t) \cdot v(t)$ , so dass  $u$  und  $F$  als **Potentialgrößen oder verallgemeinerte Kräfte** bezeichnet werden (Tab. 3.1-1).

|                |           |            |  |        |  |
|----------------|-----------|------------|--|--------|--|
|                |           |            | „Koordinaten“<br>(„Systemgrößen“)      | $x, Q$ | „Koordinatenvektor“<br>$\vec{x} = (x, Q)$  |
| Nomenklatur    | <i>el</i> | <i>mec</i> | „Geschwindigkeiten“<br>(„Flussgrößen“) | $v, i$ | „Geschwindigkeiten-Vektor“<br>$\vec{v} = d\vec{x}/dt = (dx/dt, dQ/dt) = (v, i)$  |
| Systemgröße    | $Q$       | $x$        | „Kräfte“<br>(„Potentialgrößen“)        | $F, u$ | „Kräfte-Vektor“ $\Rightarrow$ Leistungssumme<br>$\vec{F} = (F, u) \Rightarrow p = \vec{F} \cdot \vec{v} = (F, u) \cdot (v, i) = F \cdot v + u \cdot i$ |
| Flussgröße     | $i$       | $v$        |  |        |  |
| Potentialgröße | $u$       | $F$        |  |        |  |

Tabelle 3.1-1: Formale Entsprechungen el. und mech. Größen an den Zweipolanschlüssen von el.-mech. Wandlern

Die gesamte, dem Wandler zum Zeitpunkt  $t$  zugeführte Momentan-Leistung  $p(t)$  ist

$$p(t) = p_{el}(t) + p_{mec,au\beta en}(t) = u(t) \cdot i(t) + F(t) \cdot v(t). \tag{3.1-1}$$

Im Verbraucher-Zählpeilsystem (VZS) wird die dem System **zugeführte** Leistung  $p(t)$  POSITIV gezählt:  $u > 0, i > 0 \Rightarrow p_{el} > 0$   $F > 0, v > 0 \Rightarrow p_{mec,au\beta en} > 0$ . Demnach ist die dem Wandler im Zeitintervall  $dt$  zugeführte Energie  $dW(t \dots t + dt)$ :

$$dW(t) = dW_{el}(t) + dW_{mec,au\beta en}(t) = u(t) \cdot \underbrace{i(t) \cdot dt}_{dQ} + F(t) \cdot \underbrace{v(t) \cdot dt}_{dx}. \tag{3.1-2}$$

$$dW(t) = u(t) \cdot dQ + F(t) \cdot dx \tag{3.1-3}$$

Die dem System „Wandler“ zugeführte Energie  $dW$  wird gemäß (3.1-4) entweder

- a) im System „Wandler“ gespeichert als „potentielle“ und „kinetische“ Energieform, die noch allgemein zu definieren sind, oder
- b) in andere Energieformen umgewandelt, wie z. B. in Wärmeenergie infolge unvermeidlicher Verluste in realen Wandlern.

$$dW_{el} + dW_{mec,au\beta en} = \underbrace{dW_e + dW_p + dW_F}_{\text{„pot.“ Energie}} + \dots + \underbrace{dW_m + dW_k}_{\text{„kinet.“ Energie}} + \dots + \underbrace{dW_d}_{\text{Verluste}}. \tag{3.1-4}$$

„**Potentielle**“ **Energieformen** sind jene Energien, deren Potentialgrößen (Kräfte!) sich durch Ableitung einer Potentialfunktion darstellen lassen, also die elektrostatische Feldenergie  $W_e$ , die Lageenergie im Schwerfeld der Erde  $W_p$  und die elastische Verformungsenergie von Federn (Federenergie  $W_F$ ). „**Kinetische**“ **Energieformen** umfassen die magnetostatische Feldenergie  $W_m$  und die Bewegungsenergie  $W_k$ . **Verlustenergieformen** (dissipative Energien  $W_d$ ) umfassen Energien zur plastischen Verformung von Körpern (= „innere“ Reibung), Wärmeenergie zufolge „äußerer“ Reibung, Stromwärme in elektrisch leitfähigen Teilen, Hystereseverluste durch Ummagnetisierung sowie dielektrische Umpolarisierungsverluste.

Beispiel 3.1-1: Energiezufuhr am Kondensator (Bild 3.1-3).

Die Plattenladung ist konstant ( $Q = \text{konst.}$ ), da die Platten von der Spannungsquelle getrennt sind! Daher erfolgt keine Zufuhr el. Energie von außen:  $dQ = 0 : dW_{el} = u \cdot dQ = 0$ . Zwischen den Platten herrschen das homogen angenommene  $E$ - und  $D$ -Feld. Der Plattenabstand  $x$  ist variabel und wird von  $x_1$  auf  $x_2 > x_1$  über die von außen aufgebrachte Kraft  $F$  vergrößert. Mit der Masse  $m$  der bewegten Platte (Plattenfläche  $A$ ) ergibt der Schwerpunktsatz mit der zwischen beiden Platten wirksamen anziehenden *Coulomb*-Kraft  $F_e$ :  $m \cdot \ddot{x} \cdot \vec{e}_x = \vec{F} + \vec{F}_e$ . Für eine kleine Abstandsänderung  $dx$  bei dabei sehr kleiner Massenbeschleunigung  $\ddot{x} \approx 0$  folgt für die von außen aufzubringende Kraft  $\vec{F} = -\vec{F}_e$ . Gemäß Kap. 2.3 wird  $F_e$  über die *Maxwell*-

Spannung berechnet als  $F_e = -\frac{D \cdot E}{2} \cdot A$ . Damit ergibt sich die mechanische Arbeit längs  $dx$ :

$$dW_{mec,au\beta en} = F \cdot dx = -F_e \cdot dx = \frac{D \cdot E}{2} \cdot A \cdot dx = \underbrace{\frac{D \cdot E}{2}}_{w_e} \cdot \underbrace{A \cdot dx}_{dV} = w_e \cdot dV = dW_e.$$

Die Energiebilanz (3.1-4) ergibt somit  $dW_{el} + dW_{mec,au\beta en} = 0 + dW_{mec,au\beta en} = dW_e$ , da gem\aa\ss Kap. 2.4 nur die elektrostatische Energie  $W_e$  erh\o\ohet wird. F\ur die Erh\o\ohung des Plattenabstands von  $x_1$  auf  $x_2 > x_1$  ist die Arbeit positiv, weil dem System „Kondensator“ zugef\ohrt, und wird im Feldraum gespeichert.

$$\Delta W_{mec,au\beta en} = \int_{x_1}^{x_2} F(x) \cdot dx = - \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{F_e(x)}_{x_1 < 0} \cdot dx = \Delta W_e > 0$$

Es muss also \u00fber eine \u00e4u\ssere Kraft  $F = -F_e > 0$ , in positiver  $x$ -Richtung wirkend, dem System mech. Arbeit  $\Delta W_{mec,au\beta en}$  zur Plattenabstandsvergr\o\o\erung zugef\ohrt werden!

$\Delta W_{mec,au\beta en}$  wird in erh\o\oheter Feldenergie  $\Delta W_e$  gespeichert!

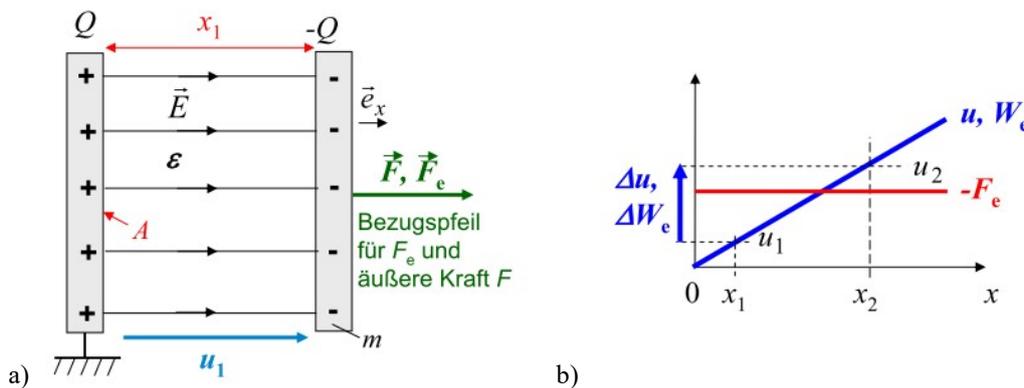


Bild 3.1-3: a) Der el.-mech. Wandler „Kondensator mit beweglicher rechter Platte“ hat beim Plattenabstand  $x_1$  die el. anliegende Spannungsdifferenz  $u_1 = E \cdot x_1$ . b) Bei Vergr\o\o\erung des Plattenabstands auf  $x_2$  erh\o\ohet sich wegen des konstanten  $E$ -Felds (wegen  $Q = \text{konst.}$ !) die Spannungsdifferenz auf  $u_2 = E \cdot x_2$ . Im um  $(x_2 - x_1) \cdot A$  vergr\o\o\berten Feldraum ist die von au\ssen zugef\ohrte mech. Arbeit als zus\u00e4tzliche el. Feldenergie  $\Delta W_e$  gespeichert.

Im Kapitel 2.4 wurde nur das el. „Tor“ der el. Spannungsquelle betrachtet und daher f\ur die Energiebilanz geschrieben:  $dW_{el} = dW_e + dW_{mec} = dW_e + F_e \cdot dx$ . Hier verallgemeinern wir sowohl auf el. als auch mech. Energiequellen (mech. „Tor“). Daher schreiben wir gem\aa\ss (3.1-4)  $dW_{el} + dW_{mec,au\beta en} = dW_e$ , wobei das Inkrement der Arbeit der \u00e4u\sseren Kraft  $F$  dem negativen Inkrement der inneren Kraft  $F_e$  entspricht:

$$dW_{mec,au\beta en} = -dW_{mec} \Rightarrow F \cdot dx = -F_e \cdot dx$$

Es wird die dem System zugef\ohrte mech. Arbeit  $W_{mec,au\beta en}$  mit  $F$  positiv gez\u00e4hlt. Dabei ist die vom System „Kondensator“ verrichtete Arbeit  $W_{mec}$  mit  $F_e = -F$  negativ, also bremsend („generatorisch“)! Umgekehrt ist beim Bewegen der rechten Platte auf die linke Platte zu die vom System „Kondensator“ verrichtete mech. Arbeit  $W_{mec}$  mit  $F_e$  positiv („motorisch“). Er kann als Aktor verwendet werden. Dabei ist  $W_{mec,au\beta en}$  mit  $F = -F_e$  negativ und die dem Aktor zugef\ohrte el. Arbeit  $W_{el}$  i. A. positiv, wenn kein Abbau gespeicherter Energie  $W_e$  f\ur  $W_{mec}$  genutzt werden soll! Der motorisch wirksame **Aktorwirkungsgrad** w\u00e4re dann f\ur die je Zeiteinheit verrichtete Arbeit das Leistungsverh\u00e4ltnis  $\eta = P_{mec} / P_{el}$ . Das Verh\u00e4ltnis der umgesetzten Energien als Zeitintegrale der Leistungen hei\ss\et „**Effizienz**“:  $\varepsilon = W_{mec} / W_{el}$ .

Durch die verallgemeinerten Koordinaten, Geschwindigkeiten und Kr\u00e4fte (Tab. 3.1-1) der Wandler werden mechanische und elektrische Vorg\u00e4nge einheitlich beschrieben:

a) „Koordinaten“  $x_i, i = 1, \dots, r$ :

Lagekoordinaten  $x$  oder Verschiebungen  $\Delta x$  (bei Linearbewegung) oder Winkel  $\gamma$  (bei Rotationsbewegung) oder el. Ladungen  $Q$ .

b) „Geschwindigkeiten“  $v_i = dx_i / dt, i = 1, \dots, r$ :

Mech. Geschwindigkeiten  $dx/dt$  bzw.  $d\Delta x/dt$  oder mech. Winkelgeschwindigkeiten  $d\gamma/dt$  oder el. Ströme  $i = dQ/dt$ .

c) „Kräfte“  $F_i, i = 1, \dots, r$ :

Mech. Kräfte  $F$  oder mech. Drehmomente  $M$  oder el. Spannungen  $u$ .

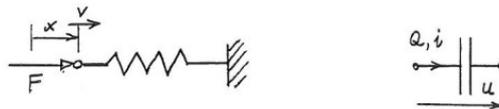
Mit a) ... c) werden Leistung und Energie elektro-mechanisch gemeinsam formuliert.

d) Momentan-Leistung:  $p(t) = \sum_{i=1}^r F_i \cdot v_i$ ,

e) Energie-Zuwachs (Energie-„Inkrement“):  $p(t) \cdot dt = \sum_{i=1}^r F_i \cdot v_i \cdot dt = \sum_{i=1}^r F_i \cdot dx_i$ .

### 3.2 Potentielle Energiespeicher

Speicher potentieller Energie  $W_p$  in el.-mech. Wandlern sind in mechanischen Fall zunächst **elastische Strukturelemente** (= „Federn“). Diese Lageenergie wird durch die Lage der beiden Feder-Enden als deren Koordinatendifferenz  $\Delta x$  bzw.  $\Delta\gamma$  gemeinsam mit den Federkonstanten  $k$  definiert (Lineare Feder: Kraft  $F = k \cdot \Delta x$ , Drehfeder: Drehmoment  $M = k_\gamma \cdot \Delta\gamma$ ). Die potentielle Energie der **Gravitation** ist hier vereinfacht die Energie der Lage einer Masse im „quasi“ homogenen Schwerfeld der Erde, beschrieben durch die Erdbeschleunigung  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ . Die elektrische potentielle Energie der **el. Ladungsspeicher** („Kondensatoren“  $C$ ) ist definiert durch die Lageenergie el. Ladungen im  $E$ -Feld anderer Ladungen. Die Speicherung der verallgemeinerten „potentiellen“ Energie  $W_p$  erfolgt häufig in Wandlern durch Federn und Kondensatoren. Die Gravitation wird oft vernachlässigt. Die Gegenüberstellung (Tab. 3.2-1) der linearen Federelemente und der el. Kondensatoren zeigt die gleiche physikalische Struktur beider Elemente, wobei die Koordinaten ( $x, Q$ ) die (Lage)-Energien  $W$  bestimmen. Geschwindigkeiten ( $v, i$ ) und Kräfte ( $F, u$ ) führen zu Leistungen  $p$  und Energieänderungen  $dW$ . Es ist keine Analogiebetrachtung, denn  $k$  entspricht  $1/C$ , sondern eine physikalische Entsprechung.



Beschreibende Gleichung:

$$F = F(x)$$

$$u = u(Q)$$

**Sonderfall:**  $k, C = \text{konst.}$ :

$$F = k \cdot x \quad k \Leftrightarrow \frac{1}{C}$$

$$u = Q / C$$

Aufgenommene Leistung:

$$p = F \cdot v$$

$$p = u \cdot i$$

Inkrementelle Energiezufuhr:

$$p \cdot dt = F(x) \cdot dx$$

$$p \cdot dt = u(Q) \cdot dQ$$

Potentielle Energie:

$$W_p(x) = \int_0^x F(x') \cdot dx'$$

$$W_p(Q) = \int_0^Q u(Q') \cdot dQ'$$

$$0 \leq x' \leq x$$

$$0 \leq Q' \leq Q$$

**Sonderfall:**  $k, C = \text{konst.}$ :

$$W_p(x) = \int_0^x k \cdot x' \cdot dx' = \frac{k \cdot x^2}{2} \quad W_p(Q) = \int_0^Q Q' / C \cdot dQ' = \frac{Q^2}{2C}$$

Tabelle 3.2-1: Physikalisch (= strukturell) begründete Entsprechungen zwischen mech. Federelementen und el. Kondensatoren hinsichtlich der potentiellen Energie.

Bei der mech. Feder wirkt die äußere Kraft  $F$  gegen die Federkraft  $F_F$  (Bild 3.2-1a). Die zur (von der Lage  $x$  abhängigen) potentiellen Energie  $W_p$  von Tab. 3.2-1 gehörende **potentielle**

**Ergänzungsenergie („Ko-Energie“)** ist definiert durch (3.2-1) und hängt nicht von  $x$ , sondern von  $F$  ab.

$$W_p^*(F) = F \cdot x - W_p(x) = \int_0^F x(F') \cdot dF' . \tag{3.2-1}$$

Aus Bild 3.2-1a ergibt sich (3.2-2).

$$W_p(x) = \int_0^x F(x') \cdot dx' \rightarrow F(x) = \frac{dW_p(x)}{dx} , W_p^*(F) = \int_0^F x(F') \cdot dF' \rightarrow x(F) = \frac{dW_p^*(F)}{dF} . \tag{3.2-2}$$

In gleicher Weise wird zur von  $Q$  abhängigen potentiellen Energie der el. Feldenergie ( $W_p = W_e$ ) die in Kap. 2 bereits vorgestellte, von  $u$  abhängige potentielle Ergänzungsenergie für el. Kondensatoren  $W_p^* = W_e^*$  in formaler Übereinstimmung mit (3.2-1) eingeführt.

$$W_p^*(u) = u \cdot Q - W_p(Q) = \int_0^u Q(u') \cdot du' . \tag{3.2-3}$$

Aus Bild 3.2-1b ergibt sich (3.2-4) in Übereinstimmung mit (2.4.3-22, -27).

$$W_p(Q) = \int_0^Q u(Q') \cdot dQ' \rightarrow u(Q) = \frac{dW_p(Q)}{dQ} , W_p^*(u) = \int_0^u Q(u') \cdot du' \rightarrow Q(u) = \frac{dW_p^*(u)}{du} . \tag{3.2-4}$$

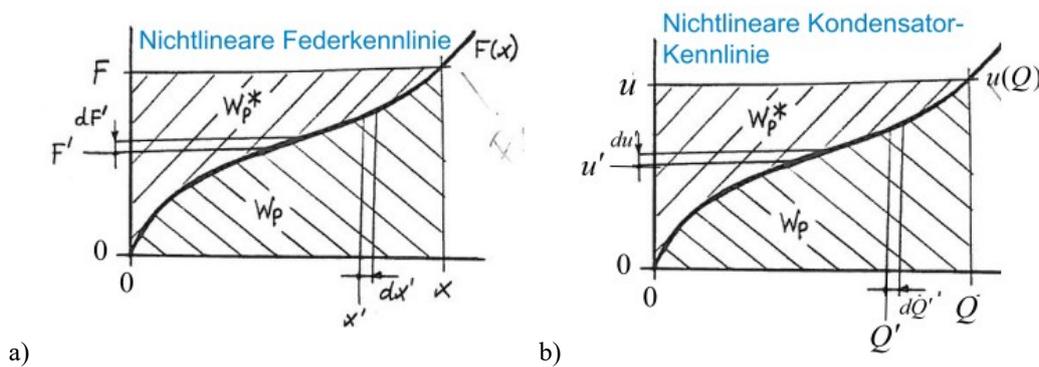


Bild 3.2-1: Nichtlineare Kennlinien potentieller Energiespeicher in el.-mech. Wandlern a) Feder, b) el. Kondensator.

Am Kondensator wirkt die äußere Kraft  $F$  gegen die elektrostatische *Coulomb*-Kraft  $F_e$ . Es gilt wegen  $F = -F_e$

$$F_e = -dW_p / dx = -dW_e / dx , F = dW_e / dx . \tag{3.2-5}$$

Eine in positiver  $x$ -Richtung wirkende äußere Kraft (Bild 3.1-3a) auf die rechte Kondensatorplatte erhöht bei Wegziehen der Platte in  $x$ -Richtung die im Kondensator gespeicherte Feldenergie (el. potentielle Energie  $W_p = W_e$ ).

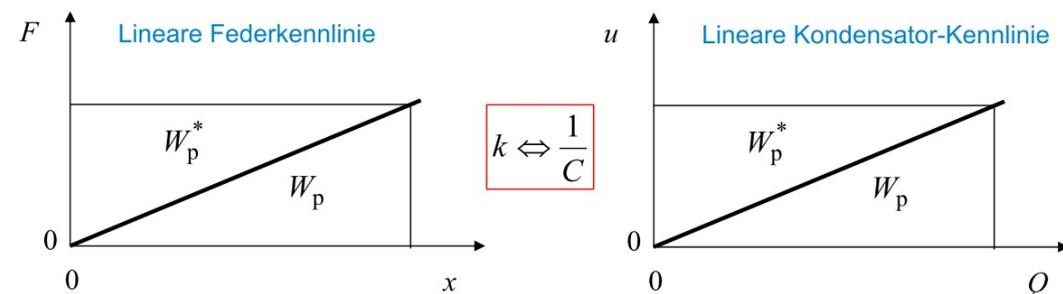


Bild 3.2-2: Lineare Kennlinien potentieller Energiespeicher als Feder (links) und el. Kondensator (rechts).

Aus Tab. 3.2-1 und (3.2-1) folgt für mechanische Federn mit linearer Kennlinie

$$W_p(x) = \int_0^x k \cdot x' \cdot dx' = \frac{k \cdot x^2}{2} \quad , \quad W_p^*(F) = \int_0^F \frac{1}{k} \cdot F' \cdot dF' = \frac{F^2}{2k} \quad . \quad (3.2-6)$$

Für Drehfedern ergeben sich analog  $W_p(\gamma) = k_\gamma \cdot \gamma^2 / 2$ ,  $W_p^*(M) = M^2 / (2k_\gamma)$ .

Aus Tab. 3.2-1 und (3.2-3) folgt für Kondensatoren mit linearem Dielektrikum

$$W_p(Q) = \int_0^Q (Q' / C) \cdot dQ' = \frac{Q^2}{2C} \quad , \quad W_p^*(u) = \int_0^u C \cdot u' \cdot du' = \frac{C \cdot u^2}{2} \quad . \quad (3.2-7)$$

Im Zahlenwert sind  $W_p(x)$ ,  $W_p^*(F)$  bzw.  $W_p(Q)$ ,  $W_p^*(u)$  gleich groß, aber sie sind nicht gleich in ihren Funktionen, denn es ist

$$W_p(\diamond) = \frac{k \cdot \diamond^2}{2} \neq W_p^*(\diamond) = \frac{\diamond^2}{2k} \quad , \quad W_p(\diamond) = \frac{\diamond^2}{2C} \neq W_p^*(\diamond) = \frac{C \cdot \diamond^2}{2} \quad . \quad (3.2-8)$$

Die Tab. 3.2-1 mit nur einer unabhängigen Koordinate als Variable führt mit den Ausführungen von Kap. 3.1 zur allgemeinen Formulierung der potentiellen Energie. Die  $r$  „Koordinaten“  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_r)$ ,  $i = 1, \dots, r$ , und die  $r$  „Kräfte“  $F_i(x_1, \dots, x_i, \dots, x_r)$  erlauben die Definition eines „ $r$ -dimensionalen Vektorraums“  $\vec{F} = (F_1, \dots, F_i, \dots, F_r) = \vec{F}(\vec{x})$  mit dem Skalarprodukt  $\vec{F}(\vec{x}') \cdot d\vec{x}' = F_1 dx'_1 + \dots + F_r dx'_r$  und der Arbeit, die diese Kräfte am System „ $r$ -dimensionaler Wandler“ verrichten.

$$W(\vec{x}) = \int_{\vec{0}}^{\vec{x}} \vec{F}(\vec{x}') \cdot d\vec{x}' = \int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_r} F_1 dx'_1 + \dots + F_r dx'_r = \int_0^{x_1} F_1 dx'_1 + \dots + \int_0^{x_r} F_r dx'_r \quad (3.2-9)$$

In einem System mit ausschließlich potentiellen Energiespeichern wird diese Arbeit in Form potentieller Energie im System gespeichert:  $W(\vec{x}) = W_p(\vec{x})$ .

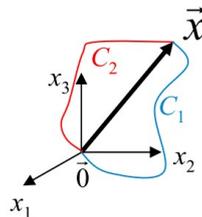


Bild 3.2-3:  $r = 3$ -dimensionaler Vektorraum: Die Kräfte  $F_i$  ( $i = 1, \dots, 3$ ) sollen entlang unterschiedlicher Wege  $C_1, C_2$  vom Ort  $(0, 0, 0)$  zum Ort  $(x_1, x_2, x_3)$  wirken.

In so einem Fall ist  $W$  unabhängig vom Integrationsweg  $C$  (Bild 3.2-3), also unabhängig davon, welches der Teilintegrale in (3.2-9) zuerst ausgeführt wird. Das ist z. B. der Fall, wenn im System keine Hysterese auftritt. Für Bild 3.2-3 heißt das

$$W(\vec{x}) = \int_{\vec{0}}^{\vec{x}} \vec{F}(\vec{x}') \cdot d\vec{x}' = \int_{C_1} \vec{F}(\vec{x}') \cdot d\vec{x}' = \int_{C_2} \vec{F}(\vec{x}') \cdot d\vec{x}' \quad . \quad (3.2-10)$$

Ist  $W$  wie in (3.2-10) unabhängig vom Integrationsweg  $C$ , nennt man  $W$  eine „**Zustandsfunktion**“. Dann ist  $\vec{F}(\vec{x})$  ein Gradientenfeld

$$F_i = \frac{\partial W_p}{\partial x_i} \Rightarrow \vec{F}(\vec{x}) = \nabla W_p = (\partial W_p / \partial x_1, \dots, \partial W_p / \partial x_i, \dots, \partial W_p / \partial x_r) \quad , \quad (3.2-11)$$

d. h. die Kräfte  $F_i$  sind Ableitungen der Zustandsfunktion, also der potentiellen Energie. Es wird als Schreibweise der symbolische Ableitungsvektor **Nabla** (3.2-12) verwendet.

Nabla wurde auch bei der Herleitung der *Maxwell*-Spannungen verwendet (Anhang A2.1).

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_r} \right) \tag{3.2-12}$$

Für Gradientenfelder  $F$  ist deren „Rotation“ Null  $\nabla \times \vec{F} = 0$  (3.2-14), d. h. Integrale längs geschlossenen Wegen  $C$  sind Null:  $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{x} = 0$ . Ein geschlossener Weg ist in Bild 3.2-3 der

Weg von  $(0, 0, 0)$  zum Ort  $(x_1, x_2, x_3)$  über  $C_1$  und zurück zu  $(0, 0, 0)$  über  $C_2$ . Mit (3.2-10) ist

$$\oint_C \vec{F}(\vec{x}') \cdot d\vec{x}' = \int_{C=C_1-C_2} \vec{F}(\vec{x}') \cdot d\vec{x}' = \int_{C_1} \vec{F}(\vec{x}') \cdot d\vec{x}' - \int_{C_2} \vec{F}(\vec{x}') \cdot d\vec{x}' = W - W = 0. \tag{3.2-13}$$

Mit dem Nabla-Vektor und der „Rotation“  $\text{rot}(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F}$  folgt

$$\text{rot}(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = \nabla \times (\nabla W_p) = \underbrace{(\nabla \times \nabla)}_0 W_p = 0. \tag{3.2-14}$$

Daher gelten die „Integrabilitätsbedingungen“ (3.2-15), wie Bsp. 3.2-1 für  $r = 3$  zeigt.

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}, \quad i, j = 1, \dots, r, \tag{3.2-15}$$

Beispiel 3.2-1: Integrabilitätsbedingungen für  $r = 3$ :

$$\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} = 0.$$

$$\text{rot} \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \vec{e}_1 \cdot \underbrace{\left( \frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \right)}_0 + \vec{e}_2 \cdot \underbrace{\left( \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \right)}_0 + \vec{e}_3 \cdot \underbrace{\left( \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right)}_0 = \vec{0}.$$

$$\text{Gradientenfeld: } \vec{F}(\vec{x}) = \nabla W_p = \text{grad} W_p = \left( \frac{\partial W_p}{\partial x_1}, \frac{\partial W_p}{\partial x_2}, \frac{\partial W_p}{\partial x_3} \right) = \sum_{i=1}^r \frac{\partial W_p}{\partial x_i} \cdot \vec{e}_i \quad |\vec{e}_i| = 1$$

Die allgemeine Formulierung der potentiellen Ergänzungsenergie im „ $r$ -dimensionalen Vektorraum“ ist  $W_p^*(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{x} - W_p(\vec{x}) = \sum_{i=1}^r F_i \cdot x_i - W_p(\vec{x})$ . Daraus folgt die inkrementelle Änderung der potentielle Ergänzungsenergie

$$dW_p^*(\vec{F}) = \sum_{i=1}^r d(F_i \cdot x_i) - dW_p(\vec{x}) = \sum_{i=1}^r (dF_i \cdot x_i + F_i \cdot dx_i) - \sum_{i=1}^r \frac{\partial W_p}{\partial x_i} \cdot dx_i, \tag{3.2-16}$$

Da  $F$  ein Gradientenfeld ist, gilt (3.2-11)  $F_i = \partial W_p / \partial x_i$ , eingesetzt in (3.2-16)

$$dW_p^*(\vec{F}) = \sum_{i=1}^r (dF_i \cdot x_i + \frac{\partial W_p}{\partial x_i} \cdot dx_i) - \sum_{i=1}^r \frac{\partial W_p}{\partial x_i} \cdot dx_i = \sum_{i=1}^r dF_i \cdot x_i. \tag{3.2-17}$$

Andrerseits ist  $W_p^*(\vec{F})$  als vollständiges Differential  $dW_p^*(\vec{F}) = \sum_{i=1}^r \frac{\partial W_p^*}{\partial F_i} \cdot dF_i$ . Durch

Vergleich mit (3.2-17) erhalten wir (3.2-18), dass die Koordinaten als Ableitung der potentiellen Ergänzungsenergie nach den Kräften berechenbar sind (siehe (3.2-2), (3.2-4)).

$$x_i = \partial W_p^* / \partial F_i \tag{3.2-18}$$

Die pot. Ergänzungsenergie ist wegen (3.2-11) auch eine Zustandsfunktion  $\vec{x}(\vec{F}) = \nabla W_p^*$ .

Die Ausdrücke (3.2-11) und (3.2-18) entsprechen einander. Sie wurden sowohl in Kap. 2.4 für den Kondensator für  $r = 2$  (Ort und Spannung) als auch in (3.2-2), (3.2-4) hergeleitet und werden nun anhand einfacher Beispiele verdeutlicht.

Beispiel 3.2-2: Lineare Zug-/Druckfeder als pot. Energiespeicher für  $r = 1$ :  $x_1 = x$  (Bild 3.2-4). Die Feder ist bei  $x = 0$  entspannt! Äußere Kraft  $F = k \cdot x$  und Federkraft  $F_F$  werden in  $x$ -Richtung positiv gezählt! Die äußere Kraft  $F$  wirkt gegen die Federkraft  $F_F$ . Im Gleichgewicht gilt:  $F + F_F = 0$ . Die von außen aufgebrachte positive Kraft  $F$  wirkt in Richtung der Koordinate  $x$  im Sinne einer Erhöhung der gespeicherten potentiellen Energie  $W_p$ .

Aus (3.2-11) folgt  $F(x) = \frac{dW_p(x)}{dx} = \frac{d(k \cdot x^2 / 2)}{dx} = k \cdot x$ ,  $F_F(x) = -\frac{dW_p(x)}{dx}$ .

Aus (3.2-18) folgt  $x(F) = \frac{dW_p^*(F)}{dF} = \frac{d(F^2 / (2k))}{dF} = F / k$ .

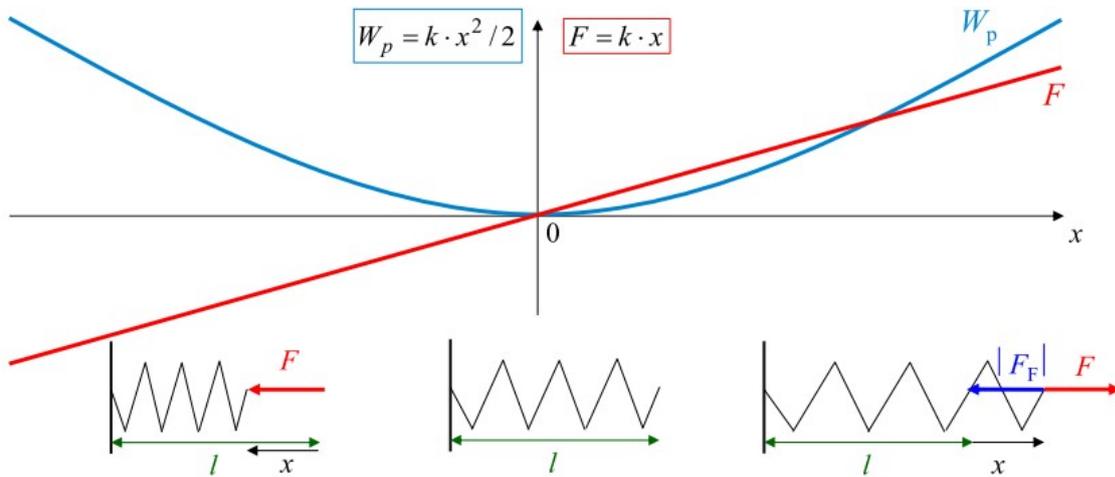


Bild 3.2-4:  $r = 1$ : Zug-/Druckfeder mit konstanter Federkonstante  $k$ .

Beispiel 3.2-3: Potentielle Energie an der Erdoberfläche: Der Erdradius  $r_E$  ist viel größer als der Abstand  $x$  des „kleinen“ Körpers (Masse  $m$ ) von der Erdoberfläche (Erde  $m_E$ ). Dann ist die potentielle Energie des Körpers im Erdschwerefeld in guter Näherung  $W_p(x) = m \cdot g \cdot x$  mit der konstanten Erdbeschleunigung  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$  (Bild 3.2-5).

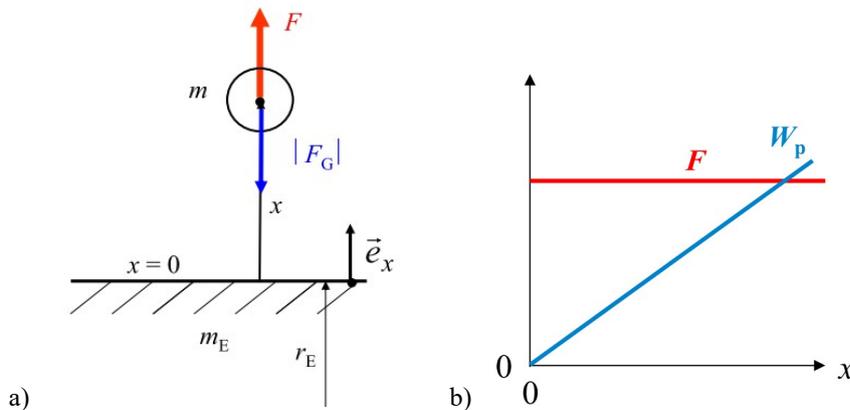


Bild 3.2-5:  $r = 1$ : Potentielle Energie an der Erdoberfläche ( $x = 0$ ) bei konstanter Erdbeschleunigung  $g$ . a) Die äußere Kraft  $F$  hält gegen die Schwerkraft  $F_G$  den Körper  $m$  im Gleichgewicht. b) Die potentielle Energie  $W_p$  nimmt mit  $x$  linear zu.

Die von außen aufgebrachte Kraft  $F$  wirkt in Richtung  $x$  zur Erhöhung der gespeicherten potentiellen Energie  $W_p$ .  $F_G$  und  $F$  werden in  $x$ -Richtung positiv gezählt! Die Gravitationskraft  $F_G$  wirkt aber gegen  $F$ , so dass im Gleichgewicht  $F_G = -F$  ist.

Aus (3.2-11) folgt  $F(x) = \frac{dW_p(x)}{dx} = m \cdot g$ ,  $F_G(x) = -\frac{dW_p(x)}{dx}$ . Allerdings ist  $W_p^*(F) = F \cdot x - W_p = m \cdot g \cdot x - m \cdot g \cdot x = 0$ . Die Koordinate  $x$  kann mit (3.2-18) nicht aus  $W_p^*(F)$  berechnet werden, da für unterschiedliche  $x$  stets dieselbe Kraft  $F = m \cdot g$  gilt.

Beispiel 3.2-4: Elektrische Kraft und potentielle el. Energie einer Punktladung  $q_1 > 0$  bzgl. einer Punktladung  $q_2 < 0$  (Bild 3.2-6)

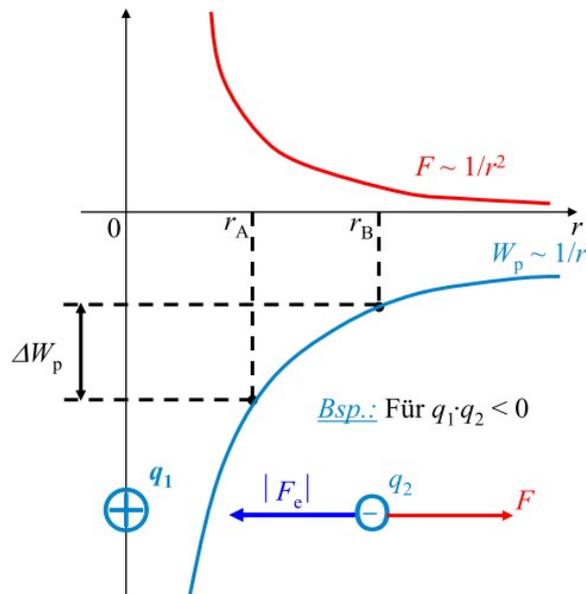


Bild 3.2-6: Potentielle Energie einer Punktladung  $q_2 < 0$  bzgl. einer Punktladung  $q_1 > 0$  im Abstand  $r$ .

Die von außen aufgebrachte Kraft  $F$  an der Ladung  $q_2$  wirkt in Richtung der Koordinate  $r$  im Sinne einer Erhöhung der gespeicherten potentiellen Energie  $W_p$ . Die *Coulomb*-Kraft  $F_e$  wirkt wegen  $q_1 > 0$ ,  $q_2 < 0$  gegen  $F$  anziehend, also gegen  $r$  im Sinne einer Abnahme von  $W_p$ . Es werden  $F_e$  und  $F$  in  $r$ -Richtung positiv gezählt! Es ist  $W_p(r) = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\epsilon_0 \cdot r}$ . (3.2-11) und (3.2-12)

werden in Kugelkoordinaten formuliert:  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta}, \frac{1}{r \cdot \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$ .

Wegen der Kugelsymmetrie ist  $\frac{\partial}{\partial \vartheta} = \frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$ . Daher ist  $\vec{F}(r) = \nabla W_p = (F_r(r), 0, 0)$  bzw.

$F(r) = \frac{dW_p(r)}{dr} = -\frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^2} > 0$ , während  $F_e(r) = -\frac{dW_p(r)}{dr} < 0$ . Die potentielle Energie

muss von einem minimalem Radius  $r_A$  aus berechnet werden, da sie wegen der Idealisierung der Punktladung sonst unendlich groß wird.

$$W = \int_{r_A}^{r_B} F \cdot dr = W_p(r_B) - W_p(r_A) = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left( \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) = \Delta W_p > 0.$$

Daher ist die Berechnung von  $W_p^*(F)$  als Komplementärfläche im  $r$ - $F$ -Diagramm, die über eine Berechnung von  $0 \dots r$  durchzuführen ist, nicht möglich.

### 3.3 Beispiel: Beweglicher Plattenkondensator

Gegeben ist ein Plattenkondensator an einer idealen Spannungsquelle  $u$  mit den entgegengesetzt gleich großen, vorgegebenen Plattenladung  $Q$ ,  $-Q$ , beweglicher rechter Platte und der Kapazität  $C(x) = Q/u$  in Abhängigkeit der rechten Plattenposition  $x$  (Bild 3.3-1). Wie ändert sich die erforderliche äußere Kraft  $F(x)$ , die die rechte Platte im Gleichgewicht hält, und  $u(x)$  mit variablem  $x$ ? Dieses Beispiel wurde bereits in Kap. 2 und in Bsp. 3.1-1 berechnet, soll nun aber mit dem eingeführten Formalismus nochmals berechnet werden.

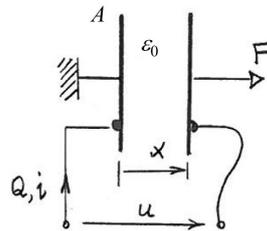


Bild 3.3-1: El.-mech. Wandler „Kondensator mit beweglicher rechter Platte“ von Bsp. 3.1-1 (Bild 3.1-3).

#### Lösung:

Es existieren zwei ( $r = 2$ ) unabhängige Koordinaten  $x_1 = Q$ ,  $x_2 = x$ . Zwei verallgemeinerte Kräfte  $F_1 = u$ ,  $F_2 = F$  sind mit (3.2-11) zu berechnen. Die potentielle Energie ist zunächst nur bis auf eine Integrationskonstante  $\Phi(x)$  bestimmbar.

$$F_1 = \frac{\partial W_p}{\partial x_1} \Rightarrow u = \frac{\partial W_p}{\partial Q} = \frac{Q}{C(x)} \Rightarrow W_p = \int_0^Q \frac{Q'}{C(x)} \cdot dQ' = \frac{Q^2}{2C(x)} + \Phi(x), \quad (3.3-1)$$

$$F_2 = \frac{\partial W_p}{\partial x_2} \Rightarrow F = \frac{\partial W_p}{\partial x} = \frac{d}{dx} \left( \frac{Q^2}{2C(x)} + \Phi(x) \right) = \frac{Q^2}{2} \cdot \frac{d}{dx} \frac{1}{C(x)} + \Phi'(x) = F(Q, x). \quad (3.3-2)$$

Die Integrationskonstante  $\Phi(x)$  erlaubt es, auch eine remanente Polarisation des Dielektrikums zu berücksichtigen. Ohne solche Remanenz ist bei  $Q = 0$  auch  $F = 0$ . Im Beispiel ist das Dielektrikum „Luft“, daher ist keine Remanenz vorhanden. Also muss auch ohne el. Spannung die pot. Energie Null sein:  $u = 0 \rightarrow Q = 0 : W_p(u = 0, x) = \Phi(x) = 0$ .

$$F(0, x) = \frac{0^2}{2} \cdot \frac{d}{dx} \frac{1}{C(x)} + \Phi'(x) = 0 \rightarrow \Phi'(x) = 0 \rightarrow \Phi(x) = \text{konst.} = \Phi = 0. \quad (3.3-3)$$

$$\text{Resultat (in Übereinstimmung mit Kap. 2): } F(Q, x) = \frac{Q^2}{2} \cdot \frac{d}{dx} \frac{1}{C(x)}, \quad u(x) = \frac{Q}{C(x)}.$$

Für den in Kap. 2 angenommenen vereinfachten Fall eines homogenen  $E$ -Felds zwischen den Platten folgt eine von  $x$  unabhängige Kraft  $F$

$$C(x) = \frac{\epsilon_0 A}{x} \Rightarrow F(Q, x) = \frac{Q^2}{2} \cdot \frac{d}{dx} \frac{x}{\epsilon_0 A} = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 A} = \text{konst.} \quad (3.3-4)$$

und eine linear mit  $x$  zunehmende el. Spannung  $u$ .

$$u = \frac{Q}{C(x)} = \frac{Q}{\epsilon_0 A} \cdot x \quad (3.3-5)$$

Bei konstanter Plattenladung  $Q$  und homogenem Feld  $E = \text{konst.}$  zwischen den Platten ist die gegen die anziehende elektrostatische Kraft  $F_e$  aufzubringende Kraft  $F$  UNabhängig vom Plattenabstand  $x$ .

$$u = \frac{Q}{C(x)} = \frac{Q}{\epsilon_0 A} \cdot x \quad \text{bzw.} \quad u(x) = \int_0^x \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_0^x E_x \cdot dx = E_x \cdot x \quad \text{oder alternativ} \quad (3.3-6)$$

$$Q = \oint_{A=\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{A} = D_x \cdot A = \epsilon_0 E_x \cdot A \Rightarrow E_x = \frac{Q}{\epsilon_0 A}, \quad u(x) = \frac{Q \cdot x}{\epsilon_0 A} \quad (3.3-7)$$

Die *Maxwell'sche* Zugspannung auf die rechte Platte 2 ist (Bild 2.4.3-11) ebenfalls unabhängig von  $x$ !

$$p_e(x) = -\frac{D_x \cdot E_x}{2} = -\frac{Q^2}{2\epsilon_0 A^2} \Rightarrow F = -F_e = -p_e A = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 A} \quad (3.3-8)$$

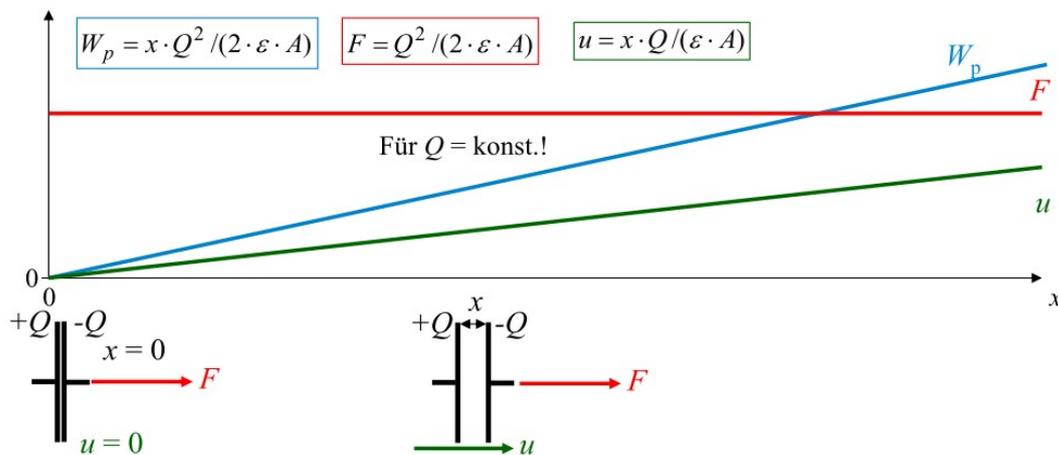
Zur Kontrolle erfolgt erneut die Kraftberechnung mit der virtuellen Verschiebung (2.4.3-22).

$$u = \frac{\partial W_e(Q, x)}{\partial Q}, \quad F_e = -\frac{\partial W_e(Q, x)}{\partial x} \quad (3.3-9)$$

Die unabhängigen Variablen sind  $Q, x$ . Mit  $W_e(Q, x) = W_p(Q, x)$  folgt aus

$$W_p = \frac{Q^2}{2C(x)} = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 A} \cdot x \quad \text{die el. Kraft} \quad F_e = -\frac{\partial W_p(Q, x)}{\partial x} = -\frac{Q^2}{2\epsilon_0 A} = -F. \quad \text{Die ele. Kraft wirkt}$$

auf Platte 2 nach links (Bild 3.3-2).



**Bild 3.3-2:** Kondensator mit  $Q = \text{konst.}$ : Die von außen aufzubringende Kraft  $F$  wirkt in Richtung der Koordinate  $x$  im Sinne einer Erhöhung der gespeicherten potentiellen Energie  $W_p$ . Die el. Kraft  $F_e$  wirkt gegen  $F$  anziehend, also gegen  $x$  im Sinne einer Abnahme von  $W_p$ .

Die Annahme des homogenen Kondensatorfelds  $E = E_x = \text{konst.}$  ist nur sinnvoll bei gegenüber den Plattenabmessungen  $b, l$  kleinem Plattenabstand  $x$  (Plattenfläche  $A = b \cdot l$ ), (Bild 3.3-3a). Bei gegenüber den Plattenabmessungen  $b, l$  großem Plattenabstand  $x$  darf das „ausufernde“ Randfeld nicht vernachlässigt werden und bestimmt maßgeblich das Feld zwischen den Platten, so dass  $E(x)$  zwischen den Platten ein Minimum hat!  $C(x)$  sinkt dann stärker als mit  $1/x$ ; die Kraft  $F$  nimmt mit zunehmendem  $x$  ab (Bild 3.3-3b)! Eine Abschätzung für  $x \gg b$  kann mit dem  $E$ -Feld zwischen zwei Punktladungen  $Q, -Q$  über die *Coulomb-Formel* erfolgen (siehe Bsp. 3.2-4).

$$F(x) = \frac{Q^2}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot x^2} \sim \frac{1}{x^2}$$

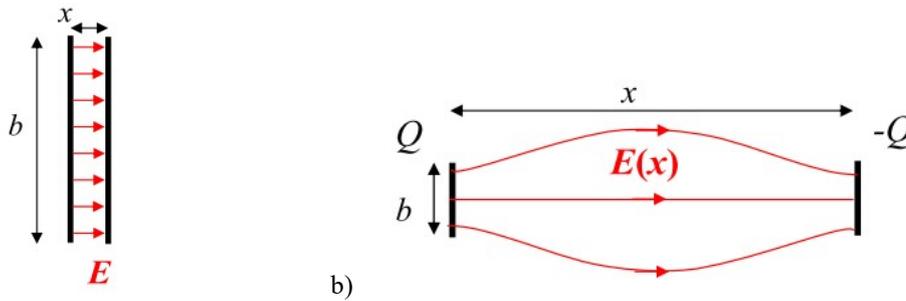


Bild 3.3-3: Kondensator mit a) „kleinem“ und b) „großem“ Plattenabstand  $x$ . Nur im Fall a) darf näherungsweise mit  $E = \text{konst.}$  gerechnet werden.

In Bild 3.3-4 ist  $u(Q) = \frac{dW_p(Q, x)}{dQ}$  gemäß (3.3-6) graphisch erläutert.

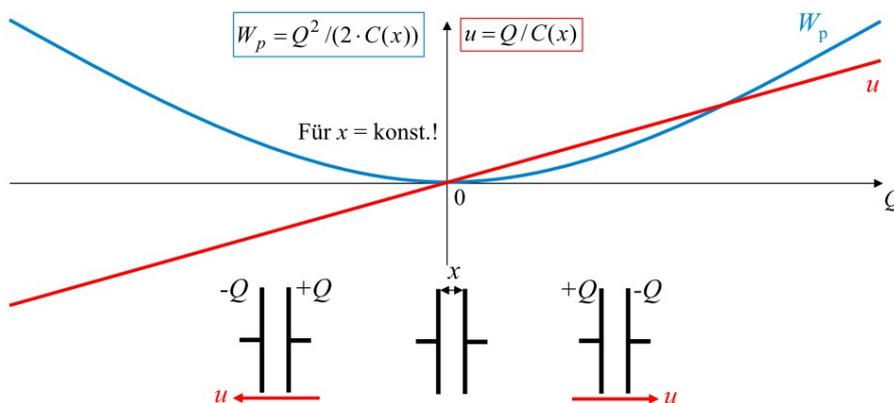


Bild 3.3-4: Kondensator mit  $x = \text{konst.}$ : Die zwischen den Platten messbare el. Spannung  $u$  wirkt in Richtung von positiver zu negativer Ladung  $Q$  im Sinne einer Erhöhung dieser Ladung und damit der gespeicherten potentiellen Energie  $W_p$ .

### 3.4 Kinetische Energiespeicher

Speicher verallgemeinerter „kinetischer“ Energie sind in mechanischen Systemen bewegte Massen, sei es in linearer Bewegung oder als Drehbewegung. Wirksam sind dabei die Trägheitskräfte, wobei die dabei wirksame „träge“ Masse identisch mit der für die potentielle Energie der Lage im Schwerfeld (Kap. 3.2) wirkende „schwere“ Masse ist. Der trägen Masse  $m$  entspricht bei Drehbewegungen die Drehmasse („Schwungmasse“) bzw. das um die Drehachse wirksame polare Trägheitsmoment  $J$ . Die zugehörigen Trägheitskräfte lassen sich nicht durch Ableitung einer wegunabhängigen Zustandsfunktion darstellen und unterscheiden sich daher wesentlich von den Kräften zufolge potentieller Energien. Die induzierte el. Spannung entsprechend dem Faraday-Induktionsgesetz (Kap. 2), die gemäß Kap. 3.1 als verallgemeinerte Kraft aufgefasst wird, hängt wesentlich vom Weg, längs dem diese Spannungen im magnetischen Wechselfeld bestimmt werden, ab, während el. Spannungen in Potentialfeldern wegunabhängig sind (Kap. 3.2). Deshalb werden magnetische Fluss-Speicher, also die „Induktivitäten“  $L, M$ , als verallgemeinerte „kinetische“ Speicher aufgefasst. Dabei werden die Magnetfelder durch Leitungsströme  $i = dQ/dt$  und bei Permanentmagneten durch atomare Elementarströme der Hüllenelektronen in den Atomen des betrachteten Materials erregt. Im Folgenden werden mit  $i$  aber nur die **el. Leitungsströme** bezeichnet und Permanentmagnete durch ihre Kennlinie  $B_M(H_M)$  (Kap. 2) definiert. Die Magnetfeldspeicher sind auch bei Gleichstromerregung  $i = I = dQ/dt = \text{konst.}$  nicht den

statischen Strukturen der „potentiellen“ Energiespeicher zuzurechnen, sondern sie sind auf Grund der sie erregenden verallgemeinerten Geschwindigkeiten  $i = I = dQ/dt$  „kinetisch“!

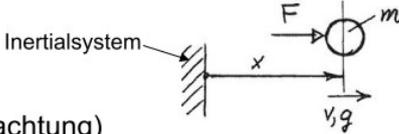
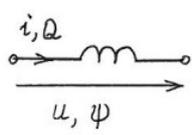
|   |   |   |
|---|---|---|
| <p><b>Gegenüberstellung:</b><br/>(KEINE Analogiebetrachtung)</p> <p>„Impuls“: (auch: Flussverkettung <math>\psi</math>)</p> <p><b>Sonderfall:</b> nicht-relativistisch:</p> <p><b>Sonderfall:</b> linear: <math>J, L = \text{konst.}</math></p> <p>Dynamische Gleichung: <b>NEWTON:</b></p> <p>Aufgenommene Leistung:</p> <p>Inkrementelle Energiezufuhr:</p> |    |    |
|   | $g = g(v) \quad v = v(g)$<br>$g = m \cdot v, D = J(\omega_m) \cdot \omega_m$<br>$g = m \cdot v, D = J \cdot \omega_m$<br>$F = dg/dt, M = dD/dt$<br>$p = v \cdot F = v \cdot \dot{g}$<br>$p \cdot dt = v \cdot dg$ | $\psi = \psi(i) \quad i = i(\psi)$<br>(ohne Hysterese): $L(i)$<br>$\psi = L \cdot i$<br>$u_i = -d\psi/dt$<br>$u + u_i = 0 : u = d\psi/dt$<br>$p = i \cdot u = i \cdot \dot{\psi}$<br>$p \cdot dt = i \cdot d\psi$ |

Tabelle 3.4-1: Physikalisch (= strukturell) begründete Entsprechungen zwischen nichtrelativistischen mech. Systemen mit trägen Massen und el. Spulen (Induktivitäten) hinsichtlich der kinetischen Energie.

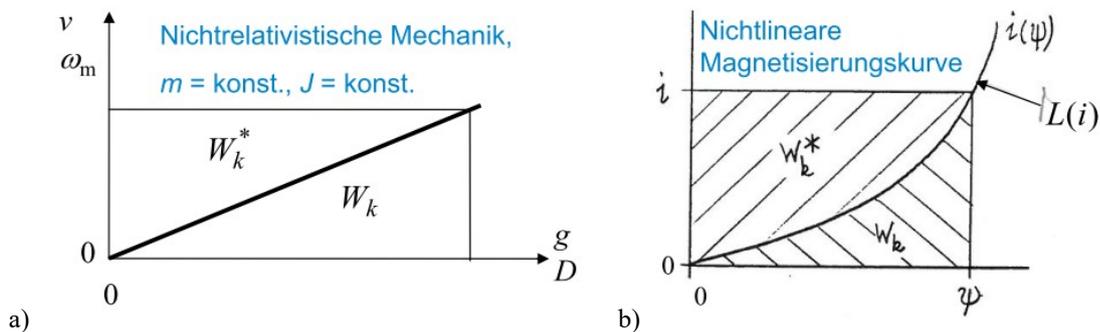


Bild 3.4-1: a) Prinzipiell lineare Kennlinie der mech. Geschwindigkeit  $v$  bzw. Winkelgeschwindigkeit  $\omega_m$  in Abhängigkeit des Impulses  $g$  bzw. Drehimpulses  $D$  in nichtrelativistischen Systemen, b) I. A. nichtlineare Kennlinie des el. Stroms  $i$  in Abhängigkeit der magn. Flussverkettung  $\psi$ .

Die inkrementelle Energiezufuhr ist (Tab. 3.4-1) in mech. Systemen  $dW_k = p \cdot dt = v \cdot dg$  und in magn. Systemen  $dW_k = p \cdot dt = i \cdot d\psi$ . Daraus ergibt sich die „kinetische“ Energie zu

$$W_k(g) = \int_0^{W_k} dW_k = \int_0^g v(g') \cdot dg' \quad \text{bzw.} \quad W_k(\psi) = \int_0^{W_k} dW_k = \int_0^\psi i(\psi') \cdot d\psi' \quad (3.4-1)$$

Analog zu Kap. 3.2 wird die „kinetische“ Ergänzungsenergie (auch Ko-Energie genannt) definiert.

$$W_k^*(v) = v \cdot g - W_k \quad \text{bzw.} \quad W_k^*(i) = i \cdot \psi - W_k \quad (3.4-2)$$

Daraus folgen mit Bild 3.4-1 die Formeln (vgl. Kap. 2.4.4)

$$W_k^*(v) = \int_0^v g(v') \cdot dv' \quad \text{bzw.} \quad W_k^*(i) = \int_0^i \psi(i') \cdot di' \quad (3.4-3)$$

Aus (3.4-3) folgt durch Differenzieren (3.4-4) zur Berechnung von  $v$  und  $i$  bzw. (3.4-5) zur Berechnung von  $g$  und  $\psi$  (vgl. (2.4.4-23), (2.4.4-26)).

$$W_k(g) = \int_0^g v(g') \cdot dg' \Rightarrow v(g) = \frac{dW_k(g)}{dg}, \quad W_k(\psi) = \int_0^\psi i(\psi') \cdot d\psi' \Rightarrow i(\psi) = \frac{dW_k(\psi)}{d\psi} \quad (3.4-4)$$

$$W_k^*(v) = \int_0^v g(v') \cdot dv' \Rightarrow g(v) = \frac{dW_k^*(v)}{dv}, \quad W_k^*(i) = \int_0^i \psi(i') \cdot di' \Rightarrow \psi(i) = \frac{dW_k^*(i)}{di} \quad (3.4-5)$$

Beispiel 3.4-1: Mechanisches lineares ( $m = \text{konst.}$ ) kinetisches System mit einem Bewegungsimpuls  $g = m \cdot v$  bzw. Drehimpuls  $D = J \cdot \omega_m$ . Die kinetische Energie ist NICHT  $m \cdot v^2 / 2$ , sondern gemäß (3.4-4) von  $g$  abhängig. Mit  $v = g / m$  folgt

$$W_k(g) = \int_0^g \frac{g'}{m} \cdot dg' = \frac{g^2}{2m} \quad \text{bzw.} \quad v(g) = \frac{dW_k}{dg} = \frac{d(g^2 / (2m))}{dg} = \frac{g}{m} \quad (3.4-6)$$

Für die Drehbewegung gilt analog, dass die kinetische Energie NICHT  $J \cdot \omega_m^2 / 2$  ist, sondern sie hängt wegen  $\omega_m = D / J$  von  $D$  ab.

$$W_k(D) = \int_0^D \frac{D'}{J} \cdot dD' = \frac{D^2}{2J} \Rightarrow \omega_m(D) = \frac{d(D^2 / (2J))}{dD} = \frac{D}{J} \quad (3.4-7)$$

Es ist die Ko-Energie, die mit (3.4-3) die bekannten Ausdrücke  $m \cdot v^2 / 2$  bzw.  $J \cdot \omega_m^2 / 2$  ergibt.

$$W_k^*(v) = \int_0^v g(v') \cdot dv' = \int_0^v m \cdot v' \cdot dv' = \frac{m \cdot v^2}{2}, \quad (3.4-8)$$

$$W_k^*(\omega_m) = \int_0^{\omega_m} D(\omega'_m) \cdot d\omega'_m = \int_0^{\omega_m} J \cdot \omega'_m \cdot d\omega'_m = \frac{J \cdot \omega_m^2}{2} \quad (3.4-9)$$

Die Kontrolle mit (3.4-4), (3.4-5) ergibt wiederum

$$g(v) = \frac{d(m \cdot v^2 / 2)}{dv} = m \cdot v, \quad D(\omega_m) = \frac{d(J \cdot \omega_m^2 / 2)}{d\omega_m} = J \cdot \omega_m \quad (3.4-10)$$

Beispiel 3.4-2: Magnetisches lineares ( $L = \text{konst.}$ ) System als verallgemeinertes kinetisches System mit dem verallgemeinerten Impuls  $\psi = L \cdot i$ . Die gespeicherte magnetische Energie ist gemäß Kap. 2 NICHT  $L \cdot i^2 / 2$ , sondern mit  $i = \psi / L$

$$W_k(\psi) = \int_0^\psi \frac{\psi'}{L} \cdot d\psi' = \frac{\psi^2}{2L} \quad \text{Kontrolle mit (3.4-4):} \quad i(\psi) = \frac{dW_k}{d\psi} = \frac{d(\psi^2 / (2L))}{d\psi} = \frac{\psi}{L} \quad (3.4-11)$$

Übereinstimmend mit Kap. 2 ist mit  $\psi = L \cdot i$

$$W_k^*(i) = \int_0^i \psi(i') \cdot di' = \int_0^i L \cdot i' \cdot di' = \frac{L \cdot i^2}{2} \quad (3.4-12)$$

$$\text{Kontrolle mit (3.4-5):} \quad \psi(i) = \frac{dW_k^*(i)}{di} = \frac{d(L \cdot i^2 / 2)}{di} = L \cdot i$$

Das System Bild 3.1-1 ist als räumlich abgegrenzter Bereich über „äußere Kräfte“ über die Anschlüsse (Tore I, II, ...) in Wechselwirkung mit seiner Umgebung. Die einzelnen Systemteile sind durch konzentrierte Elemente (allgemein:  $m, k, R, L, C, \dots$ ) bestimmt. Bei ausschließlich kinetischen Systemen beschränken sich die Systemparameter auf die

„kinetischen“ Parameter  $m, L$ . Auf das System wirken gemäß Bild 3.1-1 von außen aufgeprägte „äußere Kräfte“  $F$ , wie z. B. die angelegte mech. Kraft  $F$  und die anliegende el. Spannung  $u$  in Bild 3.1-1. Im Systeminneren wirken zwischen den einzelnen, konzentriert gedachten Teilen des Systems (z. B. zwei el. Spulen mit ihren Massen) „innere Kräfte“  $F^{(in)}$  (z. B. magnetische Kraft zwischen beiden Spulen). Diese „inneren Kräfte“ hängen von der Lage ( $i = 1, \dots, r$  Koordinaten  $x_i$ ) und Geschwindigkeit (z. B. Ströme) der einzelnen Systemteile ab (z. B. zwei Spulen). Bewegt sich z. B. die eine stromdurchflossene Spule 1 von einer anderen, ebenfalls stromdurchflossenen Spule 2 weg, so dass sich ihre Koordinate  $x$  ändert, so ändert sich die im System gespeicherte magn. Energie. Über die „inneren“ Kräfte  $F^{(in)}$  wird folglich Energie mit den kinetischen Speichern des Systems ausgetauscht!

Die Koordinaten der einzelnen  $r$  Systemteile (mech. Lagekoordinate, el. Ladung als el. Koordinate) werden gemäß Kap. 3.1 als Vektor zusammen gefasst  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_r)$ . Die (verallgemeinerten) Impulse der einzelnen Systemteile werden ebenfalls als Vektor (3.4-13) geschrieben.

$$\vec{g} = (g_1, \dots, g_r) \tag{3.4-13}$$

Bei einem aus mehreren Teilsystemen bestehenden mechanischen System erfolgt die Aufstellung der Bewegungsgleichungen gemäß Kap. 2 durch Freischneiden der einzelnen Teilsysteme und Anwendung des 2. NEWTON'schen Axioms (Impulssatz) auf jedes Teilsystem, wobei die an den Schnittstellen auftretenden inneren Kräfte zu berücksichtigen sind. Die Verallgemeinerung dieses für mech. Systemteile gültigen 2. NEWTON'schen Axioms lautet als **dynamisches Kraftgesetz** folglich:

Die Summe aus „äußeren“ Kräften  $F_i$  und „inneren“ Kräften  $F^{(in)}_i$  je  $i$ -ten Systemteil ergibt dessen verallgemeinerte „Impulsänderung“  $dg_i/dt$ , so dass sich die gesamte „Impulsänderung“ des Systems als Vektorgleichung ergibt.

$$\vec{F} + \vec{F}^{(in)}(\vec{v}, \vec{x}) = \frac{d\vec{g}}{dt}, \quad \vec{F} = (F_1, \dots, F_r), \quad \vec{F}^{(in)} = (F_1^{(in)}, \dots, F_r^{(in)}) \tag{3.4-14}$$

Das dynamische Kraftgesetz (3.4-14) gilt für den **Sonderfall** OHNE dissipative Kräfte (siehe Kap. 3.6) und ohne potentielle Energiespeicher (siehe Kap. 3.2)!

Die von außen durch die „äußeren“ Kräfte  $F$  dem System zugeführte Momentanleistung  $p(t)$  ergibt sich mit (3.4-14) als

$$p(t) = \sum_{i=1}^r F_i \cdot v_i = \vec{F} \cdot \vec{v} = \left( \frac{d\vec{g}}{dt} - \vec{F}^{(in)}(\vec{v}, \vec{x}) \right) \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \frac{d\vec{g}}{dt} - \vec{F}^{(in)} \cdot \vec{v} \tag{3.4-15}$$

Die zugehörige inkrementelle Energiezufuhr  $dW$  ist demnach die Impulsänderungsarbeit minus der Arbeit der inneren Kräfte, nämlich

$$dW = p(t) \cdot dt = \vec{v} \cdot \frac{d\vec{g}}{dt} \cdot dt - \vec{F}^{(in)}(\vec{v}, \vec{x}) \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot dt = \vec{v} \cdot d\vec{g} - \vec{F}^{(in)}(\vec{v}, \vec{x}) \cdot d\vec{x} \tag{3.4-16a}$$

bzw.

$$dW = \sum_{i=1}^r v_i \cdot dg_i - \sum_{i=1}^r F_i^{(in)} \cdot dx_i \tag{3.4-16b}$$

Diese Energiezufuhr bedingt wegen des Fehlens anderer Energieformen eine Erhöhung der gespeicherten kinetischen Energie  $dW = dW_k$ . Wegen  $\vec{F}^{(in)}(\vec{v}, \vec{x})$  hängt  $W_k$  (3.4-17) nicht nur von  $\vec{g}$ , sondern auch von  $\vec{x}$  ab

$$W_k = W_k(\vec{g}, \vec{x}) = W_k(g_1, \dots, g_r, x_1, \dots, x_r) \tag{3.4-17}$$

und wird als vollständiges Differential (3.4-18) geschrieben.

$$dW_k = \sum_{i=1}^r \frac{\partial W_k}{\partial g_i} \cdot dg_i + \sum_{i=1}^r \frac{\partial W_k}{\partial x_i} \cdot dx_i \tag{3.4-18}$$

Aus dem Koeffizientenvergleich von (3.4-16b) mit (3.4-18) folgt (3.4-19).

$$v_i = \partial W_k / \partial g_i, \quad F_i^{(\text{in})} = -\partial W_k / \partial x_i \quad (3.4-19)$$

Die erste Gleichung in (3.4-19) ist die Verallgemeinerung der Ausdrücke in (3.4-4). Beide Gleichungen (3.4-19) sind die Verallgemeinerung der Strom- und Kraftberechnung an einem Spulensystem aus  $W_k = W_m$  (2.4.4-23), da die Magnetkraft  $F_m$  eine innere Kraft ist.

$$i = \frac{\partial W_m(\psi, x)}{\partial \psi}, \quad F_m = -\frac{\partial W_m(\psi, x)}{\partial x} \quad \text{siehe (2.4.4-23).}$$

Für ein System mit  $r$  Koordinaten wird die kinetische Ergänzungsenergie analog zu (3.4-2) gemäß (3.4-20) definiert.

$$W_k^*(\vec{v}, \vec{x}) = \vec{g} \cdot \vec{v} - W_k(\vec{g}, \vec{x}) \quad (3.4-20)$$

Deren inkrementelle Änderung ist

$$dW_k^* = d(\vec{g} \cdot \vec{v}) - dW_k = \sum_{i=1}^r d(g_i \cdot v_i) - \sum_{i=1}^r \left( \frac{\partial W_k}{\partial g_i} \cdot dg_i + \frac{\partial W_k}{\partial x_i} \cdot dx_i \right) \quad (3.4-21a)$$

$$\text{bzw. mit (3.4-19) } dW_k^* = \sum_{i=1}^r \left( dg_i \cdot v_i + g_i \cdot dv_i - \underbrace{\frac{\partial W_k}{\partial g_i}}_{v_i} \cdot dg_i - \underbrace{\frac{\partial W_k}{\partial x_i}}_{F_i^{(\text{in})}} \cdot dx_i \right), \quad (3.4-21b)$$

$$dW_k^* = \sum_{i=1}^r g_i \cdot dv_i + F_i^{(\text{in})} \cdot dx_i. \quad (3.4-21c)$$

Wird diese inkrementelle Änderung als vollständiges Differential (3.4-22) geschrieben

$$dW_k^*(\vec{v}, \vec{x}) = \sum_{i=1}^r \left( \frac{\partial W_k^*}{\partial v_i} \cdot dv_i + \frac{\partial W_k^*}{\partial x_i} \cdot dx_i \right), \quad (3.4-22)$$

so ergibt der Koeffizientenvergleich von (3.4-21c) und (3.4-22)

$$g_i = \frac{\partial W_k^*}{\partial v_i}, \quad F_i^{(\text{in})} = \frac{\partial W_k^*}{\partial x_i} \quad \text{bzw. } \vec{g} = \text{grad}_{\vec{v}} W_k^*, \quad \vec{F}^{(\text{in})} = \text{grad}_{\vec{x}} W_k^* \quad (3.4-23)$$

Dies wurde bereits als Sonderfall in Kap. 2.4.4 bei einer Spule mit ideal magnetisierbarem Eisenkern hergeleitet. Es folgt mit  $W_m^* = W_k^*$  die Magnetkraft  $F_m$  als innere Kraft

$$F_m = -\frac{\partial W_m}{\partial x} = \frac{\partial W_m^*}{\partial x} \Rightarrow F_m = F^{(\text{in})} = -\frac{\partial W_k}{\partial x} = \frac{\partial W_k^*}{\partial x} \quad \text{und } \psi = \frac{\partial W_m^*(i, x)}{\partial i}. \quad \text{Aus (3.4-22) folgt}$$

$$dW_k^*(\vec{v}, \vec{x}) = \sum_{i=1}^r (g_i \cdot dv_i + F_i^{(\text{in})} \cdot dx_i) = \vec{g}(\vec{v}, \vec{x}) \cdot d\vec{v} + \vec{F}^{(\text{in})}(\vec{v}, \vec{x}) \cdot d\vec{x}. \quad (3.4-24)$$

Mit  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_r)$  und  $\vec{v} = (v_1, \dots, v_r)$  wird der  $2r$ -dimensionale Raum  $(\vec{v}, \vec{x})$  aufgespannt, in dem  $W_k^*$  das Integral  $W_k^* = \int dW_k^*$  vom Ursprung  $\vec{0} = (\vec{v} = 0, \vec{x} = 0)$  zum Punkt  $(\vec{v}, \vec{x})$  ist.

$$\text{Gemäß (3.4-23) ist } \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 W_k^*}{\partial x_j \partial v_i} = \frac{\partial^2 W_k^*}{\partial v_i \partial x_j} = \frac{\partial F_j^{(\text{in})}}{\partial v_i}, \quad \text{was mit (3.2-15) und den grad-}$$

Ausdrücken (3.4-23) die Wegunabhängigkeit der Integration im  $(\vec{v}, \vec{x})$ -Raum zeigt. Es wird z. B. zuerst nur bei veränderlichem  $\vec{x}$  integriert, während  $\vec{v} = 0$  ist ( $dx_i \neq 0, dv_i = 0$ ), und dann bei veränderlichem  $\vec{v}$  und konstantem  $\vec{x}$  ( $dx_i = 0, dv_i \neq 0$ ). Dabei verändern wir der Einfachheit halber alle Koordinaten  $x_i$  gleichzeitig von Null auf ihren jeweiligen Endwert mit dem Skalierungsfaktor  $0 \leq \theta \leq 1$ , und dann alle Koordinaten  $v_i$  gleichzeitig von Null auf ihren jeweiligen Endwert mit dem Skalierungsfaktor  $0 \leq \theta \leq 1$  (siehe (3.4-27) und Bild 3.4-2), was (3.4-25) entspricht.

$$\text{Zunächst Weg } \vec{v}' = 0, \vec{x}' = \theta \cdot \vec{x}, 0 \leq \theta \leq 1, \text{ dann Weg } \vec{v}' = \theta \cdot \vec{v}, \vec{x}' = \vec{x}, 0 \leq \theta \leq 1. \quad (3.4-25)$$

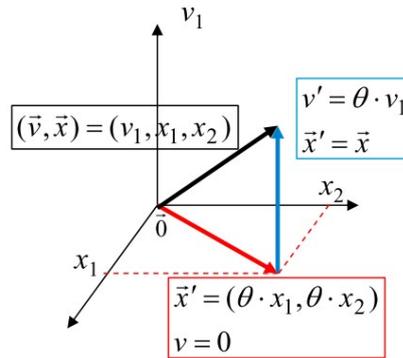


Bild 3.4-2: Beispiel eines Integrationswegs (3.4-25) im  $(v, x)$ -Raum für  $r = 3$  gemäß  $(v_1, x_1, x_2)$ : Zunächst wird der Weg in der  $(x_1, x_2)$ -Ebene zurückgelegt und dann bei  $(x_1, x_2)$  senkrecht dazu mit wachsendem  $v_1$ .

Es ist mit (3.4-25)  $d\vec{x}' = d(\theta \cdot \vec{x}) = \vec{x} \cdot d\theta$  und  $d\vec{v}' = d(\theta \cdot \vec{v}) = \vec{v} \cdot d\theta$ . Mit (3.4-24) folgt die Integration (3.4-26), die längs des Wegs gemäß (3.4-25) ausgeführt wird.

$$W_k^*(\vec{v}, \vec{x}) = \int dW_k^* = \int_0^1 \vec{F}^{(in)}(\vec{0}, \theta \cdot \vec{x}) \cdot \vec{x} \cdot d\theta + \int_0^1 \vec{g}(\theta \cdot \vec{v}, \vec{x}) \cdot \vec{v} \cdot d\theta \quad (3.4-26)$$

In (3.4-26) ist für die Integration längs  $\vec{v}' = 0, \vec{x}' = \theta \cdot \vec{x}, 0 \leq \theta \leq 1$  der erste Ausdruck  $W_{k0}^*(\vec{x})$  (Wegwahl Bild 3.4-2) unabhängig von  $\vec{v}$ , während der zweite wegen  $\vec{v} = 0$  Null ist.

$$W_{k0}^*(\vec{x}) = \int_0^1 \vec{F}^{(in)}(\vec{0}, \theta \cdot \vec{x}) \cdot \vec{x} \cdot d\theta, \quad \vec{v} = 0: \int_0^1 \vec{g}(\theta \cdot \vec{v}, \vec{x}) \cdot \vec{v} \cdot d\theta = 0 \quad (3.4-27)$$

Auf dem zweiten Wegabschnitt  $\vec{v}' = \theta \cdot \vec{v}, \vec{x}' = \vec{x}, 0 \leq \theta \leq 1$  ist wegen  $\vec{x} = \text{konst.}, d\vec{x} = 0$  der erste Integrand von (3.4-26) Null, so dass nur der zweite Term verbleibt. In Summe ist das

$$W_k^*(\vec{v}, \vec{x}) = W_{k0}^*(\vec{x}) + \int_0^1 \vec{g}(\theta \cdot \vec{v}, \vec{x}) \cdot \vec{v} \cdot d\theta. \quad (3.4-28)$$

Der Anteil  $W_{k0}^*(\vec{x})$  wirkt bereits für  $v_i = 0$ , also wenn sämtliche el. Leitungsströme und mech. Geschwindigkeiten im System Null sind:  $i = 0, v = 0$ . Er berücksichtigt daher die magnetische Energie von Dauermagneten, bei denen ein  $B$ -Feld auch bei  $i = 0$  auftritt. Sind im System keine Dauermagnete vorhanden, so ist er Null ( $W_{k0}^*(\vec{x}) = 0$ ). Dann ist die **kinetische Ergänzungenergie** (3.4-28) der Ausdruck (3.4-29).

$$W_k^*(\vec{v}) \Big|_{W_{k0}^*=0} = \int_0^1 \vec{g}(\theta \cdot \vec{v}) \cdot \vec{v} \cdot d\theta. \quad (3.4-29)$$

### 3.5 Beispiel: Bewegliche gekoppelte Spulen

Für zwei bewegliche, magnetisch gekoppelte, elektrisch erregte, verlustlose Spulen berechnen wir die kinetische Ergänzungenergie. Die magnetische Kopplung erfolgt über die ortsabhängige Gegeninduktivität  $M(x) = L_{12}(x) = L_{21}(x)$ , die z. B. aus einer numerischen Feldberechnung (ähnlich zu Kap. 2.5) bekannt ist. Die Selbstinduktivitäten beider Spulen  $L_1, L_2$  sind konstant. Es genügt, die Relativbewegung (Geschwindigkeit  $v$ ) von Spule 2 (Masse  $m$ ) gegenüber Spule 1 zu betrachten (Bild 3.5-1a). Sie ist längs der zeitlich vorgegebenen Koordinate  $x(t)$  verschiebbar. Über die el. Spannungen  $u_1, u_2$  sind die Spulenströme  $i_1(t), i_2(t)$  eingeprengt und damit vorgegeben. Gesucht sind die äußeren Kräfte: Die Kraft  $F(x)$  als

Gegenkraft zur Magnetkraft zwischen beiden Spulen und zur Trägheitskraft, die für die Ströme erforderlichen außen anliegenden Spannungen  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  und die zugehörigen dynamischen Gleichungen.

Lösung:

Das System ( $r = 3$ ) hat drei „Koordinaten“  $x_1 = Q_1$ ,  $x_2 = Q_2$ ,  $x_3 = x$ , drei „Geschwindigkeiten“  $v_1 = \dot{Q}_1 = i_1$ ,  $v_2 = \dot{Q}_2 = i_2$ ,  $v_3 = \dot{x}_3 = \dot{x} = v$ , drei „Kräfte“  $F_1 = u_1$  (zu  $i_1$ ),  $F_2 = u_2$  (zu  $i_2$ ),  $F_3 = F$  (zu  $v$ ) und drei „Impulse“  $g_1 = \psi_1$  (zu  $i_1$ ),  $g_2 = \psi_2$  (zu  $i_2$ ),  $g_3 = g$  (zu  $v$ ).

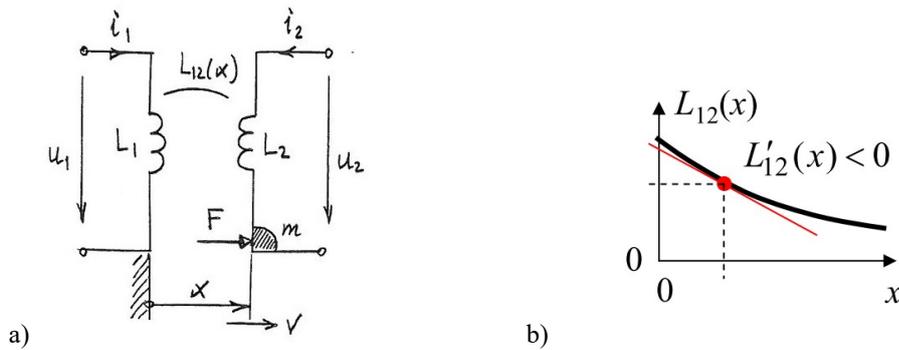


Bild 3.5-1: a) Zwei magnetisch gekoppelte, über die el. Spannungen  $u_1$ ,  $u_2$  elektrisch erregte Spulen, jede Windung gewickelt mit gleichem Wickelsinn (z. B. rechtswendig), Spule 2 beweglich, b) Qualitativer Verlauf der magnetischen Kopplung (Gegeninduktivität  $L_{12}$ ) in Abhängigkeit des Abstands  $x$  zwischen Spule 1 und 2.

Mit den Gleichungen der Elektrotechnik für die Flussverkettungen und dem Bewegungsimpuls der Mechanik (Kap. 2) werden die Impulse berechnet. Mit  $L_{12} = L_{21}$  folgt  $\psi_1 = L_1 \cdot i_1 + L_{12}(x) \cdot i_2$ ,  $\psi_2 = L_2 \cdot i_2 + L_{21}(x) \cdot i_1 = L_2 \cdot i_2 + L_{12}(x) \cdot i_1$ ,  $g = m \cdot v$ . (3.5-1)

Die kinetische Ergänzungsenergie ist, da keine Dauermagnete vorhanden sind ( $W_{k0}^*(\vec{x}) = 0$  bzw.  $\psi_1(i_1 = 0, i_2 = 0) = 0$ ,  $\psi_2(i_1 = 0, i_2 = 0) = 0$ ), mit (3.4-29) zu berechnen.

$$W_k^*(i_1, i_2, v) = \int_0^1 \vec{g}(\theta \cdot \vec{v}) \cdot \vec{v} \cdot d\theta = \int_0^1 \psi_1(\theta \cdot \vec{v}) \cdot i_1 \cdot d\theta + \int_0^1 \psi_2(\theta \cdot \vec{v}) \cdot i_2 \cdot d\theta + \int_0^1 g(\theta \cdot \vec{v}) \cdot v \cdot d\theta \quad (3.5-2)$$

$$W_k^* = \int_0^1 (L_1 \cdot \theta \cdot i_1 + L_{12}(x) \cdot \theta \cdot i_2) \cdot i_1 \cdot d\theta + \int_0^1 (L_2 \cdot \theta \cdot i_2 + L_{12}(x) \cdot \theta \cdot i_1) \cdot i_2 \cdot d\theta + \int_0^1 m \cdot \theta \cdot v \cdot v \cdot d\theta \quad (3.5-3)$$

Mit  $\int_0^1 \theta \cdot d\theta = \theta^2 / 2 \Big|_0^1 = 1/2$  folgt (3.5-4).

$$W_k^* = L_1 \cdot \frac{i_1^2}{2} + L_{12}(x) \cdot \frac{i_1 i_2}{2} + L_2 \cdot \frac{i_2^2}{2} + L_{12}(x) \cdot \frac{i_1 i_2}{2} + m \cdot \frac{v^2}{2} = L_1 \cdot \frac{i_1^2}{2} + L_2 \cdot \frac{i_2^2}{2} + L_{12}(x) \cdot i_1 i_2 + m \cdot \frac{v^2}{2} \quad (3.5-4)$$

Das dynamische „Kraftgesetz“ (3.4-14)  $\vec{F} = \frac{d\vec{g}}{dt} - \vec{F}^{(in)}(\vec{x})$  wird mit  $g_i = \frac{\partial W_k^*}{\partial v_i}$ ,  $F_i^{(in)} = \frac{\partial W_k^*}{\partial x_i}$

für  $i = 1, 2, 3$  berechnet und ergibt die dynamischen Gleichungen (3.5-11), (3.5-12).

$$\dot{g}_1 = \dot{\psi}_1 = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W_k^*}{\partial i_1} \right) = \frac{d}{dt} (L_1 i_1 + L_{12}(x) \cdot i_2) = L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} + L_{12}(x) \cdot \frac{di_2}{dt} + i_2 \cdot \frac{dL_{12}(x(t))}{dt} \quad (3.5-5)$$

$$\dot{g}_2 = \dot{\psi}_2 = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W_k^*}{\partial i_2} \right) = \frac{d}{dt} (L_2 i_2 + L_{12}(x) \cdot i_1) = L_2 \cdot \frac{di_2}{dt} + L_{12}(x) \cdot \frac{di_1}{dt} + i_1 \cdot \frac{dL_{12}(x(t))}{dt} \quad (3.5-6)$$

$$\dot{g}_3 = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W_k^*}{\partial v} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial (m \cdot v^2 / 2)}{\partial v} \right) = \frac{d(m \cdot v)}{dt} = m \cdot \dot{v} \quad (3.5-7)$$

Dabei berücksichtigt (3.5-8) die Bewegungsinduktion zufolge der Bewegung von Spule 2 im Magnetfeld der Spule 1. Mit ' wird die Ableitung nach  $x$  abgekürzt, mit  $\dot{\cdot}$  nach  $t$ .

$$\frac{dL_{12}(x(t))}{dt} = \frac{dL_{12}(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dL_{12}(x)}{dx} \cdot v = L'_{12}(x) \cdot \dot{x}(t) = L'_{12}(x) \cdot v \quad (3.5-8)$$

Die Berechnung der „inneren“ Kräfte (3.4-23) aus der Ko-Energie liefert

$$F_1^{(in)} = \frac{\partial W_k^*}{\partial x_1} = \frac{\partial W_k^*}{\partial Q_1} = 0, \quad F_2^{(in)} = \frac{\partial W_k^*}{\partial x_2} = \frac{\partial W_k^*}{\partial Q_2} = 0, \quad (3.5-9)$$

denn die Ko-Energie (3.5-4) hängt NICHT von  $Q_1$  und  $Q_2$  ab! (3.5-10) liefert als einzige innere Kraft die Magnetkraft  $F_m$  zwischen den beiden Spulen.

$$F_3^{(in)} = \frac{\partial W_k^*}{\partial x_3} = \frac{\partial W_k^*}{\partial x} = L'_{12}(x) \cdot i_1 \cdot i_2 = F_m \quad (3.5-10)$$

(3.5-10) stimmt mit (2.4.4-26)  $F_m = \partial W_m^* / \partial x$  überein, da  $W_m^*(x) = L_1 \cdot \frac{i_1^2}{2} + L_2 \cdot \frac{i_2^2}{2} + L_{12}(x) \cdot i_1 i_2$

als Untermenge von  $W_k^*(x)$  in (3.5-4) auftritt und den von  $x$  abhängigen Anteil darstellt. Damit erhalten wir für die ( $r = 3$ ) drei dynamischen Gleichungen

$$u_1 = F_1 = \dot{g}_1 - F_1^{(in)} = \dot{\psi}_1 - 0 = \dot{\psi}_1, \quad u_2 = F_2 = \dot{g}_2 - F_2^{(in)} = \dot{\psi}_2 - 0 = \dot{\psi}_2, \quad (3.5-11)$$

$$F = F_3 = \dot{g}_3 - F_3^{(in)} = \frac{d(m \cdot v)}{dt} - L'_{12}(x) \cdot i_1 \cdot i_2 = \frac{d(m \cdot v)}{dt} - F_m, \quad (3.5-12)$$

wovon die ersten beiden elektrische und die dritte mechanische Verhältnisse beschreiben (Tab. 3.5-1).

$$\begin{aligned}
 u_1 = \dot{\psi}_1 &= L_1 \cdot \underbrace{\frac{di_1}{dt}}_{\text{Ruhinduktion}} + L_{12}(x) \cdot \underbrace{\frac{di_2}{dt}}_{\text{Bewegungsinduktion}} + i_2 \cdot L'_{12}(x) \cdot v \\
 u_2 &= L_2 \cdot \underbrace{\frac{di_2}{dt}}_{\text{Ruhinduktion}} + L_{12}(x) \cdot \underbrace{\frac{di_1}{dt}}_{\text{Bewegungsinduktion}} + i_1 \cdot L'_{12}(x) \cdot v \\
 F &= m \cdot \underbrace{\frac{dv}{dt}}_{\text{Trägheitskraft}} - \underbrace{L'_{12}(x) \cdot i_1 \cdot i_2}_{\text{Magnetkraft } F_m}
 \end{aligned}$$

Tabelle 3.5-1: Zwei bewegliche, magnetisch gekoppelte, über die el. Spannungen  $u_1, u_2$  elektrisch erregte Spulen haben drei dynamische Gleichungen.

Natürlich ist es möglich, diese drei Gleichungen auch direkt mit den Grundgleichungen der Elektrotechnik und Mechanik anzuschreiben, ohne den formalen Weg von Kap. 3.4 über die Ko-Energie zu gehen. Die Kirchhoff-Maschenregel für Spule 1  $u_1 + u_{i,1} = R_1 \cdot i_1 = u_1 - \dot{\psi}_1$  ergibt wegen  $R_1 = 0$ :  $u_1 = \dot{\psi}_1$ . Mit (3.5-1) folgt (3.5-11), ebenso für Spule 2. Der Newton'sche Impulssatz (Kap. 2) für die im Schwerpunkt der Spule 2 konzentriert gedachte Masse  $m$  liefert  $m \cdot \ddot{x} = m \cdot \dot{v} = \text{Summe aller Kräfte} = F + F_m$  in Übereinstimmung mit (3.5-12).

Die Magnetkraft  $F_m$  wird gemäß Kap. 2 (2.4.4-26) aus  $F_m = \partial W_m^* / \partial x$  (siehe (3.5-10)) bestimmt. Dieser Weg ist hier deutlich kürzer. Die in Kap. 3.4 vorgestellte formale Methode lohnt erst dann, wenn das Wandlersystem deutlich mehr Komponenten  $r$  umfasst, weil dann die Irrtumswahrscheinlichkeit beim Aufstellen der dynamischen Gleichungen geringer ist.

Die Magnetkraft  $F_m$  (3.5-10) als „innere“ Kraft hängt von beiden Strömen  $i_1, i_2$  als Produkt und vom Vorzeichen der beiden Ströme  $i_1, i_2$  ab! Der Kraftzählpfeil ist positiv IN Richtung von  $x$  definiert! Die magnetische Kopplung  $L_{12}$  nimmt mit steigendem Abstand  $x$  zwischen beiden Spulen ab (Bild 3.5-1b)! Folglich ist die Magnetkraft  $F_m < 0$ , also gegen die positive  $x$ -Richtung gerichtet (Bild 3.5-1a), wenn beide Ströme  $i_1, i_2$  bei gleichsinniger Zählpfeilrichtung für die Ströme (VZS für beiden Spulen!) GLEICHES Vorzeichen aufweisen:  $\text{sgn}(i_1) = \text{sgn}(i_2)$ . Daher ziehen dann beide Spulen einander an! Dabei ist vorausgesetzt, dass beide Spulen gleichartig gewickelt sind, also die Windungen mit gleichem Wickelsinn, z. B. beide Spulen rechtswendig gewickelt wie eine rechtsgängige Schraube. Nur dann ist die Vorzeichenangabe für die beiden Ströme auch vergleichbar definiert. Die Magnetkraft ist  $F_m > 0$ , wenn beide Ströme  $i_1, i_2$  UNGLEICHES Vorzeichen aufweisen:  $\text{sgn}(i_1) \neq \text{sgn}(i_2)$ . Dann stoßen beide Spulen einander ab. Dies ist in Bild 3.5-2 unmittelbar ersichtlich: Gleichsinnig bestromte parallele Leiter ziehen einander an (Bild 3.5-2 links,  $F_m < 0$ ), wobei die Kraft proportional zum Produkt beider Ströme ist, entgegen gesetzt bestromte parallele Leiter stoßen einander ab (Bild 3.5-2 rechts,  $F_m > 0$ ).

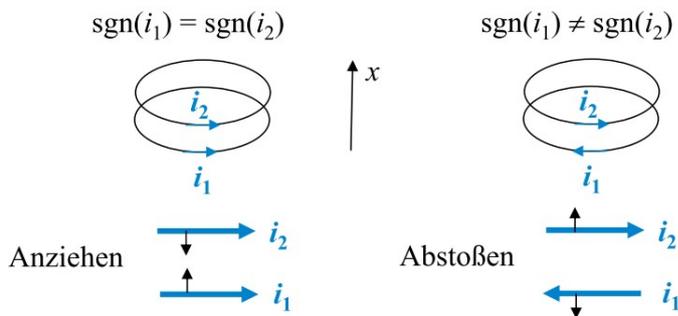


Bild 3.5-2: Schematische Darstellung der beiden Spulen 1 und 2 von Bild 3.5-1 als koaxial gewickelte Zylinderspulen mit links gleicher und rechts entgegengesetzter Stromrichtung.

Im Beispiel Bild 3.5-1 tritt nur „kinetische“ Energie auf, nämlich mech. Bewegungsenergie und magn. Energie. Es tritt KEINE potentielle Energie auf, weil keine Potentialspeicher wie Federn oder el. Kondensatoren vorhanden sind. Die Spulen verhalten sich magnetisch linear ( $L = \text{konst.}$ ), und die Mechanikgesetze sind nicht-relativistisch formuliert ( $m = \text{konst.}$ ). Daher sind die Zahlenwerte für die „kinetische“ Energie und die „kinetische“ Ergänzungsenergie IDENTISCH! ABER die „gewohnte“ Formulierung der Energie mit  $i, v$  liefert eben die Ko-Energie (3.5-4), während die ungewohnte Formulierung mit  $\psi, g$  die Energie selbst darstellt, wie nun für die Gesamtenergie des Systems der beiden Spulen mit der Umrechnung von Flussverkettungen auf Ströme (3.5-14) bzw. Impulse auf Geschwindigkeiten gezeigt wird, wobei als Abkürzung die Blondel'sche Streuziffer  $\sigma$  (3.5-13) verwendet wird.

$$\sigma(x) = 1 - \frac{L_{12}^2(x)}{L_1 \cdot L_2} \tag{3.5-13}$$

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= L_1 \cdot i_1 + L_{12} \cdot i_2 \\ \psi_2 &= L_2 \cdot i_2 + L_{12} \cdot i_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} i_1 = \frac{1}{\sigma \cdot L_1} \cdot \left( \psi_1 - \frac{L_{12}}{L_2} \cdot \psi_2 \right) \\ i_2 = \frac{1}{\sigma \cdot L_2} \cdot \left( \psi_2 - \frac{L_{12}}{L_1} \cdot \psi_1 \right) \end{cases} \tag{3.5-14}$$

Einsetzen von (3.5-14) in (3.5-4) liefert die „kinetische“ Gesamtenergie

$$W_k = \underbrace{\frac{\psi_1^2}{2\sigma \cdot L_1} + \frac{\psi_2^2}{2\sigma \cdot L_2} - \frac{L_{12}}{\sigma \cdot L_1 \cdot L_2} \cdot \psi_1 \cdot \psi_2}_{>0!} + \frac{g^2}{2m} > 0. \tag{3.5-15}$$

Die *Blondel'sche* Streuziffer ist ein Maß für die Stärke der magnetischen Kopplung zwischen beiden Spulen 1 und 2. Bei  $\sigma = 1$  existiert KEINE Kopplung  $L_{12} = 0$ . Die Selbstinduktivitäten sind Streuinduktivitäten  $L_1 = L_{1\sigma} + L_{12} = L_{1\sigma}$ ,  $L_2 = L_{2\sigma} + L_{12} = L_{2\sigma}$ . Die magnetischen Energien sind je Spule getrennt als  $W_{m1}$ ,  $W_{m2}$  existent (3.5-16). Gemäß (3.5-10) ist die Magnetkraft zwischen den Spulen  $F_m = 0$ .

$$W_k^* = L_1 \cdot \frac{i_1^2}{2} + L_2 \cdot \frac{i_2^2}{2} + m \cdot \frac{v^2}{2}, \quad W_k = W_{m1} + W_{m2} + W_{mec} = \frac{\psi_1^2}{2 \cdot L_1} + \frac{\psi_2^2}{2 \cdot L_2} + \frac{g^2}{2m} \quad (3.5-16)$$

Bei  $\sigma = 0$  ist die Kopplung maximal (VOLLSTÄNDIG):  $L_1 = L_{12} = L_2$ . Es treten keine Streuinduktivitäten auf:  $L_{1\sigma} = 0$ ,  $L_{2\sigma} = 0$ . Daher ist gemäß (3.5-1)  $\psi_1 = L_{12} \cdot (i_1 + i_2) = \psi_2$ .

$$W_k^* = \frac{L_{12}}{2} \cdot (i_1 + i_2)^2 + m \cdot \frac{v^2}{2}, \quad W_k = \frac{\psi_1^2}{2L_{12}} + \frac{g^2}{2m} = \frac{\psi_2^2}{2L_{12}} + \frac{g^2}{2m}. \quad (3.5-17)$$

### 3.6 Energiedissipation

In elektromechanischen Wandlern werden (in der Regel ungewollt) nutzbare Energieformen in unterschiedlichen „dissipativen“ Elementen (Exergie) in Wärmeenergie (Verlustwärme) umgewandelt (Energiedissipation). Diese Wärme ist sinnvoller Weise klein zu halten. Daher ist sie wegen ihrer relativ geringen Größe i. A. nicht weiter technisch sinnvoll nicht nutzbar (Anergie). Dissipative Elemente sind z. B. mechanische Reibungs- und Dämpfungselemente. So wird z. B. Bewegungsenergie über Roll- und Gleitreibung in Lagerungen bewegter Körper tw. in Wärme umgesetzt. Mechanische Dämpfer sind z. B. bewegte Flügel in einer Flüssigkeit (hydraulische Dämpfung durch Reibung im Fluid oder an der rauen Flügeloberfläche) oder Federdämpfer, wo tw. plastische Verformung im Werkstoff auftritt. Somit tritt Verlustwärme in mech. Teilen dann auf, wenn diese einer Relativbewegung (Geschwindigkeit  $v$ ) ausgesetzt sind.

Elektrische Leitungswiderstände bilden über das *OHM'sche* Gesetz Verlustwärme bei el. Stromfluss  $i$ . Weitere Verlustmechanismen treten in Halbleiterbauelemente (Diode, Heißeiter, Kaltleiter, ...) bei el. Stromfluss auf. Bei magn. Wechselfeldern können Wirbelstromverluste in el. leitfähigen Teilen auftreten, wenn sie vom Wechselfeld induziert werden, sowie Hystereseverluste in magnetisierbaren Werkstoffen. Bei el. Wechselfeldern treten Umpolarisierungsverluste in Dielektrika auf. Hier werden vor allem stromabhängige Verlustenergien betrachtet, die wie bei den mech. Elementen von der „Geschwindigkeit“  $i$  abhängen, so dass eine strukturelle Ähnlichkeit zwischen mech. und el. dissipativen Elementen gegeben ist. Daraus folgt die Gegenüberstellung in Tab. 3.6-1 mit gleicher physikalischer Verluststruktur **geschwindigkeitsabhängiger Verlustwärmen**.

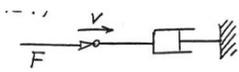
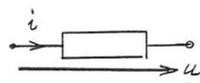
|   |   |
|---|---|
| <p><b>Gegenüberstellung:</b><br/>(KEINE Analogiebetrachtung)</p> <p>Beschreibende Gleichung: <math>F = F(v) \quad v \neq 0</math></p> <p>Aufgenommene Leistung: <math>p = F(v) \cdot v = F(v) \cdot \frac{dx}{dt}</math></p> <p>Inkrementelle Energiezufuhr: <math>dW = p \cdot dt = F(v) \cdot v \cdot dt</math><br/><math>dW = F(v) \cdot dx</math><br/><small>Arbeit der Reibungskraft</small></p> | <br> <p><math>u = u(i) \quad i \neq 0</math><br/><small>z. B. Diodenkennlinie</small></p> <p><math>p = u(i) \cdot i = u(i) \cdot \frac{dQ}{dt}</math></p> <p><math>p \cdot dt = u(i) \cdot i \cdot dt</math><br/><math>dW = u(i) \cdot dQ</math><br/><small>Verlustwärme</small></p> |
|---|---|

Tabelle 3.6-1: Gegenüberstellung mechanischer und elektrischer konzentrierter Verlustelemente in elektromechanischen Wandlern.

Beispiel 3.6-1: Mechanisches dissipatives Element Bild 3.6-1:

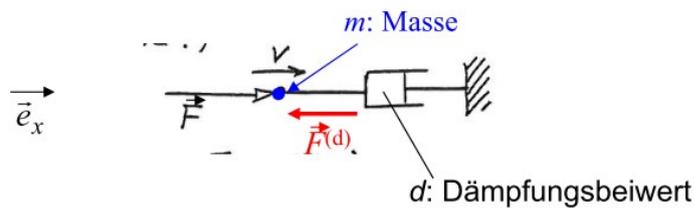


Bild 3.6-1: Mechanisches Verlustelement als Kolbendämpfer mit Gleitreibung, Relativgeschwindigkeit  $v$  und Kolbenkraft  $F$ , Dämpfungskraft  $F^{(d)}$  mit positiver  $x$ -Zählrichtung.

Die Dämpfungskraft  $F^{(d)}$  (3.6-1) ist gemäß dem 3. *Newton'schen* Axiom (Kap. 2) eine Reaktionskraft auf die äußere Kraft  $F$ , die mit der Geschwindigkeit  $v$  auf das Dämpfungselement einwirkt. Sie wirkt bremsend, also gegen die Bewegungsrichtung  $v$ , die ihrerseits positiv in  $x$ -Richtung gezählt wird (Bild 3.6-1). Daher wird  $F^{(d)}$  in der Bewegungsgleichung (3.6-2) als bremsend in Abzug gebracht! Hier wird vereinfacht ein zähes Medium („laminare“ Strömung) im Kolben angenommen, so dass die Bremskraft über den konstanten **Dämpfungsbeiwert**  $d$  proportional  $v$  ist.

$$\vec{F}^{(d)} = d \cdot v \cdot \vec{e}_x, \quad \vec{F}^{(d)} = F^{(d)} \cdot \vec{e}_x, \quad F^{(d)} = d \cdot v \quad (3.6-1)$$

$$m \cdot \ddot{x} \cdot \vec{e}_x = \vec{F} - \vec{F}^{(d)} \Rightarrow m \cdot \ddot{x} = F - F^{(d)} = F - d \cdot v = F - d \cdot \dot{x} \quad (3.6-2)$$

Im Sonderfall konstanter Geschwindigkeit  $v = \text{konst.}$  ist wegen

$$m \cdot \ddot{x} = m \cdot \dot{v} = 0 = F - F^{(d)} \Rightarrow F = F^{(d)} \quad (3.6-3)$$

die Dämpfungskraft  $F^{(d)}$  mit der äußeren Kraft  $F$  im Gleichgewicht. Das heißt: Die äußere Kraft  $F$  muss die Dämpfungskraft  $F^{(d)}$  überwinden, um den Bewegungszustand  $v$  aufrecht zu erhalten!

Die allgemeine Formulierung „verallgemeinerter dissipativer Kräfte“  $F_i, i = 1, \dots, r$ , wie z. B. mech. Reibungskräfte oder el. Spannungsfälle, müssen in das Schema von Kap. 3.4 passen. I. A. hängen sie nicht nur von den „verallgemeinerten Geschwindigkeiten“  $v_i$ , sondern fallweise zusätzlich auch vom Ort  $x_i$  ab, z. B. wegen eines örtlich veränderlichen Reibbelags.

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{v}, \vec{x}) = (F_1, \dots, F_i, \dots, F_r) \quad i = 1, \dots, r, \quad \text{mit } F_i = (v_1, \dots, v_r, x_1, \dots, x_r) \quad (3.6-4)$$

Die Energiezufuhr, die im dissipativen Element in Verlustwärme umgewandelt wird, ist

$$dW = p \cdot dt = \vec{F}(\vec{v}, \vec{x}) \cdot d\vec{x} = \sum_{i=1}^r F_i(\vec{v}, \vec{x}) \cdot dx_i \quad (3.6-5)$$

Die momentanen Verlustleistungen  $p$  werden gemäß der mech. und el. Leistungsgleichung bestimmt, wie die folgenden Beispiele zeigen.

Beispiel 3.6-2: El. Verlustelement gemäß dem *Ohm'schen* Gesetz (Tab. 6.3-1):

$$u(i) = R \cdot i, \quad p = u(i) \cdot i = R \cdot i^2 = u^2 / R \quad (3.6-6)$$

Beispiel 3.6-3:

a) Geschwindigkeitsproportionale Dämpfungskraft (= laminare („zähe“) Strömung) gemäß Bsp. 3.6-1 (Dämpfungsbeiwert  $d$ ):

$$F = F(v) = d \cdot v, \quad p = F \cdot v = d \cdot v^2 \quad (3.6-7)$$

b) Geschwindigkeitsabhängige Dämpfungskraft bei turbulenter („verwirbelter“) Strömung (Dämpfungsbeiwert  $d = d_v \cdot v$ ):

$$F = F(v) = d \cdot v = d_v \cdot v^2, \quad p = F \cdot v = d_v \cdot v^3 \quad (3.6-8)$$

### 3.7 Elektrische Ersatzelemente

Bei der Berechnung elektromechanischen Wandlern werden manchmal für die mechanischen Elemente elektrische Ersatzelemente verwendet, wobei die strukturelle Verwandtschaft gemäß Kap. 3.2, 3.4, 3.5 ausgenutzt werden kann. Vor dem Einsatz leistungsfähiger Digitalrechner wurden in den 1960 ... 1980-er Jahren elektronische Analogrechner eingesetzt, um Differentialgleichungen wie z. B. die dynamischen Bewegungsgleichungen der Wandler zu integrieren. Für die mechanischen Ausgleichsvorgänge wurden deshalb äquivalente elektrische Ersatzsysteme verwendet, die das gleiche dynamische Verhalten haben, um die elektronischen Rechenschaltungen verwenden zu können. Daraus abgeleitet haben sich elektrische Ersatzelemente für die Beschreibung mechanischer Systeme fallweise erhalten. Bei den hier im Fokus stehenden elektromechanischen Systemen werden so die ohnehin vorhandenen elektrischen dynamischen (häufig nichtlinearen) Differentialgleichungen auf Basis der *KIRCHHOFF*-Gesetze um weitere, mit ihnen gekoppelte elektrische (i. A. nichtlineare) Gleichungen für das gekoppelte mechanische System erweitert.

Die Beschreibung des **dynamischen Kleinsignal-Verhaltens** des Wandlers, d. h. wenn die Wechselsignalamplitude deutlich kleiner ist als die konstanten Signalwerte des betrachteten Arbeitspunkts, kann anhand der linearisierten Bewegungsgleichungen des Wandlers im Arbeitspunkt durchgeführt werden. Auch ihre Lösung erfolgt dann ausschließlich über die Lösung elektrischer Netzwerke. Dabei gibt es zwei elektrische Äquivalenzsysteme zum mechanischen System:

a) **das Kraft-Spannungs-System** (Kap. 3.2, 3.4, 3.5), das auf Grund struktureller Übereinstimmungen festgelegt wurde, so dass mech. Kräfte el. Spannungen entsprechen und el. Ströme mech. Geschwindigkeiten,

b) **das Kraft-Strom-System**, das auf Grund von Analogiebetrachtungen (Bild 3.7-1) festgelegt wurde. Es wird das mech. Gesetz „Summe aller Kräfte an einem im Gleichgewicht befindlichen konzentrierten Massenelement ist Null“ mit dem 1. *Kirchhoff*-Gesetz (Summe aller Ströme an einem Knoten ist Null) in Analogie gebracht. Die Null-Summe aller Tangenten-Geschwindigkeitsvektoren längs einer geschlossenen Kurve *C* in einem linear mit *v* bewegten starren Körper wird mit dem 2. *Kirchhoff*-Gesetz (Summe aller Spannungen in einer geschlossenen Masche *C* ist Null) in Analogie gebracht. Daher entsprechen mech. Kräfte nun el. Strömen und mech. Geschwindigkeiten el. Spannungen (Tab. 3.7-1).

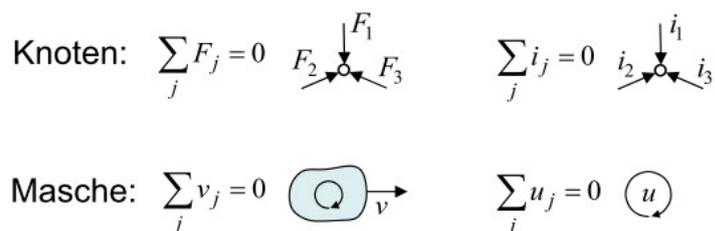


Bild 3.7-1: Knotengesetz: Die Null-Summe aller Kräfte an einem im Gleichgewicht befindlichen konzentrierten Massenelement wird mit dem 1. *Kirchhoff*-Gesetz (Summe aller Ströme an einem Knoten ist Null) in Analogie gebracht. Maschengesetz: Die Null-Summe aller Tangenten-Geschwindigkeitsvektoren längs einer geschlossenen Kurve in einem linear bewegten starren Körper wird mit dem 2. *Kirchhoff*-Gesetz (Summe aller Spannungen in einer geschlossenen Masche ist Null) in Analogie gebracht.

Ausgehend von der mech. und el. Leistungsgleichung  $p_{mec} = F \cdot v$ ,  $p_{el} = u \cdot i$  ist man beim Wunsch, das mech. System in ein leistungsäquivalentes el. System zu übersetzen  $p_{mec} = p_{el}$ , zunächst völlig frei, ob *F* und *u*, *v* und *i* oder ob *F* und *i*, *v* und *u* einander entsprechen. Die Analogie gemäß Tab. 3.7-1 lässt beides zu. Daher wird in unterschiedlichen Lehrbüchern entweder das Kraft-Spannungs-System oder das Kraft-Strom-System verwendet. Verwendung

findet das Kraft-Strom-System für den Ersatz des mechanischen Teils durch el. Elemente z. B. in den deutschsprachigen Lehrbüchern von *Ballas / Pfeifer / Werthschützky*. Das Kraft-Strom-System wurde früher bevorzugt bei den Analogrechnern eingesetzt. Unschön ist beim Kraft-Strom-System, dass die den mechanischen dissipativen Elemente zugeordneten mechanischen Impedanzen (Widerstände)  $R_{\text{mec}}$  elektrischen Leitwerten  $G$  entsprechen. Das Kraft-Strom-System ist **nicht „impedanztreu“**. Das hat zur Folge, dass bei der Einbeziehung akustischer Wandlerelemente die abgestrahlte Schallleistung nicht mit einem el. Widerstand (wie in Kap. 7), sondern mit einem el. Leitwert ersetzt wird. Auf Grund der tiefer liegenden physikalisch-strukturellen Entsprechungen ist deshalb das Kraft-Spannungs-System vorzuziehen. Es wird folgerichtig auch bei der Formulierung der *Lagrange*-Gleichungen (Kap. 4), basierend auf Kap. 3.2, 3.4, 3.6, verwendet. Daher wird hier das Kraft-Spannungs-System empfohlen. In Kap. 7 werden aber gleich direkt die physikalisch bedingten mechanischen und elektrischen Gleichungen mit den *Newton*- und *Kirchhoff*-Gesetzen aufgestellt. Oder es wird in Kap. 4 die *Lagrange*-Methode verwendet, wie z. B. in den englischsprachigen Lehrbüchern von *Woodson* und *Melcher* oder *Meisel*.

Leistungsgleichung:  $F \cdot v \Leftrightarrow u \cdot i$

|  |   |
|--|---|
| <p><b>a) Kraft-Spannungs-System:</b></p> $F \Leftrightarrow u$ $v \Leftrightarrow i$ $F/v = d = R_{\text{mec}} \Leftrightarrow R = u/i$ $F = m \cdot \frac{dv}{dt} ; m \Leftrightarrow L ; u = L \cdot \frac{di}{dt}$ $v = \frac{1}{k} \cdot \frac{dF}{dt} ; \frac{1}{k} \Leftrightarrow C ; i = C \cdot \frac{du}{dt}$ <p style="text-align: center;"> <span style="margin-right: 50px;">Kraft bedingt Bewegung</span> <span>Spannung bedingt Strom</span> </p> <p style="text-align: center;">Physikalisch gleichartige Struktur</p> | <p><b>b) Kraft-Strom-System:</b></p> $F \Leftrightarrow i$ $v \Leftrightarrow u$ $F/v = d = R_{\text{mec}} \Leftrightarrow G = i/u$ $F = m \cdot \frac{dv}{dt} ; m \Leftrightarrow C ; i = C \cdot \frac{du}{dt}$ $v = \frac{1}{k} \cdot \frac{dF}{dt} ; \frac{1}{k} \Leftrightarrow L ; u = L \cdot \frac{di}{dt}$ <p style="text-align: center;">Mechanische Struktur <math>\Leftrightarrow</math> elektrische Struktur</p> <p style="text-align: center;">Analogie</p> |
|--|---|

Tabelle 3.7-1: Elektrische Ersatzelemente für das mech. System: Gegenüberstellung der Ersatzelemente im Kraft-Spannungs- und Kraft-Strom-System.

**Beispiel 3.7-1:** Mechanischer linearer (Federkonstante  $k = \text{konst.}$ ) gedämpfter Schwinger (Dämpfungsbeiwert  $d = \text{konst.}$ , Bild 3.7-2), dargestellt mit el. Ersatzelementen im Kraft-Spannungs-System und alternativ im Kraft-Strom-System. Die Feder ist bei der Lage  $x_0$  der Masse  $m$  entspannt.

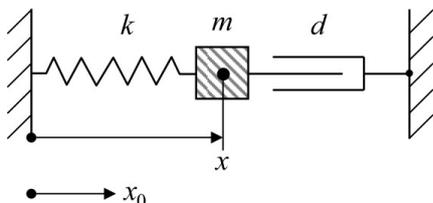


Bild 3.7-2: Mechanischer linearer gedämpfter Schwinger

- Der direkte mechanische Ansatz mit dem *Newton*-Impulssatz führt auf die dynamische Bewegungsgleichung in  $x$ -Abhängigkeit (3.7-1) oder  $v$ -Abhängigkeit (3.7-2).
 
$$m \cdot \ddot{x} = -k(x - x_0) - d \cdot \dot{x} \quad \text{bzw.} \quad m \cdot \ddot{x} + d \cdot \dot{x} + k \cdot x = k \cdot x_0 = F_0. \tag{3.7-1}$$

$$m \cdot \frac{dv}{dt} + d \cdot v + k \cdot \int v dt = F_0 \text{ bzw. } m \cdot \ddot{v} + d \cdot \dot{v} + k \cdot v = 0. \quad (3.7-2)$$

2) Mit den Entsprechungen des Kraft-Spannungs-Systems (3.7-3)

$$F \Leftrightarrow u, \quad v \Leftrightarrow i, \quad x \Leftrightarrow Q, \quad \dot{x} \Leftrightarrow i, \quad m \Leftrightarrow L, \quad d \Leftrightarrow R, \quad k \Leftrightarrow 1/C \quad (3.7-3)$$

und den el. Beziehungen

$$u_L = L \cdot \dot{i}, \quad u_R = R \cdot i, \quad \tilde{u}_C = \frac{Q}{C} - \frac{Q_0}{C} = u_C - U_0 \quad (3.7-4)$$

folgt mit „Summe aller Kräfte (= Spannungen) ist Null“

$$u_L + u_R + \tilde{u}_C = 0 \Rightarrow u_L + u_R + u_C = U_0, \quad (3.7-5)$$

und so die el. Bewegungsgleichung in  $Q$ -Abhängigkeit (3.7-6) und  $i$ -Abhängigkeit (3.7-7).

$$L \cdot \ddot{Q} + R \cdot \dot{Q} + \frac{1}{C} \cdot Q = U_0 = \frac{Q_0}{C}, \quad (3.7-6)$$

$$L \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i + \frac{1}{C} \int i dt = U_0 \text{ bzw. } L \cdot \ddot{i} + R \cdot \dot{i} + \frac{1}{C} \cdot i = 0. \quad (3.7-7)$$

Dies entspricht einem linearen gedämpften el. Serienschwingkreis, da der Summe aller Kräfte mit der Summe aller el. Spannungen entsprochen wird (Bild 3.7-3a).

3) Mit den Entsprechungen des Kraft-Strom-Systems (3.7-8)

$$F \Leftrightarrow i, \quad v \Leftrightarrow u, \quad \sum_j F_j = 0 \Leftrightarrow \sum_j i_j = 0, \quad m \Leftrightarrow C, \quad d \Leftrightarrow 1/R, \quad k \Leftrightarrow 1/L \quad (3.7-8)$$

und den el. Beziehungen

$$i_C = C \cdot \frac{du}{dt}, \quad i_R = u/R, \quad \tilde{i}_L = \frac{1}{L} \cdot \int u dt - i_0 = i_L - i_0 \quad (3.7-9)$$

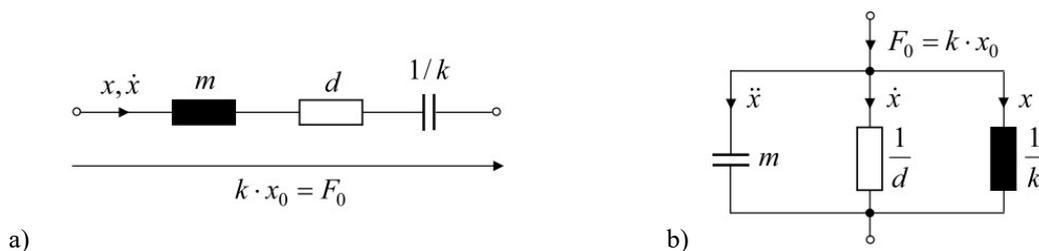
folgt mit „Summe aller Kräfte (= Ströme) ist Null“

$$i_C + i_R + \tilde{i}_L = 0 \Rightarrow i_C + i_R + i_L = i_0, \quad (3.7-10)$$

und so die el. Bewegungsgleichung in  $u$ -Abhängigkeit (3.7-11).

$$C \cdot \frac{du}{dt} + \frac{u}{R} + \frac{1}{L} \cdot \int u dt = i_0, \quad C \cdot \ddot{u} + \frac{1}{R} \cdot \dot{u} + \frac{1}{L} \cdot u = 0. \quad (3.7-11)$$

Dies entspricht einem linearen gedämpften el. Parallelschwingkreis, da der Summe aller Kräfte mit der Summe aller el. Ströme entsprochen wird (Bild 3.7-3b).



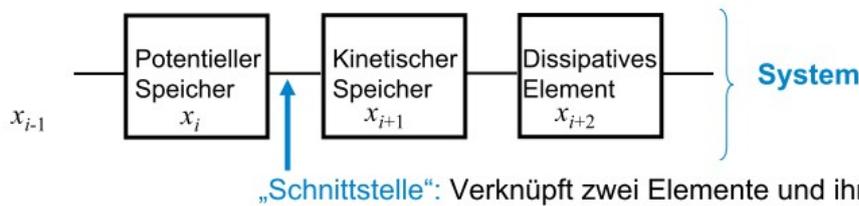
**Bild 3.7-3:** Mechanischer linearer gedämpfter Schwinger a) als linearer gedämpfter el. Serienschwingkreis, b) als linearer gedämpfter el. Parallelschwingkreis.

Es existieren somit zwei äquivalente elektrische Systeme für das ursprüngliche mechanische System: a) ein Serien- und b) ein Parallelschwingkreis für das eine mechanische System des linearen gedämpften Einmassen-Schwingers.

### 4. Methode der Lagrange-Gleichungen

#### 4.1 Verallgemeinerte unabhängige Koordinaten

Ein el.-mech. Wandlersystem besteht gemäß Kap. 3 aus  $i = 1, \dots, r$  unterschiedlichen el. und mech. konzentrierten Elementen als Untersysteme bzw. Systemteile, die aus den Kategorien „potentielle Energiespeicher“, „kinetische Energiespeicher“ und „dissipative Elemente“ stammen. Jedes dieser Untersysteme hängt z. B. von einer verallgemeinerten Koordinate  $x_i$  ab (Bild 4.1-1). Die „Schnittstelle“ zwischen einzelnen Systemteilen verbindet diese als eine Verknüpfung zwischen zwei Elementen und damit ihre jeweiligen Koordinaten  $x_i$ . Durch dieses Zusammenschalten der Systemteile zum resultierenden Wandlersystem gemäß den dynamischen Systemgleichungen sind manche der Koordinaten  $x_i$  i. A. nicht voneinander unabhängig, sondern müssen „kinematische Verträglichkeitsbedingungen“ (4.1-2) erfüllen.



**Bild 4.1-1:** Ausschnitt aus einem el.-mech. Wandlersystem, bestehend aus unterschiedlichen  $i = 1, \dots, r$  el. und mech. konzentrierten Elementen als Untersystemen, die aus den Kategorien „potentielle Energiespeicher“, „kinetische Energiespeicher“ und „dissipative Elemente“ stammen. Jedes dieser Untersysteme hängt hier z. B. von einer verallgemeinerten Koordinate  $x_i$  ab.

Wegen dieser kinematischen Verträglichkeitsbedingungen existieren somit trotz der  $i = 1, \dots, r$  Orts- und Ladungskoodinaten  $x_i(t)$ ,  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_r)$ , nur  $n \leq r$  voneinander UNABHÄNGIGE verallgemeinerte Koordinaten

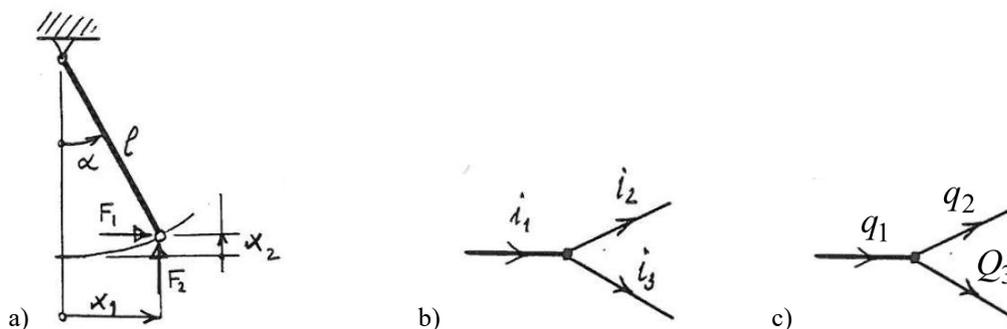
$$q_i(t), \quad i = 1, \dots, n, \tag{4.1-1}$$

so dass die **Anzahl der Freiheitsgrade des Systems  $n$**  ist. Mit  $\vec{q} = (q_1, \dots, q_n)$  sind die kinematischen Verträglichkeitsbedingungen durch (4.1-2) beschrieben.

$$x_i(q_1, \dots, q_n, t), \quad i = 1, \dots, r, \quad \text{bzw.} \quad \vec{x} = \vec{x}(\vec{q}, t) \tag{4.1-2}$$

Die „verallgemeinerten Geschwindigkeiten“  $v$  werden aus (4.1-2) berechnet.

$$\vec{v} = d\vec{q} / dt = \dot{\vec{q}} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) \tag{4.1-3}$$



**Bild 4.1-2:** a) Mechanisches Pendel, b) Knoten in einer vermaschten el. Schaltung mit c) den unabhängigen Koordinaten  $q_1, q_2$ .

**Beispiel 4.1-1:** Mechanisches starres Pendel (Bild 4.1-2a)

Die Lage der konzentrierten Masse im Abstand  $l$  vom Drehpunkt wird im kartesischen Koordinatensystem durch  $(x_1, x_2)$  beschrieben ( $i = 1, 2; r = 2$ ).

Der Vektor der äußeren Kraft an der Masse ist  $(F_1, F_2)$ . Wegen der konstanten („starren“) Pendellänge  $l = \text{konst.}$  und der daraus sich ergebenden Drehbewegung sind aber  $x_1, x_2$  nicht unabhängig voneinander, sondern es gilt  $x_1 = x_1(x_2)$  oder  $x_2 = x_2(x_1)$ . Diese Abhängigkeit wird durch die kinematische Bedingung  $x_1 = l \cdot \sin \alpha, x_2 = l \cdot (1 - \cos \alpha)$  mit dem Drehwinkel  $\alpha$  als einziger unabhängiger Koordinate beschrieben. Das starre Pendel hat trotz  $r = 2$  nur einen Freiheitsgrad  $n = 1$ .

$$q_1(t) = \alpha(t): x_1(t) = l \cdot \sin q_1(t), x_2(t) = l \cdot (1 - \cos(q_1(t))) \tag{4.1-4}$$

Beispiel 4.1-2: Kirchhoff'sche Knotengleichung (Bild 4.1-2b)

Die drei Ströme  $i_1, i_2, i_3$  sind wegen  $i_1 + i_2 + i_3 = 0$  nicht voneinander unabhängig. Es ist wegen  $i_3 = i_1 - i_2$  die Abhängigkeit  $i_3 = i_3(i_1, i_2)$  gegeben. Da sich am Knoten keine el. Ladung ansammeln soll, gilt auch  $Q_3 = Q_1 - Q_2$  und damit  $Q_3 = Q_3(Q_1, Q_2)$ . Trotz  $r = 3$  Koordinaten  $Q_1, Q_2, Q_3$  existieren nur  $n = 2$  Freiheitsgrade (Bild 4.1-2c).

$$Q_1(t) = q_1(t), Q_2(t) = q_2(t): Q_3(t) = q_1(t) - q_2(t) \tag{4.1-5}$$

### 4.2 Virtuelle Verschiebungen

Die in Kap. 2 bereits eingeführten **virtuellen Verschiebungen**  $\delta x_i$  der verallgemeinerten Koordinaten  $x_i$  dienen nach *d'Alembert* dem energetischen Vergleich benachbarter Systemzustände. Es wird in einer Momentaufnahme der Systemzustand zum Zeitpunkt  $t$  festgehalten, d. h. die Zeit  $t$  bleibt konstant („eingefroren“)  $t = \text{konst.}$  In DIESEM Zustand werden gegenüber den Systemabmessungen kleine, aber durchaus „endlich große“ (nicht infinitesimal kleine) Verschiebungen  $\delta x_i$  der Koordinaten „gedanklich“ durchgeführt (Symbol  $\delta x_i$  anstelle  $dx_i$ ). Diese „virtuellen Verschiebungen“ werden deshalb virtuell genannt, weil dabei  $t$  festgehalten ist, während endlich große Verschiebungen in der Realität eine bestimmte Zeit für ihre Durchführung benötigen. Auch die virtuellen Verschiebungen  $\delta x_i$  müssen die kinematischen Verträglichkeitsbedingungen (4.1-2) einhalten. Durch zeitliche Randbedingungen vorgegebene Veränderungen eines Ortes  $x_i(t)$  oder einer el. Ladung  $Q_i(t)$  haben wegen  $t = \text{konst.}$  KEINE virtuelle Verschiebung (Bild 4.2-1), d. h. ihre virtuellen Änderungen sind Null wegen  $x_i(t), v_i = \dot{x}_i(t): \delta x_i(t) = 0$  bzw.  $Q_i(t), i_i = \dot{Q}_i(t): \delta Q_i(t) = 0$ .

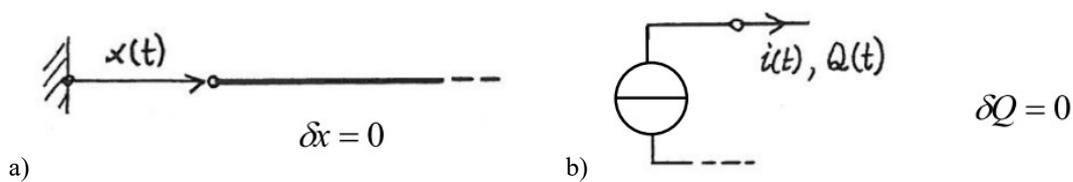


Bild 4.2-1: a) Mechanische Weg-„Erregung“ eines Stabs am linken Stabende: Dessen Koordinate  $x(t)$  ist als zeitliche Funktion vorgegeben (vorgeschrieben), ihre virtuelle Verschiebung ist Null. b) Ideale Stromquelle mit eingepprägtem (zeitlich vorgegebenem) Stromverlauf  $i(t)$ . Damit ist auch sein zeitliches Integral  $Q(t)$  bis auf eine Integrationskonstante zeitlich vorgeschrieben. Daher ist die zugehörige virtuelle Verschiebung Null.

### 4.3 Variationsrechnung anstelle der klassischen dynamischen Grundgesetze: Lagrange-Gleichungen

Wir gehen zunächst von el.-mech. Wandlern als konservative (= Energie erhaltende) Systeme aus. Bei einem konservativen System findet kein Energieaustausch des Systems mit seiner Umgebung statt.

Daher tritt keine Energiedissipation (= keine an die Umgebung abgegebene Verlustwärme) auf. Es wird nur Energie zwischen den verallgemeinerten potentiellen und kinetischen Energiespeichern des Systems ausgetauscht. Im Gegensatz dazu findet bei einem nicht-konservativen System zusätzlich ein Energieaustausch des Systems mit seiner Umgebung durch (verallgemeinerte) äußere Kräfte  $F$  statt. Ebenso kann Energiedissipation infolge bremsender (Reibungs-)Kräfte  $F^{(d)}$  auftreten. Es wird aber i. A. weiterhin auch Energie zwischen den potentiellen und kinetischen Speichern des Systems ausgetauscht, so dass potentielle Speicherkräfte  $F^{(p)}$  und die „inneren“ Kräfte  $F^{(in)}$  der kinetischen Speicher (Kap. 3) auftreten. Diese verallgemeinerten Kräfte  $F_i^{(p)}, F_i^{(in)}, F_i^{(d)}, F_i$  werden in Abhängigkeit der voneinander UNABHÄNGIGEN verallgemeinerten Koordinaten  $q_i, i=1, \dots, n$  (4.1-1) beschrieben.

$$F_i^{(p)}(q_1, \dots, q_n, t), \quad \vec{F}^{(p)} = \vec{F}^{(p)}(\vec{q}, t), \tag{4.3-1}$$

$$F_i^{(in)}(q_1, \dots, q_n, t), \quad \vec{F}^{(in)} = \vec{F}^{(in)}(\vec{q}, t), \tag{4.3-2}$$

$$F_i^{(d)}(q_1, \dots, q_n, t), \quad \vec{F}^{(d)} = \vec{F}^{(d)}(\vec{q}, t), \tag{4.3-3}$$

$$F_i(q_1, \dots, q_n, t), \quad \vec{F} = \vec{F}(\vec{q}, t). \tag{4.3-4}$$

Wie in Kap. 2 ist die Zählweise der potentielle Speicherkräfte  $F_i^{(p)}, i=1, \dots, n$ , positiv, wenn durch ihre Wirkung eine Verringerung der potentiellen Energie des Speichers auftritt. Dadurch wird der gesamte verallgemeinerte Impuls  $\vec{g}$  des Systems erhöht im Sinne einer verallgemeinerten Beschleunigung  $dv_i/dt > 0$ . Ebenso werden kinetische Speicherkräfte  $F_i^{(in)}$  positiv gezählt bei Verringerung der kinetischen Energie des Speichers und führen damit ebenfalls zu einer Erhöhung des Impulses („Beschleunigung“). Positiv gezählte dissipative Kräfte  $F_i^{(d)}$  beschreiben die Umsetzung von Energie in Wärmeenergie, was einer Verringerung des Impulses („Bremsung“) entspricht. Positiv gezählte äußere Kräfte  $F_i$  tragen zur Erhöhung des Impulses im Sinne einer „Beschleunigung“ des Systems bei. Damit folgt gemäß Kap. 3 die Kraftgleichung als Impulssatz (4.3-5) für nicht-konservative Systeme.

$$\frac{d\vec{g}(\vec{q}, t)}{dt} = \vec{F} + \vec{F}^{(in)} + \vec{F}^{(p)} - \vec{F}^{(d)} \quad \text{mit} \quad F_i^{(in)} = -\frac{\partial W_k}{\partial q_i} = \frac{\partial W_k^*}{\partial q_i}, \quad F_i^{(p)} = -\frac{\partial W_p}{\partial q_i} = \frac{\partial W_p^*}{\partial q_i} \tag{4.3-5}$$

In Komponentenschreibweise ist dies 
$$\frac{dg_i(\vec{q}, t)}{dt} = F_i + F_i^{(in)} + F_i^{(p)} - F_i^{(d)} \tag{4.3-6}$$

mit  $g_i = \partial W_k^* / \partial \dot{q}_i$  gemäß (3.4-23). Die Berechnung der Kraftkomponenten aus Speicherwirkungen  $F_i^{(p)}, F_i^{(in)}$  erfolgt gemäß Kap. 3 mit (4.3-5). Die Berechnung der Kraftkomponenten  $F_i^{(d)}, F_i$  bei nicht-konservativen Wandler-System wird aus der von ihnen verrichteten inkrementellen Arbeit bestimmt, also für äußere Kräfte gemäß

$$p(t) \cdot dt = \sum_{i=1}^n F_i \cdot dq_i. \tag{4.3-7}$$

Die inkrementelle Arbeit der dissipativen Kräfte als inkrementelle Verlustenergie ist

$$p_d(t) \cdot dt = \sum_{i=1}^n F_i^{(d)} \cdot dq_i. \tag{4.3-8}$$

Analog wird bei der Betrachtung energetisch benachbarter Systemzustände mit der Methode der virtuellen Verschiebungen  $\delta q_i$  die virtuelle Arbeit  $\delta A, \delta A_d$  der äußeren Kräfte und der dissipativen Kräfte gemäß (4.3-9) bestimmt, so dass auch damit die Kraftkomponenten  $F_i^{(d)}, F_i$  berechnet werden können.

$$\delta A = \sum_{i=1}^n F_i \cdot \delta q_i, \quad \delta A_d = \sum_{i=1}^n F_i^{(d)} \cdot \delta q_i \tag{4.3-9}$$

Einsetzen der Kraftkomponenten  $F_i^{(p)}, F_i^{(in)}, F_i^{(d)}, F_i$  gemäß (4.3-5), (4.3-9) in (4.3-6) mit  $g_i = \partial W_k^* / \partial \dot{q}_i$  liefert die **Lagrange'schen Bewegungsgleichungen** (4.3-10).

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial W_k^*}{\partial q_i} + \frac{\partial W_p}{\partial q_i} + F_i^{(d)} = F_i, \quad i = 1, \dots, n \tag{4.3-10}$$

Mit der als Abkürzung verwendeten **Lagrange-Funktion**

$$L(\dot{\vec{q}}, \vec{q}, t) = W_k^*(\dot{\vec{q}}, \vec{q}, t) - W_p(\vec{q}, t) \tag{4.3-11}$$

schreiben wir anstelle (4.3-10) kürzer (4.3-12).

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + F_i^{(d)} = F_i, \quad i = 1, \dots, n \tag{4.3-12}$$

Die **Lagrange-Gleichungen für konservative Systeme** lauten wegen  $F_i^{(d)} = 0, F_i = 0$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n \tag{4.3-13}$$

**Ist ein System in Ruhe** ( $v_i = \dot{q}_i = 0$ ), so befindet es sich in einer (stabilen oder instabilen) Gleichgewichtslage. Es ist die verallgemeinerte kinetische Energie und damit auch die kinetische Ko-Energie Null:  $W_k^* = 0$ . Gemäß (4.3-11) ist  $L(\dot{\vec{q}}, \vec{q}, t) = -W_p(\vec{q}, t)$ . Mit (4.3-13) folgt  $\partial L / \partial \dot{q}_i = -\partial W_p(\vec{q}, t) / \partial \dot{q}_i = 0$  und daher  $-\partial L / \partial q_i = \partial W_p(\vec{q}, t) / \partial q_i = 0$ . Damit folgt: Die **Gleichgewichtslage eines Systems** (= Ruhelage des Systems) ist jener Ort  $q$  bzw.  $x$ , wo die potentielle Systemenergie  $W_p$  einen Extremwert annimmt (= maximal oder minimal ist).

Beispiel 4.3-1: Mechanisches System: Kugel in einer Mulde oder auf einem Hügel oder in einem Doppeltal:  $n = 1, q_1 = x$  (Bild 4.3-1)

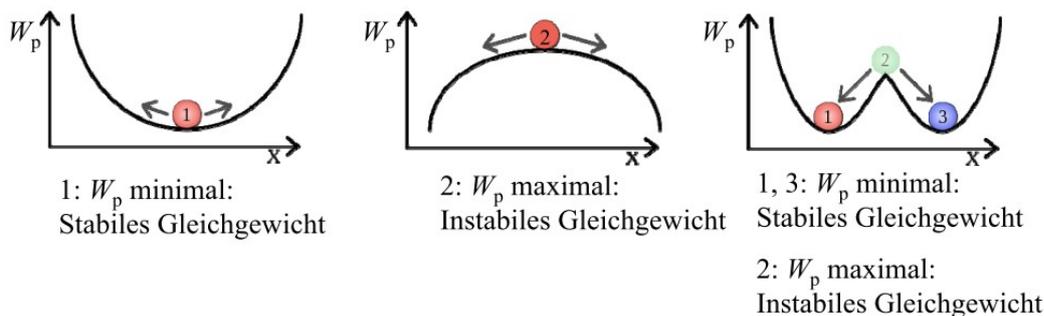


Bild 4.3-1: Gleichgewichtslage  $x$  einer Kugel: 1) Stabil in einer Mulde, 2) Instabil auf einem Hügel, 3) Zwei stabile und eine instabile Gleichgewichtslage einer Kugel in einem Doppeltal (Quelle: Wikipedia.de)

Stets ist in der Gleichgewichtslage  $x$  der Kugel  $W_p$  extremal  $dW_p(x) / dx = 0$ , aber in der stabilen Lage ist  $W_p$  minimal und in der instabilen Lage maximal.

Auch mit der auf *L. Euler, G. W. Leibniz* und *P. L. Maupertuis* zurückgehenden Variationsrechnung können die *Lagrange-Gleichungen* hergeleitet werden, wobei dies hier für konservative Systeme gezeigt wird. Es werden dazu unterschiedliche mögliche „Bewegungstrajektorien“ des Systems mit ihren Koordinaten  $\hat{q}_i(t)$  aus der erwarteten „richtigen“ Trajektorie  $q_i(t)$  über virtuelle Verschiebungen  $\delta q_i(t)$  erzeugt (Bild 4.3-2a).

$$\hat{q}_i(t) = q_i(t) + \varepsilon \cdot \delta q_i(t) \quad , \quad \varepsilon > 0 \quad \text{bzw.} \quad \vec{\hat{q}}(t) = \vec{q}(t) + \varepsilon \cdot \delta \vec{q}(t) \quad (4.3-14)$$

Die Anfangslage  $q_i(t_A)$  und Endlage  $q_i(t_E)$  des Systems sind dabei stets dieselben und vorgegeben. Die Vorgabewerte  $q_i(t_A)$  und  $q_i(t_E)$  haben daher keine virtuelle Verschiebung:  $\delta q_i(t_A) = \delta q_i(t_E) = 0$ . Die wirkliche Bewegung des Systems nach den mech. Bewegungsgesetzen von *Newton* und den el. dynamischen Gesetzen von *Maxwell* erfolgt dann so, dass der „Aufwand“, genannt „Wirkung“  $S$ , extremal ist.

$$S = \int_{t_A}^{t_E} L(\vec{\hat{q}}, \dot{\vec{\hat{q}}}, t) \cdot dt \quad (4.3-15)$$

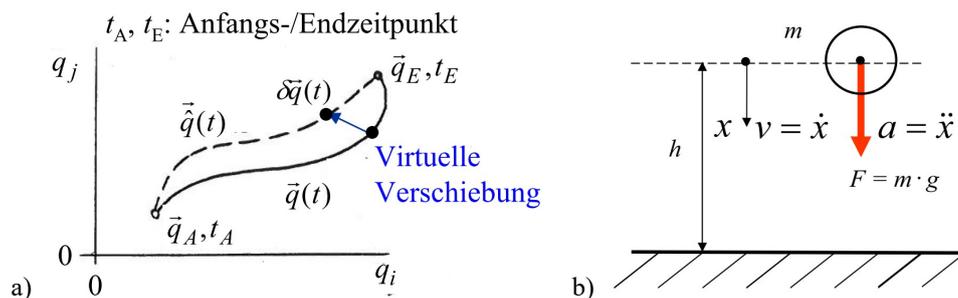


Bild 4.3-2: a) Ein System befindet sich zum Zeitpunkt  $t_A$  am Ort  $q_A$ , etwas später zum Zeitpunkt  $t_E$  am Ort  $q_E$ . Es werden energetisch unterschiedliche Wege (Trajektorien) von A nach E im  $q$ -Raum untersucht. Die werden so erzeugt, dass bei festgehaltener Zeit  $t$  jedem Ort einer Trajektorie  $q$  über eine virtuelle Verschiebung  $\delta q$  Orte einer Nachbartrajektorie zugeordnet werden. b) Freier Fall einer Masse  $m$  im homogen angenommenen Erdschwerefeld.

Diese Wirkung  $S$  kann gemäß (4.3-15) als das Zeitintegral einer zunächst unbekanntes Funktion  $L(\vec{\hat{q}}, \dot{\vec{\hat{q}}}, t)$  während dieser Bewegung von A nach E angeschrieben werden, die von der Zeit und der gewählten Trajektorie von A nach E abhängt. Wir finden die tatsächliche Bewegung des Systems, dargestellt durch die „richtige“ Trajektorie  $\vec{q}(t)$  zwischen den Punkten  $\vec{q}_A = \vec{q}(t_A)$ ,  $\vec{q}_E = \vec{q}(t_E)$  im Raum der verallgemeinerten Koordinaten  $q_i$  durch Vergleich mit anderen, kinematisch ebenfalls zulässigen Bewegungsvarianten  $\vec{\hat{q}}(t)$  zwischen den Lagen  $\vec{q}_A$ ,  $\vec{q}_E$  durch Variation von  $\varepsilon$ , so dass jene Trajektorie ausgewählt wird, für die die Wirkung  $S$  extremal (meist minimal) wird:  $\delta S = 0$ , wobei wegen (4.3-14)  $\varepsilon = 0$  ist.

$$\delta S = \left. \frac{dS(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \stackrel{!}{=} 0 \quad (4.3-16)$$

Mit (4.3-14) eingesetzt in (4.3-15) folgt

$$S(\varepsilon) = \int_{t_A}^{t_E} L(\vec{\hat{q}}(\varepsilon), \dot{\vec{\hat{q}}}(\varepsilon) / \partial t, t) \cdot dt = \int_{t_A}^{t_E} L(\vec{q} + \varepsilon \cdot \delta \vec{q}, \dot{\vec{q}} + \varepsilon \cdot \partial(\delta \vec{q}) / \partial t, t) \cdot dt \quad (4.3-17)$$

$$\delta S = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{dS(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d}{d\varepsilon} \int_{t_A}^{t_E} L(\vec{\hat{q}}(\varepsilon), \dot{\vec{\hat{q}}}(\varepsilon) / \partial t, t) \cdot dt \stackrel{!}{=} 0 \quad (4.3-18)$$

Differenzieren der  $n$  Komponenten nach  $\varepsilon$  ergibt mit äußerer und innerer Differentiation

$$\frac{d}{d\varepsilon} \int_{t_A}^{t_E} L(\vec{\hat{q}}(\varepsilon), \dot{\vec{\hat{q}}}(\varepsilon) / \partial t, t) \cdot dt = \int_{t_A}^{t_E} \left[ \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial \hat{q}_i} \cdot \frac{\partial \hat{q}_i}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\hat{q}}_i} \cdot \frac{\partial \dot{\hat{q}}_i}{\partial \varepsilon} \right) \right] \cdot dt \quad (4.3-19)$$

Gemäß (4.3-14) ist  $\partial \hat{q}_i / \partial \varepsilon = \partial (q_i + \varepsilon \cdot \delta q_i) / \partial \varepsilon = \delta q_i$ . In gleicher Weise ist mit (4.3-20)

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial (\dot{q}_i + \varepsilon \cdot \partial(\delta q_i) / \partial t)}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial(\delta q_i)}{\partial t} , \quad (4.3-20)$$

so dass aus (4.3-19) folgt

$$\frac{d}{d\varepsilon} \int_{t_A}^{t_E} L(\vec{q}(\varepsilon), \partial \vec{q}(\varepsilon) / \partial t, t) \cdot dt = \int_{t_A}^{t_E} \left[ \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(\varepsilon)} \cdot \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(\varepsilon)} \cdot \frac{\partial(\delta q_i)}{\partial t} \right) \right] \cdot dt . \quad (4.3-21)$$

Mit  $\varepsilon \rightarrow 0$  ist gemäß (4.3-14)  $\partial \dot{q}_i(\varepsilon \rightarrow 0) = \partial q_i$ ,  $\partial \dot{q}_i(\varepsilon \rightarrow 0) = \partial \dot{q}_i$ . Aus (4.3-18) folgt

$$\delta \mathcal{S} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d}{d\varepsilon} \int_{t_A}^{t_E} L(\vec{q}(\varepsilon), \partial \vec{q}(\varepsilon) / \partial t, t) \cdot dt = \int_{t_A}^{t_E} \left[ \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \cdot \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \frac{\partial(\delta q_i)}{\partial t} \right) \right] \cdot dt \stackrel{!}{=} 0 . \quad (4.3-22)$$

Wegen der Multiplikationsregel bei Differenzieren nach  $t$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \delta q_i \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \cdot \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \frac{\partial(\delta q_i)}{\partial t} \quad (4.3-23)$$

ist (4.3-22) auch

$$\int_{t_A}^{t_E} \left[ \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \cdot \delta q_i + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \delta q_i \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \cdot \delta q_i \right) \right] \cdot dt . \quad (4.3-24)$$

Die Integration des zweiten Terms mit Beachtung von  $\delta q_i(t_A) = \delta q_i(t_E) = 0$  gemäß

$$\int_{t_A}^{t_E} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \delta q_i \right) \right] \cdot dt = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \delta q_i \Big|_{t_A}^{t_E} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \underbrace{\delta q_i(t_E)}_0 - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \underbrace{\delta q_i(t_A)}_0 = 0 \quad (4.3-25)$$

führt auf (4.3-26), so dass wegen der bis auf die Randpunkte A und E beliebig wählbaren virtuellen Verschiebungen  $\delta q_i \neq 0$  der Klammerausdruck (...) für jedes  $i = 1, \dots, n$  Null sein muss, was die (Euler)-Lagrange-Gleichungen (4.3-13) für konservative Systeme ergibt.

$$\delta \mathcal{S} \stackrel{!}{=} 0 = \int_{t_A}^{t_E} \sum_{i=1}^n \underbrace{\left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right)}_0 \cdot \delta q_i \cdot dt \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.3-26)$$

Beispiel 4.3-2: Freier Fall einer Masse  $m$  im homogen angenommenen Erdschwerefeld (Bild 4.3-2b) aus einer Höhe  $h$  über dem Erdboden:

Es wird die Bewegungsgleichung für die konzentrierte Masse  $m$  alternativ mit dem Schwerpunktsatz auf Basis a) des *Newton'schen* Impulssatzes und b) mit der *Lagrange-Gleichung* (4.3-12) aufgestellt. Die Gravitationskraft  $F = m \cdot g$  ist als äußere Kraft in  $x$ -Richtung wirksam.

a) Die Summe aller äußeren wirkenden Kräfte (hier: Schwerkraft) trägt zur Impulserhöhung bei:  $m \cdot \ddot{x} = F = m \cdot g$ .

b) Ein Freiheitsgrad  $n = 1$ : Ortskoordinate  $q_1 = x$ :

Kinetische Ko-Energie hängt nur von  $v = \dot{x}$  ab:  $W_k^*(\dot{x}, x) = W_k^*(\dot{x}) = \frac{m \cdot \dot{x}^2}{2}$ .

Potentielle Energie hängt nur von  $x$  ab:  $W_p(x) = m \cdot g \cdot (h - x)$ .

Lagrange-Funktion:  $L(\dot{x}, x) = W_k^* - W_p$ .

Lagrange-Gleichung:  $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \cdot \dot{x}$ ,  $\frac{\partial L}{\partial x} = m \cdot g \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow m \cdot \ddot{x} - m \cdot g = 0$ .

Bewegungsgleichung:  $m \cdot \ddot{x} = m \cdot g = F$ .

Bsp. 4.3-2 zeigt, dass *Newton*- und *Lagrange*-Methode dasselbe Ergebnis bringen, dass aber die *Newton*-Methode viel kürzer und anschaulicher ist. Dies gilt auch bei elektromechanischen Wandlern (Kap. 7). Bei einfachen Systemen wie in Bsp. 4.3-2 mit wenigen Freiheitsgraden ( $n$  klein) ist die Rechnung mit der *Newton*-Bewegungsgleichung und den *Kirchhoff*-Gleichungen zum Aufstellen der Systemgleichungen schneller. Bei aufwändigen Systemen mit einer größeren Anzahl von Freiheitsgraden ist aber die Methode der *Lagrange*-Gleichungen übersichtlicher. Man muss keine Teilsysteme „freischneiden“, um die Kopplungen der Teilsysteme zu beschreiben und vermeidet die fallweise gar nicht interessierenden Schnittkräfte.

#### Zusammenfassung:

#### **Vorgehensweise zum Aufstellen der Systemgleichungen mit den *Lagrange*-Gleichungen:**

a) Feststellen der Anzahl  $n$  der Freiheitsgrade

Wahl der verallgemeinerten UNabhängigen Koordinaten  $q_i, i = 1, \dots, n!$

Verallgem. Koordinaten  $q_i$  sind UNabhängige Verschiebungen  $x$ , Winkel  $\gamma$ , Ladungen  $Q!$

Eingeprägte Koordinatenvorgaben (Wegerregung, Stromquelle) haben vorgeschriebene Zeitfunktionen und zählen daher NICHT zu den UNabhängigen verallg. Koordinaten.

Die kinematische Verträglichkeit anhand geometrischer Bedingungen und *Kirchhoff*-Knotengleichungen muss erfüllt sein!

b) Anschreiben der

(i) kinetischen Ergänzungsenergie  $W_k^*$  als Funktion der verallgemeinerten Geschwindigkeiten  $dq_i/dt$  und Koordinaten  $q_i$  und der

(ii) potentiellen Energie  $W_p$  als Funktion von  $q_i$ .

c) Bei nicht-konservativen Wandler-Systemen: Bestimmen der verallg. dissipativen Kräfte  $F_i^{(d)}$  und äußeren Kräfte  $F_i$  als Koeffizienten der virtuellen Arbeiten  $\delta A_d, \delta A$  bei den virtuellen Verschiebungen  $\delta q_i$ .

d) Einsetzen von  $W_k^*, W_p$  in die *Lagrange*-Gleichungen und Ausführen der Differentiationen liefert einen Satz von  $n$  unabhängigen **Systemgleichungen** als Differentialgleichungen in  $t$ .

### 4.4 Beispiele zum mechanischen System

Bispiel 4.4-1: Mechanisches Feder-Masse-Dämpfer-System als wegerregter mechanischer linearer Schwinger:

Es erfolgt eine wegerregte Bewegung an der Feder  $k$  mit linearer Dämpfung  $d$  (Bild 4.4-1).

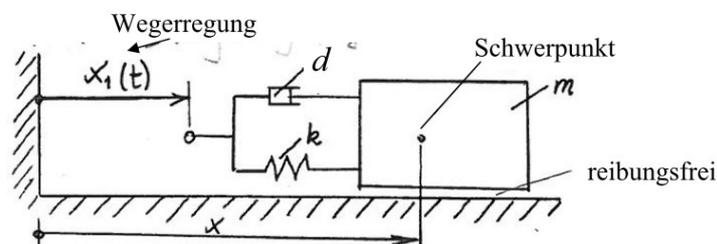


Bild 4.4-1: Mechanisches Feder-Masse-Dämpfer-System: Wegerregte Bewegung an der Feder  $k$  mit linearer Dämpfung  $d$

Die Systemmasse  $m$  mit ihrer Lagekoordinate  $x(t)$  wird am Fußpunkt der Feder vorgeschrieben bewegt, indem der zeitliche Koordinatenverlauf  $x_1(t)$  eingepreßt wird. Dämpfer und Feder sind linear, d. h.  $d, k = \text{konst.}$  Die Feder ist entspannt für  $x - x_1 = l_0$ , wobei  $l_0$  die Länge der entspannten Feder ist. Die Dämpferkraft ist proportional zur Dämpfergeschwindigkeit.

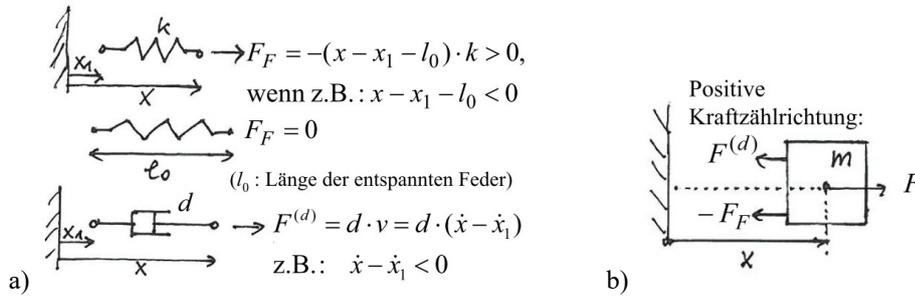


Bild 4.4-2: a) Relativbewegungen von Anfang und Ende der Feder und des Dämpfers, b) Positive Zählrichtung der Kräfte

Sie ist durch die Relativbewegung  $v^{(d)} = \dot{x} - \dot{x}_1$  der beiden Dämpfersystem-Endpunkte  $x(t)$ ,  $x_1(t)$  bestimmt:  $F^{(d)} = d \cdot (\dot{x} - \dot{x}_1)$  (Bild 4.4-2a). Weitere Reibungskräfte treten nicht auf. Es sind keine äußeren Kräfte vorhanden:  $F = 0$ . Mit den vier Schritten (Kap. 4.3) werden die Lagrange-Bewegungsgleichungen aufgestellt. Weil  $x_1$  vorgegeben ist, besteht  $n = 1$  ein Freiheitsgrad  $q_1 = x$ . Aus der Relativbewegung folgt bei Lageänderung die virtuelle Verschiebung am Dämpfer  $\delta q_1 = \delta x = \delta(x - x_1)$ , da wegen der Vorgabe von  $x_1$  (Randbedingung)  $\delta x_1 = 0$  ist.

a)  $n = 1: q_1 = x,$

b)  $W_k^* = m \cdot \dot{x}^2 / 2, \quad W_p = k \cdot (x - x_1 - l_0)^2 / 2,$

c)  $\delta A_d = d \cdot \Delta \dot{x} \cdot \delta(\Delta x) = d \cdot (\dot{x} - \dot{x}_1) \cdot \delta(x - x_1), \quad \delta A = F \cdot \delta(x - x_1) = 0,$

d)  $\frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{x}} = m \cdot \dot{x}, \quad \frac{\partial W_k^*}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial W_p}{\partial x} = k \cdot (x - x_1 - l_0),$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial W_k^*}{\partial x} + \frac{\partial W_p}{\partial x} + F^{(d)} = F \Rightarrow \frac{d(m \cdot \dot{x})}{dt} - 0 + k \cdot (x - x_1 - l_0) + d \cdot (\dot{x} - \dot{x}_1) = 0.$$

Resultat ist die Bewegungsgleichung des Systems (4.4-1).

$$m \cdot \ddot{x} + d \cdot \dot{x} + k \cdot x = k \cdot (x_1(t) + l_0) + d \cdot \dot{x}_1(t) \tag{4.4-1}$$

Alternativ wird (4.4-1) mit der Methode nach *Newton* über den Schwerpunktsatz bestimmt, da die Summe aller Kräfte die Impulsänderung der Masse  $m$  ergibt. Mit der Zählweise der Kräfte (Bild 4.4-2b) und  $F = 0$  folgt  $m \cdot \ddot{x} = -F^{(d)} + F_F, m \cdot \ddot{x} = -d \cdot (\dot{x} - \dot{x}_1) - k \cdot (x - x_1 - l_0)$  und daraus direkt wieder (4.4-1). Die Bewegungsgleichung (4.4-1) ist eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten, weil sie ein dynamisches System 2. Ordnung, bestehend aus zwei Energiespeichern „Feder“ (pot.) und „Masse“ (kinet.), beschreibt. In der Gleichgewichtslage („Arbeitspunkt“) tritt keine Bewegung auf. Daher ist dann jegliche zeitliche Änderung Null:  $d./dt = 0, \ddot{x} = \dot{x} = 0, \dot{x}_1 = 0 \rightarrow x_1 = X_1$ .

Aus (4.4-1) folgt  $k \cdot x = (x_1 + l_0) \cdot k = k \cdot X = \text{konst.}$  Die Feder entspannt sich:  $X = X_1 + l_0!$

Das dynamische Verhalten der Masse  $m$  bei Abweichungen aus der Gleichgewichtslage  $x(t) = X + \Delta x(t)$  wird durch die Anregung  $x_1(t) = X_1 + \Delta x_1(t)$  herbeigeführt. Daraus folgt  $\dot{x}_1(t) = \dot{X}_1 + \Delta \dot{x}_1(t) = \Delta \dot{x}_1(t), \dot{x} = \Delta \dot{x}, \ddot{x} = \Delta \ddot{x}$  und weiter aus (4.4-1) wegen des Herauskürzens der Gleichgewichtsbedingung  $X = X_1 + l_0$  die dynamische Bewegungsgleichung für die Abweichungen vom Arbeitspunkt

$$m \cdot \Delta \ddot{x} + d \cdot \Delta \dot{x} + k \cdot \Delta x = d \cdot \Delta \dot{x}_1 + \Delta x_1 \cdot k. \tag{4.4-2}$$

Eine zeitlich kosinusförmige Abweichung aus der Gleichgewichtslage mit der Frequenz  $f = \omega/(2\pi)$  wird wegen der Linearität des Systems durch eine kosinusförmige Wegerregung (4.4-3) mit der Amplitude  $\hat{X}_1$  erzwungen.

$$x_1(t) = X_1 + \Delta x_1(t) = X_1 + \hat{X}_1 \cdot \cos(\omega t). \tag{4.4-3}$$

Die so erregte Wegschwingung (4.4-4) der Masse  $m$  hat wegen der Linearität dieselbe Frequenz  $f$ , aber i. A. eine Amplitude  $\hat{X} \neq \hat{X}_1$  und einen zum Erregungssignal auftretenden Phasenverschiebungswinkel  $\varphi$ .

$$x(t) = X + \Delta x(t) = X + \hat{X} \cdot \cos(\omega t + \varphi) \tag{4.4-4}$$

Die Abhängigkeit dieser Amplitude und des Phasenverschiebungswinkels von der Frequenz  $f$  des Erregungssignals ist der **Frequenzgang des Systems**. Seine Berechnung wird einfach bei Verwendung der komplexen Rechenmethode. Mit ihr wird die kosinusförmige Dauererregung (4.4-3) geschrieben als

$$\Delta x_1(t) = \hat{X}_1 \cdot \cos \omega t = \text{Re}\{\hat{X}_1 \cdot e^{j\omega t}\}. \tag{4.4-5}$$

und die Schwingbewegung der Masse  $m$  als

$$\Delta x(t) = \hat{X} \cdot \cos(\omega t + \varphi) = \text{Re}\{\hat{X} \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t}\} = \text{Re}\{\underline{\hat{X}} \cdot e^{j\omega t}\}, \quad \underline{\hat{X}} = \hat{X} \cdot e^{j\varphi}. \tag{4.4-6}$$

Bei vernachlässigter Dämpfung  $d = 0$  ergibt sich so

$$d = 0 : m \cdot \Delta \ddot{x} + k \cdot \Delta x = \Delta x_1 \cdot k \Rightarrow (-m \cdot \omega^2 + k) \cdot \underline{\hat{X}} = k \cdot \hat{X}_1, \tag{4.4-7}$$

$$\frac{\underline{\hat{X}}}{\hat{X}_1} = \frac{k}{-m \cdot \omega^2 + k} = \frac{k/m}{(k/m) - \omega^2} = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \tag{4.4-8}$$

mit der Resonanz-Kreisfrequenz  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ . Bei Anregung mit  $\omega = \omega_0$  wird wegen der fehlenden Dämpfung die Amplitude  $\hat{X}$  unendlich groß (Resonanzkatastrophe) und der Phasenverschiebungswinkel wechselt von 0 auf  $-\pi$  bzw.  $\pi$  (Bild 4.4-3).

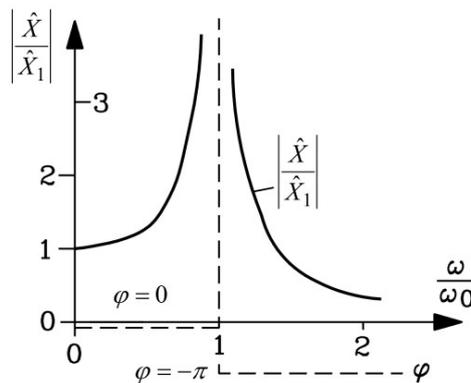


Bild 4.4-3: Frequenzgang als Amplitudengang und Phasengang des linearen, ungedämpften wegerregten Schwingers von Bild 4.4-1.

**Beispiel 4.4-2:** Mechanisches Feder-Masse-Dämpfer-System (mit linearer Dämpfung  $d$ ) als wegerregter mechanischer linearer Schwinger, wobei die Wegerregung direkt an der Masse  $m$  erfolgt (Bild 4.4-4a).

Die Wegerregung  $x(t)$  ist an der Masse vorgeschrieben, Dämpfer und Feder sind linear, d. h.  $d, k = \text{konst.}$  Die Feder ist entspannt für  $x = l_0$ . Die Dämpferkraft ist proportional zur Geschwindigkeit am Dämpferkolben relativ zum Zylinder:  $F^{(d)} = d \cdot \dot{x}$ . Es sind keine äußeren Kräfte vorhanden  $F = 0$ . Da keine unbekannte Variable vorhanden ist, hat das System keine Freiheitsgrade, sondern ist geführt.

a)  $n = 0$

b)  $F = 0 : m \cdot \ddot{x} = -F^{(d)} + F_F, \quad m \cdot \ddot{x} = -d \cdot \dot{x} - k \cdot (x - l_0), \quad m \cdot \ddot{x} + d \cdot \dot{x} + k \cdot x = l_0 \cdot k.$

Wir erhalten keine Schwingungs-Differentialgleichung, sondern b) gibt das sich einstellende Kräftegleichgewicht in Abhängigkeit der Vorgabe  $x(t)$  des eingepprägten Wegs  $x$  der Masse  $m$  an. Daher kann auch keine Resonanz auftreten, da die Bewegung der Masse „geführt“ ist. Bei  $x = \text{konst.}$  ist die Dämpfungskraft Null. Insbesondere ist bei entspannter Feder  $x = l_0$  auch die Federkraft Null:

$$\dot{x} = dl_0 / dt = 0, \quad \vec{F}^{(p)} = \vec{F}_F = -k \cdot (x - l_0) \cdot \vec{e}_x = \vec{0}, \quad \vec{F}^{(d)} = -d \cdot \dot{x} \cdot \vec{e}_x = -d \cdot 0 \cdot \vec{e}_x = \vec{0}.$$

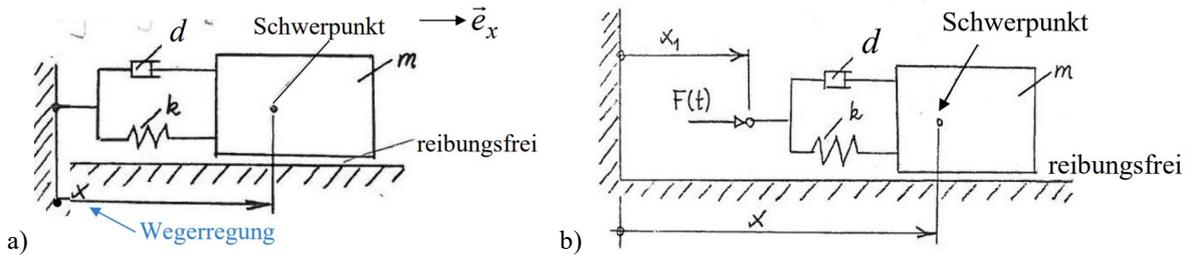


Bild 4.4-4: Mechanisches Feder-Masse-Dämpfer-System mit linearer Feder  $k$  und Dämpfung  $d$ : a) Wegerregte Bewegung  $x(t)$  an der Masse  $m$ , b) Kräfteerregung  $F(t)$  an der Feder.

Beispiel 4.4-3: Mechanisches Feder-Masse-Dämpfer-System mit linearer Dämpfung  $d$  und kräfteerregter Bewegung an der Feder (Bild 4.4-4b).

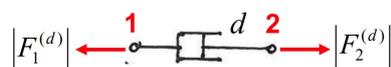
Als Erregung ist die äußere Kraft  $F(t)$  vorgeschrieben. Zuzolge  $F(t)$  können sich  $x$  und  $x_1$  unterschiedlich ändern, so dass  $n = 2$  Freiheitsgrade existieren. Dämpfer und Feder sind linear, d. h.  $d, k = \text{konst.}$  Die Feder ist entspannt für  $x - x_1 = l_0$ . Die Dämpfungskraft ist proportional zur Geschwindigkeit  $\dot{x} - \dot{x}_1$  gemäß  $F^{(d)} = d \cdot (\dot{x} - \dot{x}_1)$ .

a)  $n = 2 : q_1 = x_1, q_2 = x,$

b)  $W_k^* = m \cdot \dot{x}^2 / 2, \quad W_p = k \cdot (x - x_1 - l_0)^2 / 2,$

c)  $\delta A_d = d \cdot (\dot{x} - \dot{x}_1) \cdot \delta(x - x_1) = -d \cdot (\dot{x} - \dot{x}_1) \cdot \delta q_1 + d \cdot (\dot{x} - \dot{x}_1) \cdot \delta q_2 = F_1^{(d)} \cdot \delta q_1 + F_2^{(d)} \cdot \delta q_2.$

Die virtuelle Arbeit  $\delta A_d$  ergibt sich aus der Dämpfungskraft längs des vom Dämpferkolben im Zylinder zurückgelegten Weges  $x - x_1$  gemäß c), so dass daraus die beiden zu den unabhängigen Koordinaten  $q_1, q_2$  gehörenden Dämpfungskraftkomponenten  $F_1^{(d)}, F_2^{(d)}$  bestimmt werden können:  $F_1^{(d)} = -F_2^{(d)} = -d \cdot (\dot{x} - \dot{x}_1)$ . Beide Kraftkomponenten wirken gemäß „actio est reactio“ links und rechts am Dämpferlelement.



Über die virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte  $\delta A$  werden die zu  $q_1, q_2$  gehörenden Kraftkomponenten  $F_1, F_2$  ermittelt.

$$\delta A = F \cdot \delta x_1 = F_1 \cdot \delta q_1 + F_2 \cdot \delta q_2 = F \cdot \delta q_1 + 0 \cdot \delta q_2 \Rightarrow F_1 = F(t), F_2 = 0.$$

Die Lagrange-Gleichungen werden für  $i = 1, 2$  angeschrieben.

d)  $i = 1 : \frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{x}_1} = 0, \quad \frac{\partial W_k^*}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial W_p}{\partial x_1} = -k \cdot (x - x_1 - l_0), \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial W_k^*}{\partial x_1} + \frac{\partial W_p}{\partial x_1} + F_1^{(d)} = F_1,$

$$0 - 0 - k \cdot (x - x_1 - l_0) - d \cdot (\dot{x} - \dot{x}_1) = F(t).$$

$$d) \quad i = 2: \frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{x}} = m \cdot \dot{x}, \quad \frac{\partial W_k^*}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial W_p}{\partial x} = k \cdot (x - x_1 - l_0), \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial W_k^*}{\partial x} + \frac{\partial W_p}{\partial x} + F_2^{(d)} = F_2,$$

$$m \cdot \ddot{x} - 0 + k \cdot (x - x_1 - l_0) + d \cdot (\dot{x} - \dot{x}_1) = 0.$$

Es ergeben sich zwei lineare Differentialgleichungen mit konst. Koeff. für die beiden Unbekannten  $x_1, x$ , die zu einer resultierenden Differentialgleichung 2. Ordnung in  $x$  zusammengefasst werden können:  $m \cdot \ddot{x} = F(t)$ , denn über die Feder wird direkt die Masse  $m$  mit  $F$  bewegt. Die zweite Ordnung ergibt sich auf Grund der beiden im Austausch befindlichen Speicher, einem kinetischen ( $m$ ) und einem potentiellen ( $k$ ) Energiespeicher.

$$\left. \begin{aligned} -k \cdot (x - x_1 - l_0) - d \cdot (\dot{x} - \dot{x}_1) &= F(t) \\ m \cdot \ddot{x} + k \cdot (x - x_1 - l_0) + d \cdot (\dot{x} - \dot{x}_1) &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow m \cdot \ddot{x} = F(t) \tag{4.4-9}$$

ABER  $m \cdot \ddot{x} = F(t)$  zeigt, dass es keine Schwingungsgleichung ist, weil die Kraft  $F$  direkt am Feder-Dämpfer-System eingeprägt ist. Bei kosinusförmiger Kraft-Dauererregung  $F(t) = \hat{F} \cdot \cos \omega t = \text{Re} \{ \hat{F} \cdot e^{j\omega t} \}$  erhalten wir den Frequenzgang der Massenbewegung  $x(t)$

$$x(t) = \hat{X} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) = \text{Re} \{ \hat{X} \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t} \}, \quad \underline{\hat{X}} = \hat{X} \cdot e^{j\varphi}, \tag{4.4-10}$$

mit (4.4-9) gemäß

$$-m \cdot \omega^2 \cdot \underline{\hat{X}} = \hat{F} \Rightarrow \underline{\hat{X}} / \hat{F} = -\frac{1}{m \cdot \omega^2} \Rightarrow \varphi = -\pi. \tag{4.4-11}$$

Es tritt wegen der kraftgeführten Bewegung der Masse KEINE Resonanz auf, sondern eine zur Kraft  $F$  gegenphasige Bewegung mit bei steigender Kreisfrequenz  $\omega$  quadratisch abnehmender Wegamplitude  $\hat{X}$ . Diese Wegamplitude  $\hat{X}$  der Masse  $m$  sinkt wegen deren Massenträgheit bei konstanter Kraftamplitude  $\hat{F}$  mit steigender Frequenz  $f = \omega/(2\pi)$ . Bei konstanter Kraft  $F = \text{konst.}$  ist  $f = 0$  (Frequenz ist Null). Dann wird die Masse  $m$  über die Feder „weggeschoben“, z. B. bei der Anfangsgeschwindigkeit  $v(0)$  und Anfangslage  $x(0)$

$$\ddot{x} = F/m \Rightarrow \dot{x} = (F/m) \cdot t + v(0) \Rightarrow x = (F/m) \cdot \frac{t^2}{2} + v(0) \cdot t + x(0) \Rightarrow x|_{t \rightarrow \infty} \rightarrow \infty.$$

Beispiel 4.4-4: Dynamisches Verhalten des mechanischen Feder-Masse-Dämpfer-Systems mit linearer Feder  $k$  und Dämpfung  $d$  und krafterregter Bewegung an der Masse  $m$  (Bild 4.4-5a).

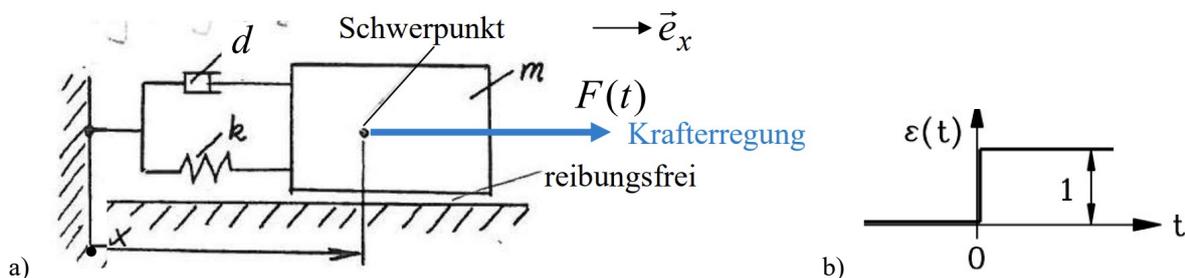


Bild 4.4-5: a) Mechanisches Feder-Masse-Dämpfer-System mit linearer Feder  $k$  und Dämpfung  $d$  mit Krafterregung an der Masse  $m$ . Die Feder ist entspannt bei  $x = l_0$ , b) Heaviside-Sprungfunktion.

Hier soll der alternative Lösungsweg mit der Anwendung der *Newton*-Bewegungsgleichung verwendet werden, also der Schwerpunktsatz, gemäß dem die Summe aller Kräfte die Impulsänderung der Masse  $m$  ergibt.

$$m \cdot \ddot{x} \cdot \vec{e}_x = \vec{F} - \vec{F}^{(d)} + \vec{F}^{(p)} \tag{4.4-12}$$

$$\text{mit } \vec{F}^{(p)} = \vec{F}_F = -k \cdot (x - l_0) \cdot \vec{e}_x, \quad \vec{F}^{(d)} = d \cdot \dot{x} \cdot \vec{e}_x. \tag{4.4-13}$$

Mit der Anregung  $\vec{F} = F(t) \cdot \vec{e}_x$  an der Masse  $m$  folgt über (4.4-12, -13) das Resultat (4.4-14).

$$m \cdot \ddot{x} + d \cdot \dot{x} + k \cdot x = k \cdot l_0 + F(t) \tag{4.4-14}$$

Dies ist die Schwingungsdifferentialgleichung für den linearen Ein-Massen-Schwinger ähnlich zu (4.4-1), aber mit Kräfteerregung statt Wegerregung. Die Gleichgewichtslage  $X$  ergibt sich mit  $d./dt = 0$ , somit bei  $F = \text{konst.}$

$$x = X : k \cdot X = k \cdot l_0 + F \Leftrightarrow F = k \cdot (X - l_0) \tag{4.4-15}$$

Die Auslenkung  $\Delta x(t)$  aus dem Gleichgewicht („Arbeitspunkt“)  $x = X$  mit der Anregung

$$F(t) = F + \Delta F(t) \tag{4.4-16}$$

führt auf die Bewegung  $x(t) = X + \Delta x(t)$ , berechnet über (4.4-14). Dabei können die Auslenkungen  $\Delta x$ ,  $\Delta F$  beliebig groß sein, da das System linear ist! Mit dem Kräfte-Gleichgewicht  $k \cdot X = k \cdot l_0 + F$  folgt mit  $\ddot{x} = \Delta \ddot{x}$ ,  $\dot{x} = \Delta \dot{x}$  (da  $\ddot{X} = \dot{X} = 0$  ist),

$$m \cdot \Delta \ddot{x} + d \cdot \Delta \dot{x} + k \cdot \Delta x = \Delta F(t) \tag{4.4-17}$$

Wir bestimmen für die kräfteerregte Bewegung an der Masse  $m$  die **Sprungantwort**  $\Delta x(t)$  der Massenkoordinate  $x(t)$  beim sprungförmigen Kraft-Aufschalten (4.4-18) mit der Heaviside-Sprungfunktion  $\varepsilon(t)$  (Bild 4.4-5b) durch Lösung der Differentialgleichung 2. Ordnung (4.4-17) mit der Methode der homogenen und partikulären Lösung  $\Delta x_h$ ,  $\Delta x_p$ , die wegen der Linearität von (4.4-17) zur resultierenden Lösung  $\Delta x = \Delta x_h + \Delta x_p$  überlagert werden.

$$\Delta F(t) = \Delta F \cdot \varepsilon(t), \quad \varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases} \tag{4.4-18}$$

Für eine Diff.-gleichung 2. Ordnung sind zwei Anfangsbedingungen nötig. Sie lauten hier  $\Delta x(0) = 0$ ,  $\Delta \dot{x}(0) = 0$ , da die Masse bei  $t < 0$  in der Gleichgewichtslage ist. Wir führen das dimensionslose **Lehr'sche Dämpfungsmaß**  $d_L$  (4.4-19) ein.

$$d_L = d / (2 \cdot \sqrt{k \cdot m}) \tag{4.4-19}$$

Mit der Eigen-Kreisfrequenz des ungedämpften Schwingers (vgl. (4.4-8))  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  folgt

$$\beta = d / (2m) = d_L \cdot \omega_0 = 1 / \tau \tag{4.4-20}$$

„**Schwache Dämpfung**“ tritt auf für  $4 \cdot k \cdot m \geq d^2$  bzw.  $0 \leq d_L \leq 1$ . Aus (4.4-17) folgt die homogene Differentialgleichung, indem die rechte Seite Null gesetzt wird (4.4-21). Sie wird als lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten durch die Summe von zwei voneinander unabhängigen e-Potenz-Funktionen gelöst (4.4-21), die eingesetzt die **charakteristische Gleichung** (4.4-22 links) ergeben, deren Lösung  $\lambda_{1,2}$  (4.4-22 rechts) ist.

$$\Delta \ddot{x}_h + (d/m) \cdot \Delta \dot{x}_h + (k/m) \cdot \Delta x_h = 0, \quad \Delta x_h(t) = C_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \tag{4.4-21}$$

$$\lambda^2 + (d/m) \cdot \lambda + (k/m) = 0, \quad \lambda_{1,2} = -\frac{d}{2m} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4m^2} - \frac{k}{m}} = -\frac{d}{2m} \pm j \cdot \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{d^2}{4m^2}} = \lambda_{1,2} \tag{4.4-22}$$

Wegen der hier angenommenen schwachen Dämpfung sind die beiden **Eigenwerte**  $\lambda_{1,2}$  (4.4-24) komplexe Zahlen. Mit der gegenüber dem ungedämpften Schwinger etwas kleineren **Eigen-Kreisfrequenz des gedämpften Schwingers**

$$\omega_d = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{d^2}{4m^2}} = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - d_L^2} < \omega_0 \tag{4.4-23}$$

haben die beiden **konjugiert komplexen Eigenwerte** mit der Einheit 1/s (4.4-24)

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm j \cdot \omega_d \tag{4.4-24}$$

als Realteil die negative massenbezogene Dämpfung (4.4-20) und als Imaginärteil (4.4-23). Eingesetzt in (4.4-22), sind die beiden unbekanntenen Konstanten  $C_1$ ,  $C_2$  offenbar i. A. komplexe Zahlen. Die homogene Lösung ist natürlich reell, wie (4.4-25) ... (4.4-27) zeigen.

$$\Delta x_h(t) = \underline{C}_1 \cdot e^{-\beta t} \cdot e^{j\omega_d t} + \underline{C}_2 \cdot e^{-\beta t} \cdot e^{-j\omega_d t}, \quad \underline{C}_1 := (D_1 - jD_2)/2 \quad \underline{C}_2 := (D_1 + jD_2)/2 \tag{4.4-25}$$

$$\Delta x_h(t) = e^{-\beta \cdot t} \cdot \left[ D_1 \cdot \frac{e^{j\omega_d \cdot t} + e^{-j\omega_d \cdot t}}{2} + D_2 \cdot \frac{e^{j\omega_d \cdot t} - e^{-j\omega_d \cdot t}}{2j} \right] \quad (4.4-26)$$

$$\Delta x_h(t) = e^{-\beta \cdot t} \cdot [D_1 \cdot \cos(\omega_d \cdot t) + D_2 \cdot \sin(\omega_d \cdot t)] \quad (4.4-27)$$

Die partikuläre Differentialgleichung (4.4-28) berücksichtigt, dass für  $t \geq 0$  die rechte Seite eine Konstante ist.

$$\Delta \ddot{x}_p + (d/m) \cdot \Delta \dot{x}_p + (k/m) \cdot \Delta x_p = \Delta F / m, \quad t \geq 0 \quad (4.4-28)$$

Deshalb ist der Ansatz für  $\Delta x_p$  ebenfalls eine Konstante als Lösung:  $\Delta x_p(t) = K, \quad t \geq 0$ .

Eingesetzt in (4.4-28) ergibt dies  $\Delta x_p(t) = \Delta F / k$ . Die resultierende Lösung  $\Delta x = \Delta x_h + \Delta x_p$  muss die Anfangsbedingungen erfüllen, womit  $D_1, D_2$  bestimmt werden.

$$\Delta x(0) = 0 = \Delta x_h(0) + \Delta x_p(0) = D_1 + K \Rightarrow D_1 = -K \quad (4.4-29)$$

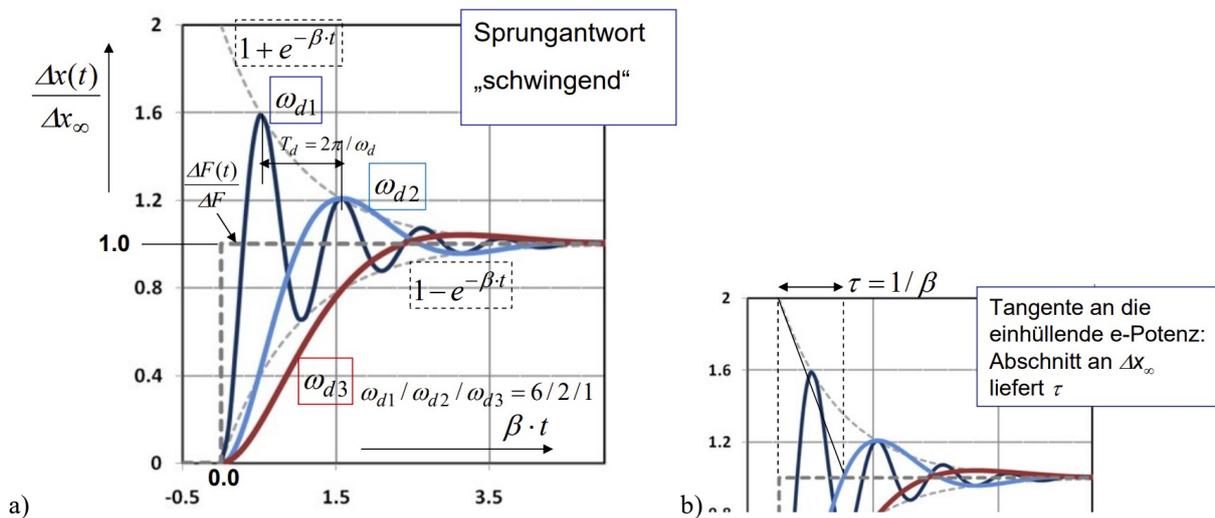
$$\Delta \dot{x}(0) = 0 = \Delta \dot{x}_h(0) + \Delta \dot{x}_p(0) = \omega_d \cdot D_2 - \beta \cdot D_1 \Rightarrow D_2 = (\beta / \omega_d) \cdot (-K) \quad (4.4-30)$$

Eingesetzt in (4.4-27) wird das Zeitsignal der Sprungantwort  $\Delta x(t)$  (4.4-31) erhalten, das mit der **Dämpfungszeitkonstante**  $\tau = 1/\beta$  gedämpft mit  $\omega_d$  auf die Federdehnung als Endwert  $\Delta x(t \rightarrow \infty) = \Delta x_\infty = \Delta F / k$  einschwingt.

$$\Delta x(t) = (\Delta F / k) \cdot \left\{ 1 - e^{-\beta \cdot t} \cdot [\cos(\omega_d \cdot t) + (\beta / \omega_d) \cdot \sin(\omega_d \cdot t)] \right\} \quad (4.4-31)$$

Üblich ist eine bezogene Darstellung von (4.4-31)  $\Delta x / \Delta x_\infty$  (Bild 4.4-6), wobei der sin- und cos-Term in (4.4-31) auf einen gemeinsamen cos-Term mit entsprechender Phasenverschiebung  $\phi$  zusammengefasst werden (4.4-32) (bitte selbst nachvollziehen!).

$$\frac{\Delta x(t)}{\Delta x_\infty} = 1 - e^{-\beta \cdot t} \cdot \frac{\sin(\omega_d \cdot t + \phi)}{\sin \phi}, \quad t \geq 0 \quad \text{mit} \quad \sin \phi = \frac{1}{\sqrt{1 + (\beta / \omega_d)^2}} \quad (4.4-32)$$



**Bild 4.4-6:** Zu Bild 4.4-5: a) Schwingende Sprungantwort der Massenkoordinate  $\Delta x = x - X$  bei sprungartiger Krafterregung  $\Delta F$  für drei unterschiedliche Eigenkreisfrequenzen  $\omega_{d1}/\omega_{d2}/\omega_{d3} = 6/2/1$ . b) Graphische Bestimmung der Dämpfungszeitkonstante  $\tau$  (Quelle: wikipedia.de).

Ab dem „**aperiodischen Grenzfall**“  $d_L = 1$  schwingt die Sprungantwort nicht mehr. Bei  $d_L = 1$  tritt ein gedämpftes Einlaufen des Zeitsignals  $\Delta x(t)$  zum Stationärwert  $\Delta x_p(t) = \Delta F / k$  mit einer e-Potenz-Funktion mit der Zeitkonstante  $\tau = 1/\beta$  auf. Bei „**starker Dämpfung**“  $d_L > 1$  sind die beiden Eigenwerte  $\lambda_{1,2}$  (4.4-22) reell.

Das Zeitsignal  $\Delta x(t)$  ist ein gedämpftes Einlaufen zum Stationärwert  $\Delta x_p(t) = \Delta F / k$  mit zwei e-Potenz-Funktionen mit einer langen Zeitkonstante  $\tau_1 = -1/\lambda_1$  und einer kurzen Zeitkonstante  $\tau_2 = -1/\lambda_2$ .

Mit einer zeitlich kosinusförmigen Kraftanregung (4.4-33) an der Masse  $m$  mit einer festgelegten Kreisfrequenz  $\omega$  wird der **Frequenzgang der Massenbewegung** (4.4-34) in einer ausgewählten Gleichgewichtslage  $X$  bestimmt.

$$\Delta F(t) = \Delta \hat{F} \cdot \cos \omega t = \operatorname{Re} \left\{ \Delta \hat{F} \cdot e^{j\omega t} \right\} \tag{4.4-33}$$

$$\Delta x(t) = \Delta \hat{X} \cdot \cos(\omega t + \varphi) = \operatorname{Re} \left\{ \Delta \hat{X} \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \Delta \hat{X} \cdot e^{j\omega t} \right\} \tag{4.4-34}$$

Einsetzen von (4.4-33), (4.4-34) in (4.4-17) liefert als partikuläre Lösung für einen sinusförmig sich ändernden Kraftterm auf der rechten Seite der Diff.gleichung  $(-\omega^2 \cdot m + j\omega \cdot d + k) \cdot \Delta \hat{X} = \Delta \hat{F}$ , woraus der Frequenzgang (4.4-35) folgt.

$$\frac{\Delta \hat{X}}{\Delta \hat{F}} = \frac{1}{-\omega^2 \cdot m + j\omega \cdot d + k} \tag{4.4-35}$$

Für sehr kleine Frequenzen (4.4-36) tritt wieder die statische Federdehnung auf, während für sehr hohe Frequenzen sich die Masse  $m$  auf Grund ihrer Massenträgheit nicht mehr aus der Gleichgewichtslage  $X$  heraus bewegt.

$$\omega \rightarrow 0: \Delta \hat{X} = \Delta \hat{X} = \Delta \hat{F} / k, \quad \omega \rightarrow \infty: \Delta \hat{X} \rightarrow 0 = 0 + j \cdot 0 \tag{4.4-36}$$

Der zu (4.4-35) gehörende Amplituden-Frequenzgang (4.4-37), Bild 4.4-7, als Weg pro Kraft heißt „Nachgiebigkeit“.

$$\frac{\Delta \hat{X}}{\Delta \hat{F}} = \left| \frac{\Delta \hat{X}}{\Delta \hat{F}} \right| = \frac{1}{\sqrt{(-\omega^2 \cdot m + k)^2 + (\omega \cdot d)^2}} \tag{4.4-37}$$

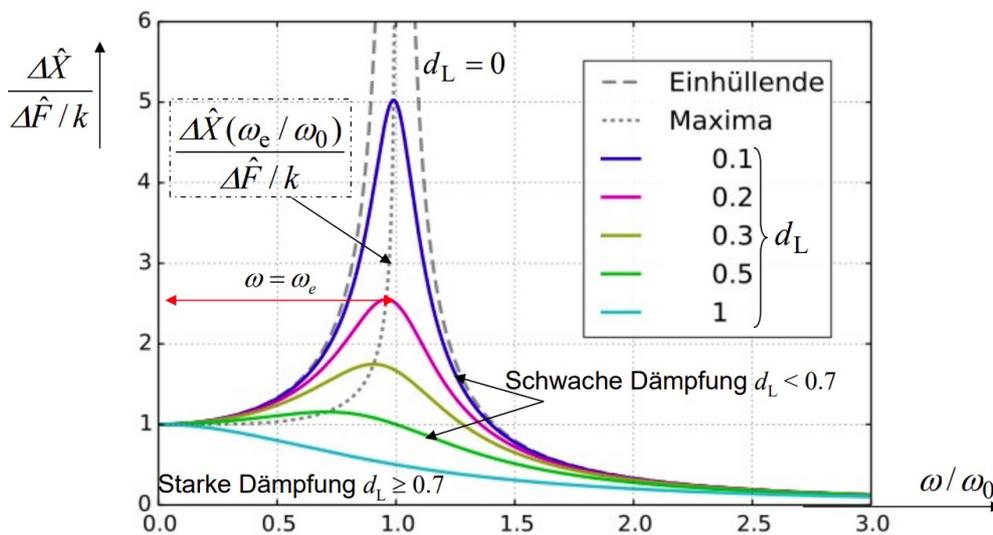


Bild 4.4-7: Zu Bild 4.4-5: Mit der Federkonstante  $k$  multiplizierte Nachgiebigkeit als Amplituden-Frequenzgang (4.4-37) für unterschiedliche *Lehr*'sche Dämpfungsmaße (Quelle: wikipedia.de).

Das Amplitudenmaximum von (4.4-37) tritt bei der Resonanzfrequenz  $\omega_e$  (4.4-38) auf, die mit der Bedingung „ $(-\omega_e^2 \cdot m + k)^2 + (\omega_e \cdot d)^2 = \text{minimal}$ “ bestimmt wird und etwas kleiner als  $\omega_0$

$$(4.4-23) \text{ ist: } \frac{d}{d\omega_e^2} \left[ (-\omega_e^2 \cdot m + k)^2 + (\omega_e \cdot d)^2 \right] = 0 = (-2m) \cdot (-\omega_e^2 \cdot m + k) + d^2.$$

$$\omega_e = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{d^2}{2m^2}} < \omega_d = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{d^2}{4m^2}} < \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (4.4-38)$$

Schon ab einer Dämpfung  $d_L \geq 1/\sqrt{2} = 0.71$  tritt in (4.4-37) keine Resonanzüberhöhung mehr auf, denn bei  $d_L = 1/\sqrt{2}$  wird die Resonanzfrequenz  $\omega_e$  (4.4-38) gemäß (4.4-39) Null.

$$\omega_e = 0 = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{d^2}{2m^2}} \Rightarrow k \cdot m = d^2 / 2 \Rightarrow d_L = \frac{d}{2\sqrt{k \cdot m}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (4.4-39)$$

**Beispiel 4.4-5:** Dynamisches Verhalten des ungedämpften wegerregten Zweimassen-Schwingers (mech. Feder-Masse-System Bild 4.4-8)

Die Wegerregung  $x(t)$  an Feder 1 ( $k_1$ ) ist vorgeschrieben. Beide Federn 1 und 2 sind linear:  $k_1 = k_2 = \text{konst.}$  Die Federn sind entspannt bei  $x_1 = l_1$  (wenn  $x = 0$ ) bzw.  $x_2 = l_2$  (wenn  $x_1 = l_1, x = 0$ ). Es wirken keine äußeren Kräfte  $F_1 = F_2 = 0$ . Es tritt keine Dämpfung auf:  $d_1 = d_2 = 0$ . Die virtuellen Arbeiten äußerer und dämpfender Kräfte sind folglich Null.

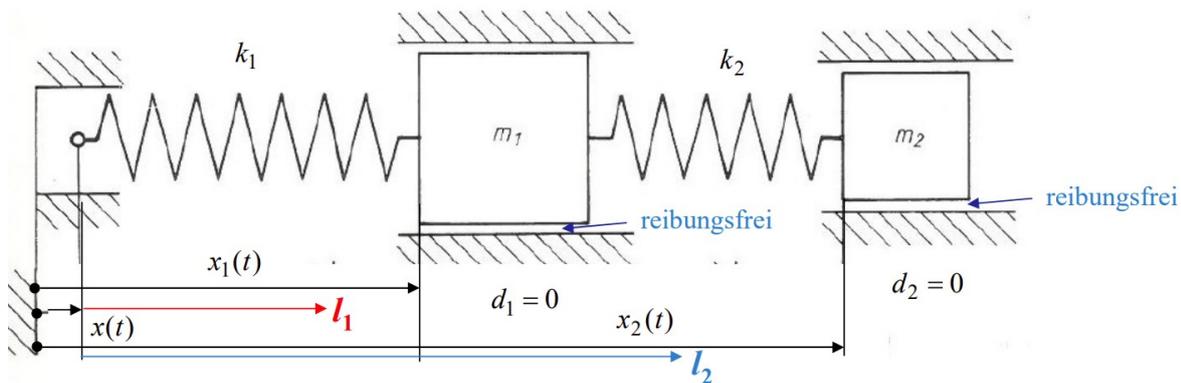


Bild 4.4-8: Ungedämpfter wegerregter Zweimassen-Schwinger (Quelle: Ziegler, F.: Mechanik, Springer-Verlag)

Das System hat zwei Freiheitsgrade.

a)  $n = 2 : q_1 = x_1, q_2 = x_2.$

b)  $W_k^* = \frac{m_1 \cdot \dot{x}_1^2}{2} + \frac{m_2 \cdot \dot{x}_2^2}{2}, \quad W_p = \frac{k_1 \cdot (x_1 - x - l_1)^2}{2} + \frac{k_2 \cdot (x_2 - x_1 + l_1 - l_2)^2}{2},$

c)  $d_1 = d_2 = 0 \Rightarrow \delta A_d = 0 \Rightarrow F_1^{(d)} = F_2^{(d)} = 0, \quad F_1 = F_2 = 0 \Rightarrow \delta A = 0.$

d)  $i = 1 : \frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{x}_1} = m_1 \cdot \dot{x}_1, \quad \frac{\partial W_k^*}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial W_p}{\partial x_1} = k_1 \cdot (x_1 - x - l_1) - k_2 \cdot (x_2 - x_1 + l_1 - l_2),$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial W_k^*}{\partial x_1} + \frac{\partial W_p}{\partial x_1} + F_1^{(d)} = F_1 \Rightarrow \frac{d(m_1 \cdot \dot{x}_1)}{dt} - 0 + k_1 \cdot (x_1 - x - l_1) - k_2 \cdot (x_2 - x_1 + l_1 - l_2) + 0 = 0,$$

$$i = 2 : \frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{x}_2} = m_2 \cdot \dot{x}_2, \quad \frac{\partial W_k^*}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial W_p}{\partial x_2} = k_2 \cdot (x_2 - x_1 + l_1 - l_2),$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial W_k^*}{\partial x_2} + \frac{\partial W_p}{\partial x_2} + F_2^{(d)} = F_2 \Rightarrow \frac{d(m_2 \cdot \dot{x}_2)}{dt} - 0 + k_2 \cdot (x_2 - x_1 + l_1 - l_2) + 0 = 0.$$

Die aus d) resultierenden Bewegungsgleichungen (4.4-40, -41)

$$m_1 \cdot \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2) \cdot x_1 - k_2 \cdot x_2 = k_1 \cdot (x + l_1) + k_2 \cdot (l_1 - l_2) \quad (4.4-40)$$

$$m_2 \cdot \ddot{x}_2 + k_2 \cdot x_2 - k_2 \cdot x_1 = k_2 \cdot (l_2 - l_1) \quad (4.4-41)$$

lassen sich auf eine Differentialgleichung 4. Ordnung zusammenfassen, da es sich um ein System 4. Ordnung handelt, weil zwei kinetische und zwei potentielle Energiespeicher in Wechselwirkung sind. Die Gleichgewichtslagen  $X_1, X_2$  beider Massen gemäß  $d./dt = 0$  werden mit der vorgegebenen Wegerregung  $x(t) = X = \text{konst.}$  über (4.4-42, -43) ermittelt.

$$(k_1 + k_2) \cdot X_1 - k_2 \cdot X_2 = k_1 \cdot (X + l_1) + k_2 \cdot (l_1 - l_2) \quad (4.4-42)$$

$$k_2 \cdot X_2 - k_2 \cdot X_1 = k_2 \cdot (l_2 - l_1) \quad (4.4-43)$$

Aus (4.4-42, -43) folgt

$$X_1 = X + l_1, \quad X_2 = X_1 + l_2 - l_1 = X + l_2. \quad (4.4-44)$$

Zur Vorgabe  $X$  addieren sich im Gleichgewicht wegen des Fehlens äußerer Kräfte die Längen der entspannten Federn  $l_1, l_2$ . Die zeitlich veränderliche wegerregte Auslenkung  $\Delta x(t)$  aus dem Gleichgewichtspunkt  $X$  führt über  $x(t) = X + \Delta x(t)$  auf die zeitlich veränderlichen Auslenkungen  $\Delta x_1(t), \Delta x_2(t)$  der beiden Massen aus den Gleichgewichtslagen  $X_1, X_2$  gemäß

$$x_1(t) = X_1 + \Delta x_1(t), \quad x_2(t) = X_2 + \Delta x_2(t). \quad (4.4-45)$$

Einsetzen von (4.4-45) in (4.40, -41) ergibt mit  $\dot{x}(t) = \Delta \dot{x}(t), \dot{x}_1(t) = \Delta \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t) = \Delta \dot{x}_2(t)$

$$m_1 \cdot \Delta \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2) \cdot \Delta x_1 - k_2 \cdot \Delta x_2 + (k_1 + k_2) \cdot X_1 - k_2 \cdot X_2 = k_1 \cdot (X + \Delta x + l_1) + k_2 \cdot (l_1 - l_2)$$

$$m_2 \cdot \Delta \ddot{x}_2 + k_2 \cdot \Delta x_2 - k_2 \cdot \Delta x_1 + k_2 \cdot X_2 - k_2 \cdot X_1 = k_2 \cdot (l_2 - l_1)$$

und nach Kürzen der Gleichgewichtslagen (4.4-44) die Differentialgleichungen für die Auslenkungen  $\Delta x_1(t), \Delta x_2(t)$  (4.4-46, -47).

$$m_1 \cdot \Delta \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2) \cdot \Delta x_1 - k_2 \cdot \Delta x_2 = k_1 \cdot \Delta x, \quad (4.4-46)$$

$$m_2 \cdot \Delta \ddot{x}_2 + k_2 \cdot \Delta x_2 - k_2 \cdot \Delta x_1 = 0. \quad (4.4-47)$$

Mit der kosinusförmigen Wegerregung  $x(t) = X + \hat{X} \cdot \cos \omega t = X + \text{Re} \{ \hat{X} \cdot e^{j\omega t} \}$  wird der Frequenzgang mit den komplexen Größen (4.48, -49) berechnet.

$$x_1(t) = X_1 + \hat{X}_1 \cdot \cos(\omega t + \varphi_1) = X_1 + \text{Re} \{ \hat{X}_1 \cdot e^{j\varphi_1} \cdot e^{j\omega t} \}, \quad \underline{\hat{X}}_1 = \hat{X}_1 \cdot e^{j\varphi_1}, \quad (4.4-48)$$

$$x_2(t) = X_2 + \hat{X}_2 \cdot \cos(\omega t + \varphi_2) = X_2 + \text{Re} \{ \hat{X}_2 \cdot e^{j\varphi_2} \cdot e^{j\omega t} \}, \quad \underline{\hat{X}}_2 = \hat{X}_2 \cdot e^{j\varphi_2}. \quad (4.4-49)$$

Einsetzen von (4.48, -49) in (4.46, -47) liefert mit  $x(t) = X + \text{Re} \{ \hat{X} \cdot e^{j\omega t} \}$  und (4.4-44)

$$(-m_1 \cdot \omega^2 + (k_1 + k_2)) \cdot \underline{\hat{X}}_1 - k_2 \cdot \underline{\hat{X}}_2 = k_1 \cdot \hat{X}, \quad (4.4-50)$$

$$(-m_2 \cdot \omega^2 + k_2) \cdot \underline{\hat{X}}_2 - k_2 \cdot \underline{\hat{X}}_1 = 0. \quad (4.4-51)$$

Mit der Summe beider Federkonstanten  $k = k_1 + k_2$  wird (4.4-50, -51) geschrieben als

$$\begin{pmatrix} k - m_1 \cdot \omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - m_2 \cdot \omega^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{\hat{X}}_1 \\ \underline{\hat{X}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \cdot \hat{X} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.4-52)$$

und mit der *Cramer'schen* Regel gelöst. Die mechanische **Kopplung** zwischen beiden Massenbewegungen erfolgt durch  $k_2$  in der Nebendiagonale der Systemmatrix von (4.4-52). Mit der Determinante *Det* des Gleichungssystems (4.4-52)

$$\text{Det} = \begin{vmatrix} k - m_1 \cdot \omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - m_2 \cdot \omega^2 \end{vmatrix}, \quad (4.4-53)$$

$$\text{Det} = (k - m_1 \cdot \omega^2) \cdot (k_2 - m_2 \cdot \omega^2) - k_2^2 = m_1 m_2 \omega^4 - (m_1 k_2 + m_2 k) \cdot \omega^2 + k_1 k_2 = P(\omega), \quad (4.4-54)$$

$$\text{Det} = P(\omega^2) = m_1 \cdot m_2 \cdot (\omega^2 - \omega_{d1}^2) \cdot (\omega^2 - \omega_{d2}^2), \quad (4.4-55)$$

wird das **charakteristische Polynoms  $P(\omega)$**  4-ter Ordnung des gekoppelten Schwingungssystems 4. Ordnung ermittelt. Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms  $P(\omega)$  („**Pole**“ des Systems) sind die System-Eigenkreisfrequenzen. Ein Polynom 4. Ordnung hat gemäß dem Fundamentalsatz der Algebra von *C. F. Gauss* maximal vier Nullstellen und damit hier vier Eigenfrequenzen.

Wegen  $P(\omega^2)$  in (4.4-55, -56) treten hier zwei Doppelnulstellen auf, so dass nur zwei Eigenfrequenzen  $\omega_{d1} < \omega_{d2}$  existieren (4.4-59).

Mit den Abkürzungen  $\omega_1^2 = k_1 / m_1$ ,  $\omega_2^2 = k_2 / m_2$ ,  $\omega_{21}^2 = k_2 / m_1$  folgt:

$$\omega_3^2 = k / m_1 = (k_1 + k_2) / m_1 = \omega_1^2 + \omega_{21}^2. \text{ Diese Abkürzungen führen in (4.4-56) auf (4.4-57).}$$

$$P(\omega^2) = P(\xi) = m_1 m_2 \cdot \xi^2 - (m_1 k_2 + m_2 k) \cdot \xi + k_1 k_2 = 0 \text{ bzw.} \tag{4.4-56}$$

$$\xi^2 - \left( \frac{k_2}{m_2} + \frac{k}{m_1} \right) \cdot \xi + \frac{k_1}{m_1} \cdot \frac{k_2}{m_2} = 0 \text{ oder } \xi^2 - (\omega_2^2 + \omega_3^2) \cdot \xi + \omega_1^2 \cdot \omega_2^2 = 0 \tag{4.4-57}$$

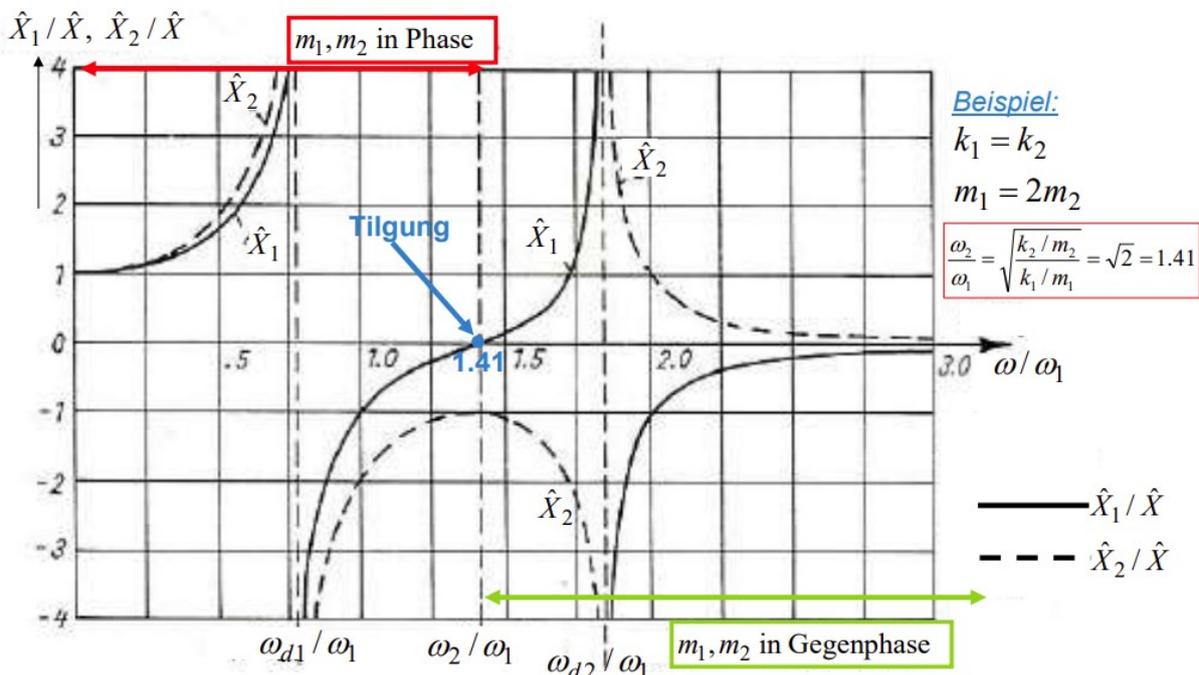
Die Lösung von (4.4-57) mit dem Wurzelsatz von Vieta ergibt zwei reelle Lösungen  $> 0$

$$\xi_{1,2} = \omega_{d2,1}^2 = \frac{\omega_2^2 + \omega_3^2}{2} \pm \sqrt{\frac{(\omega_2^2 + \omega_3^2)^2}{4} - \omega_1^2 \cdot \omega_2^2} > 0, \tag{4.4-58}$$

denn es ist der Term unter der Wurzel stets positiv  $\frac{(\omega_2^2 + \omega_3^2)^2}{4} - \omega_1^2 \cdot \omega_2^2 > 0$ , wie man sieht:

$$\begin{aligned} (\omega_2^2 + \omega_1^2 + \omega_{21}^2)^2 - 4\omega_1^2 \cdot \omega_2^2 &= \omega_2^4 + \omega_1^4 + \omega_{21}^4 + 2\omega_2^2\omega_1^2 + 2\omega_2^2\omega_{21}^2 + 2\omega_1^2\omega_{21}^2 - 4\omega_1^2 \cdot \omega_2^2 = \\ &= \omega_2^4 + \omega_1^4 + \omega_{21}^4 - 2\omega_2^2\omega_1^2 + 2\omega_2^2\omega_{21}^2 + 2\omega_1^2\omega_{21}^2 = (\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + \omega_{21}^4 + 2\omega_2^2\omega_{21}^2 + 2\omega_1^2\omega_{21}^2 > 0. \end{aligned}$$

$$\omega_{d1} = \sqrt{\frac{\omega_2^2 + \omega_3^2}{2} - \sqrt{\frac{(\omega_2^2 + \omega_3^2)^2}{4} - \omega_1^2 \cdot \omega_2^2}} < \omega_{d2} = \sqrt{\frac{\omega_2^2 + \omega_3^2}{2} + \sqrt{\frac{(\omega_2^2 + \omega_3^2)^2}{4} - \omega_1^2 \cdot \omega_2^2}} \tag{4.4-59}$$



**Bild 4.4-9:** Frequenzgang (4.4-62, -63) des ungedämpften wegerregten Zweimassen-Schwingers (Quelle: Ziegler, F.: *Mechanik*, Springer-Verlag) für  $k_1 = k_2, m_1 = 2m_2$ .

Die aus (4.4-52) mit der *Cramer-Regel* berechneten i. A. komplexen Schwingungsamplituden der beiden Massen sind wegen fehlender Dämpfung reell (4.4-60, -61), also in Phase oder Gegenphase mit der Anregung.

$$\hat{X}_1 = \frac{1}{Det} \cdot \begin{vmatrix} k_1 \cdot \hat{X} & -k_2 \\ 0 & k_2 - m_2 \cdot \omega^2 \end{vmatrix} = \frac{k_1 \cdot \hat{X} \cdot (k_2 - m_2 \cdot \omega^2)}{m_1 \cdot m_2 \cdot (\omega^2 - \omega_{d1}^2) \cdot (\omega^2 - \omega_{d2}^2)} \tag{4.4-60}$$

$$\hat{X}_2 = \frac{1}{\text{Det}} \begin{vmatrix} k - m_1 \cdot \omega^2 & k_1 \cdot \hat{X} \\ -k_2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{k_1 \cdot k_2 \cdot \hat{X}}{m_1 \cdot m_2 \cdot (\omega^2 - \omega_{d1}^2) \cdot (\omega^2 - \omega_{d2}^2)} \quad (4.4-61)$$

Bezogen auf die Anregungsamplitude  $\hat{X}$  ergibt dies den Frequenzgang (4.4-62, -63).

$$\frac{\hat{X}_1}{\hat{X}} = \frac{\hat{X}_1}{\hat{X}} = \frac{(k_1 / m_1) \cdot ((k_2 / m_2) - \omega^2)}{(\omega^2 - \omega_{d1}^2) \cdot (\omega^2 - \omega_{d2}^2)} = \frac{\omega_1^2 \cdot (\omega_2^2 - \omega^2)}{(\omega^2 - \omega_{d1}^2) \cdot (\omega^2 - \omega_{d2}^2)} \quad (4.4-62)$$

$$\frac{\hat{X}_2}{\hat{X}} = \frac{\hat{X}_2}{\hat{X}} = \frac{(k_1 / m_1) \cdot (k_2 / m_2)}{(\omega^2 - \omega_{d1}^2) \cdot (\omega^2 - \omega_{d2}^2)} = \frac{\omega_1^2 \cdot \omega_2^2}{(\omega^2 - \omega_{d1}^2) \cdot (\omega^2 - \omega_{d2}^2)} \quad (4.4-63)$$

Die Schwingungsamplitude  $\Delta x_1(t)$  von  $m_1$  ist gemäß (4.4-62) bei  $\omega = \omega_2$  Null (Bild 4.4-9). Durch die in Gegenphase schwingende Masse  $m_2$  wird die über  $\Delta x(t)$  erregte Schwingung der Masse  $m_1$  „getilgt“! Die Anwendung dazu ist der passive **Schwingungstilger**: Die  $\omega$ -frequente Schwingung einer Masse  $m_1$  kann vermieden werden, wenn man eine zweite Masse  $m_2$  über eine Feder  $k_2$  so ankoppelt, dass die Tilgerbedingung  $\omega = \omega_2 = \sqrt{k_2 / m_2}$  erfüllt ist.

### 4.5 Beispiele zum elektrischen Netzwerk

Beispiel 4.5-1: Linearer stromgespeister el. Parallelschwingkreis (Bild 4.5-1a):

Die ideale Stromquelle („ideal“ = ihr Innenwiderstand ist  $\infty!$ ) schreibt das Signal  $i(t)$  durch  $Q(t)$  vor:  $i = dQ/dt$ . Es existiert nur ein Freiheitsgrad (z. B.  $Q_2$ ), da  $Q_1$  über die Kirchhoff-Knotengleichung bestimmt ist. Es ist KEINE äußere Spannung und damit keine „äußere Kraft“ vorhanden:  $F = 0$ , so dass die zugehörige virtuelle Arbeit Null ist:  $\delta A = 0$ . Die virtuelle Arbeit  $\delta A_d$  der „Dämpferkraft“  $F^{(d)}$  wird über das *ohm*'sche Gesetz beschrieben.

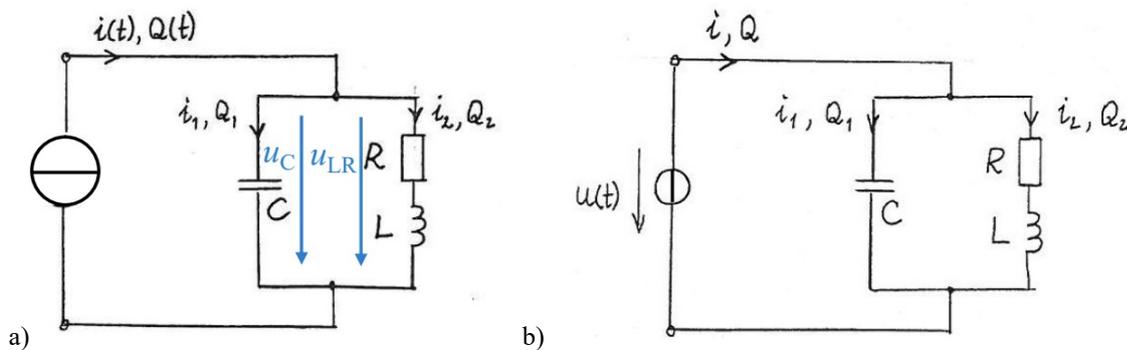


Bild 4.5-1: Lineares el. R-L-C-Netzwerk: a)  $i(t)$  stromgespeist, b)  $u(t)$  spannungsgespeist.

- a)  $n = 1: q_1 = Q_2, \quad Q_1 = Q - Q_2,$
- b)  $W_k^* = L \cdot \dot{Q}_2^2 / 2, \quad W_p = (Q - Q_2)^2 / (2C),$
- c)  $\delta A_d = F^{(d)} \cdot \delta q_1 = (R \cdot i_2) \cdot \delta Q_2, \quad \delta A = F \cdot \delta q_1 = 0.$
- d)  $\frac{\partial W_k^*}{\partial Q_2} = L \cdot \dot{Q}_2 = L \cdot i_2, \quad \frac{\partial W_k^*}{\partial Q_2} = 0, \quad \frac{\partial W_p}{\partial Q_2} = -(Q - Q_2) / C, \quad F^{(d)} = R \cdot i_2, \quad F = 0,$   
 $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{Q}_2} \right) - \frac{\partial W_k^*}{\partial Q_2} + \frac{\partial W_p}{\partial Q_2} + F^{(d)} = F \Rightarrow \frac{d(L \cdot i_2)}{dt} - 0 - \frac{Q - Q_2}{C} + R \cdot i_2 = 0.$

Aus d) folgt die dynamische Gleichung des stromerregten el. linearen Schwingkreises (4.5-1) zu Bild 4.5-1a. Durch einmaliges Differenzieren hat sie die unabhängige Variable  $i_2$ .

$$L \cdot \frac{di_2}{dt} - \frac{Q - Q_2}{C} + R \cdot i_2 = 0 \Rightarrow \left|_{d./dt} \Rightarrow L \cdot \frac{d^2 i_2}{dt^2} + R \cdot \frac{di_2}{dt} + \frac{i_2}{C} = \frac{i(t)}{C} \quad (4.5-1)$$

Alternativ wird (4.5-1) über die Kirchhoff'sche Maschengleichung (4.5-2) ermittelt.

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i_1 \cdot dt = u_{LR}(t) = R \cdot i_2 + L \cdot di_2 / dt, \quad i_1 = i - i_2 \quad (4.5-2)$$

$$\frac{1}{C} \cdot \int_0^t i \cdot dt = \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i_2 \cdot dt + R \cdot i_2 + L \cdot di_2 / dt \quad (4.5-3)$$

Durch einmaliges Differenzieren nach  $t$  wird (4.5-1) erhalten. (4.5-1) ist eine Differentialgleichung 2. Ordnung, da zwei Energiespeicher  $L$  und  $C$  in Wechselwirkung sind. Die **charakteristische Gleichung** für die Eigenwertberechnung der homogenen Lösung des el. Ausgleichsvorgangs  $i_1(t)$ ,  $i_2(t)$  z. B. beim Einschalten der Stromquelle  $i(t)$  wird wie in Bsp. 4.4-4 über den Ansatz mit zwei e-Potenzfunktionen bestimmt. Die beiden Eigenwerte  $\lambda_{1,2}$

$$\lambda^2 + (R/L) \cdot \lambda + 1/(LC) = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} \quad (4.5-4)$$

sind bei „schwacher“ Dämpfung  $0 \leq d_L \leq 1$  (4.5-5) konjugiert komplex (4.5-6).

$$\text{Lehr'sches Dämpfungsmaß: } d_L = \frac{R \cdot \sqrt{C}}{2 \cdot \sqrt{L}}, \text{ bei } d_L < 1 \Rightarrow \frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2 > 1. \quad (4.5-5)$$

$$\underline{\lambda}_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm j \cdot \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = -\beta \pm j \cdot \omega_d, \quad \omega_d = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \quad (4.5-6)$$

$i_1(t)$ ,  $i_2(t)$  schwingen beim Einschalten wegen des Energieaustauschs zwischen  $L$  und  $C$  mit der Eigenkreisfrequenz  $\omega_d$  (4.5-6) gedämpft auf die von  $i(t)$  abhängigen Stationärwerte ein. Die **Dämpfungszeitkonstante** des Einschwingens ist  $\tau = T = 2L/R = 1/\beta$ .

Beispiel 4.5-2: Lineares spannungsgespeistes el.  $R$ - $L$ - $C$ -Netzwerk (Bild 4.5-1b):

Über eine ideale Spannungsquelle (= ihr Innenwiderstand ist Null) wird die Spannung  $u(t)$  als äußere Spannung  $u$  (= „Äußere Kraft“: „ $F$ “ =  $u$ ) vorgeschrieben. Die Ströme in den beiden Parallelzweigen sind über die Zweigparameter voneinander unabhängig veränderbar, so dass zwei Freiheitsgrade existieren. Die virtuelle Arbeit  $\delta A$  der „äußeren Kraft“ bzw.  $\delta A_d$  der „Dämpferkraft“  $F^{(d)}$  werden durch die virtuelle Arbeit der Spannungsquelle bzw. jene der „Dämpferkraft“  $F^{(d)}$  über das *ohm'sche* Gesetz beschrieben.

a)  $n = 2: q_1 = Q_1, q_2 = Q_2, Q = Q_1 + Q_2,$

b)  $W_k^* = L \cdot i_2^2 / 2, W_p = Q_1^2 / (2C),$

c)  $\delta A_d = F_1^{(d)} \cdot \delta q_1 + F_2^{(d)} \cdot \delta q_2 = F_1^{(d)} \cdot \delta Q_1 + F_2^{(d)} \cdot \delta Q_2 = R \cdot i_2 \cdot \delta Q_2 \Rightarrow F_1^{(d)} = 0, F_2^{(d)} = R \cdot i_2,$   
 $\delta A = F_1 \cdot \delta Q_1 + F_2 \cdot \delta Q_2 = u \cdot \delta Q = u \cdot \delta Q_1 + u \cdot \delta Q_2 \Rightarrow F_1 = u(t), F_2 = u(t).$

d1)  $i = 1: \frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{Q}_1} = 0, \frac{\partial W_k^*}{\partial Q_1} = 0, \frac{\partial W_p}{\partial Q_1} = \frac{Q_1}{C}, F_1^{(d)} = 0, F_1 = u,$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{Q}_1} \right) - \frac{\partial W_k^*}{\partial Q_1} + \frac{\partial W_p}{\partial Q_1} + F_1^{(d)} = F_1 \Rightarrow 0 - 0 + \frac{Q_1}{C} = u(t), \quad i_1 = \dot{Q}_1, \quad i = i_1 + i_2.$$

d2)  $i = 2: \frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{Q}_2} = L \cdot i_2, \frac{\partial W_k^*}{\partial Q_2} = 0, \frac{\partial W_p}{\partial Q_2} = 0, F_2^{(d)} = R \cdot i_2, F_2 = u,$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{Q}_2} \right) - \frac{\partial W_k^*}{\partial Q_2} + \frac{\partial W_p}{\partial Q_2} + F_2^{(d)} = F_2 \Rightarrow L \frac{di_2}{dt} - 0 + 0 + R \cdot i_2 = u(t), L \frac{di_2}{dt} + R \cdot i_2 = u(t).$$

Die beiden Energiespeicher  $L$  und  $C$  werden el. parallel, also unabhängig voneinander spannungsgespeist. Beide dynamische Gleichungen sind daher voneinander unabhängig.

$$i_1 = \dot{Q}_1 = C \cdot du / dt, \quad L \frac{di_2}{dt} + R \cdot i_2 = u(t). \tag{4.5-7}$$

Beide Parallelzweige sind voneinander unabhängige Systeme 1. Ordnung, die miteinander nicht in Wechselwirkung sind. Beim z. B. Einschalten der Spannungsquelle erfolgt kein „Einschwingen“ von  $i(t)$ , da zwischen den beiden Speichern keine Energie ausgetauscht wird. Bei z. B. einem plötzlichen Zuschalten der Spannungsquelle als Gleichspannung  $U$  ist  $u(t)$  ein Spannungssprung (4.5-8), vgl. Bsp. 4.4-4.

$$u(t) = U \cdot \varepsilon(t): \quad u = 0 \ (t < 0), \ u = U \ (t \geq 0) \tag{4.5-8}$$

Mit den beiden Anfangsbedingungen  $i_1(0) = i_2(0) = 0$  liefert die erste Gleichung (4.5-7)

$i_1(t) = C \cdot du / dt = "I_1 \cdot \delta(t)"$  einen Dirac-Stoßstrom zur unendlich schnellen Aufladung des Kondensators  $C$ ! Die zweite Gleichung (4.5-7) liefert für  $t \geq 0$  als Differentialgleichung 1.

Ordnung  $\dot{i}_2 + (R/L) \cdot i_2 = U/L$  mit homogener und partikulärer Lösung den „Ladestrom“ der Induktivität  $i_2(t) = (U/R) \cdot (1 - e^{-t/T})$  mit der el. Zeitkonstante  $T = L/R$ . Die Summe aus beiden ergibt den Einschaltstrom

$$i = i_1 + i_2 = \begin{cases} = 0 & , \ t < 0 \\ = "I_1 \cdot \delta(t)" + \frac{U}{R} \cdot (1 - e^{-t/T}) & , \ t \geq 0 \end{cases} \tag{4.5-9}$$

mit dem Gleichstrom als Endwert  $U/R$  durch den rechten Parallelzweig (Bild 4.5-2a).

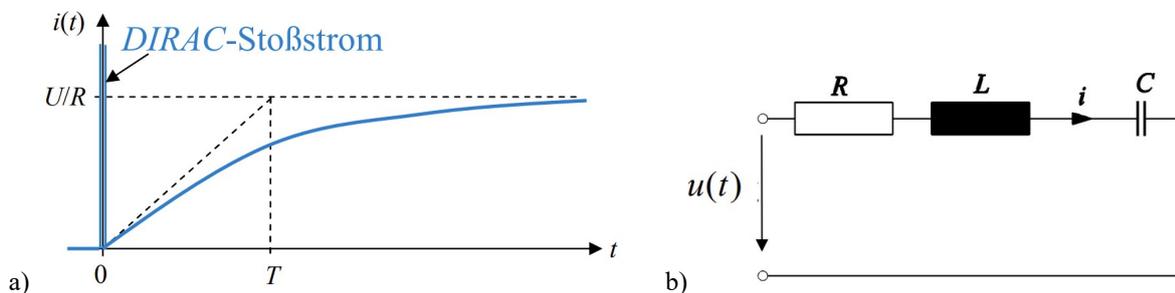


Bild 4.5-2: a) Strom-Sprungantwort  $i(t)$  auf einen Spannungssprung  $u(t)$  von 0 auf  $U$  im el. Netzwerk Bild 4.5-1b, b) Linearer gedämpfter el. Serienschwingkreis zu Bsp. 4.5-3.

Der Ausdruck " $I_1 \cdot \delta(t)$ " („Dirac“-Stoßfunktion) ist keine Funktion, sondern ein **Funktional**, also eine Größe, die aus einer Funktion über eine Berechnungsvorschrift (hier: bestimmtes

Integral für  $-\infty$  bis  $\infty$ ) Zahlenwerte ermittelt, nämlich hier  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi) \cdot d\xi = 1$ .

$$\int_{-\infty}^{\infty} i_1(t) \cdot dt = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{T_1 \cdot I_1}_{Q_1} \cdot \delta(\xi) \cdot d\xi = Q_1 = C \cdot U, \quad \xi = t/T_1, \quad I_1 = Q_1/T_1 \tag{4.5-9}$$

**Beispiel 4.5-3:** Linearer spannungsgespeister el.  $R$ - $L$ - $C$ -Serienschwingkreis (Bild 4.5-2b): Über eine ideale Spannungsquelle (Innenwiderstand = 0) ist  $u(t)$  vorgeschrieben als äußere Spannung  $u$  (= „Äußere Kraft“: „ $F$ “ =  $u$ ).  $R, L, C$  sind konstant. Die mit der Kirchhoff-Maschengleichung aufgestellte Systemgleichung ist (4.5-10).

$$L \cdot \frac{d^2 i}{dt^2} + R \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \cdot i = \frac{du(t)}{dt} \tag{4.5-10}$$

Es sind zwei Energiespeicher  $L, C$  im el. Austausch, so dass sich ein System 2. Ordnung und damit eine Differentialgleichung 2. Ordnung (4.5-10) für  $i(t)$ , also mit einem Freiheitsgrad  $n = 1$  ergibt. Stellen Sie selbst mit der *Lagrange*-Gleichung die dynamische Gleichung (4.5-10) auf!

In der „Aufgabensammlung“ ist das Einschaltverhalten für die Anfangsbedingungen  $i(0), u_L(0+) = L \cdot di/dt|_{t=0+} = U$  als Sprungantwort (Aufschalten der Gleichspannung  $u(t) = U$  bei  $t = 0$ ) berechnet:  $u(t) = U \cdot \varepsilon(t)$ ! Mit homogener und partikulärer Lösung wie in Bsp. 4.4-4 ergibt sich die **bei schwacher Dämpfung**  $d_L < 1$  schwingende Sprungantwort Bild 4.5-3a

$$i(t) = \frac{U}{\omega_d L} \cdot e^{-t/T} \cdot \sin(\omega_d t), \quad d_L = \frac{R \cdot \sqrt{C}}{2 \cdot \sqrt{L}} < 1 \Rightarrow \frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2 > 1. \tag{4.5-11}$$

$$T = 2L/R, \quad \omega_d = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot \sqrt{1 - \frac{R^2 C}{4L}} = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - d_L^2}, \quad \omega_d = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - d_L^2}. \tag{4.5-12}$$

$$\text{Eigenfrequenz als Einschwingfrequenz: } f_d = \frac{\omega_d}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = \frac{1}{T_d} \tag{4.5-13}$$

Die Eigenkreisfrequenz **des ungedämpften** Schwingkreises ( $R = 0$ ) ist  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ .

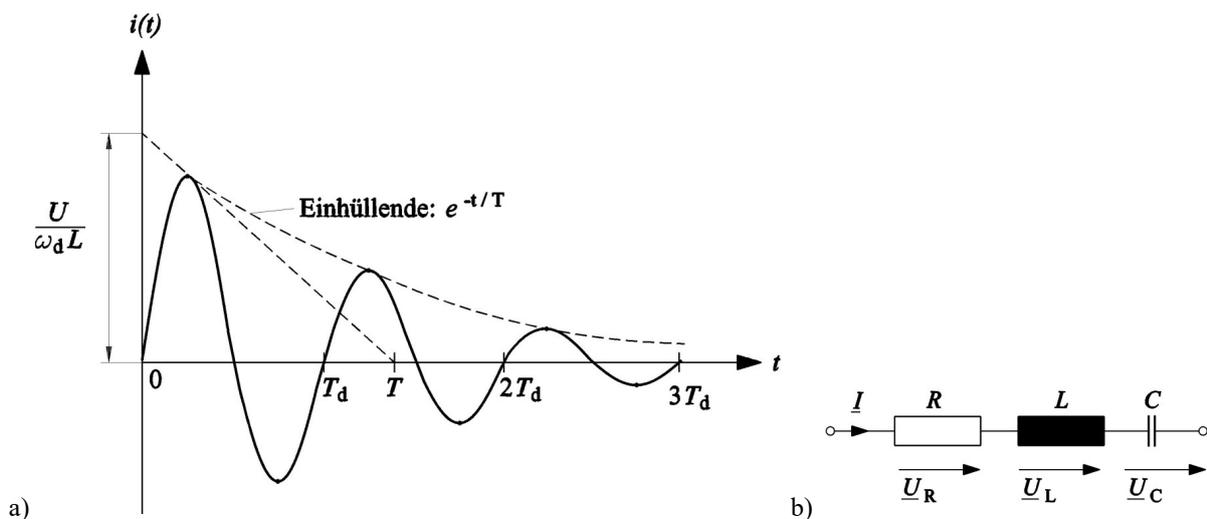


Bild 4.5-3: a) Zu Bsp. 4.5-3: Strom-Sprungantwort  $i(t)$  auf einen Spannungssprung  $u(t)$  von 0 auf  $U$  im el. Netzwerk Bild 4.5-2b, b) Strom und Spannungen im Serienschwingkreis bei Wechselstrombetrieb.

In der Aufgabensammlung ist der Frequenzgang (4.5-14) berechnet für eine kosinusförmige Spannungsvorgabe  $u(t) = U \cdot \sqrt{2} \cdot \cos \omega t$  mit der Stromantwort  $i(t) = I \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(\omega t - \varphi)$ . Bei der Eigenkreisfrequenz  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ ,  $R \geq 0$ , ist der Strom maximal. Dort wechselt der Phasenverschiebungswinkel  $\varphi$  zwischen Strom  $i$  und Spannung  $u$  das Vorzeichen von kapazitiv auf induktiv (Bild 4.5-4).

$$I(\omega) = \frac{U}{\sqrt{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2}} \tag{4.5-14}$$

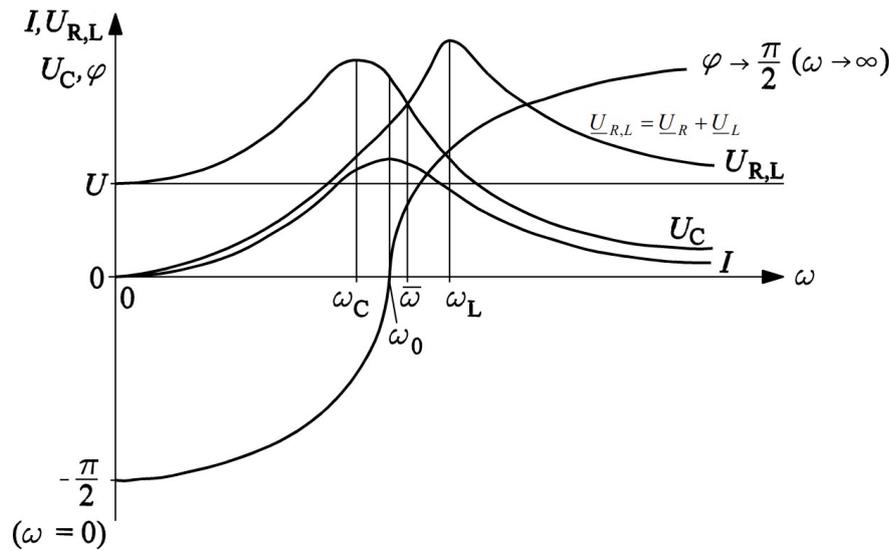


Bild 4.5-4: Frequenzgang von Strom  $I$ , Phasenwinkel  $\varphi$ , Kondensatorspannung  $U_C$  und Spannung  $U_{R,L}$  an der verlustbehafteten Induktivität zu Bsp. 4.5-3.

Bei der Kreisfrequenz  $\omega_C$  (4.5-15) ist die Wechselspannung  $U_C$  (Bild 4.5-3b) am Kondensator maximal, bei  $\bar{\omega}$  ist sie genauso groß wie die Spannung  $U_{R,L}$  an der verlustbehafteten Induktivität  $R-L$ , und bei  $\omega_L$  ist  $U_{R,L}$  maximal. Dabei ist  $\omega_C$  etwas kleiner als die Einschwingfrequenz  $\omega_d$  (4.5-12).

$$\omega_C = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{R^2 C}{2L}}, \quad \bar{\omega} = \omega_0 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{R^2}{2} \cdot \frac{C}{L}\right)^2 - \frac{R^2}{2} \cdot \frac{C}{L}}, \quad \omega_L = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{1 + \sqrt{1 + 2R^2 \cdot \frac{C}{L}}} \quad (4.5-15)$$

Gemäß (4.5-15) gilt die Relation

$$\omega_C < \omega_d < \omega_0 < \bar{\omega} < \omega_L, \quad (4.5-16)$$

die im ungedämpften Fall übergeht in  $\omega_C = \omega_d = \bar{\omega} = \omega_L = \omega_0$ .

Beispiel 4.5-4: Linearer spannungsgespeister el.  $R-L-C$ -Parallelschwingkreis (Bild 4.5-5a): Aus einer idealen Spannungsquelle (Innenwiderstand = 0) wird die äußere Spannung  $u(t)$  eingepreßt und als „äußere Kraft“ „ $F$ “ =  $u$  betrachtet.

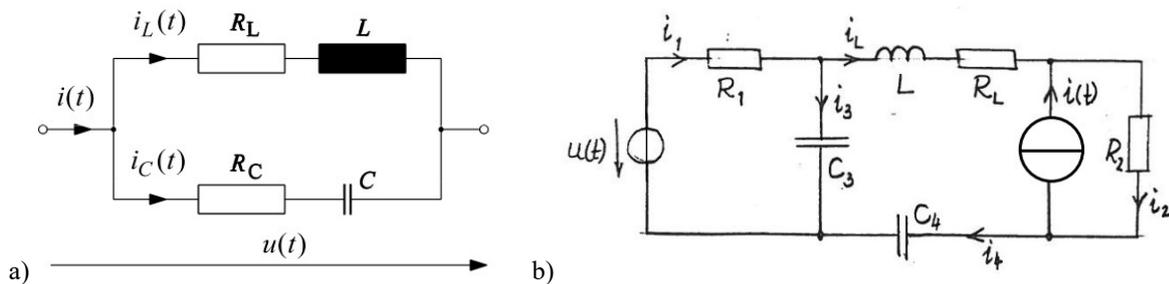


Bild 4.5-5: a) Linearer spannungsgespeister el.  $R-L-C$ -Parallelschwingkreis, b) Lineares vermaschtes Netzwerk

Aufgabe: Stellen Sie selbst mit den Lagrange-Gleichungen die dynamischen Gleichungen für  $i_L$ ,  $i_C$  und  $i$  auf. Die beiden Energiespeicher  $L$  und  $C$  werden parallel und damit unabhängig voneinander spannungsgespeist, so dass zwei Systeme 1. Ordnung auftreten!

1) Berechnen Sie damit das Einschaltverhalten (= Spannungssprung  $u$ ) des Stroms  $i(t)$  mit den Anfangsbedingungen  $i(0)$ ,  $\dot{i}(0)$ . Warum tritt auch bei schwacher Dämpfung kein „Einschwingen“ auf (vgl. Bsp. 4.5-2)!

2) Berechnen Sie den Strom-Frequenzgang bei sinusförmiger Spannungsanregung! Als Kontrollmöglichkeit ist in der „Aufgabensammlung“ der Frequenzgang berechnet, wobei die dynamischen Gleichungen mit den Kirchhoff-Gesetzen berechnet wurden!

Beispiel 4.5-5: Lineares vermaschtes Netzwerk (Bild 4.5-5b):

Sowohl  $u(t)$  ist über eine ideale Spannungsquelle (Innenwiderstand = 0) vorgeschrieben als auch  $i(t)$  über eine ideale Stromquelle (Innenwiderstand =  $\infty$ ). Es sind im Bild 4.5-5b sechs Zweige und vier Knoten vorhanden. Das ergibt drei voneinander unabhängige Knotengleichungen:  $i_1 = i_3 + i_L$ ,  $i_2 = i_L + i$ ,  $i_4 = i_2 - i$ . Existieren auch drei unabhängige Ströme? Nein, da  $i(t)$  vorgeschrieben ist, existieren nur zwei unabhängige Ströme. Es sind  $n = 2$  Freiheitsgrade vorhanden. Die virtuellen Änderungen für  $i$ ,  $Q$  sind Null, weil  $i$ ,  $Q$  eingeprengt sind:  $\delta Q = 0$ ,  $\delta i = d\delta Q / dt = 0$ . Damit werden aus den virtuellen Arbeiten  $\delta A_d$ ,  $\delta A$  die verallgemeinerten Dämpfungskräfte  $F_1^{(d)}$ ,  $F_2^{(d)}$  und äußeren Kräfte  $F_1$ ,  $F_2$  bestimmt.

a)  $n = 2 : q_1 = Q_1, q_2 = Q_2, (Q_L = Q_2 - Q, Q_3 = Q_1 - Q_2 + Q, Q_4 = Q_2 - Q)$

b)  $W_k^* = L \cdot i_L^2 / 2 = L \cdot (i_2 - i)^2 / 2,$

$$W_p = ((Q_3^2 / C_3) + (Q_4^2 / C_4)) / 2 = \frac{(Q_1 - Q_2 + Q)^2}{2C_3} + \frac{(Q_2 - Q)^2}{2C_4}.$$

c)  $\delta A_d = F_1^{(d)} \cdot \delta Q_1 + F_2^{(d)} \cdot \delta Q_2 = R_1 \cdot i_1 \cdot \delta Q_1 + R_2 \cdot i_2 \cdot \delta Q_2 + R_L \cdot i_L \cdot \delta Q_L$

$$\delta Q = 0 \Rightarrow \delta Q_L = \delta(Q_2 - Q) = \delta Q_2.$$

$$\delta A_d = R_1 \cdot i_1 \cdot \delta Q_1 + R_2 \cdot i_2 \cdot \delta Q_2 + R_L \cdot (i_2 - i) \cdot \delta Q_2 = R_1 \cdot i_1 \cdot \delta Q_1 + (R_2 \cdot i_2 + R_L \cdot (i_2 - i)) \cdot \delta Q_2,$$

$$\Rightarrow F_1^{(d)} = R_1 \cdot i_1, F_2^{(d)} = R_2 \cdot i_2 + R_L \cdot (i_2 - i)$$

$$\delta A = F_1 \cdot \delta Q_1 + F_2 \cdot \delta Q_2 = u \cdot \delta Q_1 \Rightarrow F_1 = u(t), F_2 = 0.$$

d)  $i = 1 : \frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{Q}_1} = \frac{\partial W_k^*}{\partial i_1} = 0, \frac{\partial W_k^*}{\partial Q_1} = 0, \frac{\partial W_p}{\partial Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2 + Q}{C_3}, F_1^{(d)} = R_1 \cdot i_1, F_1 = u.$

$$i = 2 : \frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{Q}_2} = \frac{\partial W_k^*}{\partial i_2} = L \cdot (i_2 - i), \frac{\partial W_k^*}{\partial Q_2} = 0, \frac{\partial W_p}{\partial Q_2} = -\frac{Q_1 - Q_2 + Q}{C_3} + \frac{Q_2 - Q}{C_4},$$

$$F_2^{(d)} = R_2 \cdot i_2 + R_L \cdot (i_2 - i), F_2 = 0.$$

$$i = 1 : \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{Q}_1} \right) - \frac{\partial W_k^*}{\partial Q_1} + \frac{\partial W_p}{\partial Q_1} + F_1^{(d)} = F_1 \Rightarrow 0 - 0 + \frac{Q_1 - Q_2 + Q}{C_3} + R_1 \cdot i_1 = u(t).$$

$$i = 2 : \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{Q}_2} \right) - \frac{\partial W_k^*}{\partial Q_2} + \frac{\partial W_p}{\partial Q_2} + F_2^{(d)} = F_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L \cdot \frac{d(i_2 - i)}{dt} - 0 - \frac{Q_1 - Q_2 + Q}{C_3} + \frac{Q_2 - Q}{C_4} + R_2 \cdot i_2 + R_L \cdot (i_2 - i) = 0.$$

$$R_1 \cdot \frac{di_1}{dt} + \frac{i_1}{C_3} - \frac{i_2}{C_3} = \frac{du}{dt} - \frac{i}{C_3}, \tag{4.5-17}$$

$$-\frac{i_1}{C_3} + L \cdot \frac{d^2 i_2}{dt^2} + (R_2 + R_L) \cdot \frac{di_2}{dt} + i_2 \cdot \left( \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4} \right) = L \cdot \frac{d^2 i}{dt^2} + R_L \cdot \frac{di}{dt} + i \cdot \left( \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4} \right). \tag{4.5-18}$$

Es werden zwei Differentialgleichungen (4.5-17, -18) als eine mit 1. Ordnung und eine mit 2. Ordnung für die beiden Unbekannten  $i_1$ ,  $i_2$  erhalten! Schreibt man (4.5-18) als  $-i_1 / C_3 + f(i_2) = F(i)$ , so folgt:

$$\dot{i}_1 = C_3 \cdot (f(i_2) - F(i)), \quad \dot{i}_1 = C_3 \cdot (\dot{f}(i_2) - \dot{F}(i)). \quad (4.5-19)$$

Eingesetzen von (4.5-19) in (4.5-17) ergibt

$$R_1 \cdot C_3 \cdot \left[ \dot{f}(i_2) - \dot{F}(i) \right] + f(i_2) - F(i) - \frac{i_2}{C_3} = \dot{u} - \frac{i}{C_3}. \quad (4.5-20)$$

Damit wurden (4.5-17, -18) in eine einzige Differentialgleichung 3. Ordnung (4.5-21) für  $i_2$  umgeformt, wobei die rechte Seite die Vorgaben  $u(t)$ ,  $i(t)$  und ihre Ableitungen enthält.

$$\begin{aligned} R_1 C_3 L \cdot \ddot{i}_2 + (R_1 C_3 \cdot (R_2 + R_L) + L) \cdot \dot{i}_2 + (R_1 \cdot (1 + \frac{C_3}{C_4}) + R_2 + R_L) \cdot i_2 + \frac{i_2}{C_4} = \\ = \dot{u} + R_1 C_3 L \cdot \ddot{i} + (R_1 R_L C_3 + L) \cdot \dot{i} + (R_1 \cdot (1 + \frac{C_3}{C_4}) + R_L) \cdot i + i \cdot (\frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4}) \end{aligned} \quad (4.5-21)$$

In gleicher Weise kann man durch Eliminieren von  $i_2$  die dynamische Systemgleichung für  $i_1$  (4.5-22) errechnen.

$$R_1 C_3 L \cdot \ddot{i}_1 + (R_1 C_3 \cdot (R_2 + R_L) + L) \cdot \dot{i}_1 + (R_1 \cdot (1 + \frac{C_3}{C_4}) + R_2 + R_L) \cdot i_1 + \frac{i_1}{C_4} = \text{rechte Seite} \quad (4.5-22)$$

Ihre linke Seite ist mit (4.5-21) identisch, da sie das dynamische Verhalten desselben Systems (Schaltverhalten, etc.) beschreibt. Die rechte Seite, die nur von  $u(t)$ ,  $i(t)$  und ihre Ableitungen abhängt, unterscheidet sich wegen der Variablen  $i_1$  statt  $i_2$  von (4.5-21). Leiten Sie diese rechte Seite selbst zur Übung her!

Wegen der drei gekoppelten Energiespeicher im System ( $L$ ,  $C_3$ ,  $C_4$ , Bild 4.5-5b) ist die dynamische Systemgleichung (4.5-21) bzw. (4.5-22) **eine** Diff.gleichung 3.Ordnung, die auch als **drei** Diff.-gleichungen erster Ordnung für  $i_1$ ,  $i_2$  und z. B.  $i_4$  geschrieben werden kann. Die analytische Lösung gelingt bei Verwendung entsprechender Anfangsbedingungen entweder mit

- der homogenen und partikulären Lösung oder alternativ
- mit der *Laplace*-Transformation.

Die **numerische Lösung** wird meist mit der schrittweisen Integration der Diff.-gleichungen 1. Ordnung mit der auf dem *Euler*-Verfahren basierenden Methode von *Runge* und *Kutta* ermittelt.

Beispiel 4.5-6: Induktive Kopplung  $M = L_{12}$  eines R-C-Glieds mit Speisung aus einer idealen Spannungsquelle (Bild 4.5-6): Aus einer idealen Spannungsquelle (Innenwiderstand = 0) wird die äußere Spannung  $u(t)$  eingepreßt und als „äußere Kraft“ „ $F$ “ =  $u$  betrachtet.

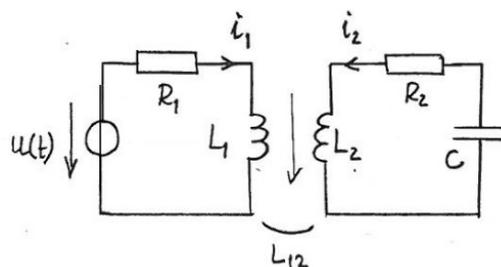


Bild 4.5-6: Induktive Kopplung mit Speisung aus idealer Spannungsquelle

Es existieren die beiden voneinander unabhängigen Ströme  $i_1$ ,  $i_2$  als die beiden Freiheitsgrade  $n = 2$ , die aus den beiden *Kirchhoff*-Maschengleichungen berechnet werden können. Mit dem alternativen *Lagrange*-Formalismus folgt mit  $i_1 = dQ_1 / dt$ ,  $i_2 = dQ_2 / dt$  und  $L_{12} = L_{21}$ :

- $n = 2 : q_1 = Q_1, q_2 = Q_2,$

$$b) \quad W_k^* = \frac{L_1}{2} \cdot i_1^2 + \frac{L_{12}}{2} \cdot i_1 i_2 + \frac{L_2}{2} \cdot i_2^2 + \frac{L_{21}}{2} \cdot i_2 i_1 = \frac{L_1}{2} \cdot i_1^2 + \frac{L_2}{2} \cdot i_2^2 + L_{12} \cdot i_1 i_2,$$

$$W_p = Q_2^2 / (2C),$$

$$c) \quad \delta A_d = F_1^{(d)} \cdot \delta Q_1 + F_2^{(d)} \cdot \delta Q_2 = R_1 \cdot i_1 \cdot \delta Q_1 + R_2 \cdot i_2 \cdot \delta Q_2 \Rightarrow F_1^{(d)} = R_1 \cdot i_1, F_2^{(d)} = R_2 \cdot i_2,$$

$$\delta A = F_1 \cdot \delta Q_1 + F_2 \cdot \delta Q_2 = u \cdot \delta Q_1 \Rightarrow F_1 = u(t), F_2 = 0.$$

$$d) \quad i = 1: \frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{Q}_1} = \frac{\partial W_k^*}{\partial i_1} = L_1 i_1 + L_{12} i_2, \quad \frac{\partial W_k^*}{\partial Q_1} = 0, \quad \frac{\partial W_p}{\partial Q_1} = 0, \quad F_1^{(d)} = R_1 \cdot i_1, \quad F_1 = u.$$

$$i = 2: \frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{Q}_2} = \frac{\partial W_k^*}{\partial i_2} = L_2 i_2 + L_{12} i_1, \quad \frac{\partial W_k^*}{\partial Q_2} = 0, \quad \frac{\partial W_p}{\partial Q_2} = Q_2 / C, \quad F_2^{(d)} = R_2 \cdot i_2, \quad F_2 = 0.$$

$$i = 1: \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{Q}_1} \right) - \frac{\partial W_k^*}{\partial Q_1} + \frac{\partial W_p}{\partial Q_1} + F_1^{(d)} = F_1 \Rightarrow L_1 \cdot \dot{i}_1 + L_{12} \cdot \dot{i}_2 - 0 + 0 + R_1 \cdot i_1 = u. \quad (4.5-23)$$

$$i = 2: \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{Q}_2} \right) - \frac{\partial W_k^*}{\partial Q_2} + \frac{\partial W_p}{\partial Q_2} + F_2^{(d)} = F_2 \Rightarrow L_2 \cdot \dot{i}_2 + L_{12} \cdot \dot{i}_1 + \frac{Q_2}{C} + R_2 \cdot i_2 = 0. \quad (4.5-24)$$

Durch Ableitung  $d./dt$  erhalten wir aus (4.5-24) die Diff.-gleichung 2. Ordnung (4.5-25).

$$\frac{d}{dt} : L_2 \cdot \ddot{i}_2 + L_{12} \cdot \ddot{i}_1 + \frac{i_2}{C} + R_2 \cdot \dot{i}_2 = 0. \quad (4.5-25)$$

(4.5-23, -25) sind zwei miteinander gekoppelte lineare Diff.-gleichungen mit konstanten Koeffizienten für die zwei Unbekannten  $i_1, i_2$ . Sie können auf **eine** Differentialgleichung 3. Ordnung (4.5-27) für eine Unbekannte  $i_2$  vereinigt werden, indem  $\ddot{i}_1$  aus (4.5-25) nach  $t$  differenziert wird und in (4.5-23), nachdem diese zweimal nach  $t$  differenziert wurde, eingesetzt wird.

$$\ddot{i}_1 = -(L_2 \ddot{i}_2 + R_2 \cdot \dot{i}_2 + i_2 / C) / L_{12} \Rightarrow \ddot{\ddot{i}} = -(L_2 \ddot{\ddot{i}}_2 + R_2 \cdot \ddot{\ddot{i}}_2 + \dot{i}_2 / C) / L_{12}, \quad (4.5-26)$$

$$(L_1 L_2 - L_{12}^2) \cdot \ddot{\ddot{i}}_2 + (R_2 L_1 + R_1 L_2) \cdot \ddot{\ddot{i}}_2 + \left( \frac{L_1}{C} + R_1 R_2 \right) \cdot \dot{\ddot{i}}_2 + \frac{R_1}{C} \cdot i_2 = L_{12} \cdot \frac{d^2 u}{dt^2}. \quad (4.5-27)$$

In gleicher Weise kann  $i_2$  eliminiert werden für eine Differentialgleichung 3. Ordnung mit der Unbekannten  $i_1$ , deren linke Seite in den Koeffizienten und Ableitungen identisch mit (4.5-27) ist, weil es dasselbe dynamische System ist. Nur die rechte Seite ist unterschiedlich, weil die stationären Lösungen für  $i_1, i_2$  in Abhängigkeit von  $u(t)$  natürlich unterschiedlich sind. In (4.5-27) tritt gemäß (4.5-28) die *Blondel'sche* Streuziffer  $\sigma$  (3.5-13) auf.

$$\sigma \cdot L_1 L_2 \cdot \ddot{\ddot{i}}_2 + (R_2 L_1 + R_1 L_2) \cdot \ddot{\ddot{i}}_2 + \left( \frac{L_1}{C} + R_1 R_2 \right) \cdot \dot{\ddot{i}}_2 + \frac{R_1}{C} \cdot i_2 = L_{12} \cdot \frac{d^2 u}{dt^2}. \quad (4.5-28)$$

Bei  $L_{12} = 0$  bzw.  $\sigma = 1$  (= keine Kopplung) ist die rechte Seite stets Null, so dass auch stets  $i_2 = 0$  ist. Bei  $L_{12} > 0$  bedeutet **eine** Differentialgleichung 3. Ordnung, dass drei Energiespeicher im System gekoppelt sind! Das ist zunächst verwunderlich, da man in Bild 4.5-6 vier Speicherelemente  $L_1, L_2, L_{12}, C$  zählt. Tatsächlich sind es aber wegen des induktiv gekoppelten Systems nur DREI Speicher, nämlich zwei induktive und ein kapazitiver Speicher, was mit einem geeigneten Übersetzungsverhältnis  $\ddot{u}$  sichtbar wird, wie Bild 4.5-7 zeigt. Aus Bild 4.5-7a folgt für die primäre und sekundäre Masche für beliebiges  $\ddot{u}$  zunächst

$$u_1 = L_1 \cdot \dot{i}_1 + L_{12} \cdot \dot{i}_2 = L_1 \cdot \dot{i}_1 + L_{12} \cdot \ddot{u} \cdot (i_2 / \ddot{u}), \quad (4.5-29)$$

$$u_2 = L_2 \cdot \dot{i}_2 + L_{12} \cdot \dot{i}_1 \Rightarrow u_2 \cdot \ddot{u} = \ddot{u}^2 \cdot L_2 \cdot (i_2 / \ddot{u}) + L_{12} \cdot \ddot{u} \cdot \dot{i}_1. \quad (4.5-30)$$

Mit dem „Magnetisierungsstrom“  $i_m := (i_2 / \ddot{u}) + i_1$  folgt aus (4.5-29)

$$u_1 = (L_1 - L_{12} \cdot \ddot{u}) \cdot \dot{i}_1 + L_{12} \cdot \ddot{u} \cdot (i_1 + (i_2 / \ddot{u})) = (L_1 - L_{12} \cdot \ddot{u}) \cdot \dot{i}_1 + L_{12} \cdot \ddot{u} \cdot i_m. \quad (4.5-31)$$

und mit der Wahl  $\ddot{u} = L_{12}/L_2$  wegen  $\ddot{u}^2 \cdot L_2 = L_{12} \cdot \ddot{u}$  aus (4.5-30)

$$u_2 \cdot \ddot{u} = (\ddot{u}^2 \cdot L_2) \cdot ((i_2 / \ddot{u}) + \dot{i}_1) = (\ddot{u} \cdot L_{12}) \cdot ((i_2 / \ddot{u}) + \dot{i}_1) = \ddot{u} \cdot L_{12} \cdot \dot{i}_m \quad (4.5-31)$$

Mit den Abkürzungen  $L'_{12} = L_{12} \cdot \ddot{u}$ ,  $u'_2 = u_2 \cdot \ddot{u}$ ,  $i'_2 = i_2 / \ddot{u}$  erhalten wir somit Bild 4.5-7b:

$$u_1 = (L_1 - L'_{12}) \cdot \dot{i}_1 + L'_{12} \cdot \dot{i}_m, \quad u'_2 = L'_{12} \cdot \dot{i}_m \quad (4.5-32)$$

Der einfach induktiv gekoppelte Kreis Bild 4.5-7a enthält daher gemäß Bild 4.5-7b nur **zwei unabhängige induktive Energiespeicher**  $L_1, L'_{12}$ , so dass die Schaltung Bild 4.5-6 nur drei Speicher  $L_1, L'_{12} = L_{12}^2 / L_2, C$ , passend zu (4.5-27, -28), enthält.

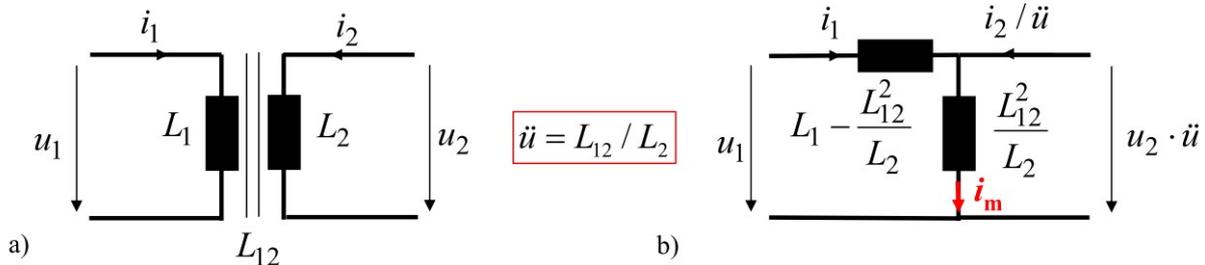


Bild 4.5-7: a) Induktive Kopplung in allgemeiner Darstellung, b) Ersatzschaltbild für  $\ddot{u} = L_{12}/L_2$

**Beispiel 4.5-7:** Induktive Kopplung  $M = L_{12}$  eines R-C-Glieds mit Speisung aus einer idealen Stromquelle (Innenwiderstand =  $\infty$ , Bild 4.5-8a): Es werden dadurch  $i_1(t)$  bzw.  $Q_1(t)$  vorgeschrieben. Daher ist die virtuelle Verschiebung  $\delta Q_1 = 0$ . Es ist daher nur  $i_2(t)$  eine unabhängige Variable ( $n = 1$  Freiheitsgrad)! Mit  $L_{12} = L_{21}$  folgen die Schritte a) ... d).

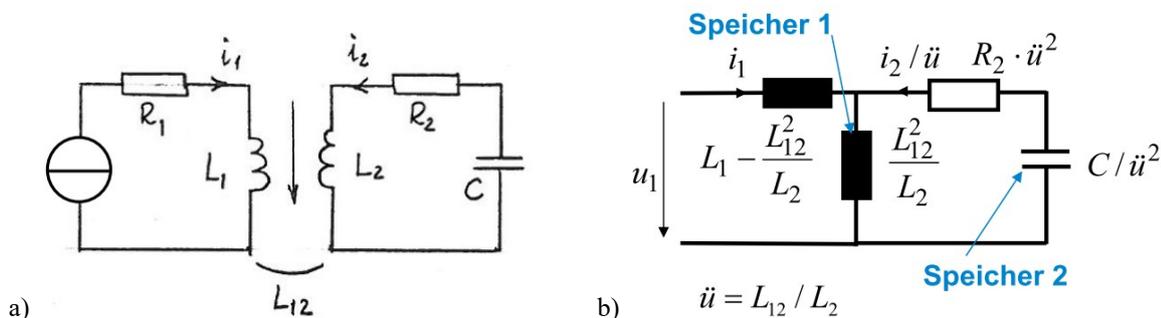


Bild 4.5-8: a) Induktive Kopplung  $M = L_{12}$  eines R-C-Glieds mit Speisung aus einer idealen Stromquelle, b) Induktive Kopplung mit dem Ersatzschaltbild für  $\ddot{u} = L_{12}/L_2$  bei eingprägtem Primärstrom  $i_1$ .

- a)  $n = 1 : q_1 = Q_2$ , denn  $\delta Q_1 = 0!$
- b)  $W_k^* = \frac{L_1}{2} \cdot i_1^2 + \frac{L_{12}}{2} \cdot i_1 i_2 + \frac{L_2}{2} \cdot i_2^2 + \frac{L_{21}}{2} \cdot i_2 i_1 = \frac{L_1}{2} \cdot i_1^2 + \frac{L_2}{2} \cdot i_2^2 + L_{12} \cdot i_1 i_2, \quad W_p = Q_2^2 / (2C).$
- c)  $R_1 \cdot i_1 \cdot \delta Q_1 = 0 \Rightarrow \delta A_d = F_1^{(d)} \cdot \delta q_1 = F_1^{(d)} \cdot \delta Q_2 = R_2 \cdot i_2 \cdot \delta Q_2 \Rightarrow F_1^{(d)} = R_2 \cdot i_2,$   
 $\delta A = u \cdot \delta Q_1 = 0 \cdot 0 = 0 \Rightarrow F_1 = 0!$
- d)  $i = 1 : \frac{\partial W_k^*}{\partial Q_2} = \frac{\partial W_k^*}{\partial i_2} = L_2 i_2 + L_{12} i_1, \quad \frac{\partial W_k^*}{\partial Q_2} = 0, \quad \frac{\partial W_p}{\partial Q_2} = Q_2 / C, \quad F_1^{(d)} = R_2 \cdot i_2, \quad F_1 = 0,$   
 $i = 1 : \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W_k^*}{\partial Q_2} \right) - \frac{\partial W_k^*}{\partial Q_2} + \frac{\partial W_p}{\partial Q_2} + F_1^{(d)} = F_1 = 0 \Rightarrow L_2 \dot{i}_2 + \frac{Q_2}{C} + R_2 \cdot i_2 = -L_{12} \dot{i}_1.$

Nach nochmaliger Differentiation  $d./dt$  erhalten wir eine Differentialgleichung 2. Ordnung für die Unbekannte  $i_2$ .

$$\frac{d.}{dt} \Rightarrow L_2 \cdot \ddot{i}_2 + R_2 \cdot \dot{i}_2 + \frac{i_2}{C} = -L_{12} \cdot \ddot{i}_1 \quad (4.5-33)$$

Eine Differentialgleichung 2. Ordnung zeigt an, dass nur zwei Energiespeicher für den Energieaustausch gekoppelt sind. Gemäß Bild 4.5-7 wird aber die induktive Kopplung doch durch zwei induktive Energiespeicher beschrieben. Hinzu kommt in Bild 4.5-8 die Kapazität  $C$ . Das wären drei Energiespeicher. Wieso ist (4.5-33) nur eine Diff.-gleichung 2. Ordnung? Weil der Strom  $i_1$  eingeprengt ist! Die primäre Induktivität wird vom eingeprengten Strom  $i_1$  bestromt und nimmt daher nicht am Energieaustausch zwischen den anderen beiden Speichern  $L'_{12} = L_{12}^2 / L_2$  und  $C$  z. B. beim Einschwingvorgang teil (siehe das Ersatzschaltbild Bild 4.5-8b!). Dies zeigt auch die Diff.-gleichung (4.5-33), denn in ihr kommt  $L_1$  gar nicht vor!

Alternativ wird mit der *Kirchhoff*'schen Maschengleichung (4.5-33) mit  $u_{L_{12}} = L_{12} \cdot di_1 / dt$ ,

$$u_{L_2} = L_2 \cdot di_2 / dt \rightarrow \ddot{u} \cdot u_{L_2} = \underbrace{\ddot{u}^2 \cdot L_2}_{L_2} \cdot \underbrace{d(i_2 / \ddot{u})}_{i_2} / dt = L_2' \cdot di_2' / dt, \quad (4.5-34)$$

$$u_{R_2} = R_2 \cdot i_2 \rightarrow \ddot{u} \cdot u_{R_2} = \underbrace{\ddot{u}^2 \cdot R_2}_{R_2} \cdot \underbrace{(i_2 / \ddot{u})}_{i_2} = R_2' \cdot i_2', \quad (4.5-35)$$

$$u_C = \int i_2 \cdot dt / C \rightarrow \ddot{u} \cdot u_C = \int \underbrace{(i_2 / \ddot{u})}_{i_2} \cdot dt \cdot \underbrace{\ddot{u}^2 / C}_{C'} = \int i_2' \cdot dt / C', \quad (4.5-36)$$

hergeleitet gemäß

$$u_{L_{12}} + u_{L_2} + u_{R_2} + u_C = 0 \Rightarrow L_2 \cdot \ddot{i}_2 + R_2 \cdot \dot{i}_2 + \frac{i_2}{C} = -L_{12} \cdot \ddot{i}_1 \quad \text{bzw.} \quad (4.5-37)$$

$$L_2 \cdot \ddot{i}_2' + R_2' \cdot \dot{i}_2' + \frac{i_2'}{C'} = -\underbrace{\ddot{u} \cdot L_{12}}_{L_{12}'} \cdot \ddot{i}_1 = -L_{12}' \cdot \ddot{i}_1. \quad (4.5-38)$$

**Zusammenfassung:**

Allgemeine UNABHÄNGIGE Systemkoordinaten  $q_i$  (Lagekoordinaten und el. Ladungen) bilden im elektromechanischen System mit  $n$  Freiheitsgraden einen  $n$ -dimensionalen Raum  $n \leq r$ . Über virtuelle Verschiebungen  $\delta q_i$  werden benachbarte Systemzustände energetisch betrachtet, indem die Systemkoordinaten „variiert“ werden. Die *Euler*'sche Variationsrechnung führt auf die *Euler*'schen Variationsgleichungen, wenn bei Änderung der Systemtrajektorie des Systems von Zustand A nach Zustand B eine bestimmte „Wirkung“  $S$  des Systems *extremal* ist. Für die Wandlergleichungen ist  $S$  das Zeitintegral der *Lagrange*-Funktion  $L$ , die bei der Beschreibung eines Wandler-systems mit konzentrierten Elementen die Differenz aus kinetischer Ergänzungsenergie und potentieller Energie des Systems ist:  $L(\dot{\vec{q}}, \vec{q}, t) = W_k^*(\dot{\vec{q}}, \vec{q}, t) - W_p(\vec{q}, t)$ . Mit dieser Funktion  $L$  heißen die  $n$  *Euler*'schen Variationsgleichungen *Lagrange*-Gleichungen. Bei rein mechanischen Systemen ist  $W_k^* = W_k$  die kinetische Energie des Systems und  $W_p$  seine potentielle Energie. Bei den hier behandelten niederfrequenten elektro-magnetischen Systemen (d. h. ohne elektromagnetische Wellenausbreitung) ist  $W_k^*$  die magnetische Ko-Energie und  $W_p$  die elektrostatische Energie. Dabei wurden über die Kraft-Spannungs-Zuordnung (Kap. 3) die elektromagnetischen Systemgrößen in den mechanischen Formalismus überführt.

Bei „komplizierten“ Systemen mit vielen Freiheitsgraden ( $n$  groß) verwendet man mit Vorteil anstelle der klassischen dynamischen Grundgesetze (mechanisch: *Newton*-Gleichungen mit dem Schwerpunktsatz, elektrisch: *Kirchhoff*-Knoten- und Maschenregel) diese *Lagrange*-Gleichungen für die Aufstellung der dynamischen Systemgleichungen.

Für die **numerische elektromagnetische Feldberechnung** mit finiten Elementen wird in ähnlicher Weise aus der Energiedichte die zu minimierende *Lagrange*-Funktion  $L$  gebildet, die als  $\int_V L \cdot dV$  integriert über das betrachtete Feldvolumen  $V$  einen Extremalwert (meist

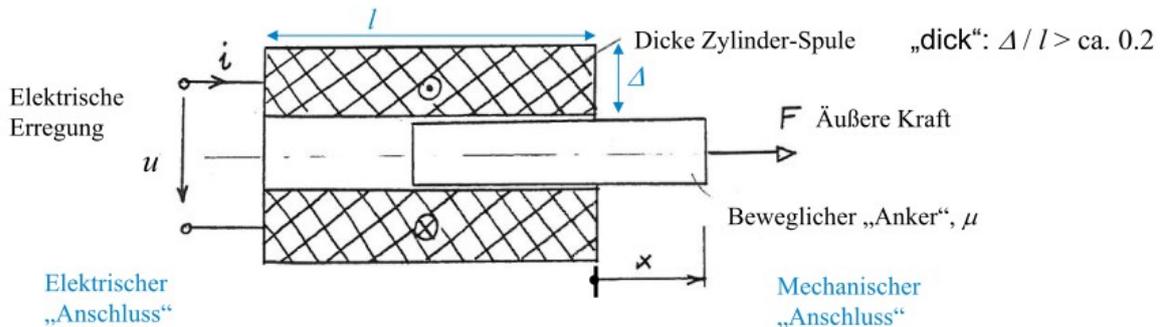
Minimalwert) annehmen muss. Bei **elektrostatischen Feldproblemen** mit  $\vec{D} = \vec{\epsilon} \cdot \vec{E}$ ,  $\vec{E} = -\text{grad}(\varphi)$  und der vorgegebenen el. Raumladungsdichte  $\rho(x, y, z)$  ist die Variable das elektrostatische Potential  $\varphi$ , wobei  $L(\varphi) = 0.5 \cdot \vec{D}(\varphi) \cdot \vec{E}(\varphi) - \rho \cdot \varphi$  ist. Bei magnetostatischen Feldern ist mit  $\vec{B} = \vec{\mu} \cdot \vec{H}$ ,  $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$  und der vorgegebenen el. Stromdichte  $\vec{J}$  die Variable das magnetische Vektorpotential  $\vec{A}$  und  $L(\vec{A}) = 0.5 \cdot \vec{H}(\vec{A}) \cdot \vec{B}(\vec{A}) - \vec{J} \cdot \vec{A}$ . Dabei sind gemäß Kap. 1  $w_e = 0.5 \cdot \vec{D} \cdot \vec{E}$  und  $w_m = 0.5 \cdot \vec{H} \cdot \vec{B}$  die elektrostatische und magnetostatische Energiedichte.

### 5. Elektromechanische Grundsysteme

Anhand eines **Grundsystems** soll die prinzipielle Wirkungsweise elektromechanischer Wandler übersichtlich dargestellt werden. Als elektromechanische Grundsysteme werden vereinfachte Anordnungen elektromechanischer Wandler verstanden, deren Wirkungsweise entweder auf magnetischen oder elektrischen Kräften beruht.

#### 5.1 Magnetisches Grundsystem: Beispiele zum stationären Verhalten

Das im Folgenden vorgestellte magnetische Grundsystem (Bild 5.1-1) besteht aus einer über den Strom  $i$  el. erregten Zylinderspule und einem axial über die Koordinate  $x$  beweglichen, magnetisierbaren Anker. Es ähnelt dem in Kap. 2.5 beschriebenen „Einführenden Beispiel“, nur dass zur weiteren Vereinfachung der Eisenrückschluss der Spule weggelassen wurde. Dafür kann die Zylinderspule durchaus auch „**dick**“ ausgeführt sein, so dass die Spulendicke  $\Delta$  größer als 20% der Spulenlänge  $l$  ist. Es schließen sich dann Feldlinien tw. innerhalb der Spule und bilden keine Kraft auf den Anker. Das System hat einen el. „Anschluss“ an der Spule und einen mechanischen „Anschluss“ am Anker, und ist somit ein Vierpol.



**Bild 5.1-1:** Schematische Anordnung zum magnetischen Grundsystem, bestehend aus über einer den Strom  $i$  el. erregten Zylinderspule und einem axial längs der Koordinate  $x$  beweglichen, magnetisierbaren Anker.

Wie in Kap. 2.5 hängt die Spulenflussverkettung  $\psi$  nicht nur vom Strom  $i$ , sondern bei magnetisierbarem Anker ( $\mu > \mu_0$ ) AUCH von der Anker-Lage  $x$  ab:  $\psi(i; x) = L(i; x) \cdot i$ . Beim amagnetischen Anker  $\mu = \mu_0$  wäre die Spuleninduktivität  $L = \text{konst.}$  und die Flussverkettung  $\psi(i) = L(i) \cdot i = L \cdot i$  linear vom Strom  $i$  abhängig. Es würde bei Gleichstromerregung  $i = I = \text{konst.}$  keine magnetische Kraft von der Spule auf den Anker ausgeübt. Bei zeitlich veränderlicher Stromerregung  $i(t)$  könnte bei  $\mu = \mu_0$ , aber el. leitfähigem Anker  $\kappa > 0$  auf Grund induzierter Ankerwirbelströme eine Kraft auf den Anker ausgeübt werden. Im Folgenden wird  $\kappa = 0$ ,  $\mu > \mu_0$  im Anker angenommen. Für die Berechnung der Magnetkraft auf den Anker wird gemäß Kap. 2 und 3 der magnetische Anteil der kinetischen Ergänzungsenergie (3.4-29) benötigt.

$$W_k^*(i, x) = W_{k0}^*(x) + \int_0^1 \psi(\theta \cdot i, x) \cdot i \cdot d\theta \tag{5.1-1a}$$

Im magnetischen Grundsystem sind keine magnetischen Werkstoffe mit Remanenz vorhanden:  $W_{k0}^*(x) = 0$ , sondern es wird nur der Sonderfall des linear magnetisierbaren Werkstoffs betrachtet. Daher ist die Permeabilität  $\mu = \text{konst.}$ , so dass z. B. keine Eisensättigung betrachtet wird. Daher hängt die Spuleninduktivität  $L$  nicht von  $i$  ab.

$$\psi(i; x) = L(x) \cdot i \Rightarrow W_k^*(i, x) = \int_0^1 L(x) \cdot i \cdot \theta \cdot i \cdot d\theta = L(x) \cdot i^2 / 2 \quad (5.1-1b)$$

Beispiel 5.1-1: Lineares ( $\mu = \text{konst.}$ ) magnetisches Grundsystem mit Stromspeisung (Bild 5.1-2a): Aus einer idealen Stromquelle (Innenwiderstand =  $\infty$ ) wird der Strom  $i(t)$  eingepreßt als „vorgeschriebene Koordinate“  $Q = \int i \cdot dt$  ( $\delta Q = 0, \delta i = 0$ ). Es ist keine „äußere“ Spannung  $u$  vorhanden, nur die in der Spule selbstinduzierte Spannung  $u_i = -d\psi/dt$ , wohl aber eine äußere Kraft  $F$  am Anker. Wegen des eingepreßten Stroms ist der Spannungsfall am Spulenwiderstand  $i \cdot R$  eingepreßt und daher nicht von Interesse. Wie groß ist die äußere Kraft  $F$ , um den Anker bei  $i \neq 0, x > 0$  im Gleichgewicht  $x = X = \text{konst.}$  zu halten?

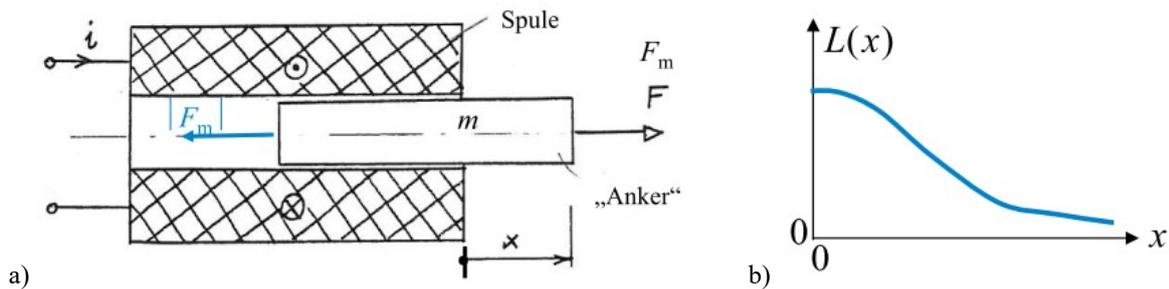


Bild 5.1-2: a) Magnetisches Grundsystem gemäß Bild 5.1-1 mit eingepreßtem Strom  $i$ , b) Qualitativer Verlauf der Spuleninduktivität  $L(x)$  bei axial längs  $x$  verschiebbarem magnetisierbaren Anker mit der Masse  $m$ .

Die dynamische Gleichung des magnetischen Grundsystems wird mit den *Lagrange*-Gleichungen, Kap. 4, beschrieben. Es tritt mit  $n = 1$  nur ein Freiheitsgrad  $x$  auf.

a)  $n = 1: q_1 = x \Rightarrow \delta Q = 0, \delta i = 0,$

b)  $W_k^* = \frac{m \cdot \dot{x}^2}{2} + \frac{L(x)}{2} \cdot i^2, \quad W_p = 0,$

c)  $\delta A_d = R \cdot i \cdot \delta Q = R \cdot i \cdot 0 = 0 \Rightarrow F^{(d)} = 0, \quad u = 0: u \cdot \delta Q = 0 \cdot 0 = 0, \quad \delta A = F \cdot \delta x \Rightarrow F_1 = F,$

d)  $\frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{x}} = m \cdot \dot{x}, \quad \frac{\partial W_k^*}{\partial x} = \frac{L'(x)}{2} \cdot i^2, \quad \frac{\partial W_p}{\partial x} = 0, \quad F_1^{(d)} = 0, \quad F_1 = F.$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial W_k^*}{\partial x} + \frac{\partial W_p}{\partial x} + F_1^{(d)} = F_1 \Rightarrow m \cdot \ddot{x} - \frac{L'(x)}{2} \cdot i^2 = F. \quad (5.1-2)$$

Im Gleichgewicht  $x = \text{konst.}$  ist  $\dot{x} = 0, \ddot{x} = 0$ . Aus (5.1-2) folgt

$$-\frac{L'(x)}{2} \cdot i^2 = F > 0, \text{ da } L'(x) < 0 \text{ (vgl. Bild 5.1-2b)}. \quad (5.1-3)$$

In Bild 5.1-2a versucht die Spule den Anker bei  $x > 0$  mit negativer (= gegen die pos.  $x$ -Richtung auftretender) Magnetkraft  $F_m$  nach links nach  $x = 0$  zu ziehen. Bei Kräftegleichgewicht  $F + F_m = 0$  ist mit (5.1-3)

$$F = -F_m = \frac{L'(x)}{2} \cdot i^2 = -dW_k^* / dx \quad \text{bzw.} \quad F_m = dW_k^* / dx \quad (5.1-4)$$

in Übereinstimmung mit (2.4.4-26), da  $W_k^*(i, x) = W_m^*(i, x)$  ist.

Beispiel 5.1-2: Lineares ( $\mu = \text{konst.}$ ) magnetisches Grundsystem mit Spannungsspeisung (Bild 5.1-3a) und einem über eine Feder (Federkonstante  $k$ ) mit dem Grundrahmen verbundenen Anker.

Aus einer idealen Spannungsquelle (Innenwiderstand = 0) wird die Spannung  $u(t)$  als verallgemeinerte Kraft  $F_1$  auf die Spule (Innenwiderstand  $R$ ) eingepreßt. Eine äußere mechanische Kraft  $F$  tritt nicht auf, dafür eine Federkraft  $F_F$ . Die Feder ist entspannt bei  $x = 0$ . Die verallgemeinerten Lagekoordinaten sind  $Q$  und  $x$  entsprechend  $n = 2$  Freiheitsgraden.

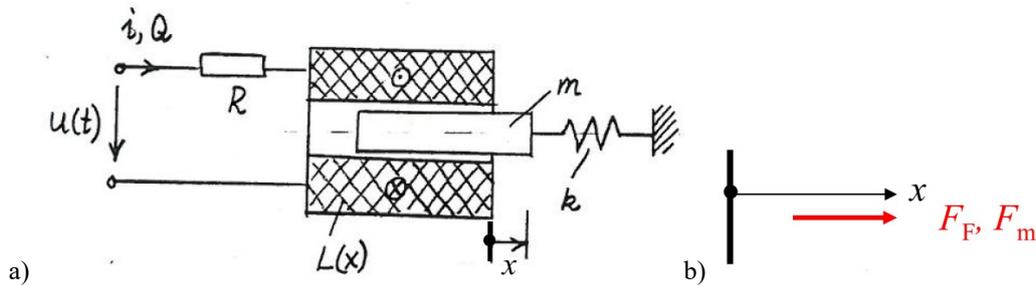


Bild 5.1-3: a) Magnetisches Grundsystem gemäß Bild 5.1-1 mit eingepreßter Spannung  $u$  und über eine Feder fixierten Anker, b) Positive Zählrichtung für Magnetkraft  $F_m$  und Federkraft  $F_F$ .

- a)  $n = 2 : q_1 = Q, q_2 = x,$
- b)  $W_k^* = \frac{m \cdot \dot{x}^2}{2} + \frac{L(x)}{2} \cdot i^2, \quad W_p = k \cdot x^2 / 2,$
- c)  $\delta A_d = R \cdot i \cdot \delta Q \Rightarrow F_1^{(d)} = R \cdot i, \quad \delta A = u \cdot \delta Q \Rightarrow F_1 = u,$
- d)  $i = 1 : \frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{Q}} = \frac{\partial W_k^*}{\partial i} = L(x) \cdot i, \quad \frac{\partial W_k^*}{\partial Q} = 0, \quad \frac{\partial W_p}{\partial Q} = 0, \quad F_1^{(d)} = R \cdot i, \quad F_1 = u,$   
 $i = 2 : \frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{x}} = m \cdot \dot{x}, \quad \frac{\partial W_k^*}{\partial x} = \frac{L'(x)}{2} \cdot i^2, \quad \frac{\partial W_p}{\partial x} = k \cdot x, \quad F_2^{(d)} = 0, \quad F_2 = 0.$

Die Lagrange-Gleichungen führen auf eine elektrische und eine mechanische Differentialgleichung (5.1-5), (5.1-6), die wegen der beiden Terme  $L(x) \cdot i$ ,  $L'(x) \cdot i$  nichtlinear sind, a) wegen der Produktbildung mit den beiden Variablen  $x$ ,  $i = dQ/dt$  und b) wegen der i. A. nichtlinearen Funktionen  $L(x)$ ,  $L'(x)$ .

$$i = 1 : \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{Q}} \right) - \frac{\partial W_k^*}{\partial Q} + \frac{\partial W_p}{\partial Q} + F_1^{(d)} = F_1 \Rightarrow \frac{d}{dt} (L(x) \cdot i) - 0 + 0 + R \cdot i = u \tag{5.1-5}$$

$$i = 2 : \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial W_k^*}{\partial x} + \frac{\partial W_p}{\partial x} + F_2^{(d)} = F_2 \Rightarrow m \cdot \ddot{x} - \frac{L'(x)}{2} \cdot i^2 + k \cdot x + 0 = 0 \tag{5.1-6}$$

Mit  $\vec{F}_m = (\partial W_k^* / \partial x) \cdot \vec{e}_x = (L'(x) \cdot i^2 / 2) \cdot \vec{e}_x$  ist (5.1-6) auch  $m \cdot \ddot{x} \cdot \vec{e}_x = \vec{F}_m + \vec{F}_F$ , wobei wegen der gedrückten Feder bei  $x > 0$  die Federkraft  $\vec{F}_F = -k \cdot x \cdot \vec{e}_x$  ist (Bild 5.1-3b). Dieses nichtlineare, gekoppelte Differentialgleichungssystem in  $x$  und  $i$  ergibt in  $x$  bzw.  $i$  nach Elimination der jeweils anderen Variablen EINE Differentialgleichung 3. Ordnung, denn es sind drei Energiespeicher im Austausch, nämlich  $L$  (magn. Energie),  $m$  (kinet. Energie),  $k$  (pot. Federspeicherenergie). Beim **Sonderfall**  $L = \text{konst.}$  (amagnetischer Anker) verschwindet gemäß (5.1-6) die Kopplung zwischen dem mechanischen und dem elektrischen System.

$$L \cdot \dot{i} + R \cdot i = u, \quad m \cdot \ddot{x} + k \cdot x = 0 \tag{5.1-6}$$

Das elektrische System wird nun durch eine Diff.-gleichung 1. Ordnung beschrieben, weil nur ein Energiespeicher (Induktivität!) wirkt, das mechanische System aber durch eine Diff.-gleichung 2. Ordnung, da zwei Energiespeicher (Masse und Feder) in Wechselwirkung sind. Die Gleichgewichts“lage“  $I, X$  (5.1-7) des nichtlinearen gekoppelten Systems wird aus (5.1-5, 5.1-6) mit  $d./dt = 0$  bei konstanter Spannung  $U = \text{konst.}$  erhalten:  $\vec{0} = \vec{F}_m + \vec{F}_F, \quad 0 = F_m + F_F$ .

$$R \cdot i = u = U \Rightarrow i = I = U / R, \quad \frac{L'(x)}{2} \cdot i^2 - k \cdot x = 0 \Rightarrow x = X = \frac{L'(x)}{2k} \cdot \left(\frac{u}{R}\right)^2 \quad (5.1-7)$$

Wird gemäß Kap. 2.5 (2.5-10) der Induktivitätsverlauf Bild 5.1-2b gemäß (5.1-8) beschrieben,

$$\frac{L(x)}{L(0)} \approx \frac{1}{1+(x/(2s_a))^2} \Rightarrow L'(x) = -L(0) \cdot \frac{2x/(2s_a)^2}{(1+(x/(2s_a))^2)^2}, \quad (5.1-8)$$

so ist die Anker-Gleichgewichtslage  $X$ , abhängig von der angelegten Gleichspannung  $U$ , bei

$$X = \frac{-L(0)}{2k} \cdot \frac{2X/(2s_a)^2}{(1+(X/(2s_a))^2)^2} \cdot \left(\frac{U}{R}\right)^2 \Rightarrow X/(2s_a) = \pm \sqrt{\pm \sqrt{\frac{-L(0)}{k} \cdot \frac{2s_a U}{R}} - 1}. \quad (5.1-9)$$

Wegen  $\sqrt{-L(0)} = j \cdot \sqrt{L(0)}$  existiert eine reelle Lösung der Gleichung nur für  $X = 0$ :

$$X = 0 = \frac{-L(0)}{2k} \cdot \frac{2 \cdot 0/(2s_a)^2}{(1+(0/(2s_a))^2)^2} \cdot \left(\frac{U}{R}\right)^2. \quad (5.1-10)$$

Bei der Gleichgewichtslage  $X = 0$  ist die Feder entspannt, daher die Federkraft Null:  $F_F = -k \cdot X = 0$ . Der Anker liegt mittig in der Spule, so dass wegen  $L'(0) = 0$  die Magnetkraft unabhängig von  $I$  Null ist. Damit ist die Gleichgewichtsbedingung  $0 = F_m + F_F$  erfüllt (Bild 5.1-4). Damit sich der Anker bei  $U \neq 0$  in eine Position  $X \neq 0$  bewegen kann, muss folglich die Feder bei  $x \neq 0$  entspannt sein!

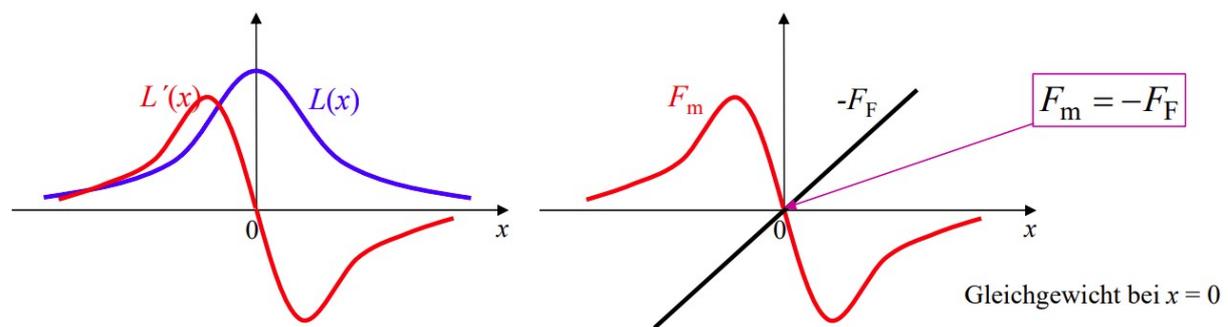


Bild 5.1-4: Ermittlung der Gleichgewichtslage gemäß (5.1-7) ... (5.1-9) für das System von Bild 5.1-3a, wenn die Feder bei  $x = 0$  entspannt ist.

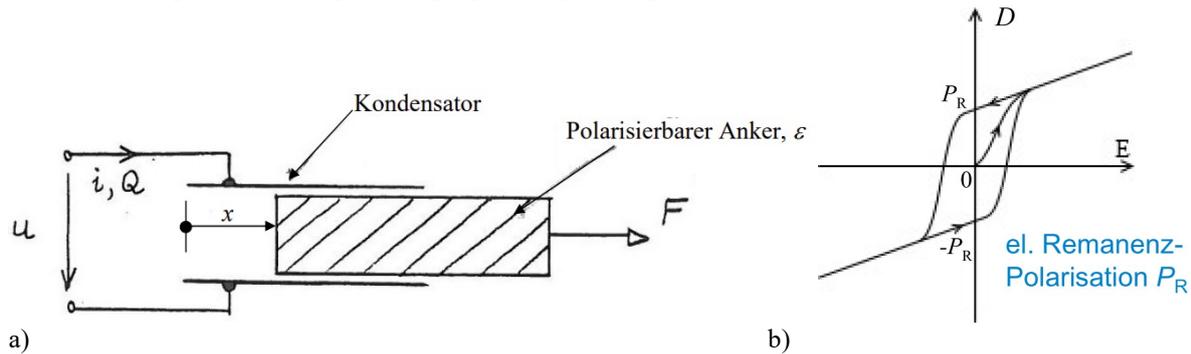
## 5. 2 Elektrisches Grundsystem: Beispiele zum stationären Verhalten

Zunächst stellen wir gemäß Kap. 3 fest, dass für die Analyse elektrostatischer Anordnungen weder die kinetische Ergänzungsenergie noch dissipative Kräfte  $F^{(d)}$  benötigt werden. Die elektrostatische Energie ist ja eine potentielle Energie  $W_p$  (siehe Kap. 2). Für (elektro-)statische Zustände  $d./dt = 0$  sind die verallgemeinerten Geschwindigkeiten Null, also sowohl die mechanischen Geschwindigkeiten  $v = dx/dt = 0$  als auch die Stromflüsse  $i = dQ/dt = 0$ , so dass kein Magnetfeld auftritt. Daher sind sowohl die mechanische als auch die magnetische kinetische Ergänzungsenergie  $W_k^* = 0$  und die Energie  $W_k = 0$  Null. Wegen  $v = 0$  treten keine wärmeerzeugenden Reibungskräfte auf. Haftreibung kann schon auftreten, erzeugt aber keine Reibungswärme. Analog treten wegen  $i = 0$  keine Stromwärmeverluste auf. Folglich sind die dissipativen verallgemeinerte Kräfte Null  $\Rightarrow F^{(d)} = 0$ . Die Lagrange-Gleichungen (4.3-12) vereinfachen sich gemäß (5.2-1) auf (5.2-2) in Übereinstimmung mit (3.2-11).

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial W_k^*}{\partial q_i} + \frac{\partial W_p}{\partial q_i} + F_i^{(d)} = F_i, \quad i = 1, \dots, n \Rightarrow \frac{\partial W_p}{\partial q_i} = F_i. \quad (5.2-1)$$

$$\vec{F}(\vec{q}) = (\partial W_p / \partial q_1, \partial W_p / \partial q_2, \dots, \partial W_p / \partial q_n) = \nabla W_p = \text{grad}(W_p). \quad (5.2-2)$$

Es genügt also völlig, aus der Ab-/Zunahme der potentiellen Energie positive/negative (verallgemeinerte) Kräfte zu berechnen. Somit ist das elektrische Grundsystem wesentlich ein **elektrostatisches** Grundsystem, das durch eine Kondensatoranordnung mit beweglichen Teilen des Kondensators gebildet wird, z. B. durch ein bewegliches Dielektrikum oder eine bewegliche Kondensatorplatte. Zum seitlich verschiebbaren magnetisierbaren Anker des magnetischen Grundsystems (Kap. 5.1) passt geometrisch das seitlich verschiebbare Dielektrikum. So wird das **elektrische Grundsystem** durch ein seitlich verschiebbares Dielektrikum, das einen „polarisierbaren Anker“ darstellt, gebildet, der sich zwischen zwei Kondensatorplatten bei Spannungsspeisung bewegt (Bild 5.2-1a).



**Bild 5.2-1:** a) Elektrisches Grundsystem als seitlich verschiebbares Dielektrikum, das einen „polarisierbaren Anker“ bildet, zwischen zwei Kondensatorplatten mit Spannungsspeisung. b)  $D(E)$ -Hystereseschleife eines Ferroelektrikums (Quelle: *Wikipedia.de*).

Die Kondensatorladung  $Q$  hängt von der Spannung  $u$  und bei polarisierbarem Anker  $\epsilon(u)$  AUCH von der Anker-Lage  $x$  ab  $Q(u; x) = C(u; x) \cdot u$ , da die Kapazität  $C$  von  $x$  abhängt. Bei unpolarisierbarem Anker ist  $\epsilon = \epsilon_0$  und daher die Ladung stellungsunabhängig proportional zur Spannung  $Q(u) = C \cdot u$ , da die Kapazität  $C$  konstant ist. Der verallgemeinerte Kraftvektor (5.2-2) ist bei  $\epsilon > \epsilon_0$  von den beiden Freiheitsgradkoordinaten  $Q$  und  $x$  abhängig ( $n = 2$ ).

$$\vec{F}(\vec{q}) = \vec{F}(Q, x) = (u, F) \quad (5.2-3)$$

Seine beiden Komponenten sind die von außen angelegte „äußere“ Spannung  $u$  am „el. Anschluss“ und die von außen wirkende Kraft  $F$  am „mech. Anschluss“. Die im System vorhandene potentielle Energie wird aus (5.2-3) gemäß (5.2-2) und (3.2-10) durch Integration von  $\vec{F}$  längs eines beliebigen Integrationswegs  $C$  zwischen zwei Punkten  $\vec{q}_A = \vec{0}$ ,  $\vec{q}_B = \vec{q}$  berechnet, da - wie in Kap. 3.2 erläutert - das Gradientenintegral wegunabhängig ist.

$$W_p = \int_C \nabla W_p \cdot d\vec{q}' = \int_C \sum_{i=1}^n (\partial W_p / \partial q'_i) \cdot dq'_i = \int_C \sum_{i=1}^n F_i \cdot dq'_i = \int_{\vec{0}}^{\vec{q}} \vec{F}(\vec{q}') \cdot d\vec{q}' \quad (5.2-4)$$

Wie in Kap. 3.2 wird der Integrationsweg für jede der  $n$  Koordinaten  $q_i$  zwischen den Anfangs- und Endwerten  $q_{A,i}$ ,  $q_{B,i}$  mit dem Skalierungsfaktor  $0 \leq \theta \leq 1$  beschrieben,

$$q'_i = (q_{B,i} - q_{A,i}) \cdot \theta + q_{A,i} \rightarrow q'_i = q_i \cdot \theta, \quad (5.2-5)$$

so dass aus (5.2-4) die Formel (5.2-6) wird. Nach dem Einsetzen von (5.2-3) in (5.2-6) erfolgt die Integration zunächst längs  $x$ , wobei  $Q = 0$  ist, und dann über  $Q$ , wobei  $x$  konstant bleibt („Hakenintegral“ (5.2-7)).

$$W_p(\vec{q}) = \int_{\vec{0}}^{\vec{q}} \vec{F}(\vec{q}') \cdot d\vec{q}' = \int_0^1 \vec{F}(\theta \cdot \vec{q}) \cdot \vec{q} \cdot d\theta \quad (5.2-6)$$

$$W_p(Q, x) = \int_0^1 F(0, \theta \cdot x) \cdot x \cdot d\theta + \int_0^1 u(\theta \cdot Q, x) \cdot Q \cdot d\theta \quad (5.2-7)$$

Da die elektrostatische Energie der einzige Energiespeicher in Bild 5.2-1a ist, stellt (5.2-7) den elektrischen Anteil der potentiellen Energie dar. Bei Werkstoffen mit Remanenz-Polarisierung wie die „**Elektrete**“ und Stoffe mit **Ferro-Elektrizität** (Kap. 2) tritt auch OHNE el. Spannung  $u$  und OHNE Ladung  $Q$  eine el. Kraft  $F = -F_e$  auf, so dass der erste Term in (5.2-7) größer als Null ist (5.2-8).

$$W_{p0}(x) = \int_0^1 F(0, \theta \cdot x) \cdot x \cdot d\theta > 0 \quad (5.2-8)$$

Bei den **Elektreten** ist eine „eingefrorene el. Ladung“ vorhanden. Das elektrisch isolierende Material enthält permanent gespeicherte elektrische Ladungen  $Q$  oder permanent ausgerichtete elektrische Dipole mit den Dipolmomenten  $p = Q \cdot l$ , wobei  $l$  der Abstand der positiven und negativen Dipolladung im Dipol ist. So erzeugen Elektrete ein permanentes elektrisches Feld, das durch die **el. Remanenz-Polarisation  $P_R$**  beschrieben wird. **Elektrete** werden organisch meist aus Polymeren hergestellt, z. B. Polytetrafluorethylen, Polytetrafluorethylenpropylen, Polypropylen, Polyethylenterephthalat, Polyvinylidenfluorid, anorganisch aus Siliziumdioxid (Quarz) und Siliziumnitrid. Bei der **Ferro-Elektrizität** (Bild 5.2-1b) tritt im Material wie im magnetischen Fall „spontane Polarisierung“ auf. Diese „spontane“ Polarisierung besteht aus Materialgebieten, wo die Moleküle in eine bestimmte Richtung einheitlich polarisiert sind („Weiss’sche Bezirke“). Die Summenwirkung aller Bezirks-Polarisationsausrichtungen ergibt die **el. Remanenz-Polarisation  $P_R$** . Im externen  $E$ -Feld werden diese Bezirke in Richtung des externen Felds ausgerichtet, so dass  $P$  zunimmt. Im  $E$ -Wechselfeld tritt beim Umpolarisieren der Bezirke auf Grund der Bezirkswandwanderungen und der finalen lokalen Drehprozesse der polarisierten Moleküle im hohen  $E$ -Feld innere Reibung auf. Diese Verlustwärme ist zum Flächeninhalt der dabei beschriebenen Hystereseschleife  $D(E)$  bzw.  $P(E)$  (Bild 5.2-1b) proportional („**Hystereseverluste**“). Materialien mit Ferroelektrizität sind die metallischen Titanate wie z. B.  $PbZr/TiO_3$  (Piezoelektrika),  $BaTiO_3$ ,  $PbTiO_3$ .

Bei Anordnungen OHNE Remanenz-Polarisation (= keine Elektrete oder Ferroelektrika) ist  $F = -F_e = 0$ , wenn die el. Ladung  $Q = 0$  ist, so dass gemäß (5.2-8)  $W_{p0}(x) = 0$  ist. Es verbleibt

für die potentielle Energie  $W_p(Q, x) = \int_0^1 u(\theta \cdot Q, x) \cdot Q \cdot d\theta$ . Beim **Sonderfall** des linear

polarisierbaren Dielektrikums ist die Permittivität  $\varepsilon = \text{konst.}$ , so dass  $\varepsilon$  nicht von  $u$  abhängt. Somit ist die Kapazität  $C$  nicht von  $u$  abhängig, sondern nur von  $x$ . Damit folgt (5.2-9)

$$Q(u; x) = C(x) \cdot u \Rightarrow u(Q, x) = \frac{Q}{C(x)}, \quad (5.2-9)$$

und daraus mit (5.2-7) die potentielle Energie

$$W_p(Q, x) = \int_0^1 u(\theta \cdot Q, x) \cdot Q \cdot d\theta = \int_0^1 \frac{\theta \cdot Q}{C(x)} \cdot Q \cdot d\theta = \frac{Q^2}{2C(x)}. \quad (5.2-10)$$

Beispiel 5.2-1: Seitlich längs  $x$  verschiebbares Dielektrikum mit der Masse  $m$  bei Spannungsspeisung (Bild 5.2-2): Die Berechnung der verallgemeinerten Kräfte  $u, F$  geht mit der Methode (5.2-2) ... (5.2-7) schnell.

$$\vec{F}(\vec{q}) = \vec{F}(Q, x) = (F_1, F_2) = (u, F) = \nabla W_p = \left( \frac{\partial W_p}{\partial Q}, \frac{\partial W_p}{\partial x} \right), \quad (5.2-11)$$

$$u = \frac{\partial W_p}{\partial Q}, \quad F = \frac{\partial W_p}{\partial x} = -F_e = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{2C(x)} \right) = -\frac{Q^2 \cdot C'(x)}{2C^2(x)} = -\frac{u^2 \cdot C'(x)}{2} \quad (5.2-12)$$

Dieses Ergebnis stimmt wegen  $W_e = W_p$  mit (2.4.3-22) überein. Die äußere Kraft  $F$  ist bei der Ankerposition  $x$  mit der elektrischen, nach innen wirkenden Kraft  $F_e$  im Gleichgewicht.

$$m \cdot \ddot{x} = F + F_e \Rightarrow \text{statisch: } d./dt = 0 \Rightarrow 0 = F + F_e \Rightarrow F = -F_e, \quad (5.2-12)$$

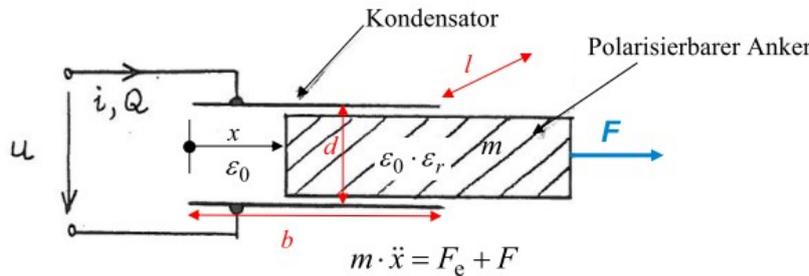


Bild 5.2-2: Seitlich verschiebbares Dielektrikum im Kondensator bei Spannungsspeisung.

Die alternative Vorgehensweise mit den Lagrange-Gleichungen (Kap. 4) dauert länger.

a)  $n = 2: q_1 = Q, q_2 = x,$

b)  $W_k^* = 0, \quad W_p(Q, x) = \frac{Q^2}{2C(x)},$

c)  $\delta A_d = 0 \Rightarrow F^{(d)} = 0, \quad \delta A = u \cdot \delta Q + F \cdot \delta x \Rightarrow F_1 = u, F_2 = F.$

d)  $i = 1: \frac{\partial W_k^*}{\partial Q} = 0, \quad \frac{\partial W_k^*}{\partial Q} = 0, \quad \frac{\partial W_p}{\partial Q} = \frac{Q}{C(x)}, \quad F_1 = u: \quad \frac{Q}{C(x)} = u, u = \frac{\partial W_p}{\partial Q}.$

$i = 2: \frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{x}} = 0, \quad \frac{\partial W_k^*}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial W_p}{\partial x} = -\frac{Q^2}{2C^2(x)} \cdot C'(x) = -\frac{u^2}{2} \cdot C'(x), \quad F_2 = F:$

$F = \frac{\partial W_p}{\partial x} = -\frac{u^2}{2} \cdot C'(x) = -F_e.$

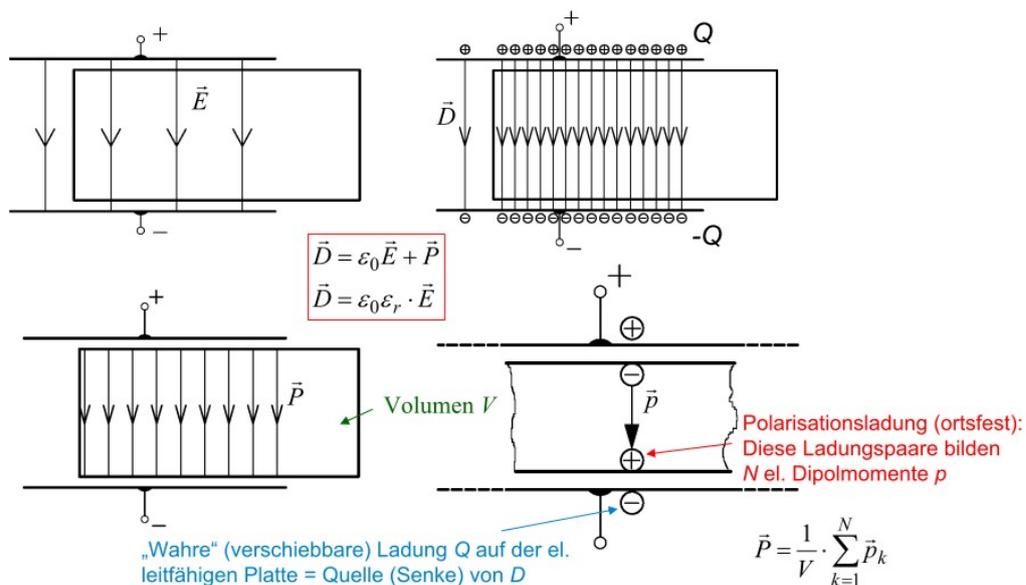
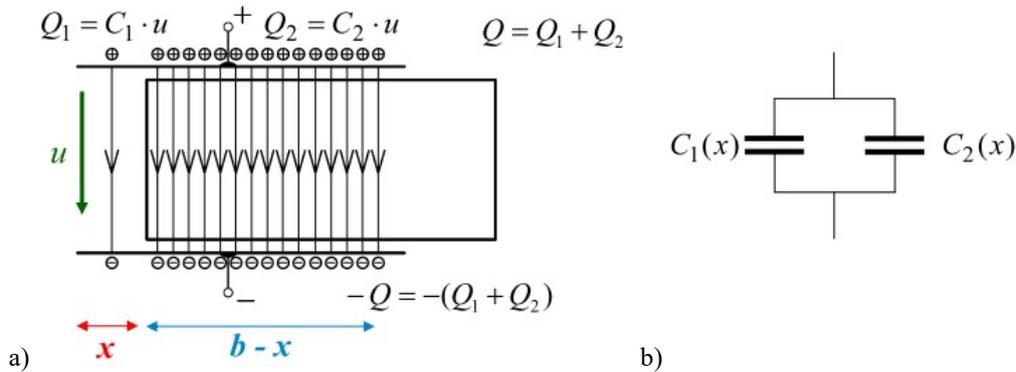


Bild 5.2-3: Elektrostatische Feldverläufe bei  $P_R = 0$  ohne Randfeldausbauchung bei nach rechts seitlich verschobenem Dielektrikum im Kondensator

Bild 5.2-3 zeigt das von der Spannung  $u$  erregte idealisiert homogene  $E$ -Feld, das zusätzliche  $P$ -Feld des polarisierten Dielektrikums auf Grund der  $N$  molekularen Dipolmomente  $p$  und das resultierende  $D$ -Feld, das durch die Ladungsverteilung  $Q$  auf den Kondensatorplatten festgelegt ist. Die Ladungsmenge  $Q$  auf den Platten ist gegenüber dem Dielektrikum als  $Q_2 > Q_1$  (5.2-15) größer. Randfeldausbauchungen wurden vernachlässigt, so dass homogene Felder in  $y$ -Vertikalrichtung auftreten, andernfalls ist eine 2D-Feldbeschreibung  $(x, y)$  nötig.



**Bild 5.2-4:** a) Auf Grund des idealisierten Feldbilds Bild 5.2-3 vereinfacht sich die Berechnung der Kapazität  $C(x)$  zwischen den beiden Kondensatorplatten von Bild 5.2-2 (axiale Plattenlänge  $l$ ) zur b) Summenbildung der beiden Teilkapazitäten  $C_1, C_2$ .

Auf Grund des idealisierten Feldbilds Bild 5.2-3 ist die Berechnung der Kapazität  $C(x)$  zwischen den beiden Kondensatorplatten von Bild 5.2-2 einfach (Bild 5.2-4). Bei nach rechts verschobenem Dielektrikum  $x > 0$  ist im linken Plattenteil, wo das Dielektrikum fehlt (Plattenfläche  $A_1 = x \cdot l$ , axiale Plattenlänge  $l$ , Plattenbreite  $b$ ) die Permittivität  $\epsilon = \epsilon_0$ . Die vierte Maxwell-Gleichung (Kap. 2) ergibt (5.2-13).

$$D_1 = \frac{Q_1}{A_1} = \frac{C_1 \cdot u}{A_1} = \frac{\epsilon_0 A_1}{d} \cdot \frac{u}{A_1} = \frac{\epsilon_0 \cdot u}{d}, \quad E_1 = \frac{D_1}{\epsilon_0} = \frac{u}{d} \tag{5.2-13}$$

Im rechten Plattenteil am Ort des Dielektrikums (Plattenfläche  $A_2 = (b-x) \cdot l$ ) ist die Permittivität  $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ . Die vierte Maxwell-Gleichung (Kap. 2) ergibt (5.2-14).

$$D_2 = \frac{Q_2}{A_2} = \frac{C_2 \cdot u}{A_2} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r A_2}{d} \cdot \frac{u}{A_2} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r \cdot u}{d} = \epsilon_r \cdot D_1, \quad E_2 = \frac{D_2}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{u}{d} = E_1, \tag{5.2-14}$$

$$Q_2 = C_2 \cdot u = \frac{C_2}{C_1} \cdot C_1 \cdot u = \frac{C_2}{C_1} \cdot Q_1 = \frac{\epsilon_r \cdot (b-x)}{x} \cdot Q_1, \tag{5.2-15}$$

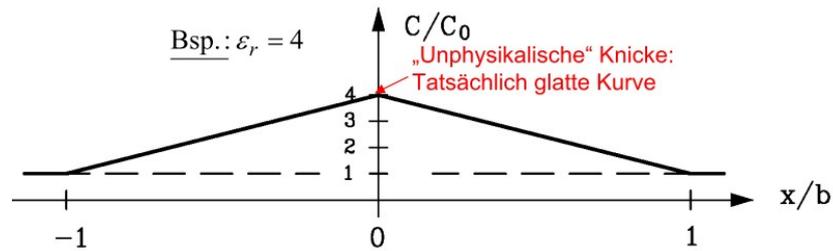
$$0 \leq x \leq b : C_1(x) = \epsilon_0 \cdot \frac{x \cdot l}{d}, \quad C_2(x) = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \frac{(b-x) \cdot l}{d}, \tag{5.2-16}$$

$$C(x) = C_1(x) + C_2(x) = \epsilon_0 \cdot \frac{b \cdot l}{d} \cdot \left( \frac{x}{b} + \epsilon_r \cdot \left( 1 - \frac{x}{b} \right) \right) = C_0 \cdot \left( (1 - \epsilon_r) \cdot \frac{x}{b} + \epsilon_r \right), \quad C_0 = \epsilon_0 \cdot \frac{b \cdot l}{d} \tag{5.2-17}$$

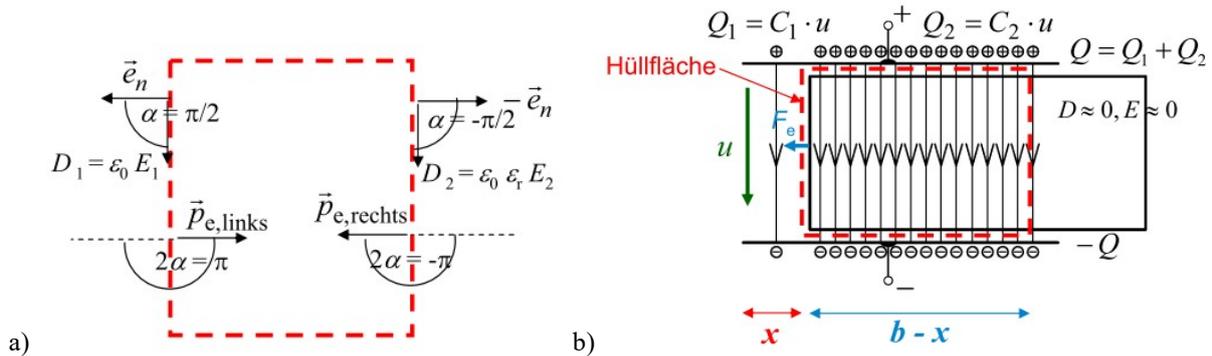
Für den gesamten Verschiebungsbereich von  $x$  erhalten wir (5.2-18).

$$-b \leq x \leq b : C(x) = C_0 \cdot \left( (1 - \epsilon_r) \cdot \frac{|x|}{b} + \epsilon_r \right), \quad |x| \geq b : C(x) = C_0 \text{ (Bild 5.2-5)} \tag{5.2-18}$$

Mit (5.2-12) wird über (5.2-18) die gegen  $F_e$  wirkende Haltekraft  $F$  bestimmt. Für  $0 < x \leq b$  ist  $C'(x) = (1 - \epsilon_r) \cdot C_0 / b \leq 0$  und daher die Haltekraft positiv  $F = u^2 \cdot (\epsilon_r - 1) \cdot C_0 / (2b) > 0$ . Sie zieht nach rechts gegen  $F_e$ , ist UNabhängig vom Vorzeichen von  $u$  und unabhängig von  $x$  konstant, so dass ein in  $x$  linearer Wandler entsteht, ähnlich wie Wandler „Typ 4“ in Kap. 7.4.



**Bild 5.2-5:** Verlauf der mit ideal homogen angenommenem Feld berechneten Kondensatorkapazität  $C(x)/C_0$  gemäß (5.2-17) in Abhängigkeit der Verschiebung  $x$  des Dielektrikums für  $\epsilon_r = 4$ .



**Bild 5.2-6:** a) Geschlossenes Kontrollvolumen, auf das die resultierende elektrostatische Kraft  $F_e$  über die *Maxwell*-Spannungen  $p_e$  berechnet wird. b) Anwendung von a) auf den Feldverlauf im Kondensator von Bild 5.2-2.

Alternativ zu (5.2-12) wird die elektrostatische Kraft  $F_e$  aus dem Feldbild über die *Maxwell*'schen Spannungen (Kap. 2) berechnet. Es wird ein Kontrollvolumen um den polarisierbaren Anker gebildet (Bild 5.2-6b), über dessen Hüllfläche die *Maxwell*-Spannungen integriert werden. Oben und unten treten wegen des normal auf die Hüllfläche wirkenden Felds ( $\alpha = 0$ ) nur senkrecht nach außen wirkende Zugspannungen auf ( $2\alpha = 0$ ), die sich aus Symmetriegründen aufheben. Auf die linke und rechte Seitenfläche (Bild 5.2-6a) wirken wegen des tangential verlaufenden Felds ( $\alpha = \pm\pi/2$ ) die *Maxwell*-Spannungen (5.2-19) normal zur Hüllfläche nach innen ( $2\alpha = \pm\pi$ ).

$$\vec{p}_{e,\text{links}} = -\frac{D_1 E_1}{2} \cdot \vec{e}_n, \quad \vec{p}_{e,\text{rechts}} = \frac{D_2 E_2}{2} \cdot \vec{e}_n \tag{5.2-19}$$

Die Integration über die Hüllfläche ergibt wegen des homogenen Felds (= konstante Spannungen je Seitenfläche)  $\vec{F}_e = A \cdot (\vec{p}_{e,\text{links}} + \vec{p}_{e,\text{rechts}})$  mit  $A = d \cdot l$  bzw. mit (5.2-13), (5.2-14) in Übereinstimmung mit dem o. g. Ausdruck die nach links ziehende Kraft für  $x > 0$

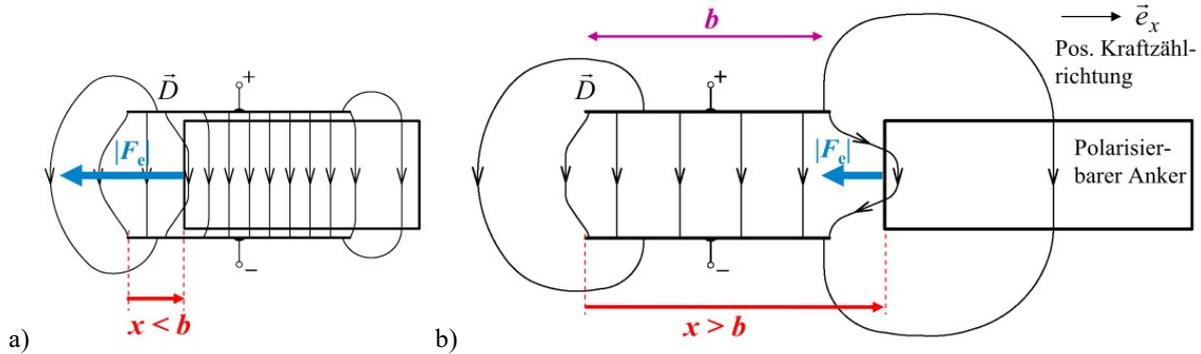
$$\vec{F}_e = d \cdot l \cdot \left( \frac{D_2 E_2}{2} - \frac{D_1 E_1}{2} \right) \cdot \vec{e}_n = \frac{l \cdot \epsilon_0 \cdot u^2}{2d} \cdot (\epsilon_r - 1) \cdot \vec{e}_n = \frac{C_0 \cdot u^2}{2b} \cdot (\epsilon_r - 1) \cdot \vec{e}_n \tag{5.2-20}$$

Bei symmetrischer Lage des polarisierbaren Ankers  $x = 0$  verschwindet aber rechnerisch die Haltkraft  $F$  gegen die el. Zugkraft  $F_e$  nicht, wie es aus Symmetriegründen der Fall sein sollte, sondern hat links (0-) und rechts (0+) von  $x = 0$  gegengleich große, konstante Werte (5.2-21).

$$F(x = 0+) = \frac{u^2}{2} \cdot (\epsilon_r - 1) \cdot \frac{C_0}{b} > 0, \quad F(x = 0-) = -\frac{u^2}{2} \cdot (\epsilon_r - 1) \cdot \frac{C_0}{b} < 0 \tag{5.2-21}$$

Wie beim einführenden Beispiel Kap. 2.5 ist die Ursache die vereinfachte Feldberechnung. Eine genauere 2D-Berechnung des el. Felds mit Berücksichtigung der Randstrefelder ist nötig (Bild 5.2-7), um  $C(x)$  annähernd korrekt zu bestimmen, so dass bei  $x = 0$  die Haltkraft  $F$  verschwindet. Dann ist die  $C(x)$ -Kurve in Bild 5.2-5 „glatt“, also ohne Knicke, und hat eine horizontale Tangente bei  $x = 0$  (Bild 5.2-8), so dass  $C'(0) = 0$  und damit  $F(0) = 0$  ist!

$$F(x=0) = -\frac{u^2}{2} \cdot C'(x=0) = -\frac{u^2}{2} \cdot 0 = 0 \tag{5.2-22}$$

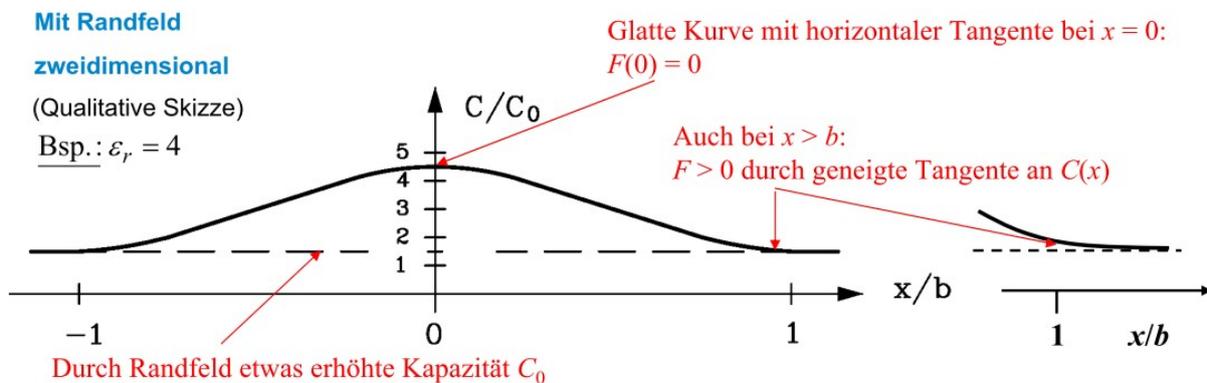


**Bild 5.2-7:** Qualitatives, zweidimensionales  $D$ -Feld, das aus den ideal el. leitfähigen Elektroden senkrecht austritt und links und rechts vom Kondensator als Randfeld ausbaucht. a) Das Dielektrikum ist nach rechts verschoben, aber noch tw. innerhalb der Kondensatorplatten. b) Das Dielektrikum befindet sich rechts außerhalb der Kondensatorplatten.

In Bild 5.2-7 ist das 2D-Feld des Vektors  $\vec{D}$  qualitativ abgeschätzt, wobei es wegen des elektrostatischen Falls senkrecht auf die ideal leitfähig angenommenen Kondensatorplatten stehen muss. Durch das Randstreufeld ist auch bei fehlendem Dielektrikum die Kondensatorkapazität größer als  $C_0$  (5.2-17), wo diese Randstreufelder vernachlässigt sind. Durch diese 2D-Betrachtung entsteht ein zusätzlicher sichtbar nach links gerichteter *Maxwell'scher* Zug als Gegenkraft zur Haltekraft  $F$ . Auch bei  $x > b$ , wenn der Anker außerhalb der Kondensatorplatten liegt (Bild 5.2-7b), entsteht auf Grund des Randstreufelds noch eine kleine nach links gerichtete el. Kraft  $F_e < 0$ , die mit zunehmendem Abstand  $x$  des Ankers vom Kondensator asymptotisch auf Null abnimmt, ähnlich wie  $F_m$  in Beispiel von Kap. 2.5.

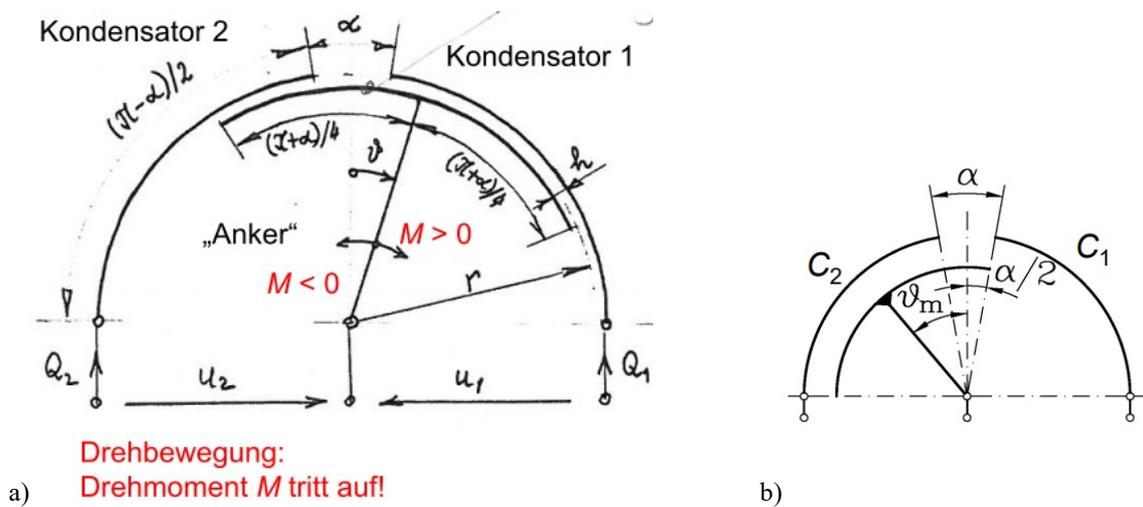
$$F(x > b) = -\frac{u^2}{2} \cdot C'(x > b) > 0, \quad F(x < -b) = -\frac{u^2}{2} \cdot C'(x < -b) < 0. \tag{5.2-23}$$

In Kap. 2.5 wurden diese 2D-Betrachtung numerisch mit FEM abgesichert. Hier begnügten wir uns mit einer Abschätzung, die allerdings die physikalischen Randbedingungen korrekt berücksichtigt, um zu qualitativ richtigen Aussagen zu kommen. Für eine quantitative Bestimmung von  $F_e(x)$  ist eine numerische Feldberechnung nötig.



**Bild 5.2-8:** Vergleich zu Bild 5.2-5: Verlauf der mit einem 2D-Randstreufeld abgeschätzten Kondensatorkapazität  $C(x)/C_0$  in Abhängigkeit der Verschiebung  $x$  des Dielektrikums für  $\epsilon_r = 4$ . Durch das Randstreufeld ist auch bei fehlendem Dielektrikum die Kondensatorkapazität größer als  $C_0$  (5.2-17), wo diese Randstreufelder vernachlässigt sind.

**Beispiel 5.2-2:** Zwei Drehkondensatoren 1 und 2 mit linear polarisierbarem Dielektrikum (Bild 5.2-9a) als zwei „Luft“-Kondensatoren ( $\epsilon = \epsilon_0$ ) mit der axialen Länge  $l$  sind elektrisch gekoppelt. Abhängig von der Drehwinkelstellung  $\Delta\gamma = \vartheta$  des drehbaren Ankers verändern sich gleichzeitig die Kapazitätswerte der beiden Kondensatoren 1 und 2. Es wird eine vereinfachte  $E$ -Feldberechnung mit radialem  $E$ -Feld ohne seitliche Streufeld-Ausbauchungen betrachtet. Die Spaltweite  $h$  ist deutlich kleiner als der mittlere Radius  $r$ . Daher ist das senkrecht aus den el. leitfähigen Elektroden austretende radiale  $E$ -Feld annähernd homogen. Es variiert längs der radialen Spaltweite  $h$  nicht! Gesucht ist das nötige Haltemoment  $M(u_1, u_2, \vartheta)$  in Abhängigkeit der beiden elektrischen Gleichspannungen  $u_1, u_2$  und der Drehwinkelstellung  $\Delta\gamma = \vartheta$ . Durch die beiden Spannungen werden die beiden Ladungsmengen  $Q_1, Q_2$  über die von  $\vartheta$  abhängigen Kapazitäten  $C_1, C_2$  eingestellt, sodass  $n = 3$  Freiheitsgrade  $Q_1, Q_2, \vartheta$  auftreten. Die Gleichspannungen  $u_1, u_2$  und das gegen die el. Tangentialkraft wirkende Haltemoment  $M$  sind die drei verallgemeinerten Kräfte.



**Bild 5.2-9:** a) Zwei elektrisch gekoppelte Luft-Drehkondensatoren 1 und 2 in Abhängigkeit der beiden elektrischen Gleichspannungen  $u_1, u_2$  und der Drehwinkelstellung  $\Delta\gamma = \vartheta$ . b) Elektroden-Winkelüberdeckung bei einer nach links geschwenkten Ankerstellung mit maximalem Verdrehwinkel  $\vartheta = \vartheta_m < 0$ .

- a)  $n = 3 : q_1 = Q_1, q_2 = Q_2, q_3 = \vartheta$
  - b)  $W_k^* = 0, \quad W_p(Q_1, Q_2, \vartheta) = \frac{Q_1^2}{2C_1(\vartheta)} + \frac{Q_2^2}{2C_2(\vartheta)}$
  - c)  $\delta A_d = 0 \Rightarrow F^{(d)} = 0, \quad \delta A = u_1 \cdot \delta Q_1 + u_2 \cdot \delta Q_2 + M \cdot \delta \vartheta \Rightarrow F_1 = u_1, F_2 = u_2, F_3 = M,$
  - d)  $\vec{F}(\vec{q}) = \vec{F}(Q_1, Q_2, \vartheta) = (u_1, u_2, M) = \left( \frac{\partial W_p}{\partial Q_1}, \frac{\partial W_p}{\partial Q_2}, \frac{\partial W_p}{\partial \vartheta} \right).$
- $$u_1 = \frac{\partial W_p}{\partial Q_1} = \frac{Q_1}{C_1(\vartheta)}, \quad u_2 = \frac{\partial W_p}{\partial Q_2} = \frac{Q_2}{C_2(\vartheta)}, \tag{5.2-24}$$
- $$M = \frac{\partial W_p}{\partial \vartheta} = -\frac{Q_1^2}{2C_1^2(\vartheta)} \cdot C_1'(\vartheta) - \frac{Q_2^2}{2C_2^2(\vartheta)} \cdot C_2'(\vartheta) = -\frac{u_1^2}{2} \cdot C_1'(\vartheta) - \frac{u_2^2}{2} \cdot C_2'(\vartheta) \tag{5.2-25}$$
- Die Kapazitätsberechnung geht zunächst von der Elektroden-Winkelüberdeckung  $\vartheta_m$  (5.2-26) bei der Mittelstellung des Ankers  $\vartheta = 0$  aus, so dass links und rechts symmetrische Verhältnisse ( $C_1 = C_2$ ) auftreten.
- $$\vartheta = 0 : \quad \frac{\pi + \alpha}{4} - \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi - \alpha}{4} := \vartheta_m \tag{5.2-26}$$

In Bild 5.2-9b ist der maximale Drehwinkel  $\vartheta_{\max}$  (5.2-27) dargestellt, der den Wert  $\vartheta_m$  annimmt, so dass sich der Drehwinkelbereichs  $-\vartheta_{\max} = -\vartheta_m \leq \vartheta \leq \vartheta_{\max} = \vartheta_m$  ergibt.

$$\vartheta_{\max} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi - \alpha}{4} = \frac{\pi - \alpha}{4} = \vartheta_m \quad (5.2-27)$$

Die Elektroden-Überdeckung für  $C_1$  und  $C_2$  in Abhängigkeit des Drehwinkelbereichs ist

für  $C_1$ :  $\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4} + \vartheta = \frac{\pi - \alpha}{4} + \vartheta = \vartheta_m + \vartheta$ , für  $C_2$ :  $\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4} - \vartheta = \frac{\pi - \alpha}{4} - \vartheta = \vartheta_m - \vartheta$ . (5.2-28)

Mit der Hilfsgröße  $C_0 := \epsilon_0 \cdot r \cdot l / h$  werden die Ladungsmengen bei  $-\vartheta_m \leq \vartheta \leq \vartheta_m$  gemäß

$$Q_1 = C_1 \cdot u_1 = \epsilon_0 \cdot \frac{(\vartheta_m + \vartheta) \cdot r \cdot l}{h} \cdot u_1 = C_0 \cdot (\vartheta_m + \vartheta) \cdot u_1, \quad (5.2-28)$$

$$Q_2 = C_2 \cdot u_2 = \epsilon_0 \cdot \frac{(\vartheta_m - \vartheta) \cdot r \cdot l}{h} \cdot u_2 = C_0 \cdot (\vartheta_m - \vartheta) \cdot u_2, \quad (5.2-29)$$

erhalten, woraus die lineare Abhängigkeit der beiden Kapazitäten von  $\vartheta$  (5.2-30) folgt.

$$C_1(\vartheta) = C_0 \cdot (\vartheta_m + \vartheta), \quad C_2(\vartheta) = C_0 \cdot (\vartheta_m - \vartheta) \quad \text{siehe Bild 5.2-10!} \quad (5.2-30)$$

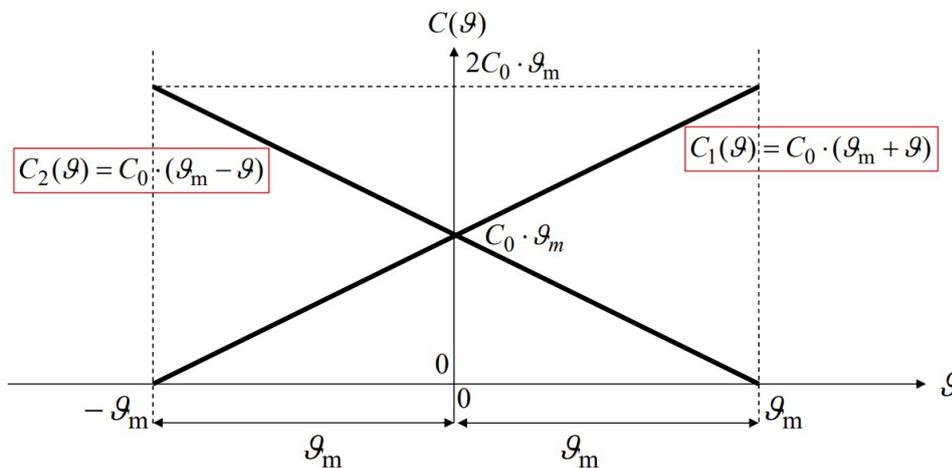


Bild 5.2-10: Lineare Abhängigkeit der beiden Kapazitäten  $C_1, C_2$  von  $\vartheta$  gemäß (5.2-30).

Mit  $C'_1(\vartheta) = C_0 \cdot (\vartheta_m + \vartheta)' = C_0$ ,  $C'_2(\vartheta) = C_0 \cdot (\vartheta_m - \vartheta)' = -C_0$  ist das Haltemoment

$$M = -\frac{u_1^2}{2} \cdot C'_1(\vartheta) - \frac{u_2^2}{2} \cdot C'_2(\vartheta) = \frac{C_0}{2} \cdot (u_2^2 - u_1^2) \quad (5.2-31)$$

eine vom Drehwinkel unabhängige, nur von der Spannungsdifferenz abhängige Größe. Wenn  $u_1 > u_2$  ist, wird über  $M_e = -M$  der Anker nach rechts gezogen, so dass das Haltemoment  $M$  nach links wirken muss und in Übereinstimmung mit (5.2-31) negativ ist. Um die Drehwinkel-Unabhängigkeit zu verstehen, wird  $M_e$  alternativ über die *Maxwell*-Spannungen im Zylinderkoordinatensystem  $\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_z$  berechnet. Das Radialfeld wird wegen  $h \ll r$  (s. o.) homogen angenommen  $D_r = \epsilon_0 \cdot E_r = \epsilon_0 \cdot u / h$ . Zur Berechnung des elektrostatischen Drehmoments  $M_e$  auf den beweglichen Anker wird eine Hüllfläche um ihn gelegt (Bild 5.2-11a). Je nach Größe von  $u_1, u_2$  ist  $D_{1r}$  größer, kleiner oder gleich  $D_{2r}$  (Bild 5.2-11b):  $D_{1r} = \epsilon_0 \cdot E_{1r} = \epsilon_0 \cdot u_1 / h$ ,  $D_{2r} = \epsilon_0 \cdot E_{2r} = \epsilon_0 \cdot u_2 / h$ . Diese Felder verlaufen tangential an der linken und rechten Hüllflächenberandung (Winkel zur Berandungsnormalen ist  $\alpha = \pm \pi / 2$ ), so dass die *Maxwell*-Spannungen  $\vec{p}_{e,1}, \vec{p}_{e,2}$  gemäß (5.2-32) senkrecht nach innen auf diesen Berandungen auftreten (Winkel zur Berandungsnormalen ist  $\alpha = \pm \pi$ ).

$$\vec{p}_{e,1} = \frac{D_{1r}E_{1r}}{2} \cdot \vec{e}_{n1} = -\frac{D_{1r}E_{1r}}{2} \cdot \vec{e}_g, \quad \vec{p}_{e,2} = \frac{D_{2r}E_{2r}}{2} \cdot \vec{e}_{n2} = \frac{D_{2r}E_{2r}}{2} \cdot \vec{e}_g \quad (5.2-32)$$

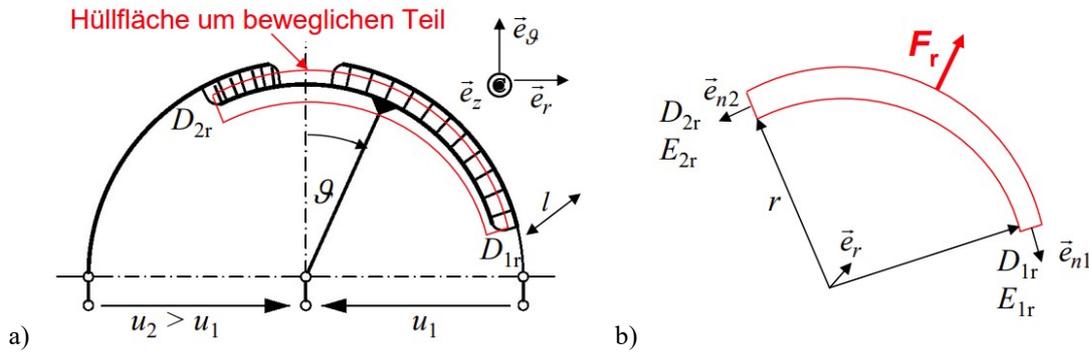


Bild 5.2-11: a) Zur Berechnung des elektrostatischen Drehmoments  $M_e$  auf den beweglichen Anker wird eine Hüllfläche um ihn gelegt. b) Die unterschiedlichen Normalspannungen an der linken und rechten Begrenzung der Hüllfläche bewirken  $M_e$ , während die Zugkräfte auf der oberen und unteren Berandung eine resultierende Radialkraft  $F_r$  auf den beweglichen Anker ergeben, der zu den feststehenden Elektroden hingezogen wird.

Mit den Seitenflächen  $A = h \cdot l$  werden aus (5.2-32) die elektrostatischen Umfangskräfte  $\vec{F}_{e,1}$ ,  $\vec{F}_{e,2}$  erhalten. Mit dem Hebelarm  $r$  wird das elektrostatische Drehmoment  $M_e$  (5.2-33) berechnet.

$$\vec{M}_e = r \cdot \vec{e}_r \times (\vec{F}_{e,2} + \vec{F}_{e,1}) = A \cdot r \cdot \vec{e}_r \times (\vec{p}_{e,2} + \vec{p}_{e,1}) = \vec{e}_z \cdot h \cdot l \cdot r \cdot \left( \frac{D_{2r}E_{2r}}{2} - \frac{D_{1r}E_{1r}}{2} \right) \quad (5.2-33)$$

Einsetzen der Felder  $D_{1r}$ ,  $E_{1r}$ ,  $D_{2r}$ ,  $E_{2r}$  führt auf (5.2-34), für  $M$  identisch mit (5.2-31), positiv gezählt im Uhrzeigersinn!

$$\vec{M}_e = \vec{e}_z \cdot \frac{h \cdot l \cdot r \cdot \varepsilon_0}{2} \cdot \left( \frac{u_2^2}{h^2} - \frac{u_1^2}{h^2} \right) = M \cdot (-\vec{e}_z) \Rightarrow M = \frac{C_0}{2} \cdot (u_2^2 - u_1^2) \quad (5.2-34)$$

Da die Felder  $D_{1r}$ ,  $E_{1r}$ ,  $D_{2r}$ ,  $E_{2r}$  nur von  $u_1$ ,  $u_2$ , nicht aber von  $\vartheta$  abhängen, ist das Haltemoment unabhängig von  $\vartheta$ . Die radiale Maxwell-Zugkraft  $F_r$  zieht den Anker zu den feststehenden Elektroden. Diese Kraft wird vom Drehlager aufgenommen! In der Rechnung wurden die Randfeldausbauchungen vernachlässigt, die auch Tangentialfeldkomponenten  $D_{1\vartheta}$ ,  $D_{2\vartheta}$  enthalten. Bei  $u_2 = u_1$  ist UNABHÄNGIG von der Ankerstellung  $\vartheta$  das Haltemoment auch bei Berücksichtigung der Randfelder Null:  $M = 0$ , denn dann sind die Radialfelder  $D_{1r}$ ,  $D_{2r}$  und Tangentialfelder  $D_{1\vartheta}$ ,  $D_{2\vartheta}$  an den beiden Berandungen links und rechts aus Symmetriegründen identisch! Daher heben sich die tangentialen Maxwell-Züge nach links und rechts auf den Anker auf  $\Rightarrow M = 0$ .

Wenn  $u_2 > u_1$ , dann ist z. B. bei Mittenstellung  $\vartheta = 0$  und daher  $C_1 = C_2$  gemäß (5.2-28, -29)  $Q_2 > Q_1$ . Der Anker wird mit  $M_e$  wegen des tangentialen Maxwell-Zugs nach links gezogen, so dass das Haltemoment  $M$  nach rechts wirken muss:  $M > 0$ ! Aber auch bei  $\vartheta \neq 0$  (Bild 5.2-11a) ist bei  $u_2 > u_1$  gemäß (5.2-34)  $M > 0$ .

**Beispiel 5.2-3:** Zwei Drehkondensatoren 1 und 2 sind elektrisch gekoppelt und mit einer Drehfeder (Drehfederkonstante  $k$ , Bild 5.2-12) verbunden. Das Federmoment ist  $M_F = k \cdot \vartheta$  ist. Bei  $\vartheta = 0$  ist die Feder entspannt. Die in der Feder gespeicherte potentielle Energie bei der Ankerlage  $\vartheta$  ist (5.2-35) und die gesamte potentielle Energie im System (5.2-36).

$$W_{pF}(\vartheta) = \int_0^1 M(\theta \cdot \vartheta) \cdot \vartheta \cdot d\theta = \int_0^1 (k \cdot \theta \cdot \vartheta) \cdot \vartheta \cdot d\theta = \frac{k \cdot \vartheta^2}{2} \quad (5.2-35)$$

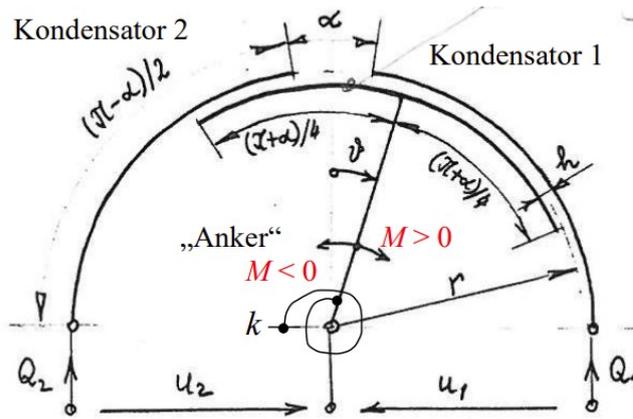


Bild 5.2-12: Zwei über einen Drehanker elektrisch gekoppelte Luft-Drehkondensatoren 1 und 2. Der Drehanker ist über eine Drehfeder (Drehfederkonstante  $k$ ) am feststehenden Rahmen befestigt.

$$W_p = \frac{Q_1^2}{2C_1(\vartheta)} + \frac{Q_2^2}{2C_2(\vartheta)} + \frac{k \cdot \vartheta^2}{2} \quad (5.2-36)$$

Aus (5.2-25) folgt das Haltemoment (5.2-37).

$$M = \frac{\partial W_p}{\partial \vartheta} = -\frac{u_1^2}{2} \cdot C_1'(\vartheta) - \frac{u_2^2}{2} \cdot C_2'(\vartheta) + k \cdot \vartheta = -M_e + k \cdot \vartheta = -M_e + M_F \quad (5.2-37)$$

In jeder Gleichgewichtslage  $\vartheta^*$  ist das resultierende Moment  $M$  auf den Anker Null  $M = 0$ , so dass über die Feder der Gleichgewichtswinkel  $0 = -M_e + k \cdot \vartheta^* \Rightarrow \vartheta^* = M_e / k$  eingestellt wird.

$$\vartheta^* = \frac{C_0}{2k} \cdot (u_1^2 - u_2^2), \quad u_1 > u_2 : \vartheta^* > 0 \text{ bzw. } u_2 > u_1 : \vartheta^* < 0 \quad (-\vartheta_m \leq \vartheta^* \leq \vartheta_m). \quad (5.2-38)$$

**Zusammenfassung:**

Beim magnetischen Grundsystem treten die verallgemeinerte kinetische Energie  $W_k$  und die mechanische potentielle Energie  $W_p$  auf. Es wurden die *Lagrange*-Gleichungen für das Aufstellen der Systemgleichungen verwendet. Beim elektrischen Grundsystem als elektrostatisches System tritt nur die verallgemeinerte potentielle Energie  $W_p$  auf, da keine Bewegungen vorhanden sind. Die Statik fordert, dass alle verallgemeinerten Geschwindigkeiten Null sind:  $v = 0$ . Es werden daher als Sonderfall die verallgemeinerte Kräfte  $F$  als Gradienten der verallgemeinerten potentiellen Energie  $W_p$  bestimmt, was zu einer verkürzten Rechnung führt.

## 6. Dynamische Untersuchung des Wandlerverhaltens

### 6.1 Gleichgewicht

Die Bestimmung **statischer Gleichgewichtszustände** erfolgt bei **elektrischen Wandlern** über die Bestimmung der el. und mech. Gleichgewichtskoordinaten (konstante Ladungsmengen und konstante mech. Lagekoordinaten), indem die Zeitableitungen  $d./dt$  in den dynamischen Gleichungen Null gesetzt werden, wie das in einigen Beispielen der Kap. 2 ... 5 bereits gezeigt wurde. Bei **magnetischen Wandlern** umfasst dies auch die Bestimmung **stationärer Zustände**, also konstanter Geschwindigkeiten (konstante Ströme (Gleichströme) und konstante mech. Geschwindigkeiten). Häufig ergeben sich dabei allgemeine Bestimmungsgleichungen für Gleichgewichtslagen als Polynome. Solche algebraischen Gleichungen  $m$ -ter Ordnung mit reell-wertigen Koeffizienten haben auf Grund der Erkenntnisse von *C. F. Gauss*, formuliert im Fundamentalsatz der Algebra,  $m$  reellwertige oder komplexwertige Lösungen. Komplexwertige Lösungen müssen als konjugiert komplexe Paare auftreten, denn die Polynomkoeffizienten sind reell. Daher muss bei ungeradem  $m$  mindestens eine reelle Lösung existieren! Für die reellwertigen Gleichgewichtslagen sind diese komplexwertigen Lösungen unphysikalisch und daher irrelevant. Bis zur Ordnung  $m = 4$  sind analytische Lösungsformeln für die „Wurzeln“ des Polynoms vorhanden. *N. H. Abel* und *E. Galois* bewiesen, dass für  $m > 4$  KEINE analytische Lösungsformeln existieren können, so dass man spätestens dann auf numerische Lösungsverfahren angewiesen ist!

Bei  $m = 1$  existiert eine reelle Lösung, bei  $m = 2$  existieren gemäß der *Vieta*-Formel entweder zwei reelle Lösungen oder zwei konjugiert komplexe Lösungen. Bei  $m = 3$  werden mit der *Cardano*-Formel (die ursprünglich auf *Scipione del Ferro* zurückgeht) zwei Fälle unterschieden: Eine reelle Lösung und zwei konjugiert komplexe Lösungen oder drei reelle Lösungen.

Bei  $m = 4$  werden mit der *Ferrari*-Formel (nicht der Automobilhersteller!) drei Fälle unterschieden: Vier konjugiert komplexe Lösungen oder zwei reelle und zwei konjugiert komplexe Lösungen oder vier reelle Lösungen.

Schon die *Cardano*-Formel ist tw. unangenehm auszuwerten und erst recht die *Ferrari*-Formel. Deswegen bedient man sich meist schon ab  $m = 3$  der numerischen Methoden mit iterativen Nullstellensuchverfahren wie dem *Intervallhalbierungsverfahren* oder der *Regula falsi* oder der *Fixpunkt-Iteration* oder dem *Newton-Raphson-Verfahren* oder anderer Methoden.

Wurden die Gleichgewichtslagen bestimmt, so sind folgende Fragen zu beantworten:

Ist das System in der Gleichgewichtslage  $x^* = X$  bei kleinen Störungen dieses Betriebszustands stabil? Wird das System um den kleinen Wert  $\Delta x/x^* \ll 1$  aus  $x^*$  ausgelenkt, kehrt das System wieder nach  $x^*$  zurück (STABILES Verhalten) oder nicht (INSTABILES Verhalten)? Anhand des Beispiels des magnetischen Grundsystems (Kap. 5, Bsp. 5.1-2) wird das Auffinden der Gleichgewichtslagen  $x^* = X$  erläutert. Anders als bei Bsp. 5.1-2 ist die Feder (Federkonstante  $k$ ) entspannt bei  $x = x_0$ . Gemäß (5.1-5, -6) sind die dynamischen Gleichungen

$$\frac{d}{dt}(L(x) \cdot i) + R \cdot i = u, \quad m \cdot \ddot{x} - \frac{L'(x)}{2} \cdot i^2 + k \cdot (x - x_0) = m \cdot \ddot{x} - F_m - F_F = 0. \quad (6.1-1)$$

Das Gleichgewicht des nichtlinearen gekoppelten Systems (6.1-1) wird erhalten bei  $d./dt = 0$ .

$$R \cdot i = u \Rightarrow i^* = \frac{u}{R} = \frac{U}{R} = I, \quad F_m + F_F = \frac{L'(x^*)}{2} \cdot (i^*)^2 - k \cdot (x^* - x_0) = 0. \quad (6.1-2)$$

Die Gleichgewichtslage  $x^*$  des beweglichen Ankers beim Gleichstrom  $i^* = I$  tritt im Bereich  $x_0 > x^* > 0$  auf. Denn bei  $x < 0$  ist die Magnetkraft  $F_m > 0$  ist, da dort  $dL/dx > 0$  ist (vgl. Bild 6.1-1). Aber auch die Federkraft  $F_F > 0$  ist positiv und zieht nach rechts.

So kann kein Kräftegleichgewicht  $F_m + F_F = 0$  erreicht werden.

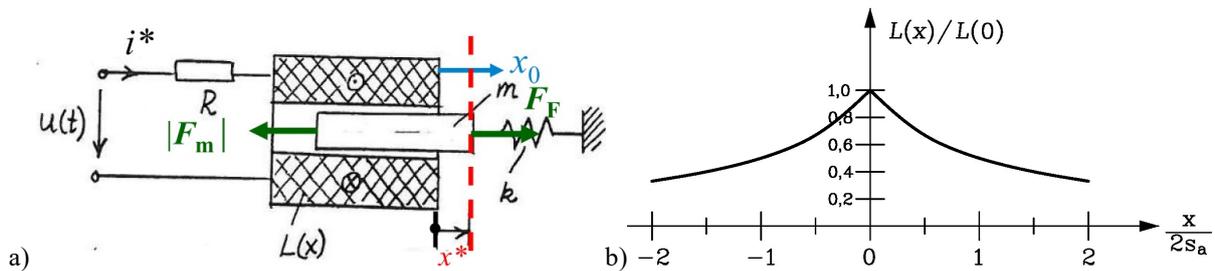


Bild 6.1-1: a) Die Gleichgewichtslage  $x^*$  des magnetischen Grundsystems von Bsp. 5.1-2 tritt (siehe Bild) im Bereich  $x_0 > x^* > 0$  auf (Feder  $k$  entspannt bei  $x = x_0$ ). b) Vereinfachter Induktivitätsverlauf  $L(x)$  von Bild 2.5-4.

Da wegen  $x_0 > 0$  folglich die Gleichgewichtslage  $x^* = 0$  ausgeschlossen ist, verwenden wir den mathematisch einfacheren, vereinfachten Induktivitätsverlauf (2.5-6), der für  $x = 0$  nicht verwendet werden darf (6.1-3), wobei  $s_a$  die einseitige „Stirn“-Feldlinienlänge ist (Kap. 2.5).

$$x > 0: \frac{L(x)}{L(0)} = \frac{1}{1 + x/(2s_a)}, \quad L'(x) = -\frac{L(0)/(2s_a)}{(1 + x/(2s_a))^2} \quad (6.1-3)$$

$$F_m + F_F = 0 \Rightarrow -F_m = F_F \Rightarrow \frac{L(0) \cdot (i^*)^2 / 2}{k \cdot (2s_a)^2} \cdot \frac{1}{(1 + x^*/(2s_a))^2} = \frac{x_0}{2s_a} - \frac{x^*}{2s_a} \quad (6.1-4)$$

Mit den Abkürzungen

$$\xi = \frac{x}{2s_a}, \quad \xi_0 = \frac{x_0}{2s_a}, \quad \xi^* = \frac{x^*}{2s_a}, \quad W_{m0}^* = \frac{L(0) \cdot (U/R)^2}{2}, \quad W_{p0} := \frac{k \cdot (2 \cdot \sqrt{2} \cdot s_a)^2}{2} \quad (6.1-5)$$

wird die Gleichgewichtsbedingung (6.1-4) als (6.1-6) übersichtlicher.

$$\frac{W_{m0}^*}{W_{p0}} \cdot \frac{1}{(1 + \xi^*)^2} = w \cdot \frac{1}{(1 + \xi_0)^2} = \xi_0 - \xi^*, \quad w = \frac{W_{m0}^*}{W_{p0}} \quad (6.1-6)$$

$$\xi^* = -\frac{w}{(1 + \xi^*)^2} + \xi_0, \quad \xi^{*3} + \xi^{*2} \cdot (2 - \xi_0) + \xi^* \cdot (1 - 2\xi_0) + w - \xi_0 = 0, \quad \xi^* > 0 \quad (6.1-7)$$

Die algebraische Gleichung 3. Ordnung (6.1-7) hat drei Lösungen (Nullstellen). Welche dieser drei Nullstellen geben physikalisch relevante Gleichgewichtslagen an?

Beispiel 6.1-1: Für  $W_{m0}^* = W_{p0}$  bzw.  $w = 1$  und für  $x_0 = 2s_a$  bzw.  $\xi_0 = 1$  wird aus (6.1-7) wegen (6.1-4)  $-F_m = F_F \Rightarrow (1 + \xi^*)^{-2} = 1 - \xi^*$ ,  $\xi^* > 0$ , die Gleichung  $\xi^{*3} + \xi^{*2} - \xi^* = 0$ , die drei reelle Lösungen  $\xi_1^*$ ,  $\xi_2^*$ ,  $\xi_3^*$  hat:

$$(\xi^{*2} + \xi^* - 1) \cdot \xi^* = 0 \Rightarrow \xi_{1,2}^* = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1} = \begin{cases} \xi_1^* = 0.618 \\ \xi_2^* = -1.618 \end{cases}, \quad \xi_3^* = 0.$$

Für  $\xi^* > 0$  verbleibt nur die Lösung  $\xi_1^* = 0.618$  bzw.  $x_1 = 0.618 \cdot 2s_a = 0.618 \cdot x_0 = x^*$ , so dass die Bedingung  $0 < x^* = 0.618 \cdot x_0 < x_0$  erfüllt ist. Wegen der gedehnten Feder ist die Federkraft  $F_F > 0$ , aber die Magnetkraft  $F_m < 0$ , so dass statisches Gleichgewicht herrscht!

$F_F = -k \cdot (x^* - x_0) = -(-0.382) \cdot k \cdot x_0 = 0.382 \cdot k \cdot x_0 > 0$  (Bild 6.1-2). Mit dem korrekten Verlauf der Selbstinduktivität  $L(x)$  gemäß Kap. 2.5, Bild 2.5-17a, wurde in Bild 2.5-17b ebenfalls die eine Gleichgewichtslage  $x^*$  graphisch ermittelt (mit umgekehrtem positivem Zählsinn der Kräfte). Über die Änderung der Federvorspannung (Wert  $x_0$ ) und der Federsteifigkeit (Wert  $k$ ) wird die Federkraftkennlinie  $F_F(x)$  verändert, so dass gemäß Bild 6.1-3 auch drei Schnittpunkte von  $-F_m$  und  $F_F$  möglich sind.

Von den drei Gleichgewichtslagen  $x^*$  im Bild 6.1-3 sind zwei stabil, eine instabil, wie in Kap. 6.4, 6.5 erläutert wird.

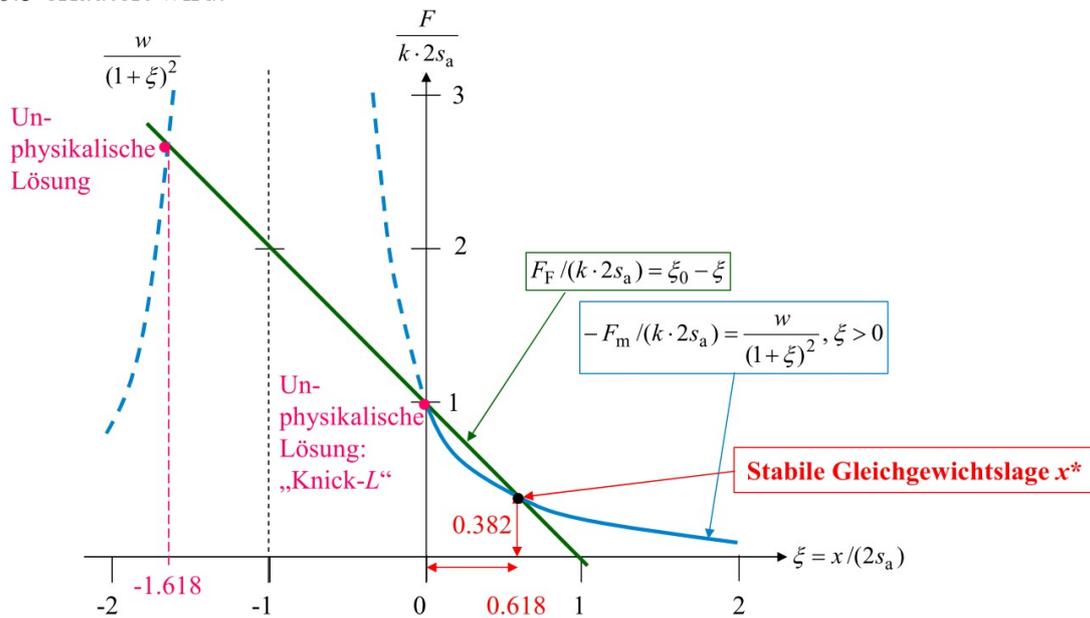


Bild 6.1-2: Zu Bsp. 6.1-1: Kennlinien der Magnetkraft  $-F_m$  (auf Basis des  $L(x)$ -Verlaufs aus Bild 6.1-1b) und der Federkraft  $F_F$ , deren Schnittpunkt die Gleichgewichtslage  $\xi^* = x^*/(2s_a)$  ergibt ( $w = 1$  und  $x_0 = 2s_a$  bzw.  $\xi_0 = 1$ ).

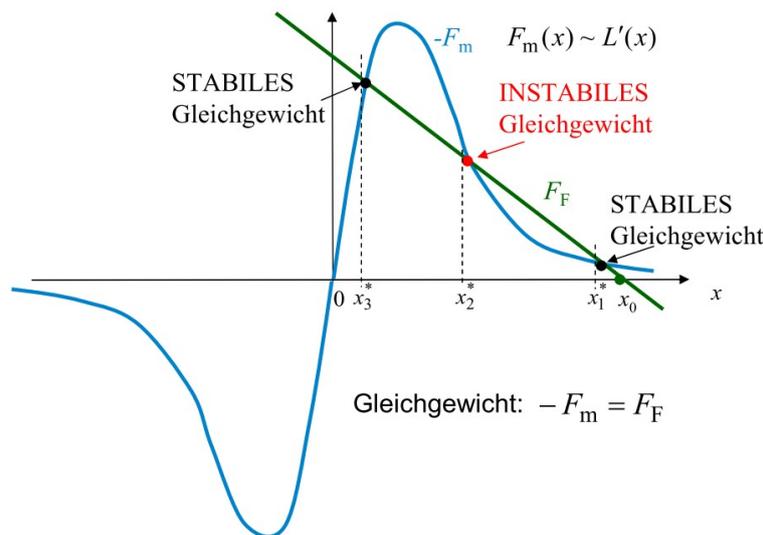


Bild 6.1-3: Zu Bsp. 6.1-1: Bei korrektem  $L(x)$ -Verlauf gemäß Bild 2.5-17a mit  $dL/dx = 0$  bei  $x = 0$  können je nach Federkennlinie ein, zwei oder drei Gleichgewichtslagen  $x^*$  auftreten. Von den drei Gleichgewichtslagen  $x^*$  im Bild sind zwei stabil, eine instabil, wie in Kap. 6.4, 6.5 erläutert wird.

### 6.2 Linearisierung

Wenn gemäß Kap. 6.1 eine Gleichgewichtslage des elektromechanischen Wandlers gefunden wurde, ist für kleine Bewegungen um diese Lage i. A. das System dynamischer Gleichungen nicht zwingend selbst zu lösen, sondern nur ihre linearisierte Form. Dies ist so lange zulässig, wie die Bewegungsamplituden so klein sind, dass Änderungen der nichtlinearen Kräfte (das sind zumeist die elektromagnetischen Kräfte  $F_m, F_e$ ) kaum von ihren linearisierten Änderungen (= Tangenten an die Kraftkennlinien  $F_m(x), F_e(x)$ ) abweichen. So wird z. B. das nichtlineare gekoppelte Differentialgleichungssystem (6.1-1) in der kleinen Umgebung  $\Delta i, \Delta x$  um die Gleichgewichtslagen  $i^*, x^*$  wie folgt linearisiert.

$$i(t) = i^* + \Delta i(t), \quad x(t) = x^* + \Delta x(t), \quad |\Delta i / i^*| \ll 1 \quad \text{und} \quad |\Delta x / x^*| \ll 1. \quad (6.2-1)$$

Einsetzen des Ansatzes (6.2-1) in (6.1-1), umgeschrieben als (6.2-2), (6.2-3),

$$\frac{d}{dt}(L(x) \cdot i) + R \cdot i = u \Rightarrow \frac{dL(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot i(t) + L(x) \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i(t) = u(t), \quad (6.2-2)$$

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{L'(x)}{2} \cdot i(t)^2 + k \cdot x(t) = k \cdot x_0, \quad (6.2-3)$$

führt auf die Koeffizienten in der Gleichgewichtslage  $i^*, x^*$ :  $L'(x^*), L(x^*), R, m, k$ . Mit dem Ansatz der Vorgabegrößen gemäß (6.2-1), hier  $u(t) = u^* + \Delta u(t)$ ,  $|\Delta u / u^*| \ll 1$ , und den Zeitableitungen von (6.2-1)

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d(x^* + \Delta x)}{dt} = \frac{dx^*}{dt} + \frac{d\Delta x}{dt} = 0 + \frac{d\Delta x}{dt} = \frac{d\Delta x}{dt}, \quad \text{ebenso} \quad \frac{di}{dt} = \frac{d\Delta i}{dt}, \quad (6.2-4)$$

treten in den multiplikativen Termen von (6.2-2), (6.2-3) Produkte „kleiner“ Größen auf, z. B.  $\Delta x(t) \cdot \Delta i(t)$ , die „klein“ sind in Bezug auf die Gleichgewichtsgrößen, z. B.  $|\Delta x / x^*| \ll 1!$  Solche Produkte kleiner Größen sind wegen (6.2-5) vernachlässigbar klein (vgl. Bsp. 6.2-1).

$$\frac{x \cdot i}{x^* \cdot i^*} = \left(1 + \frac{\Delta x}{x^*}\right) \cdot \left(1 + \frac{\Delta i}{i^*}\right) = 1 + \frac{\Delta x}{x^*} + \frac{\Delta i}{i^*} + \frac{\Delta x}{x^*} \cdot \frac{\Delta i}{i^*} \approx 1 + \frac{\Delta x}{x^*} + \frac{\Delta i}{i^*} \quad (6.2-5)$$

Beispiel 6.2-1:  $\Delta x / x^* = 0.1, \Delta i / i^* = 0.1$ :

Der exakte Wert für das Produkt  $x(t) \cdot i(t)$ , bezogen auf  $x^* \cdot i^*$ , ergibt bei Berücksichtigung

der kleinen Größen  $\Delta x, \Delta i$ :  $\left(1 + \frac{\Delta x}{x^*}\right) \cdot \left(1 + \frac{\Delta i}{i^*}\right) = (1 + 0.1) \cdot (1 + 0.1) = 1.1^2 = 1.21$ . Bei

Vernachlässigung von  $\Delta x(t) \cdot \Delta i(t)$  folgt  $\left(1 + \frac{\Delta x}{x^*}\right) \cdot \left(1 + \frac{\Delta i}{i^*}\right) \approx 1 + \frac{\Delta x}{x^*} + \frac{\Delta i}{i^*} = 1 + 0.1 + 0.1 = 1.20$ ,

so dass mit  $1.21 \approx 1.2$  Produkte kleiner Größen vernachlässigt werden dürfen. In diesem Sinn

gilt mit  $\frac{\Delta x}{x^*} \ll 1, \frac{\Delta i}{i^*} \ll 1$ :  $\frac{\Delta x}{x^*} \cdot \frac{\Delta i}{i^*} \ll 1, \frac{d\Delta x/dt}{x^*} \cdot \frac{\Delta i}{i^*} \ll 1, \frac{\Delta x}{x^*} \cdot \frac{d\Delta i/dt}{i^*} \ll 1$ .

Dabei muss allerdings zwischen „**schwach**“ **nichtlinearen** und „**wesentlich**“ **nichtlinearen Termen** unterschieden werden, um festzulegen, bis zu welchem Wert  $\Delta x / x^*$  eine Linearisierung zulässig ist.

Beispiel 6.2-2: „Schwache“ Nichtlinearität  $N$ :  $N = \left(1 + \frac{\Delta x}{x^*}\right)^2 = 1 + \frac{2\Delta x}{x^*} + \left(\frac{\Delta x}{x^*}\right)^2$ . Der dazu

linearisierte Ausdruck  $L$  ist  $\left(1 + \frac{\Delta x}{x^*}\right)^2 \approx 1 + \frac{2\Delta x}{x^*} = L$ . Wie groß darf  $\Delta x / x^*$  sein, damit die

Abweichung zwischen  $N$  und  $L$  den Wert 10% nicht überschreitet ( $N / L = 1.1$ )?

Antwort: Wegen  $\frac{\Delta x}{x^*} = -0.23$  ( $N = 0.59, L = 0.54$ ) bzw.  $\frac{\Delta x}{x^*} = 0.43$  ( $N = 2.05, L = 1.86$ ) darf

$|\Delta x / x^*|$  bei Wechselgrößen  $\Delta x$  den Wert 23 % nicht überschreiten:  $|\Delta x / x^*| \ll 0.23$ .

Beispiel 6.2-3: „Wesentliche“ Nichtlinearität  $N$ :  $N = \left(1 + \frac{\Delta x}{x^*}\right)^5$ .

Der dazu linearisierte Ausdruck  $L$  ist  $L = 1 + \frac{5\Delta x}{x^*}$  wegen

$$N = 1 + 5 \cdot \frac{\Delta x}{x^*} + 10 \cdot \left(\frac{\Delta x}{x^*}\right)^2 + 10 \cdot \left(\frac{\Delta x}{x^*}\right)^3 + 5 \cdot \left(\frac{\Delta x}{x^*}\right)^4 + \left(\frac{\Delta x}{x^*}\right)^5 \approx 1 + 5 \cdot \frac{\Delta x}{x^*}.$$

Wie groß darf  $\Delta x/x^*$  sein, damit die Abweichung zwischen  $N$  und  $L$  den Wert 10% nicht überschreitet ( $N/L = 1.1$ )?

Antwort: Wegen  $\frac{\Delta x}{x^*} = -0.08$  ( $N = 0.66, L = 0.60$ ) bzw.  $\frac{\Delta x}{x^*} = 0.125$  ( $N = 1.80, L = 1.625$ )

darf  $|\Delta x/x^*|$  bei Wechselgrößen  $\Delta x$  den Wert 8 % nicht überschreiten:  $|\Delta x/x^*| \ll 0.08$ .

Für eine Abweichung  $N$  von  $L$  von max. 10 % ist die zulässige Auslenkung aus dem Gleichgewichtspunkt  $x^*$  im Bsp. 6.2-2 mit 23 % relativ groß, in Bsp. 6.2-3 aber mit 8 % deutlich kleiner!

Mit diesen Überlegungen wird die elektrische Gleichung (6.2-2) mit (6.2-6, -7) linearisiert.

$$\frac{dL(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot i(t) \approx \left( \frac{dL}{dx} \Big|_{x^*} + \frac{d^2L}{dx^2} \Big|_{x^*} \cdot \Delta x \right) \cdot \underbrace{\frac{d\Delta x}{dt} \cdot (i^* + \Delta i)}_{\approx \frac{d\Delta x}{dt} \cdot i^*} \approx \underbrace{\frac{dL}{dx} \Big|_{x^*}}_{L'(x^*)} \cdot \frac{d\Delta x}{dt} \cdot i^*, \tag{6.2-6}$$

$$(L(x^*) + L'(x^*) \cdot \Delta x) \cdot \frac{d\Delta i}{dt} \approx L(x^*) \cdot \frac{d\Delta i}{dt}, \tag{6.2-7}$$

$$(6.2-2) \Rightarrow L'(x^*) \cdot \frac{d\Delta x}{dt} \cdot i^* + L(x^*) \cdot \frac{d\Delta i}{dt} + R \cdot (i^* + \Delta i) \approx u^* + \Delta u. \tag{6.2-8}$$

Nach dem Kürzen der Gleichgewichtsbedingung  $R \cdot i^* = u^*$  verbleibt

$$L'(x^*) \cdot \frac{d\Delta x}{dt} \cdot i^* + L(x^*) \cdot \frac{d\Delta i}{dt} + R \cdot \Delta i \approx \Delta u. \tag{6.2-9}$$

In gleicher Weise wird die mechanische Gleichung (6.2-3) mit (6.2-10) linearisiert.

$$L'(x) \cdot i(t)^2 \approx (L'(x^*) + L''(x^*) \cdot \Delta x) \cdot \underbrace{(i^* + \Delta i)^2}_{i^{*2} + 2i^* \cdot \Delta i + (\Delta i)^2} \approx \tag{6.2-10}$$

$$\approx L'(x^*) \cdot (i^*)^2 + L'(x^*) \cdot 2i^* \cdot \Delta i + L''(x^*) \cdot \Delta x \cdot i^{*2}$$

$$(6.2-3) \Rightarrow m \cdot \frac{d^2\Delta x}{dt^2} - \frac{L'(x^*)}{2} \cdot (i^*)^2 - \frac{L'(x^*)}{2} \cdot 2i^* \cdot \Delta i - \frac{L''(x^*)}{2} \cdot (i^*)^2 \cdot \Delta x + k \cdot (x^* + \Delta x) \approx k \cdot x_0. \tag{6.2-11}$$

Nach dem Kürzen der Gleichgewichtsbedingung  $-\frac{L'(x^*)}{2} \cdot (i^*)^2 + k \cdot x^* = k \cdot x_0$  verbleibt

$$m \cdot \frac{d^2\Delta x}{dt^2} - \frac{L'(x^*)}{2} \cdot 2i^* \cdot \Delta i - \frac{L''(x^*)}{2} \cdot (i^*)^2 \cdot \Delta x + k \cdot \Delta x \approx 0. \tag{6.2-12}$$

Mit (6.2-9), (6.2-12) haben wir ein linearisiertes, gekoppeltes Differentialgleichungssystem erhalten, dass in der Umgebung  $\Delta i, \Delta x$  um  $i^*, x^*$  gültig ist. Auf Grund der Linearisierungen (6.2-6), (6.2-7), (6.2-10) ist mit der Abschätzungsmethodik gemäß Bsp. 6.2-2, 6.2-3  $\Delta x/x^* = 0.1, \Delta i/i^* = 0.1$  zulässig.

Beispiel 6.2-4: Linearisierte Differentialgleichungen des magnetischen Grundsystems Kap. 5.1 (Bild 6.1-1a).

Wegen der  $n = 2$  Freiheitsgrade treten zwei verallgemeinerte Koordinaten  $q_1 = Q, q_2 = x$  auf. Das linearisierte Diff.-gleichungssystem (6.2-9), (6.2-12) ist gültig in der Umgebung  $\Delta Q, \Delta x$  um  $Q^*, x^*$ :  $q_1 = Q^* + \Delta Q, q_2 = x^* + \Delta x$ . Mit  $i = dQ/dt$  folgen aus (6.2-9), (6.2-12)  $n = 2$  gekoppelte Diff.-gleichungen 2. Ordnung (6.2-13), (6.2-14) mit dem **Kopplungsterm** (6.2-15), der bei Matrixschreibweise in der Nebendiagonale der Matrix ( $D$ ) (6.2-16) steht.

$$L(x^*) \cdot \frac{d^2 \Delta Q}{dt^2} + R \cdot \frac{d \Delta Q}{dt} + L'(x^*) \cdot i^* \cdot \frac{d \Delta x}{dt} \approx \Delta u, \tag{6.2-13}$$

$$m \cdot \frac{d^2 \Delta x}{dt^2} + \left( k - \frac{L''(x^*) \cdot i^{*2}}{2} \right) \cdot \Delta x - L'(x^*) \cdot i^* \cdot \frac{d \Delta Q}{dt} \approx 0, \tag{6.2-14}$$

$$\text{Kopplungsterm } L'(x^*) \cdot i^* \cdot \frac{d \dots}{dt} = K_0 \cdot \frac{d \dots}{dt}, \tag{6.2-15}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} L(x^*) & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}}_{(T)} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \Delta \ddot{Q} \\ \Delta \ddot{x} \end{pmatrix}}_{\ddot{\vec{q}}} + \underbrace{\begin{pmatrix} R & L'(x^*) \cdot i^* \\ -L'(x^*) \cdot i^* & 0 \end{pmatrix}}_{(D)} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \Delta \dot{Q} \\ \Delta \dot{x} \end{pmatrix}}_{\dot{\vec{q}}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k - \frac{L''(x^*) \cdot i^{*2}}{2} \end{pmatrix}}_{(K)} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \Delta Q \\ \Delta x \end{pmatrix}}_{\vec{q}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \Delta u(t) \\ 0 \end{pmatrix}}_{\Delta \vec{F}(t)} \tag{6.2-16}$$

Weiter erscheint in (6.2-14) in der linearisierten Magnetkraft für die Abhängigkeit von  $\Delta x$  in Analogie zur mechanischen Federkonstante  $k = dF_F / dx$  die **magnetische Federkonstante  $k_m$**  (6.2-17).

$$k_m = \frac{dF_m}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{L'(x) \cdot i^2}{2} \right) = \frac{L''(x) \cdot i^2}{2}. \tag{6.2-17}$$

Die **Veränderung** der mechanischen Federwirkung in Bild 6.1-1a durch die Magnetkraft wird durch (6.2-17) in (6.2-14, -18) beschrieben. Die **resultierende Federkonstante  $k_{res}$**  ist größer, gleich oder kleiner als  $k$ . Fallweise wird mit  $c_m = -k_m$  eine „negative magnetische Federkonstante“ eingeführt.

$$k - \frac{L''(x^*) \cdot i^{*2}}{2} = k - \frac{dF_m}{dx} \Big|_{x^*, i^*} = k - k_m = k + c_m = k_{res} < k \text{ oder } > k \tag{6.2-18}$$

Für die  $n = 2$  linearen Diff.-gleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten (6.2-13), (6.2-14) von Bsp. 6.2-4 in der Matrixschreibweise (6.2-16) sind die Koeffizienten nur im betrachteten Gleichgewichtspunkt  $(x^*, i^*)$  bzw.  $(x^*, Q^*)$  gültig. Die  $(n \times n) = (2 \times 2)$ -**Trägheitsmatrix  $(T)$**  ist stets symmetrisch zur Hauptdiagonalen ( $T_{kl} = T_{lk}$ )! Die Lösung des **Koordinatenvektors  $\vec{q} = (q_1, q_2) = (\Delta Q, \Delta x)$** , die **Dämpfungsmatrix  $(D)$** , die **Steifigkeitsmatrix  $(K)$**  und der vorzugebende **Störvektor  $\Delta \vec{F} = (F_1, F_2) = (\Delta u, 0)$**  als Kraftvektor der rechten Seite erlauben eine übersichtliche numerische Berechnung mit dem Matrizenkalkül des „Zustandsraums“.

Es lässt sich **allgemein** sagen: Bei  $n$  verallgemeinerten unabhängigen Koordinaten  $Q, x$  entsteht bei der Linearisierung der nichtlinearen Systemgleichungen des elektromechanischen Wandlers stets ein System von  $n$  Diff.-gleichungen zweiter Ordnung mit konstanten (oder zeitabhängigen) Koeffizienten. Diese Koeffizienten sind nur im betrachteten Gleichgewichtspunkt  $Q^*, x^*$  gültig. Der Gültigkeitsbereich für  $\Delta Q, \Delta x$  der linearisierten Gleichungen ist im Einzelfall abzuschätzen. Manchmal sind Systeme „wesentlich nichtlinear“, so dass durch die Linearisierung dermaßen vereinfacht wird, dass die linearisierten Diff.-gleichungen keine physikalisch sinnvolle Lösung mehr zulassen. Die  $n$  Diff.-gleichungen zweiter Ordnung lassen sich analog zu (6.2-16) mit dem Koordinatenvektor  $(q_1, \dots, q_n)$  als Matrixgleichung übersichtlich schreiben, wobei die konstanten oder zeitabhängigen Koeffizienten in den drei  $(n \times n)$ -Koeffizientenmatrizen stehen.

$(T(t))$ : Trägheitsmatrix,  $(D(t))$ : Dämpfungsmatrix,  $(K(t))$ : Steifigkeitsmatrix. Häufig sind die Koeffizienten dieser Matrizen zeitlich konstant (6.2-19):  $(T), (D), (K)$ . Nur der i. A. zeitabhängige Störvektor  $\Delta \vec{F}(t)$  gibt dann das **stationäre Zeitverhalten** für  $t \rightarrow \infty$  vor.

$$(T) \cdot \Delta \ddot{\vec{q}} + (D) \cdot \Delta \dot{\vec{q}} + (K) \cdot \Delta \vec{q} = \Delta \vec{F}(t) \tag{6.2-19}$$

### 6.3 Kleinsignalverhalten

Elektromechanische Systeme arbeiten häufig im stationären (= eingeschwungenen) Betrieb in der Umgebung einer stabilen Gleichgewichtslage  $q^*$ , um die der Wandler z. B. mit einer bestimmten Anregefrequenz  $f$  mit begrenzter Amplitude, z. B.  $\Delta q / q^* \ll 1$  schwingt. Wie lautet der Frequenzgang dieses Systems als das Verhältnis einer interessierenden

a) Ausgangssignal-Amplitude zu einer Anrege-(Eingangs)-Signalamplitude

(**Amplitudengang**) oder

b) die zugehörige Phasenverschiebung des Ausgangs- zum Eingangssignal (**Phasengang**)?

Wie reagiert das System bei Störungen möglicher stationärer Betriebszustände?

Die **Methode der Störungsrechnung** erlaubt Aussagen in begrenztem Rahmen, d. h. für Störungen mit kleiner Amplitude, da die nur begrenzt um die Gleichgewichtslage gültigen linearisierten Systemgleichungen verwendet werden. Für dynamische (Wandler-)Systeme mit konstanten Koeffizienten steht eine Reihe von Methoden zur Untersuchung des Systems im Zeit- und Frequenzbereich zur Verfügung. Im **Zeitbereich** (z. B. für Einschaltvorgänge) wird entweder ein direkter Lösungsansatz für (6.2-19), bestehend aus Homogen- und Partikulärlösung, verwendet oder die (einseitige) *Laplace*-Transformation. Für Untersuchungen von Dauerschwingungen wird im **Frequenzbereich** gearbeitet, so dass die komplexe Rechnung zur Bestimmung von Amplituden- und Phasengang angewandt wird. Hier beschränken wir uns auf den häufigen Sonderfall des Differentialgleichungssystems mit konstanten Koeffizienten (6.2-19). Alternativ zur Matrizenrechnung können auch  $n - 1$  Koordinaten  $\Delta q_2, \dots, \Delta q_n$  in (6.2-19) eliminiert werden. Wir erhalten dann EINE lineare Differentialgleichung der Ordnung  $m = 2n$  für die Unbekannte  $\Delta q_1$ . Wird statt einer Koordinate  $\Delta Q$  deren Ableitung  $\Delta i = d\Delta Q/dt$  verwendet, so erhalten wir EINE lineare Differentialgleichung der Ordnung  $m = 2n - 1$  für die Unbekannte  $\Delta q_1$ .

*Beispiel 6.3-1:* Linearisierte Differentialgleichungen (6.2-9), (6.2-12) des magnetischen Grundsystems Kap. 5.1 (siehe Bsp. 6.2-4).

$$L'(x^*) \cdot i^* \cdot \frac{d\Delta x}{dt} + L(x^*) \cdot \frac{d\Delta i}{dt} + R \cdot \Delta i = \Delta u, \quad m \cdot \frac{d^2 \Delta x}{dt^2} - L'(x^*) \cdot i^* \cdot \Delta i + k_{\text{res}} \cdot \Delta x = 0$$

Mit  $n = 2$  Freiheitsgraden wird bei Elimination einer der beiden Unbekannten  $\Delta x$  oder  $\Delta Q$  eine Diff.-gleichung  $m = 2n = 2 \cdot 2 = 4$ . Ordnung  $\Delta x$  bzw.  $\Delta Q$  erhalten. Wird  $\Delta i = d\Delta Q/dt$  eingeführt, ergibt sich eine Diff.-gleichung  $m = 2n - 1 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$ . Ordnung für  $\Delta x$  bzw.  $\Delta i$ .

Wird  $\Delta i$  eliminiert (bitte selbst zur Übung nachvollziehen!), so folgt mit  $K_0 = L'(x^*) \cdot i^*$

$$\Delta \ddot{x} + \frac{R}{L(x^*)} \cdot \Delta \dot{x} + \left( \frac{k_{\text{res}}}{m} + \frac{K_0^2}{m \cdot L(x^*)} \right) \cdot \Delta x + \frac{k_{\text{res}}}{m} \cdot \frac{R}{L(x^*)} \cdot \Delta x = \frac{K_0}{m \cdot L(x^*)} \cdot \Delta u. \quad (6.3-1)$$

Wird  $\Delta x$  eliminiert (bitte selbst zur Übung nachvollziehen!), so folgt mit  $K_0 = L'(x^*) \cdot i^*$

$$\Delta \ddot{i} + \frac{R}{L(x^*)} \cdot \Delta \dot{i} + \left( \frac{k_{\text{res}}}{m} + \frac{K_0^2}{m \cdot L(x^*)} \right) \cdot \Delta i + \frac{k_{\text{res}}}{m} \cdot \frac{R}{L(x^*)} \cdot \Delta i = \frac{\Delta \ddot{u}}{L(x^*)} + \frac{k_{\text{res}}}{m \cdot L(x^*)} \cdot \Delta u. \quad (6.3-2)$$

Der Differentialoperator (6.3-3) in (6.3-1, -2) ist sowohl für  $\Delta x$  als auch  $\Delta i$  derselbe, denn er beschreibt das resultierende dynamische (= „transiente“) Verhalten des Wandlersystems.

$$\frac{d^3(\cdot)}{dt^3} + \frac{R}{L(x^*)} \cdot \frac{d^2(\cdot)}{dt^2} + \left( \frac{k_{\text{res}}}{m} + \frac{K_0^2}{m \cdot L(x^*)} \right) \cdot \frac{d(\cdot)}{dt} + \frac{k_{\text{res}}}{m} \cdot \frac{R}{L(x^*)} \cdot (\cdot) \quad (6.3-3)$$

Es treten somit „gewöhnliche“ lineare Diff.-gleichung  $m$ -ter Ordnung vom Typ (6.3-4) mit der Zeitableitung und mit konstanten reellen Koeffizienten  $b_m, b_{m-1}, \dots, b_1, b_0$  mit dem Differentialoperator (6.3-5) auf.

$$b_m \cdot \frac{d^m y(t)}{dt^m} + b_{m-1} \cdot \frac{d^{m-1} y(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \cdot \frac{dy(t)}{dt} + b_0 \cdot y(t) = g(t) \quad (6.3-4)$$

$$b_m \cdot \frac{d^m(.)}{dt^m} + b_{m-1} \cdot \frac{d^{m-1}(.)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \cdot \frac{d(.)}{dt} + b_0 \cdot (.) \quad (6.3-5)$$

Im Beispiel von (6.3-1) ist  $m = 3$ ,  $y(t) = x(t)$  und

$$b_3 = m, \quad b_2 = \frac{m \cdot R}{L(x^*)}, \quad b_1 = k_{\text{res}} + \frac{(L'(x^*) \cdot i^*)^2}{L(x^*)}, \quad b_0 = \frac{k_{\text{res}} \cdot R}{L(x^*)}, \quad g(t) = \frac{L'(x^*) \cdot i^*}{L(x^*)} \cdot \Delta u(t).$$

Auf Grund der „Linearität“ von (6.3-4) gilt: Sind  $y_1(t)$  und  $y_2(t)$  zwei Lösungen von (6.3-4), dann ist auch jede Linearkombination  $k_1 \cdot y_1(t) + k_2 \cdot y_2(t)$  eine Lösung! Wegen der Ordnung  $m$  existieren  $m$  voneinander linear UNABHÄNGIGE Lösungen  $y_1(t), y_2(t), \dots, y_{m-1}(t), y_m(t)$

zu (6.3-4). Es sind  $m$  Anfangsbedingungen  $y(0), y'(0), \dots, y^{(m-1)}(0)$  nötig, um die  $m$  Koeffizienten  $k_i, i = 1, \dots, m$ , der Linearkombinationen der linear unabhängigen Lösungsfunktionen  $y_i(t)$  der homogenen Lösung  $y_h(t)$  (6.3-6) zu bestimmen.

$$y_h(t) = k_1 \cdot y_1(t) + k_2 \cdot y_2(t) + \dots + k_{m-1} \cdot y_{m-1}(t) + k_m \cdot y_m(t) \quad (6.3-6)$$

Diese **homogene Lösung  $y_h(t)$**  (6.3-6) löst die „homogene“ Differentialgleichung (6.3-7), bei der die „rechte Seite“ von (6.3-4) Null ist und hängt von  $k_i, i = 1, \dots, m$ , ab.

$$b_m \cdot \frac{d^m y_h(t)}{dt^m} + b_{m-1} \cdot \frac{d^{m-1} y_h(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \cdot \frac{dy_h(t)}{dt} + b_0 \cdot y_h(t) = 0 \quad (6.3-7)$$

Die partikuläre Lösung  $y_p(t)$  löst die „partikuläre“ Differentialgleichung (6.3-8), bei der die „rechte Seite“ die Funktion  $g(t)$  ist, und hängt von  $g(t)$  ab.

$$b_m \cdot \frac{d^m y_p(t)}{dt^m} + b_{m-1} \cdot \frac{d^{m-1} y_p(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \cdot \frac{dy_p(t)}{dt} + b_0 \cdot y_p(t) = g(t) \neq 0 \quad (6.3-8)$$

Die resultierende Lösung  $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$  enthält die noch unbekanntenen Koeffizienten  $k_i, i = 1, \dots, m$ , die über die  $m$  Gleichungen der  $m$  Anfangsbedingungen  $y(0), y'(0), \dots, y^{(m-1)}(0)$  berechnet werden. Die Lösungsfunktionen  $y_i(t)$  der homogenen Lösung (6.3-6) sind  $m$  Exponentialfunktionen  $y_i(t) = k_i \cdot e^{\lambda_i t}$ , wenn  $\lambda_i \neq \lambda_j$  für  $i \neq j$ . Über das Einsetzen der  $i$ -ten Lösungsfunktion  $y_i(t)$  in die homogene Differentialgleichung (6.3-7) werden die  $\lambda_i$  aus dem sich ergebenden „**charakteristischen Polynom**“  $p(\lambda) = 0$  berechnet.

$$b_m \cdot \frac{d^m y_i(t)}{dt^m} + b_{m-1} \cdot \frac{d^{m-1} y_i(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \cdot \frac{dy_i(t)}{dt} + b_0 \cdot y_i(t) = k_i \cdot e^{\lambda_i t} \cdot p(\lambda_i) = 0 \quad (6.3-9)$$

Das „charakteristisches“ Polynom  $p(\lambda)$  MUSS Null sein für das betreffende  $\lambda_i = \lambda$  gemäß

$$p(\lambda) = b_m \cdot \lambda^m + b_{m-1} \cdot \lambda^{m-1} + \dots + b_1 \cdot \lambda + b_0 = 0, \quad (6.3-10)$$

was eine algebraische Gleichung zu Bestimmung der  $m$  „**Eigenwerte**“  $\lambda_i, i = 1, \dots, m$ , ist. Wenn alle  $m$  Nullstellen  $\lambda_i$  von  $p(\lambda) = 0$  reell und verschieden sind  $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \dots \neq \lambda_m$ , dann sind die  $m$  linear unabhängigen Lösungen

$$y_1(t) = k_1 \cdot e^{\lambda_1 t}, \quad y_2(t) = k_2 \cdot e^{\lambda_2 t}, \quad \dots, \quad y_i(t) = k_i \cdot e^{\lambda_i t}, \quad \dots, \quad y_m(t) = k_m \cdot e^{\lambda_m t}. \quad (6.3-11)$$

Wenn  $k/2$  Nullstellen ( $k \leq m$ ) konjugiert komplex sind  $\underline{\lambda}_l = \alpha_l \pm j \cdot \beta_l, l = 1, \dots, k/2$ , dann sind wegen  $e^{\lambda_l t} = e^{\alpha_l t} \cdot (\cos(\beta_l t) \pm j \cdot \sin(\beta_l t))$  die  $m$  linear unabhängigen Lösungen (6.3-12).

$$y_1(t) = k_1 \cdot e^{\alpha_1 t} \cdot \cos(\beta_1 t), \quad y_2(t) = k_2 \cdot e^{\alpha_1 t} \cdot \sin(\beta_1 t), \quad \dots, \quad (6.3-12a)$$

$$\dots, \quad y_{k-1}(t) = k_{k-1} \cdot e^{\alpha_{k/2} t} \cdot \cos(\beta_{k/2} \cdot t), \quad y_k(t) = k_k \cdot e^{\alpha_{k/2} t} \cdot \sin(\beta_{k/2} \cdot t), \quad (6.3-12b)$$

$$y_{k+1}(t) = k_{k+1} \cdot e^{\lambda_{k+1} t}, \quad \dots, \quad y_m(t) = k_m \cdot e^{\lambda_m t}. \quad (6.3-12c)$$

Wenn eine Nullstelle, z. B.  $\lambda_0$ ,  $k$ -fach auftritt gemäß  $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k \cdot q(\lambda)$ , dann ist  $q(\lambda)$  ein Polynom der Ordnung  $m-k$ . Die zugehörigen Lösungsfunktionen sind dann (6.3-13).

$$y_1(t) = k_1 \cdot e^{\lambda_0 \cdot t}, y_2(t) = k_2 \cdot t \cdot e^{\lambda_0 \cdot t}, \dots, y_k(t) = k_k \cdot t^{k-1} \cdot e^{\lambda_0 \cdot t}, \quad (6.3-13a)$$

$$y_{k+1}(t) = k_{k+1} \cdot e^{\lambda_{k+1} \cdot t}, \dots, y_m(t) = k_m \cdot e^{\lambda_m \cdot t}. \quad (6.3-13b)$$

Die Eigenwerte  $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_m$  sind die  $m-k$  reellen Lösungen des o. g. Polynoms  $q(\lambda)$ .

Wenn eine komplexe Nullstelle, z. B.  $\underline{\lambda}_0 = \alpha_0 + j \cdot \beta_0$ ,  $k/2$ -fach auftritt, dann tritt auch ihr konjugiert komplexer Wert  $\underline{\lambda}_0^* = \alpha_0 - j \cdot \beta_0$  ebenso  $k/2$ -fach auf.

$p(\lambda) = (\lambda - \underline{\lambda}_0)^{k/2} \cdot (\lambda - \underline{\lambda}_0^*)^{k/2} \cdot q(\lambda)$ . Es ergeben sich folgende Lösungsfunktionen (6.3-14).

$$y_1(t) = k_1 \cdot e^{\alpha_0 \cdot t} \cdot \cos(\beta_0 t), y_2(t) = k_2 \cdot e^{\alpha_0 \cdot t} \cdot \sin(\beta_0 t), \quad (6.3-14a)$$

$$y_3(t) = k_3 \cdot t \cdot e^{\alpha_0 \cdot t} \cdot \cos(\beta_0 t), y_4(t) = k_4 \cdot t \cdot e^{\alpha_0 \cdot t} \cdot \sin(\beta_0 t), \dots, \quad (6.3-14b)$$

$$y_{k-1}(t) = k_{k-1} \cdot t^{\frac{k}{2}-1} \cdot e^{\alpha_0 \cdot t} \cdot \cos(\beta_0 t), y_k(t) = k_k \cdot t^{\frac{k}{2}-1} \cdot e^{\alpha_0 \cdot t} \cdot \sin(\beta_0 t), \quad (6.3-14c)$$

$$y_{k+1}(t) = k_{k+1} \cdot e^{\lambda_{k+1} \cdot t}, \dots, y_m(t) = k_m \cdot e^{\lambda_m \cdot t}. \quad (6.3-14d)$$

Die Eigenwerte  $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_m$  sind die  $m-k$  reellen Lösungen des o. g. Polynoms  $q(\lambda)$ .

Beispiel 6.3-2: Ausgleichsvorgang eines Wandlers mit einem Freiheitsgrad  $n = 1$ , berechnet mit der homogenen Lösung  $y_h(t)$ : Die homogene Differentialgleichung 2. Ordnung des Wandlers lautet mit (6.2-19)  $T \cdot \ddot{y} + D \cdot \dot{y} + K \cdot y = 0$  und das zugehörige charakteristische Polynom  $p(\lambda) = T \cdot \lambda^2 + D \cdot \lambda + K$ . Die Berechnung der Eigenwerte erfolgt aus  $p(\lambda) = 0$ . Mit

dem Wurzelsatz von *Vieta* folgt  $\lambda_{1,2} = -\frac{D}{2T} \pm \sqrt{\left(\frac{D}{2T}\right)^2 - \frac{K}{T}}$ . Bei  $\left(\frac{D}{2T}\right)^2 - \frac{K}{T} = 0$  tritt der

**aperiodische Grenzfall** (siehe Kap. 4.4, Bsp. 4.4-4) auf, den wir nun betrachten. Es tritt eine Doppelnullstelle  $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{D}{2T} = \lambda$  auf, so dass die beiden linear unabhängigen

Lösungsfunktionen gemäß (6.3-13) lauten:  $y_1(t) = k_1 \cdot e^{\lambda \cdot t}$ ,  $y_2(t) = k_2 \cdot t \cdot e^{\lambda \cdot t}$ . Dies führt auf die homogene Lösung  $y_h(t) = k_1 \cdot y_1(t) + k_2 \cdot y_2(t) = e^{\lambda \cdot t} \cdot (k_1 + k_2 \cdot t)$  z. B. mit den Anfangsbedingungen  $y(0) = y_0$ ,  $\dot{y}(0) = v_0$ , mit denen  $k_1, k_2$  berechnet werden.

$$y_h(0) = e^{\lambda \cdot 0} \cdot k_1 = k_1 = y_0,$$

$$\dot{y}_h(t) = \lambda \cdot e^{\lambda \cdot t} \cdot (k_1 + k_2 \cdot t) + e^{\lambda \cdot t} \cdot k_2, \dot{y}_h(0) = \lambda \cdot e^{\lambda \cdot 0} \cdot k_1 + e^{\lambda \cdot 0} \cdot k_2 = \lambda \cdot y_0 + k_2 = v_0.$$

Lösung:  $y_h(t) = k_1 \cdot y_1(t) + k_2 \cdot y_2(t) = e^{\lambda \cdot t} \cdot (y_0 + (v_0 - \lambda \cdot y_0) \cdot t)$ .

Wir haben folgende **Fallunterscheidung**:

a)  $\lambda > 0$ :  $y_h(t)$  wächst unbeschränkt wegen  $e^{\lambda \cdot t}$  und  $t$ . Dies ist eine INSTABILE Lösung.

b)  $\lambda < 0$ :  $y_h(t)$  klingt wegen  $e^{\lambda \cdot t}$  auf Null ab, was eine asymptotisch STABILE Lösung ist.

c)  $\lambda = 0$  wegen  $K = D = 0$ :  $T \cdot \ddot{y} = 0$ : System mit konstanter Geschwindigkeit.

Mögliche Fälle:

i)  $y_0 = 0$  oder  $y_0 \neq 0, v_0 \neq 0$ :  $y_h(t) = y_0 + v_0 \cdot t$ : Instabiles Verhalten (Bild 6.3-1)!

ii)  $v_0 = 0$ :  $y_h(t) = y_0$ : Keine Rückkehr nach Null, sondern Verbleib in der „Nähe“: Stabiles, aber nicht asymptotisch stabiles Verhalten (siehe Kap. 6.4)!

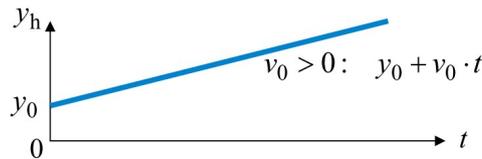


Bild 6.3-1: Eigenwert  $\lambda = 0$ : Unbeschränktes lineares Wachsen der Lösung bei  $y_0 > 0$  und  $v_0 > 0$ .

Das  $n \times n$ -Differentialgleichungssystem (6.2-19) hat „zwei“ als höchste Ableitungsordnung je Gleichung. Diese können so umgeformt werden, dass als höchste Ableitungsordnung je Gleichung „eins“ auftritt. Dafür verdoppelt sich die Anzahl der Differentialgleichungen auf ein  $2n \times 2n$ -Differentialgleichungssystem in der „Zustandsraum“-Darstellung, das mit Hilfe der Matrizenrechnung gelöst werden kann.

**Beispiel 6.3-3:** Differentialgleichungssystem eines Wandlers mit einem Freiheitsgrad  $n = 1$ , dessen homogene dynamische Gleichung (6.3-15) ist: Sie wird in zwei getrennte, gekoppelte Differentialgleichungen 1. Ordnung mit den beiden Variablen  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$  anstelle der ursprünglichen Variablen  $\Delta q(t)$  (sie ist meist identisch mit  $y_1$  oder  $y_2$ ) umgewandelt (6.3-16).

$$T \cdot \Delta \ddot{q} + D \cdot \Delta \dot{q} + K \cdot \Delta q = 0 \tag{6.3-15}$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= a_{11} \cdot y_1(t) + a_{12} \cdot y_2(t) \\ \dot{y}_2(t) &= a_{21} \cdot y_1(t) + a_{22} \cdot y_2(t) \end{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} \text{ bzw.} \tag{6.3-16}$$

$$\dot{\vec{y}}(t) = (A) \cdot \vec{y}(t) \text{ mit } \Rightarrow (A) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ und } \vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}. \tag{6.3-17}$$

Durch Differenzieren stellen wir den Bezug zwischen (6.3-15) und (6.3-16) her, indem wir z. B.  $y_2$  eliminieren, was auf (6.3-18) führt.

$$\ddot{y}_1 = a_{11}\dot{y}_1 + a_{12}\dot{y}_2 = a_{11}\dot{y}_1 + a_{12} \cdot (a_{21}y_1 + a_{22}y_2) = a_{11}\dot{y}_1 + a_{12}a_{21} \cdot y_1 + a_{12} \cdot a_{22} \cdot (\dot{y}_1 - a_{11} \cdot y_1) / a_{12}$$

Mit  $T = 1$ ,  $D = -a_{11} - a_{22}$ ,  $K = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$  folgt die homogene Differentialgleichung

$$L(y_1) = \ddot{y}_1 - (a_{11} + a_{22}) \cdot \dot{y}_1 + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \cdot y_1 = T \cdot \ddot{y}_1 + D \cdot \dot{y}_1 + K \cdot y_1 = 0. \tag{6.3-18}$$

Derselbe Differentialoperator  $L$  (6.3-19) wird erhalten, indem wir  $y_1$  eliminieren, da damit ja stets das dynamische Verhalten desselben Wandlers beschrieben wird.

$$L(y_2) = \ddot{y}_2 - (a_{11} + a_{22}) \cdot \dot{y}_2 + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \cdot y_2 = 0. \tag{6.3-19}$$

Die Berechnung der Eigenwerte  $\lambda_1, \lambda_2$  gemäß (6.3-10)

$$p(\lambda) = \underbrace{\lambda^2}_{T=1} - \underbrace{(a_{11} + a_{22})}_D \cdot \lambda + \underbrace{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}_K = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{D}{2T} \pm \sqrt{\left(\frac{D}{2T}\right)^2 - \frac{K}{T}} \tag{6.3-20}$$

führt auf die zwei linear unabhängigen Lösungen (vgl. (6.3-11))

$$y_1(t) = C_{11} \cdot e^{\lambda_1 t} + C_{12} \cdot e^{\lambda_2 t}, \quad y_2(t) = C_{21} \cdot e^{\lambda_1 t} + C_{22} \cdot e^{\lambda_2 t}. \tag{6.3-21}$$

Mit  $C_{21} = K_1 \cdot C_{11}$  und  $C_{22} = K_2 \cdot C_{12}$  folgt die Lösungsdarstellung (6.3-22) als Vektor gemäß (6.3-17).

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_{11} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ K_1 \end{pmatrix} \cdot e^{\lambda_1 t} + C_{12} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ K_2 \end{pmatrix} \cdot e^{\lambda_2 t}. \tag{6.3-22}$$

Die Berechnung von  $K_1, K_2$  erfolgt mit (6.3-12):

$$y_2 = (\dot{y}_1 - a_{11} \cdot y_1) / a_{12} = (\lambda_1 C_{11} \cdot e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 C_{12} \cdot e^{\lambda_2 t} - a_{11} C_{11} \cdot e^{\lambda_1 t} - a_{11} C_{12} \cdot e^{\lambda_2 t}) / a_{12},$$

$$y_2 = \underbrace{\frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}}}_{K_1} \cdot C_{11} \cdot e^{\lambda_1 t} + \underbrace{\frac{\lambda_2 - a_{11}}{a_{12}}}_{K_2} \cdot C_{12} \cdot e^{\lambda_2 t} = \underbrace{K_1}_{C_{21}} \cdot C_{11} \cdot e^{\lambda_1 t} + \underbrace{K_2}_{C_{22}} \cdot C_{12} \cdot e^{\lambda_2 t},$$

$$K_1 = (\underline{\lambda}_1 - a_{11})/a_{12}, \quad K_2 = (\underline{\lambda}_2 - a_{11})/a_{12}.$$

Der alternative Lösungsweg über die Matrizenrechnung für das Beispiel  $m = 2n = 2$  beginnt bei (6.3-17) mit Verwendung der Einheitsmatrix ( $E$ ) und der Darstellung (6.3-23).

$$(E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\vec{y}}(t) = (E) \cdot \dot{\vec{y}}(t) = (A) \cdot \vec{y}(t) \Rightarrow -(E) \cdot \dot{\vec{y}}(t) + (A) \cdot \vec{y}(t) = \vec{0} \quad (6.3-23)$$

Einsetzen des Lösungsansatzes (6.3-24) für die  $2n = 2$  Lösungsvektoren in (6.3-23) ergibt Gleichung (6.3-25).

$$\vec{y}_i(t) = \begin{pmatrix} C_{i1} \\ C_{i2} \end{pmatrix} \cdot e^{\underline{\lambda}_i \cdot t} = \vec{C}_i \cdot e^{\underline{\lambda}_i \cdot t}, \quad i = 1, 2 \quad (6.3-24)$$

$$-(E) \cdot \vec{C}_i \cdot \underline{\lambda}_i \cdot e^{\underline{\lambda}_i \cdot t} + (A) \cdot \vec{C}_i \cdot e^{\underline{\lambda}_i \cdot t} = \vec{0} \Rightarrow \{-(E) \cdot \underline{\lambda}_i + (A)\} \cdot \vec{C}_i = \vec{0} \quad (6.3-25)$$

Diese Nullbedingung ist nur erfüllt, wenn entweder  $\vec{C}_i = \vec{0}$  ist (als physikalisch sinnlose Lösung) oder wenn die Determinante des Gleichungssystems  $\det\{(E) \cdot \underline{\lambda}_i - (A)\} = 0$  ist. Dies ist die „**Eigenwertgleichung**“ zur Bestimmung der Eigenwerte  $\underline{\lambda}_1, \underline{\lambda}_2$  (6.3-20).

$$\det\{-(E) \cdot \underline{\lambda}_i + (A)\} = \det\left\{-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \underline{\lambda}_i + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right\} = \begin{vmatrix} a_{11} - \underline{\lambda}_i & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \underline{\lambda}_i \end{vmatrix} = 0$$

Mit der Regel von *Sarrus* wird die Determinante berechnet:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \underline{\lambda}_i & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \underline{\lambda}_i \end{vmatrix} = (a_{11} - \underline{\lambda}_i) \cdot (a_{22} - \underline{\lambda}_i) - a_{21}a_{12} = 0.$$

Diese Bestimmungsgleichung für  $\underline{\lambda}_i$  ist identisch mit (6.3-20):

$$p(\underline{\lambda}_i) = \det\{-(E) \cdot \underline{\lambda}_i + (A)\} = \underline{\lambda}_i^2 - (a_{11} + a_{22}) \cdot \underline{\lambda}_i + a_{11}a_{12} - a_{12}a_{21} = 0 \Rightarrow \underline{\lambda}_1, \underline{\lambda}_2.$$

Die beiden linear UNabhängigen Lösungen von (6.3-16) sind die beiden Eigenvektoren  $\vec{C}_1, \vec{C}_2$  (6.3-26) der Konstanten zu den beiden Lösungsfunktionen  $e^{\underline{\lambda}_1 \cdot t}, e^{\underline{\lambda}_2 \cdot t}$  zu den beiden Eigenwerte  $\underline{\lambda}_1, \underline{\lambda}_2$ !

$$\vec{C}_1 = \begin{pmatrix} C_{11} \\ C_{12} \end{pmatrix}, \quad \vec{C}_2 = \begin{pmatrix} C_{21} \\ C_{22} \end{pmatrix} \quad (6.3-26)$$

Die Eigenwertgleichung zum Eigenwert  $\underline{\lambda}_1$  (6.3-27) bestimmt  $\vec{C}_1$ .

$$(E) \cdot \vec{C}_1 \cdot \underline{\lambda}_1 = (A) \cdot \vec{C}_1 = \begin{pmatrix} C_{11} \\ C_{12} \end{pmatrix} \cdot \underline{\lambda}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_{11} \\ C_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} \\ a_{21}C_{11} + a_{22}C_{12} \end{pmatrix} \text{ bzw.} \quad (6.3-27)$$

$$(\underline{\lambda}_1 - a_{11}) \cdot C_{11} - a_{12}C_{12} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_{12} = \frac{\underline{\lambda}_1 - a_{11}}{a_{12}} \cdot C_{11} = K_1 \cdot C_{11} \quad (6.3-28a)$$

$$-a_{21}C_{11} + (\underline{\lambda}_1 - a_{22}) \cdot C_{12} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_{12} = \frac{a_{21}}{\underline{\lambda}_1 - a_{22}} \cdot C_{11} = K_1 \cdot C_{11} \quad (6.3-28b)$$

Da beide Gleichungen (6.3-28a) und (6.3-28b) voneinander linear abhängig sind, ist nur eine der beiden Konstanten in Abhängigkeit der anderen bestimmbar, wobei in Übereinstimmung mit (6.3-22)  $K_1$  als Proportionalitätskonstante auftritt.

$$K_1 = \frac{\underline{\lambda}_1 - a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{21}}{\underline{\lambda}_1 - a_{22}} \quad \Rightarrow \quad \vec{C}_1 = \begin{pmatrix} C_{11} \\ C_{12} \end{pmatrix} = C_{11} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ K_1 \end{pmatrix}. \quad (6.3-29)$$

In gleicher Weise bestimmt die Eigenwertgleichung zum Eigenwert  $\underline{\lambda}_2$  (6.3-27)  $\vec{C}_2$  gemäß (6.3-30) mit  $K_2$ .

Damit wird der Lösungsvektor von (6.3-16) als (6.3-31) in Übereinstimmung mit (6.3-22) erhalten.

$$K_2 = \frac{\lambda_2 - a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{21}}{\lambda_2 - a_{11}} \Rightarrow \vec{C}_2 = \begin{pmatrix} C_{21} \\ C_{22} \end{pmatrix}, \quad C_{22} = K_2 \cdot C_{21}, \quad (6.3-30)$$

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} C_{11} \\ C_{12} \end{pmatrix} \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + \begin{pmatrix} C_{21} \\ C_{22} \end{pmatrix} \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_{11} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ K_1 \end{pmatrix} \cdot e^{\lambda_1 t} + C_{21} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ K_2 \end{pmatrix} \cdot e^{\lambda_2 t}. \quad (6.3-31)$$

Aus Bsp. 6.3-2 und 6.3-3 folgt verallgemeinernd:

Die Linearisierung der nichtlinearen dynamischen Differentialgleichungen zur Untersuchung der Stabilität eines Gleichgewichtszustands bzw. stationären Betriebspunkts  $\vec{y}_B$  führt bei zeitlich konstanten Koeffizienten auf ein homogenes System (= „rechte Seite“  $g(t) = 0$ ) von  $m$  linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten  $a_{ij}$ .

$$\dot{\vec{y}}(t) = (A) \cdot \vec{y}(t), \quad \vec{y}(t) = (y_1(t), \dots, y_m(t)), \quad \dot{y}_i(t) = \sum_{j=1}^m a_{ij} \cdot y_j(t), \quad i = 1, \dots, m \quad (6.3-32)$$

Dabei ist  $(A)$  eine  $m \times m$ -Matrix mit konstanten Elementen  $a_{ij}$  und den Indizes  $i = 1, \dots, m$ ,

$j = 1, \dots, m$ . Der Lösungsansatz  $\vec{y}(t) = \sum_{i=1}^m \vec{C}_i \cdot e^{\lambda_i \cdot t}$ ,  $\vec{C}_i = (C_{i1}, \dots, C_{im})$  liefert für  $\vec{C}_i \cdot e^{\lambda_i \cdot t}$  dann

$m$  lineare, homogene, algebraische Gleichungssysteme (6.3-33) (Eigenwertgleichungen) zur Bestimmung der (Eigen-)Vektoren  $\vec{C}_i$ .

$$\lambda_i \cdot (E) \cdot \vec{C}_i - (A) \cdot \vec{C}_i = \vec{0}, \quad i = 1, \dots, m \quad (6.3-33)$$

In (6.3-33) ist  $(E)$  die  $m \times m$ -Einheitsmatrix, so dass  $(E) \cdot \vec{C}_i = \vec{C}_i$  gilt, und  $\vec{0} = (0, \dots, 0)$  der Nullvektor. Es gibt nur dann Lösungen  $\vec{C}_i \neq \vec{0}$  in (6.3-33), wenn zumindest zwei Gleichungszeilen im Gleichungssystem voneinander linear abhängig sind, wenn also die Koeffizientendeterminante  $Det$  des Gleichungssystems Null ist (6.3-34).

$$(\lambda_i \cdot (E) - (A)) \cdot \vec{C}_i = \vec{0} \Rightarrow \vec{C}_i \neq \vec{0} \Leftrightarrow \det\{(B)\} = 0, \text{ somit}$$

$$Det = \det\{\lambda_i \cdot (E) - (A)\} = 0 = p(\lambda_i), \quad i = 1, \dots, m \quad (6.3-34)$$

Die Gleichung (6.3-34) ist eine algebraische Gleichung  $m$ -ten Grades mit den konstanten Koeffizienten  $b_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , stellt das charakteristische Polynom (6.3-10) des Differentialoperators  $L$  des dynamischen Systems dar und dient zur Berechnung der  $m$  „Eigenwerte“  $\lambda_i$ . Diese Gleichung (6.3-10) bestimmt die  $m$  möglichen Werte von  $\lambda$  als  $\lambda_i$  mit  $i = 1, \dots, m$ . Zu jedem Eigenwert  $\lambda_i$  gehört gemäß (6.3-33) ein Satz von Zahlen  $\vec{C}_i = (C_{i1}, \dots, C_{i,m}) = C_{i1} \cdot (1, K_{i1}, \dots, K_{i,m-1})$  als „Eigenvektor“  $\vec{C}_i$  zum  $i$ -ten „Eigenwert“  $\lambda_i$ , die bis auf einen gemeinsamen konstanten Faktor  $C_{i1}$  bestimmt sind. Die allgemeine Lösung von (6.3-32) ist daher  $\vec{y}(t) = \vec{C}_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + \dots + \vec{C}_m \cdot e^{\lambda_m t}$ . Numerisch wird dieses Differentialgleichungssystem (6.3-32) aus  $m$  Gleichungen 1. Ordnung mit dem *Runge-Kutta*-Verfahren vorteilhaft gelöst.

Somit kann die Lösung eines linearen Differentialgleichungssystems mit  $m$  Gleichungen 1. Ordnung entweder

- a) durch Rückführung auf EINE Diff.-gleichung  $m$ -ter höherer Ordnung für eine der  $m-1$  unbekannt Funktionen  $y_i(t)$  erfolgen oder
- b) über die Eigenwertgleichung der  $m \times m$ -Systemmatrix  $(A)$  als Linearkombination aller  $m$  linear unabhängigen Eigenvektoren  $\vec{C}_i \cdot e^{\lambda_i t}$ .

6.4 Stabilität

Wird ein System aus einer Gleichgewichtslage  $x_0$  um  $\Delta x$  ausgelenkt und kehrt von selbst wieder zu  $x_0$  zurück, ist es in  $x_0$  asymptotisch stabil! Bleibt es nach der Auslenkung innerhalb eines begrenzten Bereichs  $x_0 \pm x_\epsilon$ , ist es in  $x_0$  zwar stabil, aber nicht asymptotisch stabil. Entfernt es sich nach der Auslenkung weiter weg von  $x_0$  (monoton oder schwingend), ist es in  $x_0$  instabil („labiles Gleichgewicht“). In Bild 6.4-1 (3) ist das indifferente Gleichgewicht als grenzstabiler Fall zwischen stabilem und instabilem Gleichgewicht dargestellt. Damit dieser Fall gemäß  $x_0 \pm x_\epsilon$  stabil ist, sind nur Auslenkungen  $\Delta x$  aus  $x_0$ , aber keine Auslenkungsgeschwindigkeiten  $\Delta v$  für die Stabilitätsuntersuchung zugelassen (vgl. Bsp. 6.3-2, Bild 6.3-1)!

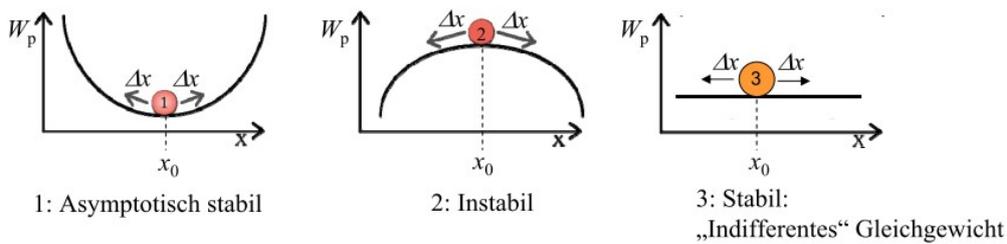


Bild 6.4-1: (1) Asymptotisch stabiles, (2) instabiles und (3) indifferentes Gleichgewicht bei  $x_0$  am Beispiel einer Kugel im Schwerfeld mit der potentiellen Energie  $W_p$  (Quelle: *Wikipedia.de*) (vgl. Bild 4.3-1)

Bei **nichtlinearen (Wandler-)Systemen** kann am linearisierten System die Stabilitätsuntersuchung für „kleine Auslenkungen“  $|\Delta x/x_0| \ll 1$  durchgeführt werden („Kleinsignaltheorie“). Bei größeren Auslenkungen („Großsignaltheorie“) muss die Stabilitätsuntersuchung auch nichtlineare Terme berücksichtigen, z. B. bei der *Lyapunov*-Theorie der Stabilitätsuntersuchung. Bei **linearen Systemen** sind natürlich beliebig große Auslenkungen  $\Delta x$  bei der Stabilitätsuntersuchung möglich. Bei diesen und bei den linearisierten Systemen erfolgt die Stabilitätsuntersuchung anhand der Lösungen der zugehörigen linearen dynamischen Gleichungen, die im Folgenden für lineare Differentialgleichungen mit **konstanten** Koeffizienten besprochen werden. Lineare Differentialgleichungen mit **zeitlich abhängigen Koeffizienten** (z. B. *Mathieu*’sche Gleichung) sind schwieriger zu behandeln. Periodisch schwankende Koeffizienten treten z. B. bei parametrischen Verstärkern auf, die zu aufklingenden Lösungen (Selbsterregung) führen können wie bei der Kinderschaukel, wo zur Schaukelschwingung die Schwingung der Beine der schaukelnden Person mit doppelter Schaukelefrequenz eine Vergrößerung der Schaukelschwingungsamplitude bewirkt.

Die homogene Lösung  $y_h(t)$  einer linearen Differentialgleichung **mit konstanten Koeffizienten** beschreibt den transienten (= flüchtigen) Ausgleichsvorgang als Systemantwort auf eine Störung (Anregung) in einem bestimmten Betriebspunkt, dem Gleichgewichtspunkt („Arbeitspunkt“). Die partikuläre Lösung  $y_p(t)$  einer linearen Differentialgleichung beschreibt das stationäre (= dauernde) Betriebsverhalten des Systems aufgrund einer „Anregung“ (z. B. einer Störung oder gewollten Veränderung des Arbeitspunkts). Wenn die Größe  $y_h(t)$  mit der Zeit abklingt und verschwindet, ist das System im betreffenden Arbeitspunkt asymptotisch **STABIL**. Es müssen dazu gemäß Kap. 6.3 die reellen Eigenwerte  $\lambda_k$  bzw. die Realteile  $\alpha_k$  der komplexen Eigenwerte  $\underline{\lambda}_k$  sämtlich negativ sein, damit  $y_h(t)$  abklingt. Wir betrachten Wandler mit  $n = 1$  Freiheitsgrad. Für  $n > 1$  bedeutet dies, dass die anderen Freiheitsgrade dabei festgehalten werden.

*Beispiel 6.4-1:* Wandler mit  $n = 1$  Freiheitsgrad: Lösung (6.4-2) der homogenen Differentialgleichung (6.4-1) mit den beiden Eigenwerten  $\underline{\lambda}_1, \underline{\lambda}_2$  entsprechend (6.4-3), (6.4-4).

$$T \cdot \ddot{y} + D \cdot \dot{y} + K \cdot y = 0, \tag{6.4-1}$$

$$y_1(t) = k_1 \cdot e^{\lambda_1 t}, \quad y_2(t) = k_2 \cdot e^{\lambda_2 t}, \quad y(t) = y_1(t) + y_2(t) \tag{6.4-2}$$

$$p(\lambda) = T \cdot \lambda^2 + D \cdot \lambda + K = 0 = (\lambda - \lambda_1) \cdot (\lambda - \lambda_2) \tag{6.4-3}$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{D}{2T} \pm \sqrt{\left(\frac{D}{2T}\right)^2 - \frac{K}{T}}: \quad \text{Falls } \left(\frac{D}{2T}\right)^2 > \frac{K}{T} > 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_1, \lambda_2 = \lambda_2 \text{ reell!} \tag{6.4-4}$$

Für  $K > 0, D/T > 0$  ist das System im betrachteten Arbeitspunkt stabil, denn wegen der dann negativen reellen Eigenwerte  $\lambda_1, \lambda_2$  klingen die Lösungen  $y_1(t) = k_1 \cdot e^{\lambda_1 t}, y_2(t) = k_2 \cdot e^{\lambda_2 t}$  mit den Zeitkonstanten  $T_1 = -1/\lambda_1, T_2 = -1/\lambda_2$  exponentiell ab (Bild 6.4-2 für  $y_1$ ).

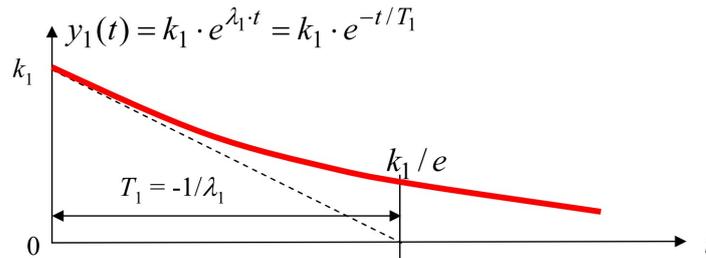


Bild 6.4-2: Abklingen der homogenen Lösung  $y_1$  mit der Anfangsbedingung  $y_1(0) = k_1$ .

Gemäß Kap. 6.1 ist die Lösung  $p(\lambda) = 0$  ab dem Grad 3 analytisch aufwändig und ab dem Grad 5 nur noch näherungsweise numerisch möglich. Deshalb hat *Adolf Hurwitz* 1895 ein **Kriterium** angegeben, die Vorzeichen der Realteile der  $\lambda_i, i = 1, \dots, m$ , zu bestimmen, ohne ihre Werte selbst bestimmen zu müssen (**Hurwitz-Kriterium**). Die algebraische Gleichung  $p(\lambda) = 0$  (6.3-10) mit reellen Koeffizienten  $b_i$  und  $b_0 > 0$  (ggf. Multiplikation von  $p(\lambda)$  mit  $-1$ , damit  $b_0 > 0$ ) besitzt genau dann nur Lösungen  $\lambda_i$  mit negativem Realteil, wenn die  $m$  Determinanten  $D_i$  (6.4-5) alle positiv sind. Dabei sind in diesen Determinanten die Koeffizienten  $b_r = 0$  zu setzen, wenn  $r > m$  ist, also alle Koeffizienten in (6.4-6) mit dem Index  $2m, 2m - 1, \dots, 2m - (m - 1)$ .

**Stabilitätskriterium von Hurwitz:** Gilt (6.4-7), so ist das System stabil.

$$D_1 = b_1, \quad D_2 = \begin{vmatrix} b_1 & b_0 \\ b_3 & b_2 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} b_1 & b_0 & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 \\ b_5 & b_4 & b_3 \end{vmatrix}, \quad \dots \tag{6.4-5}$$

$$D_m = \begin{vmatrix} b_1 & b_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & \dots & 0 \\ b_5 & b_4 & b_3 & b_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ b_{2m-1} & b_{2m-2} & b_{2m-3} & \cdot & \dots & b_m \end{vmatrix}, \tag{6.4-6}$$

$$D_1 > 0, D_2 > 0, \dots, D_m > 0 \Rightarrow \text{Re}\{\lambda_i\} < 0. \tag{6.4-7}$$

Beispiel 6.4-2: Hurwitz-Kriterium für die Differentialgleichung 2. Ordnung (6.4-1):

1) Gegeben ist die lineare homogene Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten  $L(y_1) = T \cdot \ddot{y}_1 + D \cdot \dot{y}_1 + K \cdot y_1 = b_2 \cdot \ddot{y}_1 + b_1 \cdot \dot{y}_1 + b_0 \cdot y_1 = 0$ , wobei  $b_0 = K > 0$ .

2) Anwendung des Hurwitz-Kriteriums (6.4-6, 6.4-7):  $D_1 = b_1 = D > 0$ ,

$D_2 = \begin{vmatrix} b_1 & b_0 \\ b_3 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & b_0 \\ 0 & b_2 \end{vmatrix} = b_1 b_2 = T \cdot D > 0$ . Wenn bei  $K > 0$  auch  $D > 0$ ,  $T \cdot D > 0$ , dann ist der Betriebspunkt stabil, also wenn  $T, D, K > 0$ : Die homogene Lösung ist asymptotisch STABIL!

3) Vergleichsrechnung: Bestimmung der Eigenwerte mit dem Wurzelsatz von *Vieta*:

Wenn  $D > 0$  und  $T \cdot D > 0$ , dann ist auch  $D/T > 0$ , daher bei  $K > 0$ :  $\text{Re}\{\lambda_{1,2}\} < 0$ , vgl. (6.4-4).

$$a) \text{Re}\{\lambda_{1,2}\} = \text{Re}\left\{-\frac{D}{2T} \pm \sqrt{\left(\frac{D}{2T}\right)^2 - \frac{K}{T}}\right\} = -\frac{D}{2T} \pm \sqrt{\left(\frac{D}{2T}\right)^2 - \frac{K}{T}} < 0, \text{ falls } \left(\frac{D}{2T}\right)^2 - \frac{K}{T} \geq 0.$$

$$b) \text{Re}\{\lambda_{1,2}\} = \text{Re}\left\{-\frac{D}{2T} \pm \sqrt{\left(\frac{D}{2T}\right)^2 - \frac{K}{T}}\right\} = -\frac{D}{2T} < 0, \text{ falls } \left(\frac{D}{2T}\right)^2 - \frac{K}{T} < 0.$$

Beispiel 6.4-3: Stabilitätsbedingung für ein System mit einer Differentialgleichung 2. Ordnung von Bsp. 6.4-2 für  $T > 0$  und beliebige Vorzeichen von  $D \neq 0$ ,  $K \neq 0$ : Die Gleichgewichtslage  $K \cdot y = 0 \Rightarrow y = 0$  wird mit  $d./dt = 0$  ermittelt! Die allgemein gültige Auslenkung aus der Gleichgewichtslage ist  $y(t=0) = y_0$ ,  $\dot{y}(t=0) = v_0$ , wobei für die Stabilitätsuntersuchung  $v_0 = 0$  gesetzt wird.

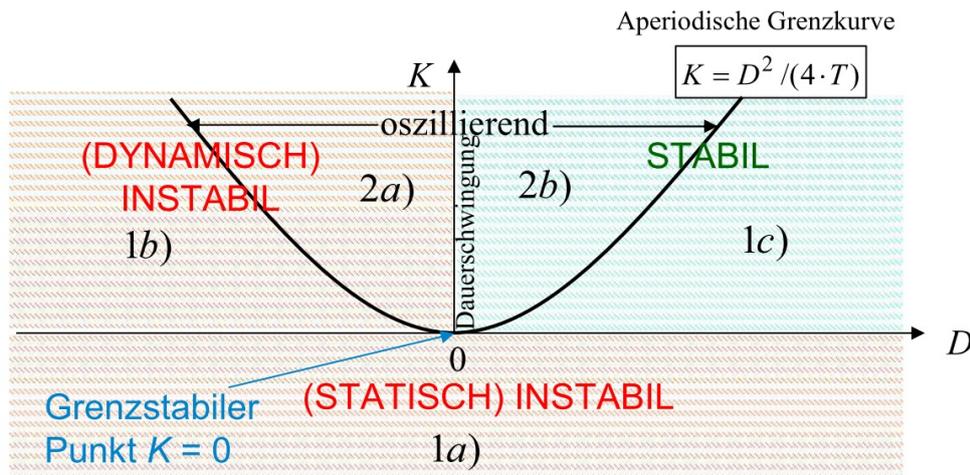


Bild 6.4-3: Stabilitätskarte für ein lineares System 2. Ordnung mit den Parametern  $T > 0, K, D$ . Es ist  $K < 0$  stets instabil (= „negative“ Federkonstante = statische Instabilität).  $D < 0$  ist auch bei  $K > 0$  instabil (= „negative“ Dämpfung = dynamische Instabilität). Die Dauerschwingung bei  $D = 0, K > 0$  ist nicht asymptotisch stabil.

Fallunterscheidung:

1)  $D^2 > 4 \cdot T \cdot K$ : Nicht-oszillierende STABILE ( $\beta > \alpha$ ) oder INSTABILE ( $\beta < \alpha$ ) Bewegung:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{D}{2T} \pm \frac{1}{2T} \cdot \sqrt{D^2 - 4 \cdot K \cdot T} = -\beta \pm \alpha, \quad \beta = \frac{D}{2T}, \quad \alpha = \frac{1}{2T} \cdot \sqrt{D^2 - 4 \cdot K \cdot T} > 0. \quad (6.4-8)$$

Mit (6.4-2) werden  $k_1, k_2$  aus den Anfangsbedingungen  $y_0, v_0$  ermittelt. Mit den Hyperbelfunktionen  $\text{sh}(\alpha \cdot t) = (e^{\alpha \cdot t} - e^{-\alpha \cdot t})/2$ ,  $\text{ch}(\alpha \cdot t) = (e^{\alpha \cdot t} + e^{-\alpha \cdot t})/2$  folgt  $y(t)$  (6.4-9).

$$y(t) = e^{-\beta \cdot t} \cdot \left\{ \frac{v_0 + \beta \cdot y_0}{\alpha} \cdot \text{sh}(\alpha \cdot t) + y_0 \cdot \text{ch}(\alpha \cdot t) \right\} \quad (6.4-9)$$

Die instabile Lösung  $\beta < \alpha \Leftrightarrow D < \sqrt{D^2 - 4 \cdot T \cdot K}$  tritt auf entweder für

$$D > 0 \wedge K < 0 \text{ oder } D < 0 \wedge (K > 0, K < 0, \text{ so dass } D^2 > 4 \cdot T \cdot K). \quad (6.4-10)$$

Die asymptotisch stabile Lösung  $\beta > \alpha \Leftrightarrow D > \sqrt{D^2 - 4 \cdot T \cdot K}$  tritt auf für

$$K > 0 \wedge D > 2 \cdot \sqrt{T \cdot K} . \tag{6.4-11}$$

2)  $D^2 < 4 \cdot T \cdot K$ : Es muss wegen  $T > 0$  auch  $K > 0$  sein: Es treten oszillierende STABILE ( $\beta > 0$ ) oder INSTABILE ( $\beta < 0$ ) Bewegungen (6.4-13) auf.

$$\underline{\lambda}_{1,2} = -\frac{D}{2T} \pm \frac{j}{2T} \cdot \sqrt{4 \cdot K \cdot T - D^2} = -\beta \pm j \cdot \omega, \quad \beta = \frac{D}{2T}, \quad \omega = \frac{\sqrt{4 \cdot K \cdot T - D^2}}{2T} > 0 \tag{6.4-12}$$

$$y(t) = e^{-\beta \cdot t} \cdot \left\{ \frac{v_0 + \beta \cdot y_0}{\omega} \cdot \sin(\omega \cdot t) + y_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) \right\} \tag{6.4-13}$$

Die Bedingungen für die beiden Fälle 1 und 2 sind (Bild 6.4-3) zusammengefasst:

- 1a)  $K < 0, D$  beliebig, d.h.  $\alpha > |\beta| > 0$ , instabil,
- 1b)  $K > 0, D < -2 \cdot \sqrt{T \cdot K}$ , d.h.  $-\beta > \alpha > 0$ , instabil,
- 1c)  $K > 0, D > 2 \cdot \sqrt{T \cdot K}$ , d.h.  $\beta > \alpha > 0$ , asymptotisch stabil,
- 2a)  $K > 0, -2 \cdot \sqrt{T \cdot K} < D < 0$ , d.h.  $\beta < 0$ , instabil, (6.4-14)
- 2b)  $K > 0, 2 \cdot \sqrt{T \cdot K} > D > 0$ , d.h.  $\beta > 0$ , asymptotisch stabil.
- 2c)  $K > 0, D = 0$ , d.h.  $\beta = 0$ , Dauerschwingung; stabil, aber nicht asymptotisch.
- 3)  $K = 0, D = 0, \alpha = \beta = 0$ , indifferentes Gleichgewicht

Anstelle des Zeitverlaufs  $\Delta x(t)$  (Bild 6.4-2) wird v. a. bei der Untersuchung nichtlinearer Vorgänge die Darstellung  $\Delta \dot{x}(\Delta x)$  als „**Phasenportrait**“ verwendet. Die Zeit  $t$  ist Parameter längs der Kurve  $\Delta \dot{x}(\Delta x)$ . In der Aufgabensammlung sind zu den Ausgleichsvorgängen von Bild 6.4-3 in den Aufgaben W7 bis W10 die zugehörigen Phasenportraits behandelt.

### 6.5 Statische Instabilität

In Bild 6.4-3 ist für  $T > 0$  („positive Masse“) bei  $K < 0$  („negative Federkonstante“) unabhängig von der Dämpfung  $D$  das System 2. Ordnung instabil. Dies heißt „statische Instabilität“, weil diese Bedingung  $K < 0$  aus der statischen Wandlerkennlinie bestimmt wird. Dies wird anhand der nichtlinearen Differentialgleichung 2. Ordnung eines Wändlers  $n = 1$  (6.5-1) erläutert, die von den beiden nichtlinearen Funktionen  $\mu(\dot{y}, y), \kappa(\dot{y}, y)$  abhängt.

$$\mu(\dot{y}, y) \cdot \ddot{y} + \kappa(\dot{y}, y) = f = \text{konst.} \tag{6.5-1}$$

Die auf Stabilität zu untersuchende Gleichgewichtslage  $y_0$  wird mit (6.5-2) bestimmt.

$$d./dt = 0: \ddot{y} = 0, \dot{y} = 0 \Rightarrow \kappa(0, y_0) = f: \text{Gleichgewichtslagen } y_0(f) \text{ in Bild 6.5-1!} \tag{6.5-2}$$

In dieser Gleichgewichtsruhelage  $y_0(f), \dot{y}_0 = 0$  erfolgt die Linearisierung von (6.5-1) gemäß (6.5-3) mit der kleinen Abweichung  $\Delta y(t): y(t) = y_0 + \Delta y(t), \Delta y(t)/y_0 \ll 1$ .

$$\dot{y}(t) = \Delta \dot{y}(t), \ddot{y}(t) = \Delta \ddot{y}(t) \text{ und } \mu(\dot{y}_0, y_0) = \mu(0, y_0) = \mu_0, \kappa(\dot{y}_0, y_0) = \kappa(0, y_0) = \kappa_0. \tag{6.5-3}$$

Wir setzen  $\dot{y} = \Delta \dot{y}, \ddot{y} = \Delta \ddot{y}$  in (6.5-1) in die beiden Funktionen  $\mu(\dot{y}, y), \kappa(\dot{y}, y)$  ein. Sie werden linearisiert als Taylor-Reihe bis zur 1. Ableitung im Punkt  $(\dot{y}_0 = 0, y_0)$ .

$$\mu(\Delta \dot{y}, y_0 + \Delta y) = \underbrace{\mu(0, y_0)}_{\mu_0} + \left. \frac{\partial \mu}{\partial \Delta \dot{y}} \right|_{0, y_0} \cdot \Delta \dot{y} + \left. \frac{\partial \mu}{\partial \Delta y} \right|_{0, y_0} \cdot \Delta y \tag{6.5-4}$$

$$\kappa(\Delta \dot{y}, y_0 + \Delta y) = \underbrace{\kappa(0, y_0)}_{\kappa_0} + \left. \frac{\partial \kappa}{\partial \Delta \dot{y}} \right|_{0, y_0} \cdot \Delta \dot{y} + \left. \frac{\partial \kappa}{\partial \Delta y} \right|_{0, y_0} \cdot \Delta y \tag{6.5-5}$$

Einsetzen von (6.5-4), (6.5-5) in (6.5-1) ergibt mit Vernachlässigung kleiner Werte (6.5-6)

$$\mu(\Delta\dot{y}, y_0 + \Delta y) \cdot \Delta\ddot{y} = \mu_0 \cdot \Delta\dot{y} + \left. \frac{\partial\mu}{\partial\Delta\dot{y}} \right|_{0, y_0} \cdot \underbrace{\Delta\dot{y} \cdot \Delta\dot{y}}_{\ll 1} + \left. \frac{\partial\mu}{\partial\Delta y} \right|_{0, y_0} \cdot \underbrace{\Delta y \cdot \Delta\dot{y}}_{\ll 1} \approx \mu_0 \cdot \Delta\dot{y} \quad (6.5-6)$$

die linearisierte Differentialgleichung 2. Ordnung (6.5-7), in der die Gleichgewichtsbedingung  $\kappa_0 = f$  gekürzt wird, was (6.5-8) ergibt.

$$\mu_0 \cdot \Delta\ddot{y} + \kappa_0 + \left. \frac{\partial\kappa}{\partial\Delta\dot{y}} \right|_{0, y_0} \cdot \Delta\dot{y} + \left. \frac{\partial\kappa}{\partial\Delta y} \right|_{0, y_0} \cdot \Delta y = f = \text{konst.} \quad (6.5-7)$$

$$\mu_0 \cdot \Delta\ddot{y} + \left. \frac{\partial\kappa}{\partial\Delta\dot{y}} \right|_{0, y_0} \cdot \Delta\dot{y} + \left. \frac{\partial\kappa}{\partial\Delta y} \right|_{0, y_0} \cdot \Delta y = T \cdot \Delta\ddot{y} + D \cdot \Delta\dot{y} + K \cdot \Delta y = 0 \quad (6.5-8)$$

Gemäß Kap. 6.4 ist für  $T = \mu(0, y_0) > 0$  die Ausgleichsbewegung bei

$$K = \left. \frac{\partial\kappa(0, \Delta y)}{\partial\Delta y} \right|_{0, y_0} < 0 \quad (6.5-9)$$

nicht-oszillierend aufklingend (Bild 6.4-3: Fall 1a) = INSTABIL). Diese statische Instabilitätsbedingung (6.5-9) wird direkt aus dem Anstieg der **statischen Gleichgewichtskurve**  $\kappa(0, y)$  im Gleichgewichtspunkt  $\kappa(0, y_0) = f$  ermittelt. Für jeden Gleichgewichtspunkt  $y_0$  wird somit die statische Instabilität überprüft mit (6.5-10).

$$K = \left. \frac{\partial\kappa(0, \Delta y)}{\partial\Delta y} \right|_{0, y_0} < 0 : \text{Instabil}; > 0 : \text{Stabil}; = 0 : \text{Grenzstabil (Bild 6.5-1)}. \quad (6.5-10)$$

Zur Untersuchung der statischen Stabilität in einem Gleichgewichtspunkt muss daher die Linearisierung der nichtlinearen Differentialgleichung (6.5-1) **nicht** durchgeführt werden. Es genügt, die statische Wandler-Kennlinie  $\kappa(0, y)$  gemäß Bild 6.5-1 zu betrachten. Das **grenzstabile („indifferente“)** Gleichgewicht ist nicht asymptotisch stabil, da nach einer lokalen Auslenkung  $\Delta y$  aus  $y_0$  das System nicht mehr nach  $y_0$  zurückkehrt (Bild 6.4-1).

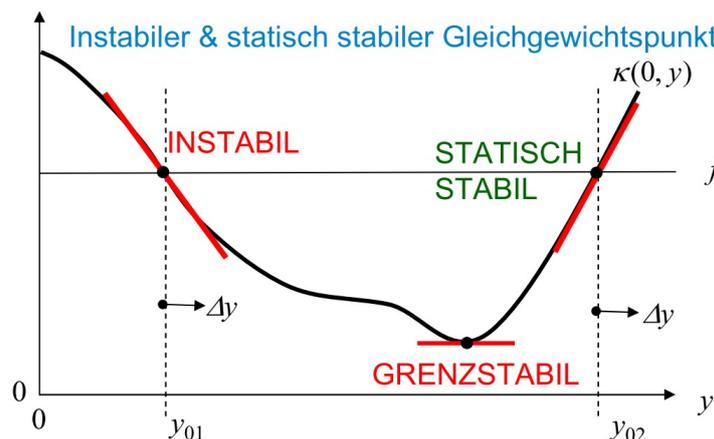


Bild 6.5-1: Ermittlung der statischen Stabilitätsbedingung aus der statischen Kurve des Wandlers in drei ausgewählten Gleichgewichtspunkten.

Der Punkt  $y_{02}$  in Bild 6.5-1 hat für „statische Stabilität“ die notwendige Bedingung  $K > 0$ . Sie ist aber für Stabilität nicht hinreichend, da für  $D < 0$  „dynamische“ Instabilität gemäß Bild 6.4-3 auftritt (= negative Dämpfung!). Formen der dynamischen Instabilität können daher mit dem „statischen Test“ (6.5-10) NICHT entdeckt werden.

In **elektromechanischen Wandlern und Aktoren** werden häufig Gleichgewichtslagen betrachtet. In einer stabilen Gleichgewichtslage RUHT das bewegliche Wanderteil.

Seine Lagekoordinate  $y = \text{konst.}$ , d. h. sein Ort  $y$  ist statisch bzw. alle Zeitänderungen sind Null ( $d./dt = 0$ ). Deshalb wird die dort ggf. stabile Ruhelage „**statisch stabil**“ genannt! Die Kurve der statischen Gleichgewichtslagen (= statische Wandlerkennlinie) gibt durch ihren räumlichen Anstieg im betrachteten Gleichgewichtspunkt  $d./dy$  Auskunft über die statische Stabilität.

Bei **rotierenden elektromechanischen Wandlern** (= elektrische Maschinen) gilt als stabiler „Gleichgewichtspunkt“ ein stabiler Betrieb mit konstanter Drehzahl  $n$  (bei zeitlich linear zunehmendem Drehwinkel  $\gamma$ ) und konstantem Drehmoment  $M$ . Diesen Betrieb bezeichnet man wegen der Rotation als STATIONÄR ( $n = (d\gamma/dt)/(2\pi) = \text{konst.}$ ), nicht statisch. Der mechanische Drehwinkel  $\gamma$  nimmt ständig zu:  $\gamma(t) = 2\pi \cdot n \cdot t + \gamma(t=0)$ . Die Stabilität solcher Gleichgewichtspunkte zwischen z. B. antreibendem E-Motormoment und bremsendem Lastmoment z. B. einer Pumpe wird mit der Methode der Linearisierung für kleine Drehzahlstörungen  $\Delta n$  der stationären  $M(n)$ -Kennlinien untersucht. Stabile Betriebspunkte sind **quasistatisch stabil** (besser: stationär stabil).

### 6.6 Dynamische Instabilität

Dynamische Instabilität kommt wegen  $D < 0$  durch „negative Dämpfung“ zustande (Bild 6.4-3). Die aufklingende Bewegung kann gemäß (6.4-14) oszillierend (Fall 2a)) oder nicht-oszillierend (Fall 1b)) sein.

Beispiel 6.6-1: Wandler mit  $n = 1$  Freiheitsgrad gemäß Bsp. 6.4-1  $T \cdot \Delta \ddot{y} + D \cdot \Delta \dot{y} + K \cdot \Delta y = 0$ . Parameter  $T > 0, K > 0, D < 0$  (negative Dämpfung bei positiver Masse und Federkonstante). Störung des Gleichgewichtspunkts  $\Delta y = 0$  durch die Anfangsbedingungen  $\Delta \dot{y}(t=0) = 0, \Delta y(t=0) = \Delta y_0 > 0$ .

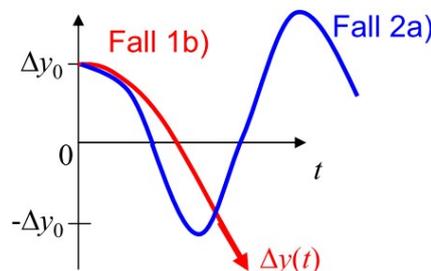


Bild 6.6-1: Anfangsbewegung eines Wandlers mit  $n = 1$  Freiheitsgrad  $y$  und  $D < 0$ :  
 Fall 1b):  $K < D^2/(4T)$ , Fall 2a)  $K > D^2/(4T)$ .

Zu Beginn ( $t = 0$ ) tritt wegen  $T \cdot \Delta \ddot{y}(0) + D \cdot \Delta \dot{y}(0) + K \cdot \Delta y(0) = 0$  die Anfangsbeschleunigung  $\Delta \ddot{y}(0) = -\Delta y(0) \cdot K / T$  auf. Das System wird gegen  $\Delta y(0) = \Delta y_0$  beschleunigt (Bild 6.6-1). Mit wachsender Geschwindigkeit steigt wegen  $T \cdot \Delta \ddot{y} = -D \cdot \Delta \dot{y} - K \cdot \Delta y$  und  $D < 0$  die antreibend wirkende Dämpfungskraft  $-D \cdot \Delta \dot{y}$ . Das System wird über den Punkt  $-\Delta y_0$  beschleunigt und kehrt im Fall 1b) nicht mehr um. Bei  $K > D^2/(4T)$  ist die Rückstellkraft so groß, dass das System zwar immer wieder umkehrt (Fall 2b, „oszillierend“), aber die Abstände der Umkehrpunkte von der Ruhelage  $\Delta y = 0$  nehmen exponentiell zu.

Für Fall 1b)  $K < D^2/(4T)$  sind die beiden Eigenwerte reell und positiv:

$$\lambda_1 = -\frac{D}{2T} + \frac{1}{2T} \cdot \sqrt{\underbrace{D^2 - 4 \cdot K \cdot T}_{>0}} > \lambda_2 = -\frac{D}{2T} - \frac{1}{2T} \cdot \sqrt{D^2 - 4 \cdot K \cdot T} > 0.$$

Mit der o. g. Anfangsbedingung ist die Lösung der Wandlerbewegung

$$\Delta y(t) = \frac{\Delta y_0}{1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \cdot \left( -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + e^{\lambda_2 \cdot t} \right).$$

Der dominante Eigenwert  $\lambda_1$  bewirkt, dass die Lösung gegen  $-\infty$  strebt.

Beispiel 6.6-2: Wandler mit  $n = 1$  Freiheitsgrad gemäß Bsp. 6.4-1  $T \cdot \Delta \ddot{y} + D \cdot \Delta \dot{y} + K \cdot \Delta y = 0$ . Parameter  $T > 0, K > 0, D = 0$  (ungedämpft bei positiver Masse und Federkonstante). Störung des Gleichgewichtspunkts  $\Delta y = 0$  durch die Anfangsbedingungen  $\Delta \dot{y}(0) = 0, \Delta y(0) = \Delta y_0$ . Es tritt eine ungedämpfte Dauerschwingung um den Gleichgewichtspunkt auf. Dies ist prinzipiell ein statisch stabiles Verhalten, aber häufig technisch unbrauchbar. Es ist positive Dämpfung  $D > 0$  nötig, um in den Ausgangszustand asymptotisch zurückzukehren!

$$\Delta \ddot{y} + \frac{K}{T} \cdot \Delta y = 0, \lambda_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{-4 \cdot K \cdot T}}{2T} = \pm j \cdot \frac{\sqrt{4 \cdot K \cdot T}}{2T} = \pm j \cdot \sqrt{K/T} = \pm j \cdot \omega,$$

$$\Delta y(t) = \frac{\Delta \dot{y}_0}{\omega} \cdot \sin(\omega \cdot t) + \Delta y_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) \stackrel{\Delta \dot{y}_0=0}{=} \Delta y_0 \cdot \cos(\omega \cdot t).$$

**6.7 Lineares System mit konstanten Koeffizienten: Beispiel**

Beispiel 6.7-1: Ungedämpfter Aktor von Kap. 6.1 mit Magnetkraft und Feder (Bild 6.7-1): Die Spule wird mit Gleichstrom  $i(t) = I$  bestromt. Die Feder ist entspannt bei  $x = x_0$  und hat die Federkraft  $F_F$  (6.7-1). Die Magnetkraft  $F_m$  (6.7-1) hängt nichtlinear von  $x$  ab.

$$F_F(x) = -k \cdot (x - x_0), \quad F_m(x) = \frac{I^2}{2} \cdot \frac{dL(x)}{dx} \tag{6.7-1}$$

Aus  $m \cdot \ddot{x} = F_m + F_F$  folgt bei  $\ddot{x} = \dot{x} = 0$  die Gleichgewichtslage  $x^*$  gemäß  $F_F(x^*) = -F_m(x^*)$ , die in Bild 6.7-1 graphisch ermittelt ist. Ist die Gleichgewichtslage  $x^*$  ein stabiler Arbeitspunkt bei einer kleinen „Störung“  $\Delta x = x - x^*$ ?

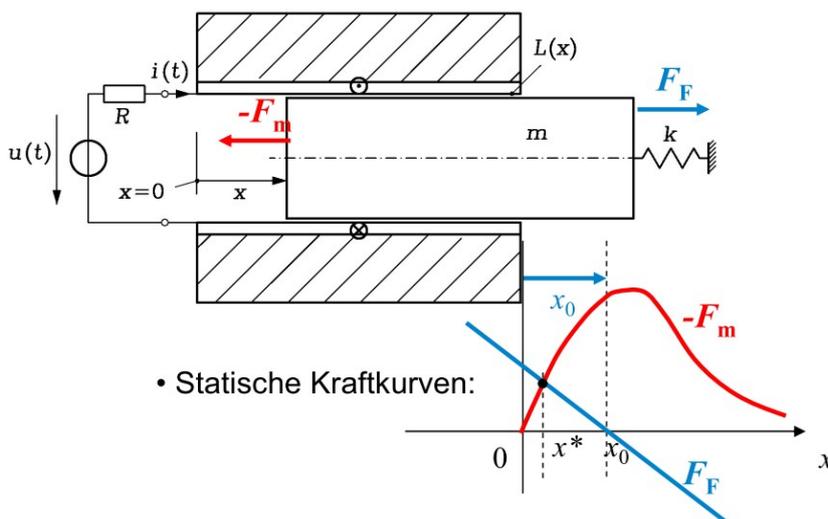


Bild 6.7-1: Gleichstromgespeister magnetischer Aktor  $u(t) = U$  mit dem Freiheitsgrad  $x$  ( $n = 1$ , siehe Kap. 6.1).

Auf Grund der statischen Kraftkurven (6.7-1) ohne eine Dämpfung erfolgt eine statische Stabilitätsbetrachtung mit (6.5-10) in (6.7-4), wobei die „magnetische Federkonstante“  $k_m(x^*) = dF_m/dx$  bei  $x^*$  verwendet wird.

$$m \cdot \ddot{x} = F_F + F_m \Rightarrow m \cdot \ddot{x} - F_F - F_m = 0, \tag{6.7-2}$$

$$m \cdot \Delta \ddot{x} + \left( -\frac{dF_F}{dx} \Big|_{x^*} - \frac{dF_m}{dx} \Big|_{x^*} \right) \cdot \Delta x = m \cdot \Delta \ddot{x} + (k - k_m) \cdot \Delta x = 0 \Rightarrow T \cdot \Delta \ddot{x} + K \cdot \Delta x = 0 \tag{6.7-3}$$

$$K(x^*) = \underbrace{-\frac{dF_F}{dx} \Big|_{x^*}}_{k > 0} - \underbrace{\frac{dF_m}{dx} \Big|_{x^*}}_{k_m(x^*) < 0} = k - k_m(x^*) = k_{\text{res}} > 0 : \text{ Gemäß (6.5-10) STABIL!} \tag{6.7-4}$$

Die resultierende Federkonstante  $K = k_{\text{res}}$  ist positiv. Daher ist die Gleichgewichtslage  $x^*$  ein stabiler Arbeitspunkt bei kleiner „Störung“  $\Delta x = x - x^*$ . In Anknüpfung an Kap. 6.5 existieren folgende Entsprechungen mit den dort allgemein angegebenen Funktionen  $\mu$  und  $\kappa$ :

$$\mu(0, y) \cdot \ddot{y} + \kappa(0, y) - f = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{m}{\mu_0}} \cdot \ddot{x} + \underbrace{k}_{\kappa(0, y)} \cdot x - \underbrace{k \cdot x_0}_f = 0,$$

$$\underbrace{\frac{\mu(0, y^*)}{T}} \cdot \Delta \ddot{y} + \underbrace{\frac{\partial \kappa}{\partial \Delta y}(0, y^*)}_K \cdot \Delta y = 0 \Leftrightarrow \frac{m}{T} \cdot \Delta \ddot{x} + \underbrace{\left( -\frac{dF_F}{dx} \Big|_{x^*} - \frac{dF_m}{dx} \Big|_{x^*} \right)}_K \cdot \Delta x = 0.$$

Für die statische Untersuchung  $d./dt = 0$  erfordert die Entsprechung von  $\kappa(0, y) - f$  mit  $-F_F(x) - F_m(x)$  gemäß Bild 6.5-1 die Darstellung Bild 6.7-2. Der für statische Stabilität nötige positive Anstieg  $K = \frac{\partial \kappa}{\partial \Delta y}(0, y_0) > 0$  entspricht im Beispiel dem positiven Anstieg  $-F'_F(x^*) - F'_m(x^*) > 0$  bzw.  $k - k_m(x^*) > 0$  (6.7-4). Das System ist bei  $x^*$  statisch stabil, weil gemäß Bild 6.7-2 dort die Tangentenneigung von  $\kappa(0, y) - f = -F_F(x) - F_m(x)$  im Arbeitspunkt  $x^*$  positiv ist.

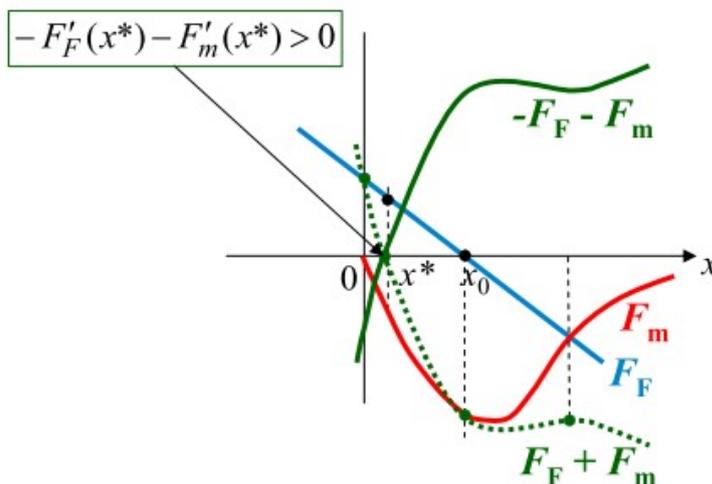


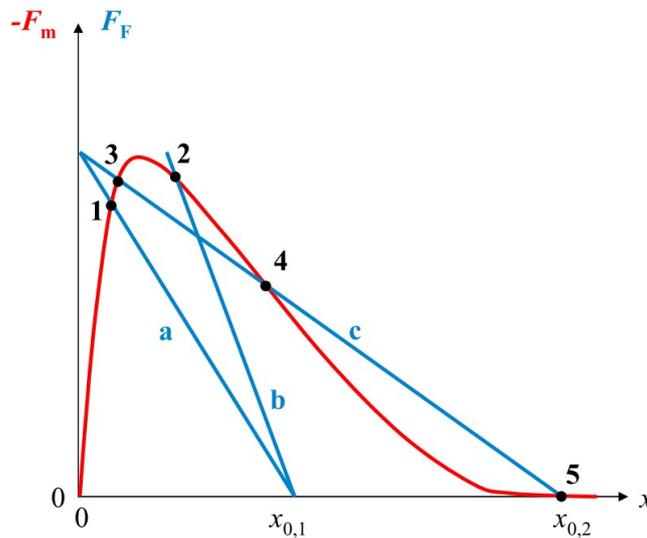
Bild 6.7-2: Graph der negativen Feder- und Magnetkraft (vgl. Bild 2.5-17) zu Bild 6.7-1.

Häufig erfolgt aber die Darstellung der statischen Kraftkennlinien nicht als Summe  $-F_F - F_m$ , sondern getrennt als  $F_F$  und  $-F_m$  (Bild 6.7-3). Das ändert nichts an der statischen Stabilitätsbedingung, aber man muss umdenken. Wegen  $k = -dF_F/dx > 0$  erscheinen in Bild 6.7-3 sowohl der negative Anstieg  $dF_F/dx = -k < 0$  im stabilen Arbeitspunkt als auch (mit  $k_m = dF_m/dx$ ) der negative Wert  $d(-F_m)/dx = -k_m$ .

In Bild 6.7-3 sind die Federn a und b entspannt bei  $x_{0,1}$ . Bei der kleineren Federkonstante  $k$  tritt Punkt 1 als statisch stabiler Arbeitspunkt auf, bei der größeren Federkonstante ist der Punkt 2 statisch stabil. Die schwächere Feder c ist entspannt bei  $x_{0,2}$ . Es sind zwei statisch stabile Gleichgewichtslagen 3 und 5 möglich, während Punkt 4 statisch instabil ist. Mit  $k > 0$  ist zusammengefasst

- 1:  $k_m < 0 \Rightarrow k - k_m > 0 \Rightarrow$  statisch stabil
- 2:  $k_m > 0, |k_m| < k \Rightarrow k - k_m > 0 \Rightarrow$  statisch stabil
- 3:  $k_m < 0 \Rightarrow k - k_m > 0 \Rightarrow$  statisch stabil
- 4:  $k_m > 0, |k_m| > k \Rightarrow k - k_m < 0 \Rightarrow$  statisch instabil
- 5:  $k_m > 0, |k_m| < k \Rightarrow k - k_m > 0 \Rightarrow$  statisch stabil

Die Masse  $m$  bewegt sich aus 4 je nach positiver bzw. negativer Größe  $\Delta x > 0$  bzw.  $\Delta x < 0$  nach 5 oder 3 und verharrt dort schwingend um die Ruhelage  $x_5$  oder  $x_3$ . Sind diese beiden Punkte auch dynamisch stabil, d. h. klingt die Schwingung ab?



**Bild 6.7-3:** Statische Kraftkurven des gleichstromgespeisten magnetischen Aktors von Bild 6.7-1 bei drei unterschiedlichen Federkonstanten  $k$  und zwei Federlängen  $x_{0,1}, x_{0,2}$ , so dass sich drei prinzipiell unterschiedliche Federkraftkennlinien a, b, c einstellen. Die Arbeitspunkte 1, 2, 3, 5 sind statisch stabil, der Punkt 4 ist statisch instabil.

Die linearisierte gekoppelte Diff.-gleichung (6.3-1) für diesen Wandler ist für Gleichspannungsspeisung  $u(t) = U, \Delta u(t) = 0$  mit dem Kopplungsfaktor  $K_0 = L'(x^*) \cdot i^*$

$$\Delta \ddot{x} + \frac{R}{L(x^*)} \cdot \Delta \dot{x} + \left( \frac{k_{res}}{m} + \frac{K_0^2}{m \cdot L(x^*)} \right) \cdot \Delta x + \frac{k_{res}}{m} \cdot \frac{R}{L(x^*)} \cdot \Delta x = \frac{K_0}{m \cdot L(x^*)} \cdot \Delta u = 0. \quad (6.7-5)$$

Die Bewegung  $\Delta x = x - x^*$  des Ankers  $m$  induziert die Spule, so dass überlagert zum Gleichstrom  $i^* = I$  ein veränderlicher Strom  $\Delta i$  fließt, der in (6.7-5) eliminiert ist. Mit

$$b_3 = 1, b_2 = \frac{R}{L(x^*)}, b_1 = \frac{k_{res}}{m} + \frac{K_0^2}{m \cdot L(x^*)}, b_0 = \frac{k_{res}}{m} \cdot \frac{R}{L(x^*)} \quad (6.7-5)$$

liefert das Hurwitz-Kriterium für statisch stabile Arbeitspunkte  $k_{res} > 0$ , so dass  $b_0 > 0$  ist, wegen  $L(x^*) > 0$

$$D_1 = b_1 > 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} b_1 & b_0 \\ b_3 & b_2 \end{vmatrix} = b_1 b_2 - b_0 b_3 = \frac{K_0^2}{m \cdot L^2(x^*)} > 0,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} b_1 & b_0 & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 \\ 0 & 0 & b_3 \end{vmatrix} = b_1 b_2 b_3 - b_3^2 b_0 = b_3 \cdot (b_1 b_2 - b_0 b_3) = b_3 \cdot D_2 = D_2 > 0,$$

dass die Schwingung in den statisch stabilen Arbeitspunkten wegen der über  $R > 0$  positiven Dämpfung asymptotisch abklingt, also auch dynamisch stabil ist. Bei statisch instabilen Arbeitspunkten ist  $K < 0$ , also gemäß (6.2-18) ist  $k_{\text{res}} < 0$  und damit  $b_0 < 0$ , so dass das Polynom mit -1 multipliziert werden muss, damit  $b_0 > 0$  ist. Dann sind  $b_3 < 0, b_2 < 0$ , während  $b_1 < 0$  oder  $b_1 > 0$  sein kann. Es ist weiterhin  $D_2 > 0$ , so dass  $D_3 < 0$  ist. Das System ist daher mit dem *Hurwitz*-Kriterium instabil trotz der positiven Dämpfung  $R > 0$ .

### Zusammenfassung:

Die vereinfachte dynamische Untersuchung eines Wandlersystems erfolgt durch Linearisierung des i. A. nichtlinearen Systems in einem Arbeitspunkt. Wegen dieser Vereinfachung bei nichtlinearen Systemen ist nur das Kleinsignalverhalten untersuchbar in der lokalen Umgebung um den Arbeitspunkt. Die statische Stabilitätsuntersuchung eines Systems im Arbeitspunkt erfolgt anhand statischer Kennlinien bei Vernachlässigung der Dämpfung. Dabei wurde die „magnetische Federkonstante“  $k_m = dF_m/dx$  verwendet, wenn die Zählweise der Magnetkraft in Richtung der Beschleunigung ist gemäß  $m \cdot \ddot{x} \uparrow, F_m \uparrow$ . Alternativ ist  $c_m = -dF_m/dx$ , wenn die Zählweise der Magnetkraft  $m \cdot \ddot{x} \uparrow, F_m \downarrow$  ist. Analog wird in kapazitiven Systemen (siehe Kap. 7.3) eine „elektrische Federkonstante“  $k_e = dF_e/dx$  verwendet, wenn die Zählweise der elektrischen Kraft  $m \cdot \ddot{x} \uparrow, F_e \uparrow$  ist. Die dynamische Stabilitätsuntersuchung eines linearisierten Systems im Arbeitspunkt berücksichtigt die Dämpfung. Bei negativer Dämpfung tritt „dynamische Instabilität“ auf.

## 7. Analyse ausgewählter elektromechanischer Wandler

Mit den Vorkenntnissen aus den Kap. 1 ... 6 werden vier Grundtypen elektromechanischer Wandler Typ 1 ... 4, je zwei magnetisch wirkende und je zwei kapazitiv wirkende Wandler besprochen und einige mögliche Anwendungen gezeigt.

### 7.1 Magnetischer Wandler „Typ 1“

Beim elektromagnetischen Wandler Typ1 (Bild 7.1-1) kann der bewegliche, magnetisierbare Anker mit der Masse  $m$  eine vertikale gedämpfte Schwingbewegung  $x(t)$  gegen die Feder mit der Federkonstante  $k$  ausführen. Die lineare Feder ist bei  $x = x_F$  entspannt. Als el. Dämpfung tritt bei Spannungsspeisung  $u(t)$  der Spule mit  $N$  Windungen der resultierende Widerstand aus Spulenwiderstand und Vorwiderstand  $R$  auf. Der Spulenstrom  $i(t)$  erregt das Magnetfeld  $B$ , dessen vereinfachtes Feldbild ohne Streufelder (Bild 7.1-2a) nur gemäß der in Bild 7.1-1 eingetragenen Feldlinien verläuft. Durch die konstante Breite der beiden Jochschenkel  $h$  und durch die doppelte Eisenbreite  $2h$  im Anker und Spulenbereich ist  $B$  überall annähernd gleich groß. Der mechanische Dämpfer ist als Luftdämpfer ausgeführt, wobei Luft durch Bohrungen im Dämpfer strömen muss und durch die dabei auftretenden Verwirbelungen mit dem Strömungswiderstand die Bewegung dämpft. Ein amagnetisches Distanzstück  $e$  auf dem Eisen verhindert einen „magnetischen Kurzschluss“ zwischen Anker und magnetisierbarem feststehendem Joch. Auch die beiden seitlichen Spaltweiten  $\delta$  für das dort reibungslose Bewegen verhindern einen „magnetischen Kurzschluss“. Dieser ist unerwünscht, da bei  $x = 0$  sonst nur die rel. Permeabilität  $\mu_r$  des Ankers  $m$  und des Jochs das Magnetfeld  $B(0)$  (7.1-3) und die zugehörige Magnetkraft bei erregter Spule bestimmen und so eine allfällige, unerwünschte Eisenremanenz  $B_R$  verstärkt wirksam würde. Beide Parameter  $\mu_r$ ,  $B_R$  können von Exemplar zu Exemplar schwanken und damit die Wandlerkraft bei  $x = 0$  stark variieren.

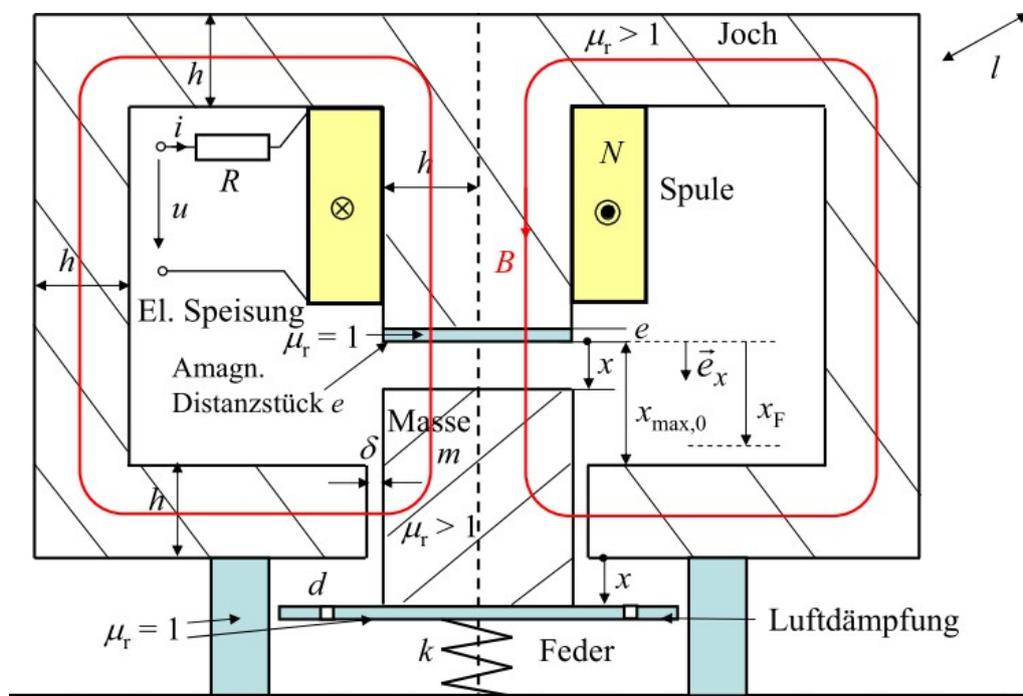


Bild 7.1-1: Elektromagnetischer Wandler Typ 1 mit magnetisierbarem Anker mit der Masse  $m$

Wegen der Geometrie mit gleichen flussführenden Querschnitten  $h \cdot l$  ist die Flussdichte  $B$  im Eisen- und Luftbereich identisch:  $B_{Fe} = B_{\delta} = B \Rightarrow H_{\delta} = B/\mu_0$ ,  $H_{Fe} = B/\mu_{Fe}$ ,  $\mu_{Fe} = \mu_0 \cdot \mu_r$ .

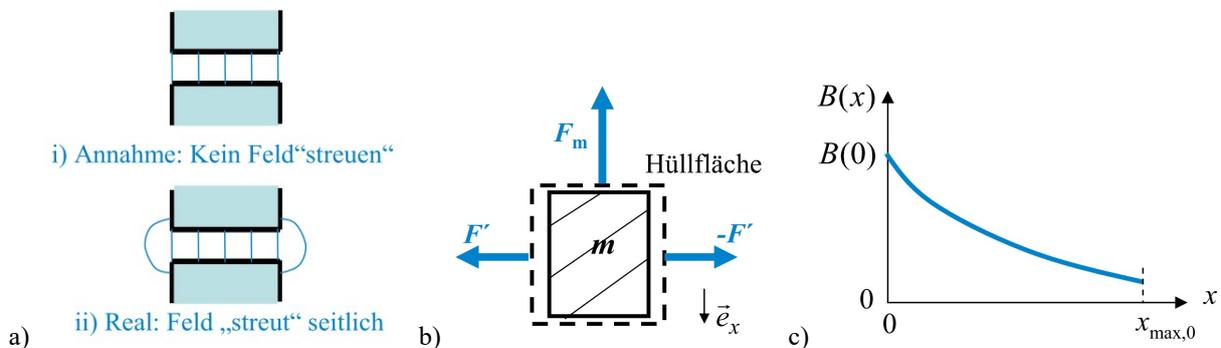
Im Folgenden wird daher mit der Annahme eines homogenen Felds  $B = \text{konst.}$  in allen Flussabschnitten gerechnet, so dass auch in den Eisenabschnitten  $\mu_{\text{Fe}} = \text{konst.}$  ist. Für den Durchflutungssatz (7.1-1) wählen wir als geschlossene Kurve  $C$  den Weg einer  $B$ -Feldlinie, deren Abschnitt im Eisen als Flussweg im Joch und im Anker die Länge  $l_{\text{Fe}}$  hat. Im Folgenden wird mit von  $B$  unabhängigem  $\mu_{\text{Fe}}$  gerechnet, so dass sich  $\mu_{\text{Fe}}$  nicht mit  $x$  ändert.

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = N \cdot i = H_{\text{Fe}} \cdot l_{\text{Fe}} + H_{\delta} \cdot (x + e + \delta) \tag{7.1-1}$$

$$N \cdot i = (B / \mu_{\text{Fe}}) \cdot l_{\text{Fe}} + (B / \mu_0) \cdot (x + e + \delta) \Rightarrow B(x) = \frac{N \cdot i}{(l_{\text{Fe}} / \mu_{\text{Fe}}) + ((x + e + \delta) / \mu_0)} \tag{7.1-2}$$

$$B(0) = \frac{N \cdot i}{(l_{\text{Fe}} / \mu_{\text{Fe}}) + ((e + \delta) / \mu_0)} \tag{7.1-3}$$

Die Flussdichte  $B$  nimmt mit steigendem Luftspalt  $x$ , wenn sich die Ankermasse  $m$  nach unten bewegt, hyperbolisch ab (7.1-2), und hat ihren Maximalwert (7.1-3) bei  $x = 0$ , durch  $e$  und  $\delta$  bestimmt (Bild 7.1-2c). Wenn der Luftdämpfer unten anschlägt, ist  $x_{\text{max},0}$  erreicht, so dass  $B$  minimal ist.



**Bild 7.1-2:** a) (i) Idealisierter und (ii) realer  $B$ -Felderlauf am Luftspalt  $x$ , b) Berechnung der resultierenden Magnetkraft  $F_m$  aus den *Maxwell*-Zugspannungen über eine geschlossenen Hüllfläche um den Anker, c) Luftspaltflussdichte  $B(x)$  bei veränderlicher Luftspaltweite  $x$ .

Die Kraft (7.1-4) auf den magnetisierbaren Anker, berechnet aus dem Integral der *Maxwell*-Zugspannungen über eine geschlossenen Hüllfläche um den Anker (Bild 7.1-2b), ergibt zwei sich gegenseitig aufhebende horizontale Teilkräfte  $F'$ ,  $-F'$  und die nach oben wirkende Magnetkraft  $F_m$ . Da am Anker unten kein Feld auftritt, gilt mit Kap. 2.3.2

$$\vec{F}_m = -\frac{B^2(x)}{2\mu_0} \cdot 2h \cdot l \cdot \vec{e}_x = -F_m \cdot \vec{e}_x \tag{7.1-4}$$

Die Magnetkraft  $F_m$  nimmt mit steigendem  $x$  ab. Mit demselben Feld  $B$  wird die Spuleninduktivität  $L(x)$  (7.1-5) aus der Spulenflussverkettung  $\Psi(x)$  berechnet. Sie nimmt mit dem gleichen Kurvenverlauf wie  $B(x)$  (Bild 7.1-2c) mit  $x$  ab.

$$L(x) = \frac{\Psi(x)}{i} = N \cdot \frac{\Phi(x)}{i} = N \cdot \frac{B(x) \cdot 2h \cdot l}{i} = \mu_0 \cdot N^2 \cdot \frac{2h \cdot l}{x + e + \delta + l_{\text{Fe}} \cdot (\mu_0 / \mu_{\text{Fe}})} \tag{7.1-5}$$

$$L(0) = \mu_0 \cdot N^2 \cdot \frac{2h \cdot l}{e + \delta + l_{\text{Fe}} \cdot (\mu_0 / \mu_{\text{Fe}})} \tag{7.1-6}$$

**Beispiel 7.1-1:** Wie groß ist bei der Ankerstellung  $0 \leq x \leq x_{\text{max},0}$  und dem Spulenstrom  $i$  die im Eisen und in Luft gespeicherte magnetische Energie  $W_{m,\text{Fe}}, W_{m,\text{Luft}}$  ?

**Antwort:** Wegen  $\mu_r = \text{konst.}$  sind magnetische Energie und Koenergie numerisch identisch:

$W_m^* = L(x) \cdot i^2 / 2 = W_m = \Psi^2(x) / (2L(x)) = W_{m,Luft} + W_{m,Fe}$ . Gemäß Kap. 2 wird die Energie aus Energiedichte  $w_m$  und Feldvolumen berechnet: Luftspaltvolumen  $V_{Luft} = 2h \cdot l \cdot (x + e + \delta)$ , Eisenvolumen  $V_{Fe} = 2 \cdot h \cdot l \cdot l_{Fe}$ . Im Luftspaltbereich von  $x$ ,  $\delta$  und  $e$  und im Eisen tritt überall derselbe Wert  $B$  auf, so dass  $w_{m,Luft} = B^2(x) / (2\mu_0) = w_{m,Fe}$  ist. Daraus folgt:

$$W_{m,Luft} = 2h \cdot l \cdot (x + e + \delta) \cdot B^2(x) / (2\mu_0), \quad W_{m,Fe} = 2h \cdot l \cdot l_{Fe} \cdot B^2(x) / (2\mu_{Fe}).$$

Deren Summe muss mit  $W_m = L(x) \cdot i^2 / 2$  aus (7.1-5) identisch sein.

$$W_m = \frac{L(x) \cdot i^2}{2} = \frac{N \cdot B(x) \cdot 2h \cdot l \cdot i^2}{2 \cdot i} = W_{m,Luft} + W_{m,Fe} = \frac{2h \cdot l}{2} \cdot B^2(x) \cdot \left( \frac{x + e + \delta}{\mu_0} + \frac{l_{Fe}}{\mu_{Fe}} \right)$$

Einsetzen von  $B(x) = \frac{N \cdot i}{((x + e + \delta) / \mu_0) + (l_{Fe} / \mu_{Fe})}$  für  $B^2(x)$  ergibt die Identität!

Im ungesättigten Eisen  $\mu_r \approx 1000 \dots 5000$  ist wegen  $l_{Fe} / \mu_r \ll x + e + \delta$  die magnetische Energie nahezu vollständig im Luftbereich gespeichert:  $W_{m,Luft} \gg W_{m,Fe}$ .

Beispiel 7.1-2: Sättigungsabhängig veränderliche Eisenpermeabilität:

$B(H)$ -Kennlinien des Eisen- oder Dynamoblechs (Fe-Si-Legierung) und die zugehörige Permeabilität  $\mu_{Fe}(H_{Fe}) = B_{Fe}(H_{Fe}) / H_{Fe}$  haben den in Bild 7.1-3 gezeigten typischen Verlauf bei vernachlässigter Hystereseschleife mit einer bei  $H_{Fe} = 0$  kleineren Anfangspermeabilität  $\mu_{Fe}(0)$ , einem Maximum  $\mu_{Fe,max}$  bei geringen Eisenfeldstärken  $H_{Fe}$  und einer deutlichen Abnahme von  $\mu_{Fe}$  bei größeren Werten von  $H_{Fe}$  auf Grund der Sättigung mit dem Grenzwert  $\mu_{Fe}(H_{Fe} \rightarrow \infty) = \mu_0$ . Mit dieser Abhängigkeit sind die Luftspaltflussdichte (7.1-2) und die Spuleninduktivität (7.1-5) iterativ aus (7.1-7) zu jedem Wertepaar  $(x, i)$  zu ermitteln, wobei  $\mu_{Fe}(B_{Fe}) = B_{Fe} / H_{Fe}(B_{Fe})$  benötigt wird.

$$B(x, i) = \frac{N \cdot i}{\frac{x + e + \delta}{\mu_0} + \frac{l_{Fe}}{\mu_{Fe}(B(x, i))}}, \quad L(x, i) = \mu_0 \cdot N^2 \cdot \frac{2h \cdot l}{x + e + \delta + l_{Fe} \cdot \frac{\mu_0}{\mu_{Fe}(B(x, i))}} \quad (7.1-7)$$

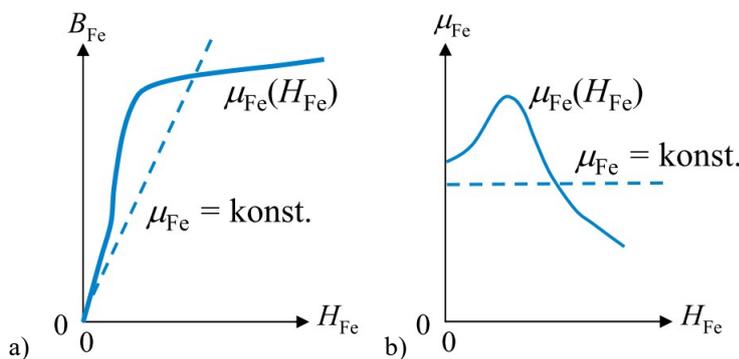


Bild 7.1-3: a) Typische  $B_{Fe}(H_{Fe})$ -Kennlinie von Dynamoblech, b) Zugehöriger typischer Verlauf von  $\mu_{Fe}$ . Gestrichelt ist die Vereinfachung  $\mu_{Fe} = \text{konst.}$  für einen mittleren Sättigungszustand eingetragen.

Aus (7.1-7) folgt  $B(i)$  für  $x = \text{konst.}$  iterativ und ist als typischer Verlauf in Bild 7.1-4a gezeigt. Daraus wird  $L(i)$  gemäß  $L(x, i) = \frac{\Psi(x, i)}{i} = N \cdot \frac{B(x, i) \cdot 2h \cdot l}{i} \sim \frac{B(x, i)}{i} = \tan \alpha$  bestimmt (Bild 7.1-4b).

Der unter dem Winkel  $\alpha$  geneigte Strahl schneidet  $B(i)$  für den gewählten Stromwert  $i$ , so dass der zugehörige Induktivitätswert „Sekanten“-Induktivität heißt.

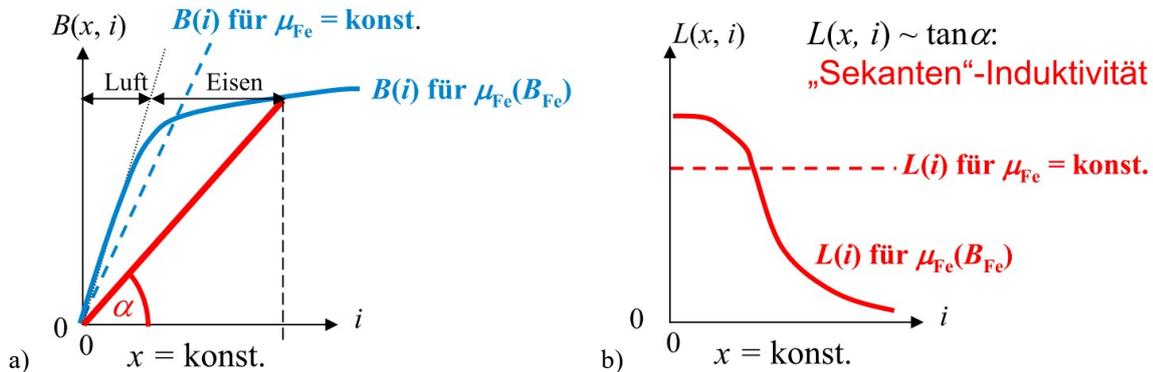


Bild 7.1-4: a) Typische Abhängigkeit der Luftspaltflussdichte  $B(i)$  für eine bestimmte Luftspaltweite  $x = \text{konst.}$ , b) Zugehöriger typischer Sekanten-Induktivitätsverlauf  $L(i)$ . Gestrichelt ist die Vereinfachung  $\mu_{Fe} = \text{konst.}$  für einen mittleren Sättigungszustand eingetragen.

Wird der Wandler bei Spulen-Gleichstromspeisung  $i_0 = \text{konst.}$  mit einem kleinen überlagerten Wechselstromanteil mit der Amplitude  $\Delta i/i_0 \ll 1$  betrieben, so besteht die Spulenflussverkettung aus einem konstanten Wert  $\Psi(i_0)$  und einer überlagerten kleinen Wechselgröße mit der Amplitude  $\Delta \Psi$ , wie die Taylor-Reihenentwicklung (7.1-8) zeigt.

$$\Psi(i(t)) = \Psi(i_0 + \Delta i(t)) \approx \underbrace{\Psi(i_0) + \left. \frac{d\Psi}{di} \right|_{i_0} \cdot \Delta i(t)}_{\Delta \Psi(t)} = L(i_0) \cdot i_0 + L_{\text{diff}}(i_0) \cdot \Delta i(t) \tag{7.1-8}$$

Darin ist  $L_{\text{diff}}(i_0) = d\Psi/di|_{i_0} \sim \tan \beta$  die **differentielle Induktivität** im Arbeitspunkt  $i_0$ , welche die Kleinsignal-Wechselflussverkettung  $\Delta \Psi$  in Abhängigkeit von  $\Delta i$  bestimmt. Sie wird aus der Tangente an die  $\Psi(i)$ -Kurve bei  $i_0$  ermittelt und ist auf Grund der geringeren Neigung  $\tan \beta < \tan \alpha$  kleiner als die Sekanteninduktivität  $L_{\text{diff}}(i_0) \leq L(i_0)$ , die für die Großsignale verwendet wird (Bild 7.1-5). Im Magnetkreis mit veränderlicher Sättigung wird somit im magnetischen Arbeitspunkt A ( $\Psi_0, i_0$ ) unterschieden zwischen der Sekanteninduktivität  $L$  für „große“ Signale als nichtlineares Element und der „differentiellen“ Induktivität  $L_{\text{diff}}$  für „kleine“ Änderungen  $\Delta \Psi$  und  $\Delta i$  im Arbeitspunkt ( $\Psi_0, i_0$ ) als linearisierte Induktivität. Bei  $\mu_{Fe} = \text{konst.}$  sind beide identisch:  $L = L_{\text{diff}}$ !

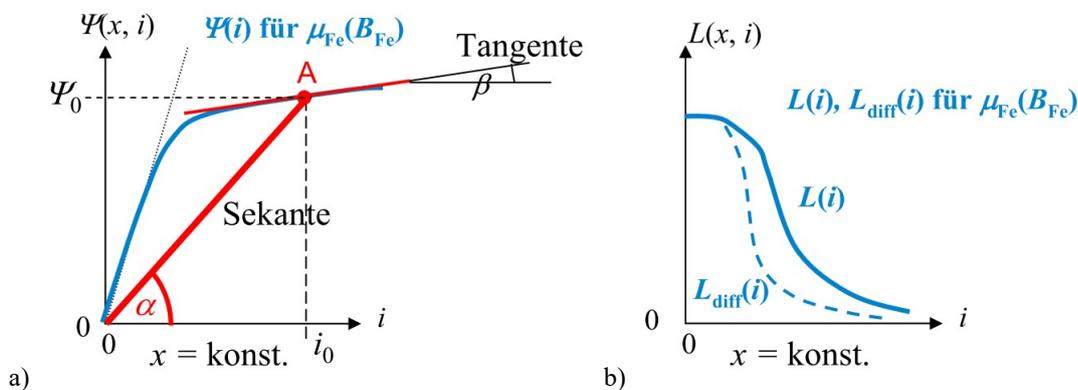


Bild 7.1-5: Für eine bestimmte Luftspaltweite  $x = \text{konst.}$ : a) Aus Bild 7.1-4a ermittelte Spulenflussverkettung und Bestimmung der Sekanteninduktivität und differentiellen Induktivität im Arbeitspunkt A, b) Verlauf der Sekanteninduktivität und der differentiellen Induktivität in Abhängigkeit des Gleichstroms  $i$ .

Im Folgenden wird „ideal“ magnetisierbares Eisen  $\mu_{Fe} \rightarrow \infty$  angenommen, so dass aus (7.1-5) die stromunabhängige Induktivität (7.1-9) folgt, die mit steigendem  $x$  abnimmt.

$$\mu_{Fe} \rightarrow \infty : L(x) = L_{diff}(x) = \mu_0 \cdot N^2 \cdot \frac{2h \cdot l}{x + e + \delta} = L_0(x) \quad (7.1-9)$$

Die Luftspaltflussdichte hängt von  $x$  und  $i$  ab, die Magnetkraft quadratisch von  $x$  und  $i$ .

$$B(x, i) = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot i}{x + e + \delta}, \quad \vec{F}_m = -\mu_0 \cdot \frac{(N \cdot i)^2}{2 \cdot (x + e + \delta)^2} \cdot 2h \cdot l \cdot \vec{e}_x = -F_m \cdot \vec{e}_x \quad (7.1-10)$$

Gemäß (2.4.4-23) kann die Magnetkraft aus  $F_m = -dW_m/dx = -\frac{d}{dx} \frac{L(x) \cdot i^2}{2} = -L'(x) \cdot i^2 / 2$

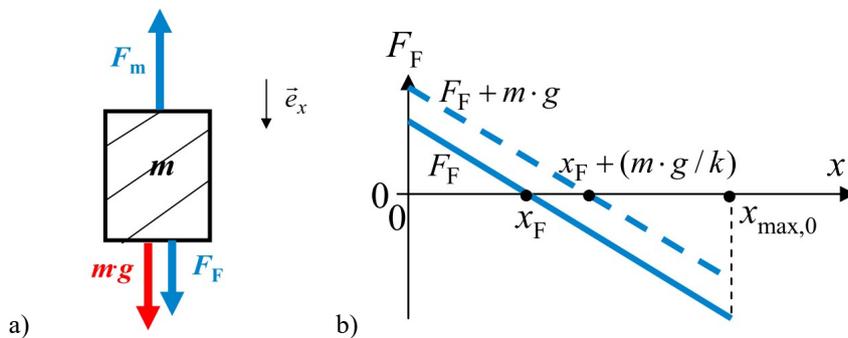
berechnet werden (7.1-11), was mit (7.1-10) übereinstimmt. Sie wirkt gegen die  $x$ -Richtung anziehend zum feststehenden Eisenkörper der Spule hin.

$$L'(x) = -\mu_0 \cdot N^2 \cdot \frac{2h \cdot l}{(x + e + \delta)^2} \Rightarrow F_m = \mu_0 \cdot (i \cdot N)^2 \cdot \frac{h \cdot l}{(x + e + \delta)^2} \quad (7.1-11)$$

Mit der in  $x$ -Richtung positiv gezählten Federkraft  $\vec{F}_F = F_F \cdot \vec{e}_x, F_F = -k \cdot (x - x_F)$  werden die Gleichgewichtslagen  $x$  des Ankers  $\vec{F}_m + \vec{F}_F + m \cdot g \cdot \vec{e}_x = 0$  (Bild 7.1-6a) bei Spulen-Gleichstrom  $i = I$  bestimmt. Die Feder ist entspannt bei  $x_F$  ( $0 < x_F < x_{max,0}$ ). Die hier exemplarisch berücksichtigte Schwerkraft  $m \cdot g \cdot \vec{e}_x$  bewirkt eine Federvorspannung um den Weg  $m \cdot g / k$  (Bild 7.1-6b). Mit (7.1-11) ergibt das Kräftegleichgewicht (7.1-12), siehe Bild 7.1-7.

$$\mu_0 \cdot \frac{(N \cdot I)^2}{2 \cdot (x + e + \delta)^2} \cdot 2h \cdot l = -k \cdot (x - x_F) + m \cdot g \Rightarrow x = X: \text{Gleichgewichtslage!} \quad (7.1-12)$$

Es kann maximal (bei  $I = 0$ )  $x_{max} = x_F + (m \cdot g / k) < x_{max,0}$  erreicht werden.



**Bild 7.1-6:** a) Kräftegleichgewicht am Anker des Wandlers von Bild 7.1-1, b) Federkennlinie (volle Linie) und Federspannung bei Einfluss der Ankerschwerkraft (gestrichelte Linie).

Bei kleinem Erregerstrom  $I_1$  ergibt sich ein statisch stabiler Arbeitspunkt 1 beim „großen“ Lagewert  $X_1$ , der nur wenig kleiner ist als  $x_{max}$  auf Grund der Schwerkraftvorspannung, da die Magnetkraft klein ist. Bei vergrößertem Erregerstrom  $I_2$  tritt der statisch stabile Arbeitspunkt 2 beim „verkleinerten“ Lagewert  $X_2 < X_1$  auf, da die Magnetkraft stärker nach oben zieht. Ein zweiter Arbeitspunkt  $2'$  tritt auf, ist aber statisch INSTABIL. Beim noch größeren Erregerstrom  $I_3$  laufen die beiden Arbeitspunkte 2,  $2'$  aufeinander zu in einen grenzstabilen Arbeitspunkt 3 bei „Minimal-Lagewert“  $X_3$ . Für  $0 \leq x \leq X_3$  ist KEINE statisch stabil Gleichgewichtslage möglich. Dort ist  $F_m > F_F + m \cdot g$  und beschleunigt die Masse in  $-x$ -Richtung. Die Masse schnappt zum Joch  $x = 0$  („pull-in“-Effekt) und klebt dort magnetisch fest mit der Klebekraft gemäß (7.1-12)  $\mu_0 \cdot \frac{(N \cdot I_3)^2}{2 \cdot (e + \delta)^2} \cdot 2h \cdot l - k \cdot x_F - m \cdot g > 0$ . Dabei ergibt

sich für positiven und negativen Strom wegen gleicher Magnetkraft dasselbe Resultat ( $\sim I^2$ ).

Für große Ströme  $I > I_3$  ist stets  $F_m > F_F + m \cdot g$ . Es tritt KEIN Schnittpunkt der beiden Kraftkurven  $F_m(x)$ ,  $F_F(x) + m \cdot g$  auf. Die Magnetkraft nach oben überwiegt stets, so dass die Ankermasse am Joch bei  $x = 0$  „klebt“.

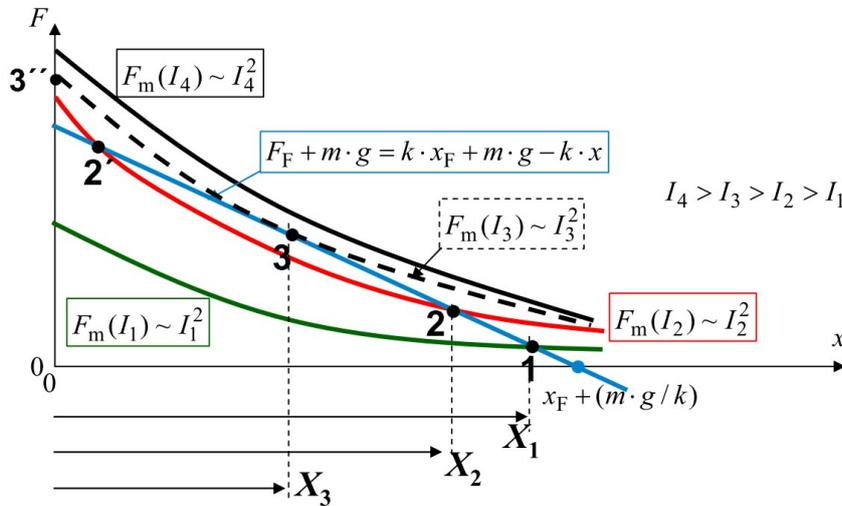


Bild 7.1-7: Kräftegleichgewicht am Anker des Wandlers von Bild 7.1-1 für die Gleichstromwerte  $I_4 > I_3 > I_2 > I_1$ .

Die statische Stabilitätsbedingung (6.5-10) liefert

$$K = -\frac{d(F_F(x) + m \cdot g)}{dx} + \frac{dF_m(x, I)}{dx} = k + F'_m(x, I) = k - k_m > 0, \quad (7.1-13)$$

$$k_m \cdot \vec{e}_x = d\vec{F}_m / dx = (-dF_m / dx) \cdot \vec{e}_x \Rightarrow k_m = -dF_m / dx = \frac{2\mu_0 \cdot (N \cdot I)^2 \cdot h \cdot l}{(X + e')^3}. \quad (7.1-14)$$

Hier ist die magnetische Federkonstante  $k_m = -dF_m/dx$ , denn die Zählweise der Magnetkraft ist  $m \cdot \ddot{x} \uparrow, F_m \downarrow$ . Gemäß (7.1-13) sind die Arbeitspunkte 1, 2 statisch STABIL, da  $|F'_m(x, I)| < k$  ist:  $K(X_1) = \underbrace{F'_m(X_1, I_1)}_{<0} + k > 0$ ,  $K(X_2) = \underbrace{F'_m(X_2, I_2)}_{<0} + k > 0$ .

Beim Arbeitspunkt 3 (STABILITÄTSGRENZE) ist  $K(X_3) = F'_m(X_3, I_3) + k = 0$ .

Hingegen ist Arbeitspunkt 2' statisch INSTABIL, denn mit  $|F'_m(x, I)| > k$  ist

$$K(X'_2) = \underbrace{F'_m(X'_2, I_2)}_{<0} + k < 0.$$

Die Gleichgewichtslagen werden aus (7.1-12) berechnet, wobei die Paare  $(I, X)$  als  $(I^2, X)$  gemäß (7.1-15) eine Parabel dritter Ordnung  $I^2(X)$  darstellen (Bild 7.1-8).

$$I^2 = \frac{(X + e + \delta)^2}{\mu_0 \cdot N^2 \cdot h \cdot l} \cdot (-k \cdot X + m \cdot g + k \cdot x_F), \quad X \geq 0. \quad (7.1-15)$$

Die Berechnung der Pull-in-Lage  $X_3$  aus  $F'_m(X_3, I_3) + k = 0$  führt mit der Abkürzung  $e' = e + \delta$  und (7.1-14) auf den Pull-in-Strom  $I_3$

$$\frac{2\mu_0 \cdot (N \cdot I_3)^2 \cdot h \cdot l}{(X_3 + e')^3} = k \Rightarrow I_3^2 = \frac{(X_3 + e')^3 \cdot k}{2\mu_0 \cdot N^2 \cdot h \cdot l}, \quad (7.1-16)$$

der auch die Gleichgewichtsbedingung (7.1-15) erfüllen muss, was auf (7.1-17) führt. Daraus folgt die Lösung für  $X_3$  gemäß (7.1-18). Einsetzen von  $X_3$  in (7.1-16) ergibt den pull-in-Strom (7.1-19), der sowohl positiv als auch negativ sein kann, wie oben erwähnt.

$$I_3^2 = \frac{(X_3 + e')^2}{\mu_0 \cdot N^2 \cdot h \cdot l} \cdot (-k \cdot X_3 + m \cdot g + k \cdot x_F) = \frac{(X_3 + e')^3 \cdot k}{2\mu_0 \cdot N^2 \cdot h \cdot l}, \quad (7.1-17)$$

$$X_3 = \frac{2}{3} \cdot \left( x_F + \frac{m \cdot g}{k} - \frac{e'}{2} \right). \quad (7.1-18)$$

$$I_3^2 = \frac{\left( \frac{2x_F}{3} + \frac{2 \cdot m \cdot g}{3k} - \frac{e'}{3} + e' \right)^3 \cdot k}{2\mu_0 \cdot N^2 \cdot h \cdot l} \Rightarrow I_3 = \pm \frac{2}{3N} \cdot \sqrt{\frac{(x_F + e' + (m \cdot g/k))^3 \cdot k}{3\mu_0 \cdot h \cdot l}}, \quad (7.1-19)$$

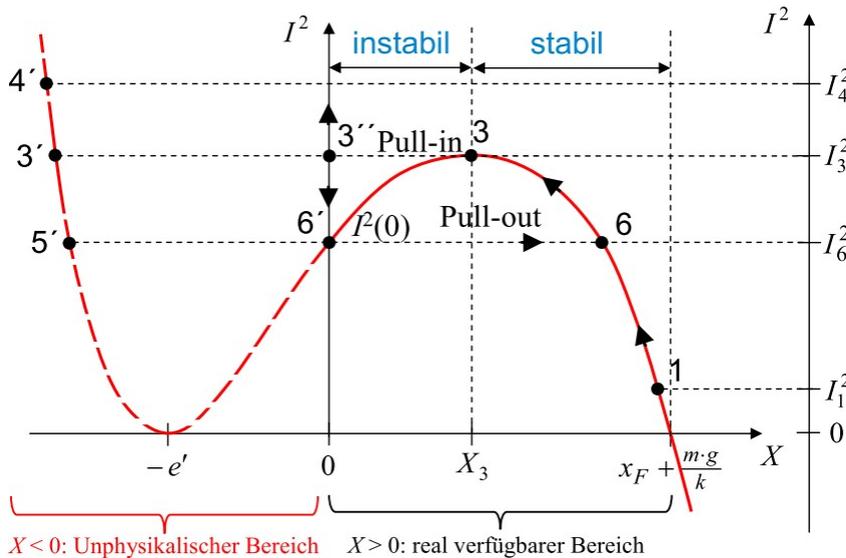


Bild 7.1-8: Gleichgewichtslagen des Wandler-Ankers von Bild 7.1-1 für unterschiedliche Gleichstromwerte  $I$ .

Gemäß Bild 7.1-8 entspricht die pull-in-Strom-Berechnung der Maximumberechnung von (7.1-15), da dies der größte Strom für eine Gleichgewichtslage ist:  $\frac{dI(X)}{dX} = 0 \Rightarrow \frac{dI^2(X)}{dX} = 0$ .

$$\frac{dI^2}{dX} = \frac{d}{dX} \left\{ \frac{(X + e')^2}{\mu_0 \cdot N^2 \cdot h \cdot l} \cdot (-k \cdot X + m \cdot g + k \cdot x_F) \right\} = 0, \text{ woraus folgt:}$$

$(X + e') \cdot \{-2k \cdot X + 2m \cdot g + 2k \cdot x_F - (X + e') \cdot k\} = 0$ . Da  $X = -e' < 0$  eine unphysikalische Lösung ist (Bild 7.1-8), verbleibt  $\{-2k \cdot X_3 + 2m \cdot g + 2k \cdot x_F - (X_3 + e') \cdot k\} = 0$ , woraus wieder (7.1-18) folgt. Bei der Lösung von (7.1-15) sind Werte  $x < 0$  bzw.  $X < 0$  unphysikalisch und ergeben auch negative Gleichgewichtslagen 3' (zum Strom  $I_3$ ), 4' (zum Strom  $I_4$ ), 5' (zum Strom  $I_6$ ) (Bilder 7.1-8 und 7.1-9). Wird der Strom von  $I > I_3$  wieder abgesenkt auf  $I < I_3$ , so bleibt der Anker solange bei  $x = 0$  am Joch kleben, solange die Magnetkraft groß genug ist:  $F_m > F_F + m \cdot g$ . Bei  $I_6 < I_3$  wird die Klebekraft Null:

$$F(6') = F_m(X = 0, I_6) - F_F(0) - m \cdot g = 0.$$

$$(7.1-15): I(X = 0) = \frac{e'}{N} \cdot \sqrt{\frac{m \cdot g + k \cdot x_F}{\mu_0 \cdot h \cdot l}} = I_6 \quad (7.1-20)$$

Nun kann sich der Anker wieder lösen. Der Punkt 6' ( $x = 0, I_6$ ) ist statisch instabil:  $F'_m(x = 0, I_6) + k < 0$  (Bild 7.1-9). Daher fällt die Masse  $m$  wegen der nun größeren Kraft  $F_F(x) + m \cdot g > F_m(x, I_6)$  nach unten bis zum nächsten stabilen Gleichgewichtspunkt 6, wo auch gilt  $F_m(X_6) = F_F(X_6) + m \cdot g$  (Bilder 7.1-8, 7.1-9). Dort bleibt sie hängen („pull-out“-Effekt).

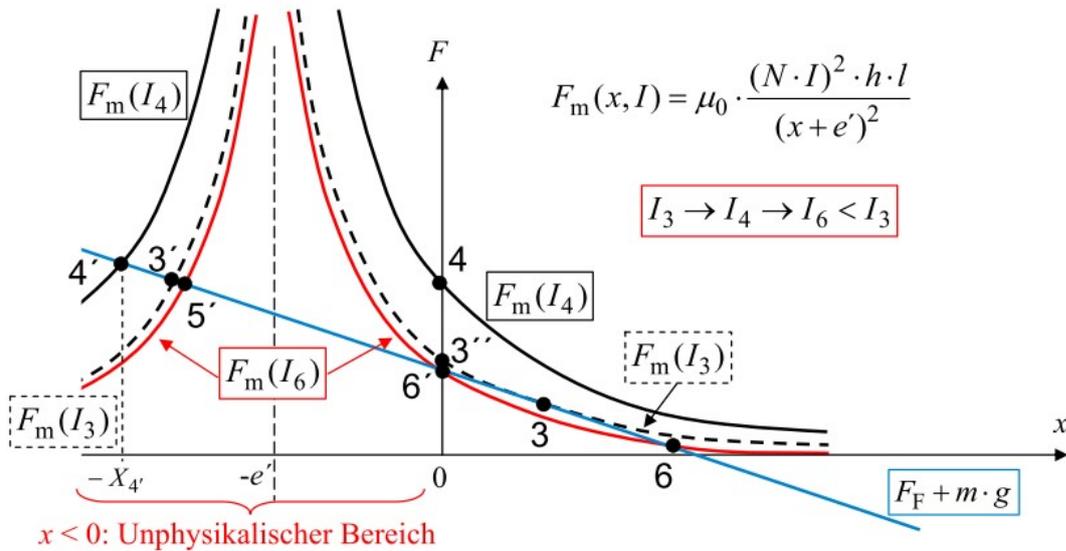


Bild 7.1-9: Reale und unphysikalische Gleichgewichtslagen des Wandler-Ankers von Bild 7.1-1 für unterschiedliche Gleichstromwerte  $I$ .

Es ergibt sich über pull-in- und pull-out-Effekt eine „Schalthysterese“  $I^2(X)$  für die Arbeitspunkte  $6 \rightarrow 3 \rightarrow 3'' \rightarrow 6' \rightarrow 6$ , indem der Strom von  $I_6$  auf  $I_3$  erhöht wird und danach wieder auf  $I_6$  abgesenkt wird.

Beispiel 7.1-3: Anwendung der Schalthysterese von Wandler Typ 1 als Schalter (Bild 7.1-10): Der Anker  $m$  des Wandlers Typ 1 wird als Schaltstück mit dem Hauptkontakt des Schalters für den Hauptstromkreis  $I_{Ha}$  ausgeführt. Der Strom in der Spule des Wandlers Typ 1 ist der Hilfsstromkreis  $I_{Hi}$ , über den der Schalter ein- und ausgeschaltet wird. Die Schalthysterese des Wandlers  $I_3 - I_6 > 0$  bewirkt, dass für das Ein- und Ausschalten des Schalters eindeutig voneinander getrennte Schaltschwellen definiert sind (Bild 7.1-11).

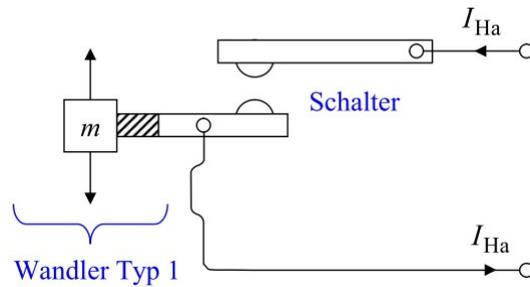


Bild 7.1-10: Anwendung der Schalthysterese von Wandler Typ 1 als Schalterantrieb eines el. Schalters im Hauptstromkreis mit dem Strom  $I_{Ha}$

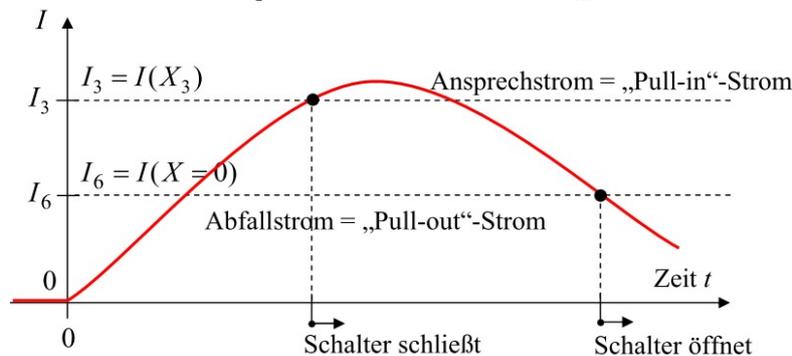


Bild 7.1-11: Anwendung der Schalthysterese von Wandler Typ 1 für das Ein- und Ausschalten des Schalters von Bild 7.1-10. Der Hilfsstromkreis ist die mit dem Strom  $I = I_{Hi}$  bestromte Wandlerspule, die das Schaltstück  $m$  bewegt.

Lägen Ein- und Ausschaltstrom  $I_3, I_6$  zu nahe beieinander, könnte schon eine geringfügige  $I_{Hi}$ -Stromschwankung infolge irgendeiner Störung ein unerwünschtes Ein- oder Ausschalten bewirken.

Die **dynamischen Gleichungen des Wandlers Typ 1** sind nichtlinear und enthalten sowohl eine elektrische als auch eine mechanische Dämpfung. Sie werden hier anstatt mit den *Lagrange*-Gleichungen mit den *Newton*- und *Kirchhoff*-Gleichungen hergeleitet. Für die mechanische Gleichung ergibt das dynamische Kräftegleichgewicht nach *Newton*

$$m \cdot \ddot{x} = F_F + m \cdot g - F_D - F_m \quad (7.1-21)$$

Die Dämpfungskraft wird näherungsweise geschwindigkeitsproportional als „zähe“ Strömung (Kap. 2)  $F_D = d \cdot \dot{x}$  angesetzt und bremst die Bewegung der Masse  $m$ ! Daher ist sie gegen die positive  $x$ -Richtung, in die  $\ddot{x} > 0$  wirkt, gerichtet, ähnlich wie die Magnetkraft  $F_m$  (Bild 7.1-2). Einsetzen von (7.1-11) ergibt wie, ähnlich wie in Kap. 6.7, den Ausdruck (7.1-22).

$$m \cdot \ddot{x} + d \cdot \dot{x} + k \cdot x - \frac{d}{dx} \left( \frac{L(x) \cdot i^2}{2} \right) = m \cdot \ddot{x} + d \cdot \dot{x} + k \cdot x - \frac{L'(x) \cdot i^2}{2} = k \cdot x_F + m \cdot g \quad (7.1-22)$$

Die *Kirchhoff*-Maschengleichung ergibt die elektrische Gleichung (7.1-23).

$$u = R \cdot i + \frac{d\psi}{dt} = R \cdot i + \frac{d(L(x) \cdot i)}{dt} = R \cdot i + L(x) \cdot \dot{i} + i \cdot L'(x) \cdot \dot{x}, \quad (\dot{a} = \frac{da}{dt}, a' = \frac{da}{dx}) \quad (7.1-23)$$

Der Ausdruck  $L(x) \cdot \dot{i}$  ist die **Ruh-Selbstinduktionsspannung** und  $i \cdot L'(x) \cdot \dot{x} \sim B \cdot v$  die **Spannung zufolge Bewegungsinduktion**. Mit (7.1-9)  $L(x) = \mu_0 \cdot N^2 \cdot \frac{2h \cdot l}{x + e'}$  folgt mit

$$L'(x) = -\mu_0 \cdot N^2 \cdot \frac{2h \cdot l}{(x + e')^2} \quad \text{aus (7.1-22, -23):}$$

$$m \cdot \ddot{x} + d \cdot \dot{x} + k \cdot x + \mu_0 N^2 \cdot \frac{i^2 \cdot h \cdot l}{(x + e')^2} = k \cdot x_F + m \cdot g, \quad (7.1-24)$$

$$\mu_0 \cdot N^2 \cdot \frac{2h \cdot l}{x + e'} \cdot i + R \cdot i - \mu_0 \cdot N^2 \cdot 2h \cdot l \cdot \frac{i}{(x + e')^2} \cdot \dot{x} = u(t). \quad (7.1-25)$$

Dieses in den Variablen  $i, x$  wegen  $i^2/(x + e')^2, i/(x + e'), i \cdot \dot{x}/(x + e')^2$  mehrfach nichtlineare gekoppelte Differentialgleichungssystem beschreibt das dynamische Großsignalverhalten von Wandler Typ 1 und muss zu den vorzugebenden Anfangsbedingungen  $\dot{x}(0), x(0), i(0)$  numerisch gelöst werden. Es wird in einem der o. g. Arbeitspunkte  $(I, X)$  Bild 7.1-8 linearisiert (siehe Kap. 6), um das dynamische Kleinsignalverhalten von Wandler Typ 1 zu beschreiben.

$$\begin{aligned} i(t) &= I + i_1(t), \quad |i_1/I| \ll 1; \quad u(t) = U + u_1(t), \quad |u_1/U| \ll 1; \\ x(t) &= X + x_1(t), \quad |x_1/X| \ll 1. \end{aligned} \quad (7.1-26)$$

Mit der Abkürzung  $X' = X + e'$  und (7.1-26) folgt für die nichtlinearen Terme

$$\frac{i}{x + e'} = \frac{I + i_1}{X + x_1 + e'} = \frac{I}{X'} \cdot \frac{1 + \frac{i_1}{I}}{1 + \frac{x_1}{X'}} \approx \frac{I}{X'} \cdot \left(1 + \frac{i_1}{I}\right) \cdot \left(1 - \frac{x_1}{X'}\right) \approx \frac{I}{X'} \cdot \left(1 + \frac{i_1}{I} - \frac{x_1}{X'}\right), \quad (7.1-27)$$

$$\frac{i^2}{(x + e')^2} \approx \frac{I^2}{X'^2} \cdot \left(1 + \frac{i_1}{I} - \frac{x_1}{X'}\right)^2 \approx \frac{I^2}{X'^2} \cdot \left(1 + 2 \frac{i_1}{I} - 2 \frac{x_1}{X'}\right) = \frac{I^2}{X'^2} + 2 \cdot \frac{I^2}{X'^2} \cdot \left(\frac{i_1}{I} - \frac{x_1}{X'}\right). \quad (7.1-28)$$

Mit  $\ddot{x} = \ddot{x}_1, \dot{x} = \dot{x}_1, \dot{i} = \dot{i}_1$  ergibt (7.1-24) mit (7.1-28) die linearisierte mechanische Gleichung (7.1-29). Die rechte Seite ist wegen des mech. Gleichgewichts im Arbeitspunkt (7.1-15) Null.

$$m \cdot \ddot{x}_1 + d \cdot \dot{x}_1 + k \cdot x_1 + \frac{2\mu_0 N^2 I^2 h \cdot l}{X'^2} \cdot \left( \frac{\dot{i}_1}{I} - \frac{x_1}{X'} \right) \cong k \cdot x_F + m \cdot g - k \cdot X - \frac{\mu_0 N^2 I^2 h \cdot l}{X'^2} = 0 \quad (7.1-29)$$

Aus (7.1-23) folgt mit  $u = R \cdot i + d(\mu_0 \cdot N^2 \cdot \frac{2h \cdot l \cdot i}{x + e'}) / dt$  und (7.1-27) Gl. (7.1-30)

$$U + u_1 \cong R \cdot (I + i_1) + \frac{d}{dt} \left( \mu_0 N^2 \cdot 2h \cdot l \cdot \frac{I}{X'} \cdot \left( 1 + \frac{\dot{i}_1}{I} - \frac{x_1}{X'} \right) \right), \quad (7.1-30)$$

worin nach Kürzen der el. Gleichgewichtsbedingung  $U = R \cdot I$  Gleichung (7.1-31) entsteht.

$$u_1 \cong R \cdot \dot{i}_1 + \mu_0 N^2 \cdot 2h \cdot l \cdot \frac{I}{X'} \cdot \left( \frac{\dot{i}_1}{I} - \frac{\dot{x}_1}{X'} \right) \quad (7.1-31)$$

Bitte beachten Sie, dass die Linearisierung über das Vernachlässigen von Produkten kleiner Größen (7.1-32) der Taylor-Reihenentwicklung mit Abbruch nach dem linearen Term (7.1-33) entspricht.

$$\xi \ll 1: f(\xi) = \frac{1}{(1 + \xi)^2} = \frac{1}{1 + 2\xi + \xi^2} \approx \frac{1}{1 + 2\xi} \approx 1 - 2\xi \quad (7.1-32)$$

$$\xi \ll 1: f(\xi) = \frac{1}{(1 + \xi)^2} \Big|_{|\xi| \ll 1} \approx 1 + \frac{df}{d\xi} \Big|_{\xi=0} \cdot \xi \Leftrightarrow \frac{df}{d\xi} \Big|_{\xi=0} = \frac{-2}{(1 + \xi)^3} \Big|_{\xi=0} = -2 \quad (7.1-33)$$

(7.1-29) und (7.1-31) sind das linearisierte dynamische Gleichungssystem für Kleinsignale zu (7.1-24), (7.1-25), abhängig u. A. von den arbeitspunktabhängigen Größen Spuleninduktivität  $L(X)$ , magnetische Federkonstante  $k_m$  und dem Kopplungsterm  $K_0$  (7.1-34).

$$m \cdot \ddot{x}_1 + d \cdot \dot{x}_1 + \underbrace{\left( k - 2\mu_0 \frac{(N \cdot I)^2}{X'^3} \cdot h \cdot l \right)}_{k_m} \cdot x_1 + \underbrace{\mu_0 \cdot \frac{N^2}{X'^2} \cdot 2h \cdot l \cdot I \cdot i_1}_{K_0} = 0 \quad (7.1-34)$$

$$\underbrace{\mu_0 \cdot \frac{N^2}{X'} \cdot 2h \cdot l \cdot \dot{i}_1}_{L(X)=L_0} + R \cdot \dot{i}_1 - \underbrace{\mu_0 \cdot \frac{N^2}{X'^2} \cdot 2h \cdot l \cdot I \cdot \dot{x}_1}_{K_0} = u_1$$

Mit der **resultierenden Federkonstante**  $K = k_{res} = k - k_m = \left( -dF_F / dx + dF_m / dx \right) \Big|_{x=X}$  schreiben wir für (7.1-34) das lineare gekoppelte Differentialgleichungssystem (7.1-35).

$$m \cdot \ddot{x}_1 + d \cdot \dot{x}_1 + k_{res} \cdot x_1 = -K_0 \cdot i_1 \quad (7.1-35)$$

$$L_0 \cdot \dot{i}_1 + R \cdot i_1 = u_1 + K_0 \cdot \dot{x}_1$$

**a) Für eingepprägten Gleichstrom**  $i = I = U/R = \text{konst.}$  mit  $u_1 = 0, i_1 = 0$  ergibt (7.1-35) nur noch eine (mech.) Differentialgleichung 2. Ordnung  $m \cdot \ddot{x}_1 + d \cdot \dot{x}_1 + k_{res} \cdot x_1 = 0$ . Die statische Stabilität im Arbeitspunkt ist gemäß Kap. 6 und (7.1-13) erfüllt bei  $K = k_{res} > 0$  bzw.  $k > k_m$  bzw.  $\left( -dF_F / dx + dF_m / dx \right) \Big|_{x=X} > 0$ . Die dynamische Stabilität ist gemäß Kap. 6 erfüllt, wenn die statische Stabilität erfüllt ist und die Dämpfung  $d > 0$  positiv ist, so dass statisch stabile Arbeitspunkte auch dynamisch stabil sind!

**b) Für eingepprägte Spannung**  $u(t) = U + u_1(t)$  muss (7.1-35) betrachtet werden. Durch Eliminieren von  $i_1$  in (7.1-35) entsteht eine linearisierte Differentialgleichung 3. Ordnung (7.1-36), denn es sind drei Energiespeicher (Feder  $k$ , Masse  $m$ , Induktivität  $L_0$ ) gekoppelt.

$$m \cdot \ddot{x}_1 + \left( d + \frac{R}{L_0} \cdot m \right) \cdot \dot{x}_1 + \left( k_{res} + \frac{K_0^2}{L_0} + \frac{R}{L_0} \cdot d \right) \cdot x_1 + \frac{R}{L_0} \cdot k_{res} \cdot x_1 = -\frac{K_0}{L_0} \cdot u_1(t) \quad (7.1-36)$$

Wegen der statische Stabilität  $k_{res} > 0$  sind die Koeffizienten in (7.1-36) bzw. (7.1-37) sämtlich positiv (7.1-38):  $b_3 > 0, b_2 > 0, b_1 > 0, b_0 > 0$ .

$$b_3 \cdot \ddot{x}_1 + b_2 \cdot \dot{x}_1 + b_1 \cdot \dot{x}_1 + b_0 \cdot x_1 = -(K_0 / L_0) \cdot u_1(t) \tag{7.1-37}$$

$$b_3 = m > 0, \quad b_2 = d + \frac{R}{L_0} \cdot m > 0, \quad b_1 = k_{\text{res}} + \frac{K_0^2}{L_0} + \frac{R}{L_0} \cdot d > 0, \quad b_0 = \frac{R}{L_0} \cdot k_{\text{res}} > 0 \tag{7.1-38}$$

Das Hurwitz-Kriterium

$$D_1 = b_1 > 0, \quad D_2 = b_1 \cdot b_2 - b_0 \cdot b_3 > 0, \quad D_3 = b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 + 0 + 0 - 0 - 0 - b_3^2 \cdot b_0 > 0, \tag{7.1-39}$$

$$D_2 = (k_{\text{res}} + \frac{K_0^2 + R \cdot d}{L_0}) \cdot (d + \frac{R}{L_0} \cdot m) - k_{\text{res}} \cdot \frac{R}{L_0} \cdot m = (k_{\text{res}} + \frac{K_0^2 + R \cdot d}{L_0}) \cdot d + \frac{K_0^2 + R \cdot d}{L_0^2} \cdot R \cdot m > 0, \tag{7.1-40}$$

$$D_3 = b_3 \cdot (b_1 \cdot b_2 - b_0 \cdot b_3) = m \cdot D_2 > 0, \tag{7.1-41}$$

liefert analog zu Kap. 6.7 die dynamische Stabilität zu jedem statisch stabilen Arbeitspunkt wegen der positiven Dämpfung  $d > 0$ . Auch bei Spannungsspeisung sind alle statisch stabilen Arbeitspunkte auch dynamisch stabil!

Die mechanischen und elektrischen Dämpfungsparameter können mit der Einheit  $\text{rad/s} = 1/\text{s}$  dargestellt werden gemäß  $\omega_d = d/m$  und  $\omega_L = R/L$ . Wenn z. B. eine bewegte Masse  $m$  in ihrer Bewegung  $v$  mit  $d = \text{konst.}$  proportional zu  $v$  gebremst wird, verringert sich ihre Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  gemäß (7.1-42). Nach der Zeitkonstante  $T_d = 1/\omega_d$  ist ihre Geschwindigkeit auf  $v_0/e$  abgesunken (Bild 7.1-12).

$$m \cdot \dot{v} + d \cdot v = 0, \quad v(0) = v_0: \quad v(t) = v_0 \cdot e^{-t/T_d}, \quad T_d = 1/\omega_d = m/d \tag{7.1-42}$$

Gemäß den verallgemeinerten Geschwindigkeiten  $v$  und  $i$  werden die bewegten el. Ladungen  $Q$  mit  $R = \text{konst.}$  proportional zu  $i$  gebremst. Die el. Stromstärke verringert sich von ihrem Anfangswert  $i_0$  gemäß (7.1-43) und ist nach der Zeitkonstante  $T_L = 1/\omega_L$  auf den Wert  $i_0/e$  abgeklungen.

$$L_0 \cdot \dot{i} + R \cdot i = 0, \quad i(0) = i_0: \quad i(t) = i_0 \cdot e^{-t/T_L}, \quad T_L = 1/\omega_L = L_0/R \tag{7.1-43}$$

Es sind somit  $\omega_d = d/m$  und  $\omega_L = R/L_0$  die inversen Zeitkonstanten des Abklingens einer mech. Geschwindigkeit oder eines el. Stroms auf Grund konstanter „Dämpfung“ durch mechanische Reibung bzw. el. Widerstand!

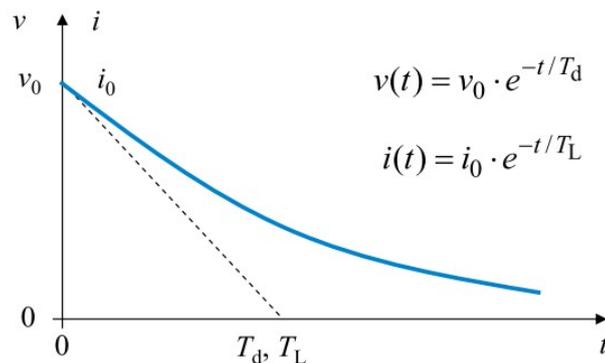


Bild 7.1-12: Abklingen einer mech. Geschwindigkeit oder eines el. Stroms auf Grund konstanter Dämpfung durch mechanische Reibung bzw. el. Widerstand!

**Beispiel 7.1-4:** Anwendung des Kleinsignalverhaltens von Wandler Typ 1 als Schwingungsmesser (Bild 7.1-13):

In Bild 7.1-13 ist  $y_1$  die Schwingungselongation (= Oberflächenbewegung) der hier untersuchten Maschinenoberfläche z. B. einer Stanzmaschine, relativ zum Fundament, auf dem sie aufgestellt ist. Das Fundament hat eine so große Masse, dass es nicht schwingt

$$(m_{\text{Fu}} \cdot \ddot{x}_{\text{Fu}} = F \Rightarrow \ddot{x}_{\text{Fu}} = F/m_{\text{Fu}} \xrightarrow{m_{\text{Fu}} \rightarrow \infty} 0).$$

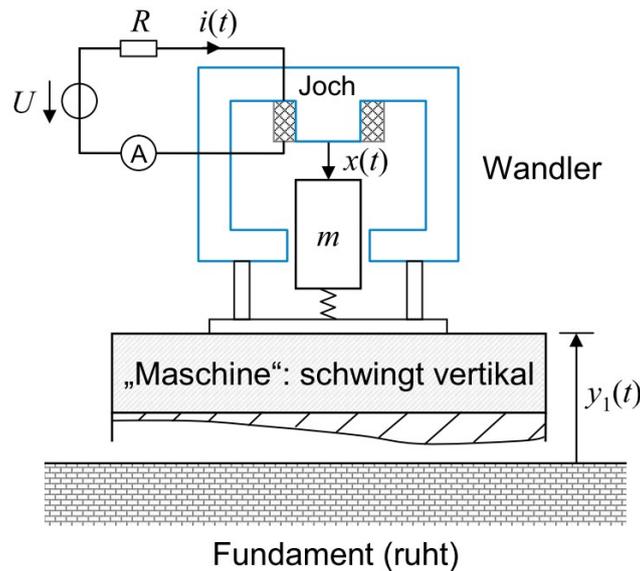


Bild 7.1-13: Anwendung des Kleinsignalverhaltens von Wandler Typ 1 als Schwingungsmesser

Mit der Spulen-Gleichspannung  $U$  wird der Arbeitspunkt  $(I, X)$  der Ankermasse  $m$  eingestellt, wobei  $X$  die Gleichgewichtslage der Masse  $m$  relativ zum Wandlerjoch ist und  $I = U/R$ , daher  $i(t) = I + i_1(t)$ . Dann ist  $x_1(t)$  mit  $x(t) = X + x_1(t)$  die Verschiebung von  $m$  relativ zum Joch zufolge der Anregung  $y_1(t)$  und  $i_1(t)$  die Stromänderung zufolge der induzierten Spulenspannung auf Grund der  $m$ -Bewegung  $x_1(t)$ . Die Messkette enthält  $y_1$  als primäre Messgröße. Sie bewirkt  $x_1(t)$ , so dass  $i_1(t)$  fließt. Mit einem Ampere-Meter wird  $i_1$  als sekundäre Messgröße gemessen und so die Schwingungsgröße  $y_1$  erfasst! Es lassen sich nur kleine Werte  $y_1$  messen. Nur dann sind  $x_1/X$  und  $i_1/I$  so klein, dass der Wandler linear ist, so dass gilt  $y_1 \sim i_1$ . Dies reicht aus, denn in der Realität treten schon bei kleinem  $y_1$  wegen der i. A. hohen Wiederholrate der Schwingbewegung durch die Wechselbeanspruchung Materialermüdungserscheinungen auf (hohe Zyklenzahl in der *Wöhler*-Kurve des Materials). Es ergeben sich folgende praktische Aufgabenstellungen für sinusförmige Schwingungen:

- a) Herleiten der Beziehung zwischen  $i_1$  und  $y_1$  im Frequenzbereich,
- b) Bestimmen des Amplituden-Frequenzgangs  $i_1(y_1)$  im Arbeitspunkt jeweils für „kleinen“ und „großen“ Gleichstrom  $I$ , bezogen auf den Stabilitätsbereich. Dabei sind folgende Fragen zu beantworten:
  - In welchem Frequenzbereich ist das Stromsignal proportional zur Schwingungsamplitude, zur Schwinggeschwindigkeit, zur Schwingbeschleunigung oder unbrauchbar?
  - Treten im Frequenzgang der Messkette Resonanzfrequenzen  $\omega_{Res}$  auf, speziell für die üblichen kleinen mechanischen Dämpfungen  $\omega_d = d/m \ll \omega_{Res}$ ! Wie groß ist der Einfluss einer „kleinen“ und „großen“ elektrischen Dämpfung  $\omega_L = R/L_0$  bezüglich  $\omega_{Res}$ ?

a) Herleiten der Beziehung zwischen  $i_1$  und  $y_1$  im Frequenzbereich:

Die Ankermasse  $m$  bewegt sich gegenüber dem Fundament mit dem Weg  $x_1(t) - y_1(t)$ , so dass die Beschleunigung  $\ddot{x}_1 - \ddot{y}_1$  wirkt. Die Spule wird mit  $u(t) = U + u_1(t)$  aus einer idealen Gleichspannungsquelle  $u = U$  versorgt, so dass  $u_1 = 0$  ist. Die Luft wird im geschlossenen Wandler mitbewegt, so dass nur  $x_1(t)$  mechanisch dämpfend wirkt:  $d \cdot \dot{x}_1$ . Aus (7.1-35) erhalten wir (7.1-44), (7.1-45).

$$m \cdot (\ddot{x}_1 - \ddot{y}_1) + d \cdot \dot{x}_1 + \left( -dF_F / dx + dF_m / dx \right)_{x=X} \cdot x_1 = -K_0 \cdot i_1 \tag{7.1-44}$$

$$L_0 \cdot \dot{i}_1 + R \cdot i_1 = K_0 \cdot \dot{x}_1 \tag{7.1-45}$$

Mit Verwendung der komplexen Rechnung für den eingeschwungenen Zustand einer Dauerschwingung mit der Schwingkreisfrequenz  $\omega$  bzw. Schwingfrequenz  $f = \omega/(2\pi)$  ist der Schwingweg der Ausdruck (7.1-46) mit der Amplitude  $\hat{Y}_1$ . Seine Phasenlage wird Null gesetzt, um alle anderen Wechselgrößen mit ihren Phasenlagen  $\varphi_x, \varphi_i$  auf ihn zu beziehen.

$$y_1(t) = \hat{Y}_1 \cdot \cos \omega t = \operatorname{Re} \left\{ \hat{Y}_1 \cdot e^{j\omega t} \right\}, \quad \hat{Y}_1 = \hat{Y}_1. \quad (7.1-46)$$

Die Lösungsfunktionen von (7.1-44, -45) werden daher ebenfalls komplex angesetzt (7.1-47).

$$x_1(t) = \operatorname{Re} \left\{ \hat{X}_1 \cdot e^{j\omega t} \right\}, \quad \hat{X}_1 = \hat{X}_1 \cdot e^{j\varphi_x}; \quad i_1(t) = \operatorname{Re} \left\{ \hat{I}_1 \cdot e^{j\omega t} \right\}, \quad \hat{I}_1 = \hat{I}_1 \cdot e^{j\varphi_i}. \quad (7.1-47)$$

Aus (7.1-44, -45) folgt mit  $m \cdot \ddot{x}_1 + d \cdot \dot{x}_1 + k_{\text{res}} \cdot x_1 = -K_0 \cdot i_1 + m \cdot \ddot{y}_1$  und (7.1-46, -47) die gesuchte Beziehung (7.1-48) im Frequenzbereich.

$$\begin{aligned} -m \cdot \omega^2 \hat{X}_1 + j d \cdot \omega \hat{X}_1 + k_{\text{res}} \cdot \hat{X}_1 &= -K_0 \cdot \hat{I}_1 - m \cdot \omega^2 \cdot \hat{Y}_1 \\ j \omega L_0 \cdot \hat{I}_1 + R \cdot \hat{I}_1 &= K_0 \cdot j \omega \cdot \hat{X}_1 \end{aligned} \quad (7.1-48)$$

**b) Bestimmen des Amplituden-Frequenzgangs  $i_1(y_1)$  im Arbeitspunkt:**

Gesucht ist die Funktion der Abhängigkeit  $\hat{I}_1(\hat{Y}_1)$ . Dazu wird  $\hat{X}_1$  in (7.1-48) eliminiert.

$$\hat{X}_1 = \frac{R + j\omega L_0}{j\omega \cdot K_0} \cdot \hat{I}_1 \Rightarrow (-\omega^2 \cdot m + j\omega \cdot d + k_{\text{res}}) \cdot \frac{R + j\omega L_0}{j\omega \cdot K_0} \cdot \hat{I}_1 = -K_0 \cdot \hat{I}_1 - \omega^2 \cdot m \cdot \hat{Y}_1 \quad (7.1-49)$$

Wir erhalten den gesuchten Frequenzgang (7.1-50).

$$\frac{\hat{I}_1}{\hat{Y}_1} = \frac{-\omega^2 \cdot m}{K_0 + \frac{R + j\omega L_0}{j\omega \cdot K_0} \cdot (-\omega^2 \cdot m + j\omega \cdot d + k_{\text{res}})} = \frac{-\omega^2}{\frac{K_0}{m} + \frac{R + j\omega L_0}{j\omega \cdot K_0} \cdot \left( \frac{k_{\text{res}}}{m} - \omega^2 + j\omega \cdot \frac{d}{m} \right)} \quad (7.1-50)$$

Die Umformung (7.1-51) mit  $K_0$  aus (7.1-34),  $X_3$  aus (7.1-18),  $x_{\text{max}} = x_F + ((m \cdot g)/k)$  gemäß Bild 7.1-6 führt über (7.1-52) auf den Amplitudengang (7.1-53) in Abhängigkeit von  $X$  und  $I$ .

$$\frac{\hat{I}_1}{\hat{Y}_1} = \frac{K_0}{L_0} \cdot \frac{-\omega^2}{\frac{K_0^2}{m \cdot L_0} + \left( \frac{R}{j\omega L_0} + 1 \right) \cdot \left( \frac{k_{\text{res}}}{m} - \omega^2 + j\omega \cdot \frac{d}{m} \right)}, \quad (7.1-51)$$

$$\frac{K_0}{L_0} = \frac{I}{X + e'}, \quad \frac{K_0^2 \cdot L_0}{m} = \frac{2k}{m} \cdot \frac{x_{\text{max}} - X}{X + e'}, \quad \frac{k_{\text{res}}}{m} = \frac{3k}{m \cdot (X + e')} \cdot (X - X_3), \quad (7.1-52)$$

$$\frac{\hat{I}_1}{\hat{Y}_1} = -\frac{I}{X + e'} \cdot \frac{\omega^2}{\frac{2k}{m} \cdot \frac{x_{\text{max}} - X}{X + e'} + \left( 1 + \frac{R}{j\omega L_0} \right) \cdot \left( -\omega^2 + j\omega \cdot \frac{d}{m} + \frac{3k \cdot (X - X_3)}{m \cdot (X + e')} \right)} \quad (7.1-53)$$

Das Strommesssignal  $\hat{I}_1$  ist proportional zum Gleichstrom  $I(X)$ , der gemäß (7.1-15) von  $X$  abhängt, und sinkt mit  $X$ . Aus (7.1-53) folgt mit  $\omega_1, \omega_2$  (7.1-54) der Frequenzgang (7.1-55), der in stabilen Arbeitspunkten  $(I, X)$ , Bild 7.1-14,  $X_3 \leq X \leq x_{\text{max}}, 0 \leq I \leq I_3$ , untersucht wird.

$$\omega_1^2 := \frac{3k}{m} \cdot \frac{X - X_3}{X + e'}, \quad \omega_2^2 := \frac{2k}{m} \cdot \frac{x_{\text{max}} - X}{X + e'} \quad (7.1-54)$$

$$\frac{\hat{I}_1}{\hat{Y}_1} = -\frac{I}{X + e'} \cdot \frac{\omega^2}{\omega_2^2 + \left( 1 + \frac{\omega_L}{j\omega} \right) \cdot \left( \omega_1^2 - \omega^2 + j\omega \cdot \omega_d \right)} \quad (7.1-55)$$

In Bild 7.1-14 wird der Amplitudengang (Betragsfrequenzgang) im Arbeitspunkt 1) bei **kleinem Strom**  $I (X \cong x_{\text{max}})$  untersucht (Fall b1), wo  $\omega_1 \approx \sqrt{k/m}, \omega_2 \approx 0$  ist, und danach im Arbeitspunkt 2) bei **großem Strom**  $I \cong I_3 (X \cong X_3)$ , wo  $\omega_1 \approx 0, \omega_2 \approx \sqrt{k/m}$  ist (Fall b2).

Der Phasengang (= Frequenzgang der Phasenverschiebung) zwischen  $i_1(t)$  und  $y_1(t)$  wird hier aus Platzgründen nicht untersucht!

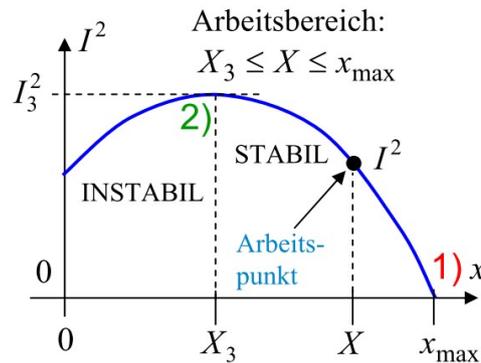


Bild 7.1-14: Stabiler Arbeitsbereich für die Schwingungsmessung  $X_3 \leq X \leq x_{\max}$ : 1) Arbeitspunkt mit kleinem Spulenstrom bei  $X \cong x_{\max}$ , 2) Arbeitspunkt mit großem Spulenstrom  $I \cong I_3$  bei  $X \cong X_3$ .

b1) „Kleiner“ Gleichstrom  $I$  bei  $X \cong x_{\max}$ :

Der Betrag von (7.1-55) für  $\omega_2 = 0$  ist, bezogen auf  $I/(X + e') \approx I/(x_{\max} + e')$ ,

$$\omega_2 = 0: \frac{\hat{I}_1/I}{\hat{Y}_1/(X + e')} = \ddot{u} = \frac{\omega^3 \cdot \omega_L}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_L}\right)^2\right] \cdot \left[(\omega_1^2 - \omega^2)^2 + (\omega \cdot \omega_d)^2\right]}} \quad (7.1-56)$$

Die schwingungsabhängige Wechselstromamplitude  $\hat{I}_1$  ist maximal („Resonanz“), wenn der Nenner in (7.1-56)  $N(\omega^2) = (\omega_1^2 - \omega^2)^2 + (\omega \cdot \omega_d)^2$  minimal ist, so dass gilt:

$$\frac{dN(\omega^2)}{d\omega^2} = \frac{dN(\xi)}{d\xi} = \left[ (\omega_1^2 - \xi)^2 + \xi \cdot (\omega_d)^2 \right]' = 0 \rightarrow -2 \cdot (\omega_1^2 - \xi) + (\omega_d)^2 = 0, \quad (7.1-57)$$

$$\xi = \omega^2 = \omega_1^2 - \frac{1}{2} \cdot (\omega_d)^2, \quad \omega = \omega_{\text{Res}} = \sqrt{\omega_1^2 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{d}{m}\right)^2} \quad (7.1-58)$$

Die Resonanzbedingung (7.1-57) führt zur **Resonanzkreisfrequenz**  $\omega_{\text{Res}}$ , die bei schwacher mech. Dämpfung  $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{d}{m} \ll \omega_1 \approx \sqrt{k/m}$  etwa durch (7.1-59) bestimmt ist. Die el. Dämpfung  $\omega_L$  hat auf (7.1-58) keinen Einfluss!

$$\omega_{\text{Res}} \cong \omega_1 = \sqrt{\frac{3k}{m} \cdot \frac{X - X_3}{X + e'}} \approx \sqrt{\frac{3k}{m} \cdot \frac{x_{\max} - X_3}{x_{\max} + e'}} = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (7.1-59)$$

Bei Resonanz ist der Messstrom etwa

$$\omega \cong \omega_1: \frac{\hat{I}_1/I}{\hat{Y}_1/(X + e')} = \frac{\omega_1^3 \cdot (L_0/R)}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{\omega_1 L_0}{R}\right)^2\right] \cdot \omega_1 \cdot \frac{d}{m}}} = \frac{\omega_1^3 / \omega_L}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{\omega_1}{\omega_L}\right)^2\right] \cdot \omega_1 \cdot \omega_d}} \quad (7.1-60)$$

Wir untersuchen im Resonanzpunkt bei schwacher mechanischen Dämpfung die beiden Grenzfälle großer und kleiner elektrischer Dämpfung  $\omega_L = R/L_0$ .

(i) **Kleine el. Dämpfung:**  $R$  „klein“, so dass die Resonanzkreisfrequenz  $\omega_1 \gg \omega_L = R/L_0$  ist.

(ii) **Große el. Dämpfung:**  $R$  „groß“, so dass  $\omega_1 \ll \omega_L = R/L_0$  ist.

Wegen des Spulenwiderstands ist oft die mech. Dämpfung schwächer als die el. Dämpfung:

$d/m = \omega_d \ll \omega_L = R/L_0$ . Der Amplitudengang für (i) schwache mech. und schwache el. Dämpfung hat somit eine Frequenzskala gemäß  $\omega_d \ll \omega_L \ll \omega_1$  (Bild 7.1-15i). Aus (7.1-60) folgt für (i)  $\omega_1 \gg \omega_L = R/L_0$  die Stromamplitude (7.1-61).

$$\frac{\hat{I}_1(\omega_1)/I}{\frac{\hat{Y}_1}{X+e'}} = \frac{\omega_1^3/\omega_L}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega_1}{\omega_L}\right)^2} \cdot \omega_1\omega_d} \approx \frac{\omega_1^3/\omega_L}{\sqrt{\left(\frac{\omega_1}{\omega_L}\right)^2} \cdot \omega_1\omega_d} = \frac{\omega_1^3/\omega_L}{\frac{\omega_1}{\omega_L} \cdot \omega_1\omega_d} = \frac{\omega_1^2}{\omega_1\omega_d} = \frac{\omega_1}{\omega_d} = \frac{\omega_1}{\frac{d}{m}} \quad (7.1-61)$$

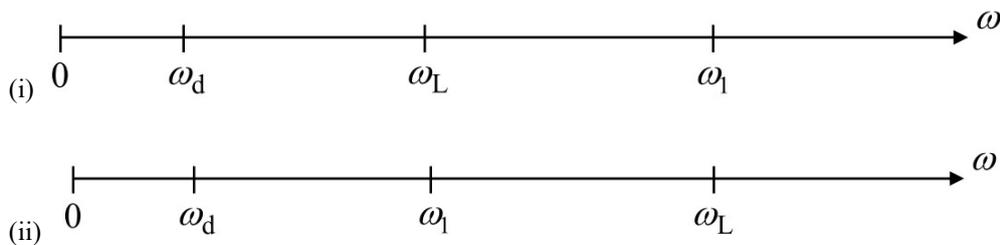


Bild 7.1-15: Frequenzskala bei kleinem Spulenstrom bei  $X \cong x_{\max}$  bei schwacher mechanischer Dämpfung und (i) schwacher el. Dämpfung, (ii) starker el. Dämpfung.

Aus (7.1-56) wird mit den Bedingungen  $\omega_2 = 0$ ,  $\omega_1 \gg \omega_L \gg \omega_d$  (7.1-62) erhalten, wobei wir  $\omega_d \approx 0$  setzen.

$$\ddot{u} = \frac{\hat{I}_1/I}{\hat{Y}_1/(X+e')} \approx \frac{\omega^3/\omega_L}{\sqrt{1+(\omega/\omega_L)^2} \cdot \sqrt{(\omega_1^2 - \omega^2)^2}} = \frac{\omega^3/\omega_L}{\sqrt{1+(\omega/\omega_L)^2} \cdot |\omega_1^2 - \omega^2|} \quad (7.1-62)$$

Es ergeben sich somit aus Bild 7.1-15i drei Frequenzabschnitte und dort gültige  $\ddot{u}$ -Werte.

$$\begin{aligned} (1) \quad 0 \approx \omega_d < \omega < \omega_L : \ddot{u} &\approx \frac{\omega^3/\omega_L}{\omega_1^2 - \omega^2} \approx \frac{\omega^3}{\omega_L \omega_1^2} \sim \omega^3, \\ (2) \quad \omega_L < \omega < \omega_1 : \ddot{u} &\approx \frac{\omega^3/\omega_L}{(\omega/\omega_L) \cdot (\omega_1^2 - \omega^2)} = \frac{\omega^2}{\omega_1^2 - \omega^2} \approx \frac{\omega^2}{\omega_1^2} \sim \omega^2, \\ (3) \quad \omega_1 < \omega : \ddot{u} &\approx \frac{\omega^3/\omega_L}{(\omega/\omega_L) \cdot (\omega^2 - \omega_1^2)} = \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_1^2} \approx \frac{\omega^2}{\omega^2} = 1. \end{aligned} \quad (7.1-63)$$

Das Amperemeter im Messkreis Bild 7.1-13 hat den kleinen Innenwiderstand  $R_i$ , der im Gesamtwiderstand  $R = R_{\text{Spule}} + R_i$  enthalten ist. Im  $R_i$  wird die Wärmeleistung  $P = \hat{I}_1^2 \cdot R_i / 2$  umgesetzt. Die Ordinate des Amplitudengangs dieser Leistung wird im **Bode-Diagramm** in dBel, bezogen auf die Leistung  $P_{\text{Bezug}}$ , und daher der Strom  $\hat{I}_1$  auf  $\hat{I}_{\text{Bezug}}$  bezogen angegeben.

$$\eta = 10 \cdot \lg\left(\frac{P}{P_{\text{Bezug}}}\right) = 20 \cdot \lg\left(\frac{\hat{I}_1}{\hat{I}_{\text{Bezug}}}\right), \quad \hat{I}_{\text{Bezug}} = \hat{Y}_{\text{Bezug}} \cdot \frac{I}{X+e'}, \quad \hat{Y}_{\text{Bezug}} = 1 \mu\text{m} \quad (7.1-64)$$

Die Wahl der Strombezugsgröße ist willkürlich und hängt gemäß (7.1-56) von  $\hat{Y}_{\text{Bezug}}$  ab (7.1-64), was hier mit  $\hat{Y}_{\text{Bezug}} = 1 \mu\text{m}$  gewählt wird. Für die logarithmisch skalierte Abszisse im Bode-Diagramm Bild 7.1-16 wird als Bezugskreisfrequenz  $\omega_1$  gewählt (7.1-65).

$$\eta = 20 \cdot \lg\left(\frac{\hat{I}_1(\omega)}{\hat{Y}_{\text{Bezug}} \cdot I/(X+e')}\right), \quad \xi = 10 \cdot \lg(\omega/\omega_1) \quad (7.1-65)$$

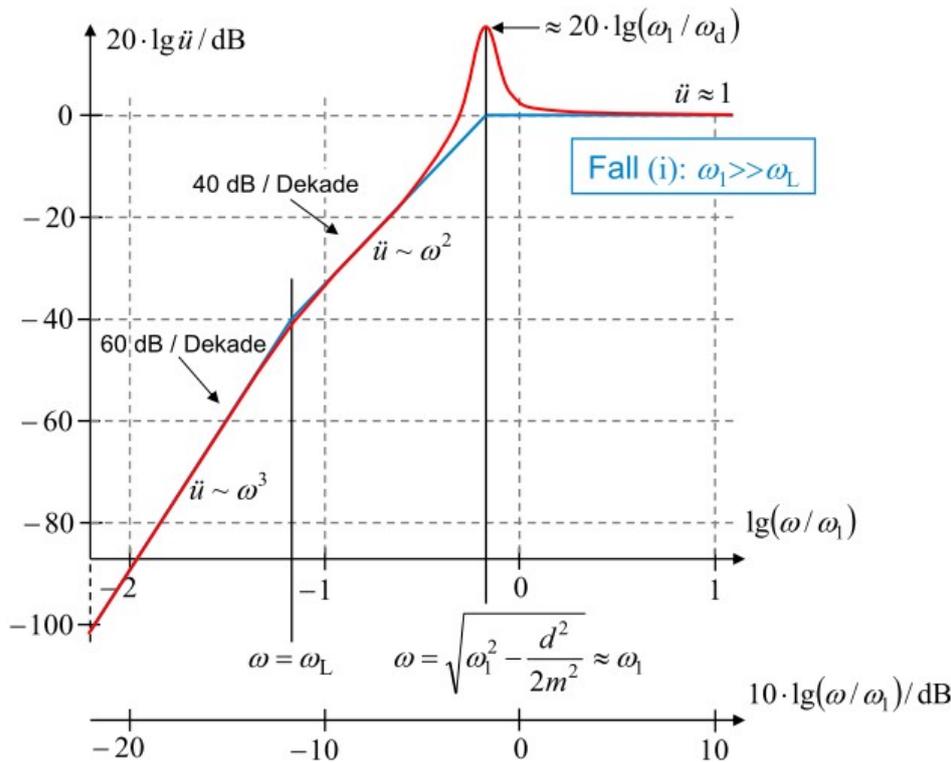


Bild 7.1-16: Magnetischer Wandler „Typ 1“ als Schwingungsmesser: Amplitudengang bei kleinem Spulenstrom bei  $X \cong x_{\max}$ , schwacher mech. und schwacher el. Dämpfung (Fall b1 (i)), so dass  $\omega_1 \gg \omega_L$ . Das  $\ddot{u}$ -Maximum bei Resonanz wird mit (7.1-61) bestimmt.

Im Bereich  $\omega > \omega_1$  ist  $\hat{I}_1$  proportional zur Schwingungsamplitude  $\hat{Y}_1$ , für  $\omega_L < \omega < \omega_1$  ist  $\hat{I}_1$  proportional zur Schwingbeschleunigung  $\ddot{y}_1 \sim \omega^2 \cdot \hat{Y}_1$ .

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} \text{Re}\{\hat{Y}_1 \cdot e^{j\omega t}\} = \text{Re}\{-\omega^2 \cdot \hat{Y}_1 \cdot e^{j\omega t}\} = -\omega^2 \cdot \hat{Y}_1 \cdot \cos \omega t \quad (7.1-66)$$

Im Bereich  $0 \approx \omega_d < \omega < \omega_L$  ist der Strom von der Beschleunigungsänderung abhängig und damit für die Schwingungsmessung, die entweder Schwingweg, Schwinggeschwindigkeit oder Schwingbeschleunigung erfassen will, unbrauchbar.

Für (ii) weiterhin schwache mech. Dämpfung  $d/m = \omega_d \ll \omega_1$ , aber große el. Dämpfung  $\omega_1 \ll \omega_L$  gilt  $\omega_d \ll \omega_1 \ll \omega_L$  (Bild 7.1-15ii). Aus (7.1-60) folgt für (ii)  $\omega_1 \ll \omega_L = R/L_0$  die Stromamplitude (7.1-67).

$$\frac{\hat{I}_1(\omega_1)/I}{\frac{\hat{Y}_1}{X + e'}} = \frac{\omega_1^3 / \omega_L}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_1}{\omega_L}\right)^2} \cdot \omega_1 \cdot \omega_d} \approx \frac{\omega_1^3 / \omega_L}{\omega_1 \cdot \omega_d} = \frac{\omega_1^2}{\omega_d} = \frac{\omega_1^2}{\omega_L \cdot \omega_d} = \frac{\omega_1^2}{\frac{R}{L_0} \cdot \frac{d}{m}} \quad (7.1-67)$$

Aus (7.1-56) wird mit den Bedingungen  $\omega_2 = 0$ ,  $\omega_d \ll \omega_1 \ll \omega_L$  (7.1-68) bzw. (7.1-69) erhalten, wenn wir wieder  $\omega_d \approx 0$  setzen.

$$\ddot{u} = \frac{\omega^3 \cdot \omega_L}{\sqrt{[1 + (\omega / \omega_L)^2] \cdot [(\omega_1^2 - \omega^2)^2 + (\omega \cdot \omega_d)^2]}} \approx \frac{\omega^3 \cdot \omega_L}{\sqrt{[1 + (\omega / \omega_L)^2] \cdot (\omega_1^2 - \omega^2)^2}} \quad (7.1-68)$$

$$\ddot{u} \approx \frac{\omega^3 \cdot \omega_L}{\sqrt{[1 + (\omega/\omega_L)^2] \cdot |\omega_1^2 - \omega^2|}} \quad (7.1-69)$$

Es ergeben sich somit aus Bild 7.1-15ii drei Frequenzabschnitte und dort gültige  $\ddot{u}$ -Werte für das Bode-Diagramm des Amplitudengangs in Bild 7.1-17.

- (1)  $0 \approx \omega_d < \omega < \omega_1 : \ddot{u} \approx \frac{\omega^3/\omega_L}{1 \cdot \omega_1^2} \approx \frac{\omega^3}{\omega_L \omega_1^2} \sim \omega^3,$
- (2)  $\omega_1 < \omega < \omega_L : \ddot{u} \approx \frac{\omega^3/\omega_L}{1 \cdot \omega^2} = \frac{\omega}{\omega_L} \sim \omega,$  (7.1-70)
- (3)  $\omega_L < \omega : \ddot{u} \approx \frac{\omega^3/\omega_L}{(\omega/\omega_L) \cdot \omega^2} = 1.$

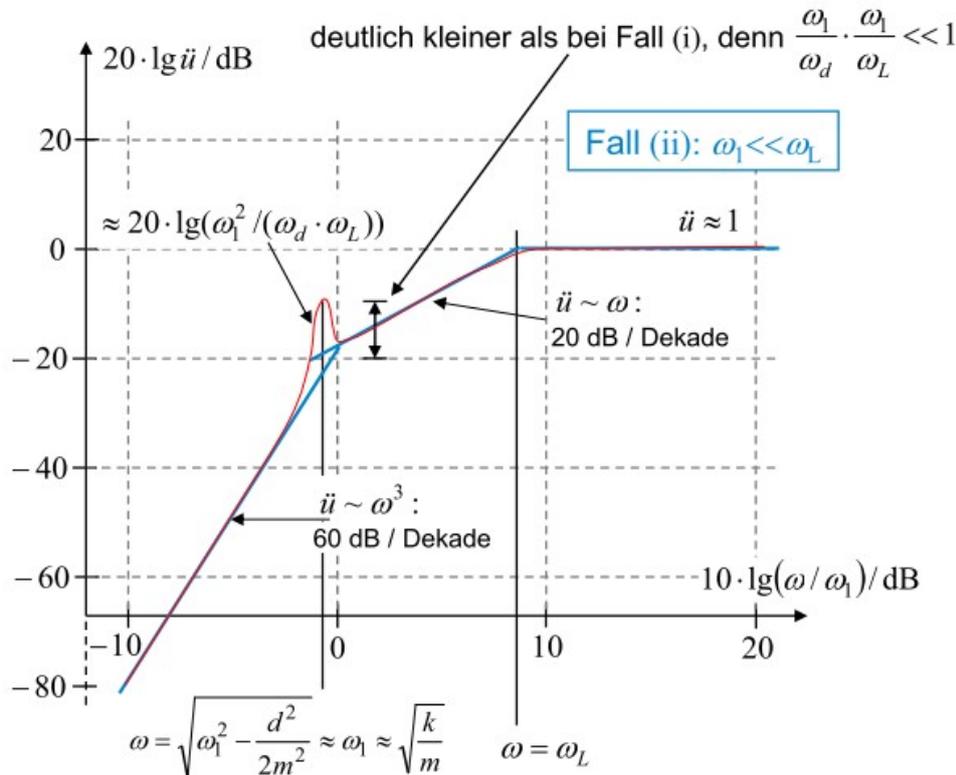


Bild 7.1-17: Wie Bild 7.1-16, jedoch: Amplitudengang bei schwacher mech. und starker el. Dämpfung (Fall b1 (ii)), so dass  $\omega_1 \ll \omega_L$ . Das  $\ddot{u}$ -Maximum bei Resonanz wird mit (7.1-67) bestimmt.

Im Bereich  $\omega > \omega_L$  ist  $\hat{I}_1$  proportional zur Schwingamplitude  $\hat{Y}_1$ . Im Bereich  $\omega_1 < \omega < \omega_L$  ist  $\hat{I}_1$  proportional zur Schwinggeschwindigkeit  $\dot{y}_1 \sim \omega \cdot \hat{Y}_1$ .

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{d}{dt} \text{Re}\{\hat{Y}_1 \cdot e^{j\omega t}\} = \text{Re}\{j\omega \cdot \hat{Y}_1 \cdot e^{j\omega t}\} = -\omega \cdot \hat{Y}_1 \cdot \sin \omega t \quad (7.1-71)$$

Im tiefen Frequenzbereich  $0 < \omega < \omega_1$  ist  $\hat{I}_1$  wie in Bild 7.1-16 für die Schwingungsmessung unbrauchbar.

b2) „Großer“ Gleichstrom  $I \cong I_3$  bei  $X \cong X_3$ :

Gemäß (7.1-54) ist bei  $X = X_3$  der Ausdruck  $\omega_1 = 0$ , so dass aus (7.1-55) nun (7.1-72) folgt.

$$\omega_1 = 0 : \frac{\hat{I}_1}{\hat{Y}_1} \approx -\frac{I}{X + e'} \cdot \frac{\omega^2}{\omega_2^2 + (1 - j \cdot (\omega_L / \omega)) \cdot (-\omega^2 + j \cdot \omega \cdot \omega_d)} \quad (7.1-72)$$

Der Betrag der bezogenen Größe  $\ddot{u}$  (7.1-74) wird daher mit (7.1-73) berechnet.

$$\ddot{u} = \frac{\hat{I}_1/I}{\hat{Y}_1/(X + e')} = \frac{(\omega/\omega_L)^2}{\left| (\omega_2/\omega_L)^2 + (\omega_d/\omega_L) - (\omega/\omega_L)^2 + j \cdot (\omega/\omega_L) \cdot (1 + (\omega_d/\omega_L)) \right|} \quad (7.1-73)$$

$$\ddot{u} = \frac{(\omega/\omega_L)^2}{\sqrt{\left[ \left( \frac{\omega_2}{\omega_L} \right)^2 - \left( \frac{\omega}{\omega_L} \right)^2 + \frac{\omega_d}{\omega_L} \right]^2 + \left( \frac{\omega}{\omega_L} \right)^2 \cdot \left( 1 + \frac{\omega_d}{\omega_L} \right)^2}} \quad (7.1-74)$$

Wieder werden für schwache mech. Dämpfung  $\omega_d/\omega_L \ll 1$  die beiden Fälle

(i) kleine el. Dämpfung  $\omega_2 \gg \omega_L$  und (ii) große el. Dämpfung  $\omega_2 \ll \omega_L$  unterschieden.

(i): Für kleine el. Dämpfung folgt aus (7.1-74) näherungsweise

$$\ddot{u} \approx \frac{(\omega/\omega_L)^2}{\sqrt{\left[ \frac{\omega_2^2}{\omega_L^2} - \frac{\omega^2}{\omega_L^2} + \frac{\omega_d}{\omega_L} \right]^2 + \frac{\omega^2}{\omega_L^2} \cdot \left( 1 + \frac{\omega_d}{\omega_L} \right)^2}} = \frac{\omega^2}{\sqrt{\left[ \omega_2^2 - \omega^2 + \omega_d \omega_L \right]^2 + \omega^2 \cdot (\omega_d + \omega_L)^2}} \quad (7.1-75)$$

Für die Berechnung der Resonanzfrequenz muss der Nenner der Funktion  $\ddot{u}$  (7.1-75) minimal sein:  $N(\omega^2) = \left[ \omega_2^2 - \omega^2 \right]^2 + \omega^2 \cdot (\omega_d + \omega_L)^2 = \text{Min.}$  Die ist der Fall für

$$\frac{dN(\omega^2)}{d\omega^2} = \frac{dN(\xi)}{d\xi} = d \left[ (\omega_2^2 - \xi)^2 + \xi \cdot (\omega_d + \omega_L)^2 \right] / d\xi = -2 \cdot (\omega_2^2 - \xi) + (\omega_d + \omega_L)^2 = 0,$$

$$\xi = \omega_{\text{Res}}^2 = \omega_2^2 - (\omega_d + \omega_L)^2 / 2 \text{ bzw.}$$

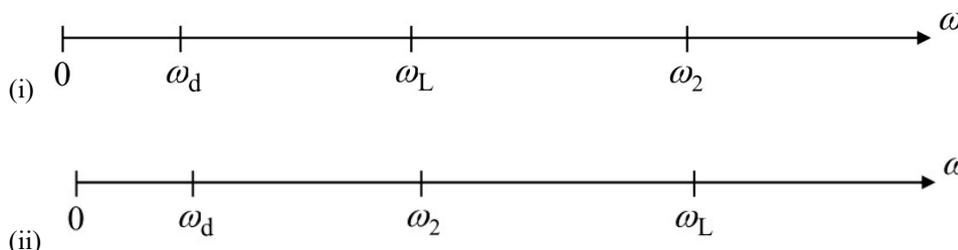
$$\omega_{\text{Res}} = \sqrt{\omega_2^2 - (\omega_d + \omega_L)^2 / 2} \Big|_{\omega_d/\omega_L \ll 1} \approx \sqrt{\omega_2^2 - (\omega_L^2 / 2)}, \quad (7.1-76)$$

was wegen positivem Ausdruck unter der Wurzel nur für  $\omega_2 > \omega_L / \sqrt{2} = 0.707 \cdot \omega_L$  gültig ist.

Dies passt gut zur Annahme  $\omega_2/\omega_L \gg 1 > 0.707$ . Die Resonanzüberhöhung (7.1-75) beträgt

$$\ddot{u}(\omega_{\text{Res}}) = \frac{\frac{\omega_2^2}{\omega_L^2} - \frac{1 + (\omega_d/\omega_L)^2}{2}}{\left( 1 + \frac{\omega_d}{\omega_L} \right) \cdot \sqrt{\frac{\omega_2^2}{\omega_L^2} - \frac{1 + (\omega_d/\omega_L)^2}{4}}} \Big|_{\omega_d/\omega_L \ll 1} \approx \frac{\frac{\omega_2^2}{\omega_L^2} - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{\omega_2^2}{\omega_L^2} - \frac{1}{4}}} \Big|_{\omega_2 \gg \omega_L} \approx \frac{\omega_2}{\omega_L}. \quad (7.1-77)$$

Für schwache el. Dämpfung ergibt sich die Frequenzskala  $\omega_d \ll \omega_L \ll \omega_2$  (Bild 7.1-18i).



**Bild 7.1-18:** Frequenzskala bei großem Spulenstrom  $I \cong I_3$  bei  $X \cong X_3$ , schwacher mechanischer Dämpfung und (i) schwacher el. Dämpfung, (ii) starker el. Dämpfung.

Der Amplitudengang (7.1-75) für  $\omega_d \ll \omega_L$  als (7.1-78) ergibt in den drei Frequenzabschnitten (1), (2), (3) folgende dominante Werte (7.1-79). Sie sind in Bild 7.1-19 als Bode-Diagramm dargestellt mit der Bezugskreisfrequenz  $\omega_2$ .

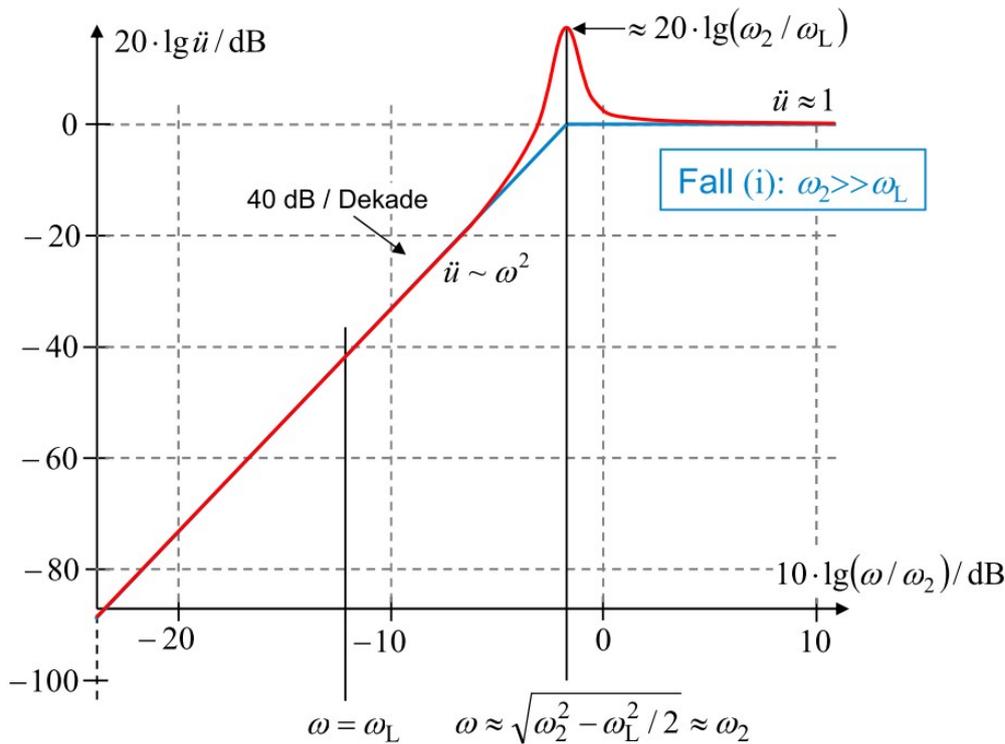
$$\ddot{u} \approx \frac{\omega^2}{\sqrt{(\omega_2^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \cdot \omega_L^2}} \tag{7.1-78}$$

(1)  $0 \approx \omega_d < \omega < \omega_L$  :  $\ddot{u}|_{\omega_d \rightarrow 0} \approx (\omega / \omega_2)^2 \sim \omega^2$ ,

(2)  $\omega_L < \omega < \omega_2$  :  $\ddot{u} \approx (\omega / \omega_2)^2 \sim \omega^2$ ,

(3)  $\omega_2 < \omega$  :  $\ddot{u} \approx \frac{(\omega / \omega_L)^2}{\sqrt{(-(\omega / \omega_L)^2)^2 + (\omega / \omega_L)^2}} \approx \frac{(\omega / \omega_L)^2}{(\omega / \omega_L)^2} = 1$ . (7.1-79)

Im Bereich  $\omega > \omega_2$  ist  $\hat{I}_1$  proportional zur Schwingamplitude  $\hat{Y}_1$ . Im Bereich  $\omega < \omega_2$  ist  $\hat{I}_1$  proportional zur Schwingbeschleunigung  $\omega^2 \cdot \hat{Y}_1$ .



**Bild 7.1-19:** Magnetischer Wandler „Typ 1“ als Schwingungsmesser: Amplitudengang bei großem Spulenstrom  $I \cong I_3$  bei  $X \cong X_3$ , schwacher mech. und schwacher el. Dämpfung (Fall b2 (i)), so dass  $\omega_2 \gg \omega_L$ . Das  $\ddot{u}$ -Maximum bei Resonanz wird mit (7.1-77) bestimmt.

(ii) Für große el. Dämpfung  $\omega_2 \ll \omega_L$  wird aus (7.1-74) die Näherung (7.1-80).

$$\ddot{u} = \frac{\omega^2}{\sqrt{[\omega_2^2 - \omega^2 + \omega_d \omega_L]^2 + \omega^2 \cdot (\omega_d + \omega_L)^2}} \approx \frac{\omega^2}{\sqrt{(-\omega^2 + \omega_d \omega_L)^2 + \omega^2 \cdot (\omega_d + \omega_L)^2}} \tag{7.1-80}$$

Deren Nenner  $N$  wird minimal bei der Resonanz-Kreisfrequenz  $\omega_{Res}$ .

$$N(\omega^2) = [-\omega^2 + \omega_d \omega_L]^2 + \omega^2 \cdot (\omega_d + \omega_L)^2 = \omega^4 + \omega^2 \cdot \underbrace{(-2\omega_2^2 + \omega_d^2 + \omega_L^2)}_{p > 0 \text{ für } *} + \underbrace{\omega_2^4 + \omega_d^2 \omega_L^2 + 2\omega_2^2 \omega_d \omega_L}_{q > 0}$$

Die Bedingung für  $p > 0$  ist \*):  $\omega_2 < \sqrt{(\omega_L^2 + \omega_d^2) / 2}$ , was wegen  $\omega_2 \ll \omega_L$ ,  $\omega_d \ll \omega_L$  erfüllt ist. Daraus folgt mit

$$\frac{dN(\omega^2)}{d\omega^2} = \frac{dN}{d\omega^2} (\omega^4 + \omega^2 \cdot p + q) = \frac{dN}{d\xi} (\xi^2 + \xi \cdot \underbrace{p}_{>0} + q) = 0 \Rightarrow 2\xi + p = 0 \Rightarrow \omega^2 = -p / 2 < 0$$

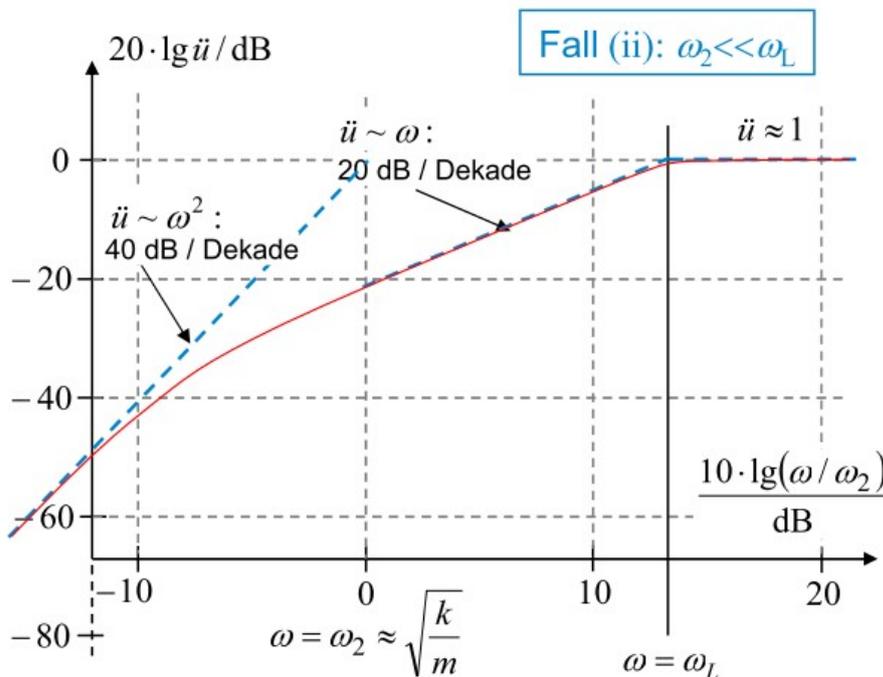
ein negatives Quadrat einer möglichen Resonanzkreisfrequenz, d. h. es tritt kein Nenner-Minimum bei positiven Frequenzen auf. Wegen der großen el. Dämpfung treten somit kein Resonanzereignis und damit keine Resonanzfrequenz auf! Mit  $\omega_d \ll \omega_2$  folgt aus (7.1-80), linker Term, der Amplitudengang (7.1-81) mit den drei Frequenzbereichen Bild 7.1-18ii.

$$\ddot{u}(\omega)|_{\omega_d/\omega_2 \ll 1} \cong \frac{\omega^2}{\sqrt{(\omega_2^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \cdot \omega_L^2}}, \tag{7.1-81}$$

$$(1) \quad 0 < \omega < \omega_2 : \ddot{u} \approx (\omega/\omega_2)^2 \sim \omega^2,$$

$$(2) \quad \omega_2 < \omega < \omega_L : \ddot{u} \approx \frac{\omega^2}{\sqrt{\omega^4 + \omega^2 \cdot \omega_L^2}} = \frac{\omega^2}{\omega \cdot \sqrt{\omega^2 + \omega_L^2}} \approx \frac{\omega^2}{\omega \cdot \omega_L} = \frac{\omega}{\omega_L} \sim \omega, \tag{7.1-82}$$

$$(3) \quad \omega_L < \omega : \ddot{u} \approx \frac{\omega^2}{\sqrt{(-\omega^2)^2}} = \frac{\omega^2}{\omega^2} = 1.$$

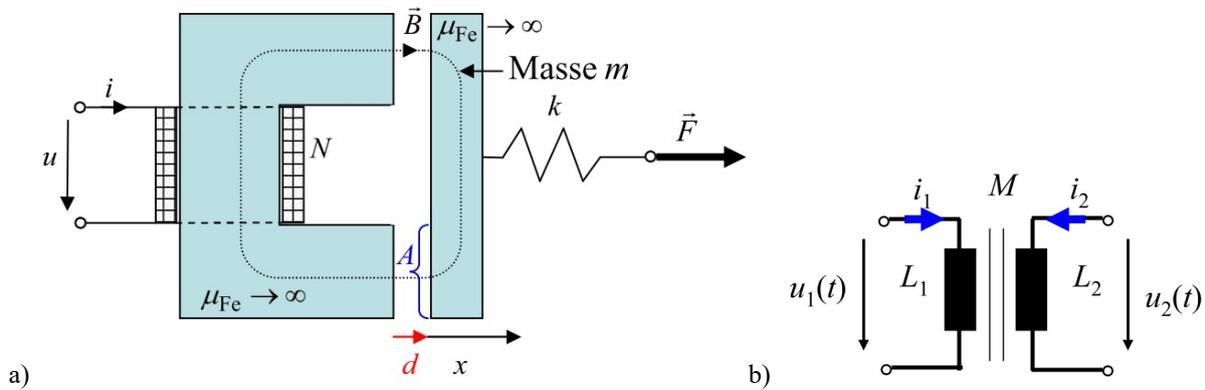


**Bild 7.1-20:** Wie Bild 7.1-19, jedoch schwacher mech. und starker el. Dämpfung (Fall b2 (ii)), so dass  $\omega_2 \ll \omega_L$ . Es tritt keine Resonanzüberhöhung auf.

Im Bereich  $\omega > \omega_L$  ist  $\hat{I}_1$  proportional zur Schwingamplitude  $\hat{Y}_1$ . Im Bereich  $\omega_2 < \omega < \omega_L$  ist  $\hat{I}_1$  proportional zur Schwinggeschwindigkeit  $\omega \cdot \hat{Y}_1$ . Im Bereich  $\omega < \omega_2$  ist  $\hat{I}_1$  proportional zur Schwingbeschleunigung  $\omega^2 \cdot \hat{Y}_1$ . Damit ist die Wandlerparametrierung für Schwingungsmessungen ausführlich untersucht worden und gestattet die Dimensionierung des Wandlers, um ihn auch tatsächlich zu bauen.

Um solche Wandler Typ 1 allgemein zu charakterisieren, um sie für unterschiedliche Anwendungen im Frequenzbereich untersuchen zu können, wird die Geometrie auf die Grundzüge vereinfacht (Bild 7.1-21a, siehe Kap. 5: Grundsysteme). Danach bedient man sich nach der Linearisierung der ungedämpften Wandlergleichungen im Arbeitspunkt  $x_0, F_0, U_0, I_0, \Psi_0$  der **Vierpoldarstellung**. Im Luftspalt des Wandlers gilt  $B = \mu_0 \cdot H$ . Es wird die äquivalente Fläche  $A_e := A/2$  verwendet. Die Feder  $k$  ist bei  $x = x_F > d$  entspannt.

Hier ist  $d$  die minimale Luftspaltweite (z. B. durch ein amagnetisches Distanzstück), nicht der mech. Dämpfungsbeiwert! Mechanische und el. Dämpfungen sind unberücksichtigt. Sie werden später hinzugefügt. Die Linearisierung erfolgt für die Ankerkoordinate  $x$ , die äußere Kraft  $F$ , el. Spannung und Strom  $u$  und  $i$  und die Spulenflussverkettung  $\Psi$  mit (7.1-83).



**Bild 7.1-21:** a) Vereinfachung des Wandlers Typ 1 auf seine wesentlichen Eigenschaften. Es ist hier  $d$  die minimale Luftspaltweite, nicht der mech. Dämpfungsbeiwert! b) Magnetisch gekoppelter Kreis.

$$\begin{aligned}
 x(t) &= x_0 + x_1(t), \quad |x_1/x_0| \ll 1; \quad F(t) = F_0 + F_1(t), \quad |F_1/F_0| \ll 1; \\
 u(t) &= U_0 + u_1(t), \quad |u_1/U_0| \ll 1; \quad i(t) = I_0 + i_1(t), \quad |i_1/I_0| \ll 1; \\
 \psi(t) &= \Psi_0 + \psi_1(t), \quad |\psi_1/\Psi_0| \ll 1.
 \end{aligned}
 \tag{7.1-83}$$

Die Spulenflussverkettung  $\psi$  wird aus dem Spulenfluss  $B \cdot A$ , die Luftspaltflussdichte  $B$  aus der Luftspaltfeldstärke  $H$  bestimmt. Für unendlich permeables Eisen und Vernachlässigung aller Streuflüsse ergibt sich aus dem Durchflutungssatz für die Spulenerregung  $N \cdot i$  beim Ankerabstand  $d + x$  die Feldstärke

$$H = N \cdot i / (2 \cdot (d + x))
 \tag{7.1-84}$$

und damit die Flussverkettung

$$\psi = N \cdot B \cdot A = N \cdot \mu_0 \cdot \frac{N \cdot i}{2 \cdot (d + x)} \cdot A = N \cdot \mu_0 \cdot \frac{N \cdot I_0 \cdot (1 + i_1/I_0)}{2 \cdot (d + x_0) \cdot \left(1 + \frac{x_1}{d + x_0}\right)} \cdot A.
 \tag{7.1-85}$$

Deren Linearisierung gemäß Kap. 6 ergibt mit Einsetzen von (7.1-83)

$$\psi = \Psi_0 + \psi_1 \approx \frac{\mu_0 \cdot N^2 \cdot A_e \cdot I_0}{d + x_0} \cdot \left(1 + \frac{i_1}{I_0} - \frac{x_1}{d + x_0}\right), \quad \Psi_0 = \frac{\mu_0 \cdot N^2 \cdot A_e \cdot I_0}{d + x_0}
 \tag{7.1-86}$$

und daraus die Sekanten-Spuleninduktivität

$$L_0 = \frac{\mu_0 \cdot N^2 \cdot A_e}{d + x_0} = \Psi_0 / I_0 \quad \text{bzw.} \quad \psi = \Psi_0 + \psi_1 \approx L_0 \cdot I_0 + L_0 \cdot i_1 - \frac{L_0 \cdot I_0}{d + x_0} \cdot x_1.
 \tag{7.1-87}$$

Wir erhalten die kleine Spulenwechselflussverkettung und den Wechselstrom

$$\psi_1(t) \approx L_0 \cdot i_1(t) - \frac{\Psi_0}{d + x_0} \cdot x_1(t), \quad i_1(t) \approx \frac{1}{L_0} \cdot \psi_1(t) + \frac{1}{L_0} \cdot \frac{L_0 \cdot I_0}{d + x_0} \cdot x_1(t).
 \tag{7.1-88}$$

Die nach links ziehende Magnetkraft auf den Anker, berechnet aus der *Maxwell*-Zugspannung  $B^2 / (2\mu_0)$  an den beiden Flächen  $A$  ist  $F_m = 2A \cdot B^2 / (2\mu_0)$ . Die Federkraft drückt bei  $x > x_F$  in dieselbe Richtung und wird zur resultierenden Ankerkraft addiert, die der äußeren, nach rechts positiv gezählten Kraft  $F$  das Gleichgewicht hält:  $F = F_m + F_F$ .

$$F = F_m + F_F = (B^2 / (2\mu_0)) \cdot 2 \cdot A + k \cdot (x - x_F)
 \tag{7.1-89}$$

$$F = \frac{A}{\mu_0} \cdot \left( \frac{\mu_0 \cdot N \cdot i}{2 \cdot (d+x)} \right)^2 + k \cdot (x - x_F), \text{ bzw. mit (7.1-83):} \quad (7.1-90)$$

$$F = \frac{A_e}{2\mu_0} \cdot \left( \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I_0}{d+x_0} \right)^2 \cdot \left( \frac{1+i_1/I_0}{1+x_1/(d+x_0)} \right)^2 + k \cdot (x_0 + x_1 - x_F) \quad (7.1-91)$$

Die Linearisierung von (7.1-91) führt auf (7.1-92) mit  $F_0$  im Arbeitspunkt (7.1-93).

$$F = F_0 + F_1 \approx \frac{A_e}{2\mu_0} \cdot \left( \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I_0}{d+x_0} \right)^2 \cdot \left( 1 + \frac{2i_1}{I_0} - \frac{2x_1}{d+x_0} \right) + k \cdot (x_0 - x_F) + k \cdot x_1 \quad (7.1-92)$$

$$F_0 = \frac{A_e}{2\mu_0} \cdot \left( \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I_0}{d+x_0} \right)^2 + k \cdot (x_0 - x_F) \quad (7.1-93)$$

$$F_1 \approx \frac{A_e}{2\mu_0} \cdot \left( \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I_0}{d+x_0} \right)^2 \cdot \frac{2i_1}{I_0} + \left( k - \frac{A_e}{2\mu_0} \cdot \left( \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I_0}{d+x_0} \right)^2 \cdot \frac{2}{d+x_0} \right) \cdot x_1 \quad (7.1-94)$$

Mit (7.1-87) ist  $\frac{A_e}{2\mu_0} \cdot \left( \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I_0}{d+x_0} \right)^2 = \frac{L_0 \cdot I_0^2}{2 \cdot (d+x_0)}$ , so dass anstelle (7.1-94) auch (7.1-95) gilt.

$$F_1(t) \approx \frac{L_0 \cdot I_0}{d+x_0} \cdot i_1(t) + \left( -\frac{L_0 \cdot I_0^2}{(d+x_0)^2} + k \right) \cdot x_1(t) \quad (7.1-95)$$

Mit  $L_0$  (7.1-88) und  $\Psi_0 = L_0 \cdot I_0$  wird  $F_1$  in Abhängigkeit von  $\psi_1$  und  $x_1$  bestimmt (7.1-96).

$$F_1 \approx \frac{L_0 \cdot I_0}{d+x_0} \cdot \underbrace{\left( \frac{\psi_1}{L_0} + \frac{L_0 \cdot I_0 \cdot x_1}{(d+x_0) \cdot L_0} \right)}_{i_1} + \left( -\frac{L_0 \cdot I_0^2}{(d+x_0)^2} + k \right) \cdot x_1 = \frac{\Psi_0}{d+x_0} \cdot \frac{\psi_1}{L_0} + k \cdot x_1 \quad (7.1-96)$$

Umgekehrt wird in (7.1-97)  $\psi_1$  in Abhängigkeit von  $F_1$  und  $x_1$  dargestellt (7.1-97).

$$\psi_1 \approx (F_1 - k \cdot x_1) \cdot \frac{L_0 \cdot (d+x_0)}{\Psi_0} \quad (7.1-97)$$

(7.1-88) und (7.1-96) sind für beliebige Zeitverläufe  $\psi_1(t)$ ,  $x_1(t)$ ,  $i_1(t)$ ,  $F_1(t)$  mit kleiner Amplitude in (7.1-98) als Vierpoldarstellung mit der Matrix ( $B$ ) zusammengefasst.

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{L_0} & \frac{\Psi_0}{(d+x_0) \cdot L_0} \\ \frac{\Psi_0}{(d+x_0) \cdot L_0} & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \psi_1 \\ x_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} i_1 \\ F_1 \end{pmatrix} = (B) \cdot \begin{pmatrix} \psi_1 \\ x_1 \end{pmatrix} \quad (7.1-98)$$

Der **Kopplungsterm** zwischen el. und mech. System ist (7.1-99)

$$K_{0L} = \frac{\Psi_0 / L_0}{d+x_0} = \frac{\Psi_0}{\mu_0 N^2 A_e}, \quad (7.1-99)$$

so dass bei  $K_{0L} = 0$  die getrennten mech. und el. Beziehungen  $F_1 = k \cdot x_1$ ,  $i_1 = \psi_1 / L_0$  auftreten.

$K_{0L}$  ist proportional zu  $K_0 \sim \Psi_0$  aus (7.1-34) gemäß (7.1-99), aber nicht identisch, weil in (7.1-98) die Variablen  $x_1$ ,  $\psi_1$  anstelle  $x_1$ ,  $i_1$  verwendet werden.

$$(7.1-34): K_0 = \mu_0 \cdot \frac{N^2}{(X+e')^2} \cdot 2h \cdot l \cdot I = \frac{\mu_0 \cdot N^2 \cdot I}{X+e'} \cdot \frac{2h \cdot l}{X+e'} = \frac{\Psi_0 \cdot 2h \cdot l}{X+e'} = \frac{\Psi_0 \cdot L_0}{\mu_0 \cdot N^2} \quad (7.1-99)$$

Neben dem Kopplungsterm  $K_{0L}$  wird der **Kopplungsfaktor**  $\kappa$  analog zum Begriff bei magnetisch gekoppelten Kreisen (Bild 7.1-21b) eingeführt. Die magnetische Kopplung wird dort durch die Gegeninduktivität  $M$  in (7.1-100) mit  $\kappa$  (7.1-101) berücksichtigt.

$$u_1 = L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} + M \cdot \frac{di_2}{dt}, \quad u_2 = L_2 \cdot \frac{di_2}{dt} + M \cdot \frac{di_1}{dt} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} di_1/dt \\ di_2/dt \end{pmatrix}, \quad (7.1-100)$$

$$\kappa = \frac{M}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}}, \quad 0 \leq \kappa \leq 1, \quad M = 0 : \kappa = 0; \quad L_1 = L_2 = M : \kappa = 1. \quad (7.1-101)$$

Hier wird der Kopplungsfaktor mit  $\kappa$  („Kappa“) anstelle sonst üblich  $k$  bezeichnet, um eine Verwechslung mit der Federkonstante  $k$  zu vermeiden. Analog zu (7.1-101) wird mit der (B)-Matrix (7.1-98) der Kopplungsfaktor  $\kappa$  zwischen mechanischem und elektromagnetischem System definiert, hier für Wandler Typ 1.

$$\kappa = \frac{\Psi_0}{(d+x_0) \cdot L_0} = \frac{\Psi_0}{(d+x_0) \cdot \sqrt{L_0 \cdot k}} \cdot \frac{\sqrt{L_0 \cdot k}}{(d+x_0) \cdot L_0} = \frac{\Psi_0}{(d+x_0) \cdot \sqrt{L_0 \cdot k}}. \quad \text{Beachten Sie: } \Psi_0 = 0 : \kappa = 0. \quad (7.1-102)$$

Bei  $\kappa = 0$  sind el. und mech. System entkoppelt! Kopplungsfaktor  $\kappa$  und statische Stabilität (Kap. 6) hängen zusammen. Mit der mechanischen, dynamischen (ungedämpften) Gleichung im Arbeitspunkt  $x_0$  als  $m \cdot \ddot{x}_1 + F_1 = 0$  folgt mit (7.1-95) die Gleichung (7.1-103).

$$m \cdot \ddot{x}_1 + \left( -\frac{L_0 \cdot I_0^2}{(d+x_0)^2} + k \right) \cdot x_1 = -\frac{L_0 \cdot I_0}{d+x_0} \cdot i_1 = \underbrace{\frac{m}{T_{>0}} \cdot \ddot{x}_1 + \left( -\frac{\Psi_0^2}{(d+x_0)^2 L_0} + k \right)}_{K} \cdot x_1 \quad (7.1-103)$$

Die Bedingung für statische Stabilität im Arbeitspunkt  $x_0$  (Kap. 6)  $K > 0$  bedeutet

$$-\frac{\Psi_0^2}{(d+x_0)^2 \cdot L_0} + k > 0 \Rightarrow \frac{1}{k} < \frac{(d+x_0)^2 \cdot L_0}{\Psi_0^2} \Rightarrow \frac{\Psi_0^2}{(d+x_0)^2 \cdot L_0 \cdot k} = \kappa^2 < 1. \quad (7.1-104)$$

Wandler vom Typ 1 sind also statisch stabil im Arbeitspunkt  $\pm I_0, x_0$ , **wenn der positive Kopplungsfaktor  $0 < \kappa < 1$  ist.** Bei  $K = 0$  (grenzstabil) bzw.  $\kappa = 1$  tritt der Pull-in-Effekt auf. Bei welchem Wert  $x_0$  ist dies der Fall? Aus dem Gleichgewicht der statischen Magnetkraft und Federkraft  $F_0 = 0$  und der Stabilitätsgrenze  $\kappa = 1$  (7.1-105) folgt (7.1-106) und der Pull-In-Strom (7.1-107), der dem Strom  $I_3$  des Wandlers Typ 1 aus Bild 7.1-1 entspricht.

$$F_0 = \frac{L_0 I_0^2}{2(d+x_0)} + k \cdot (x_0 - x_F) = 0, \quad \kappa = \frac{(\pm L_0 I_0)}{(d+x_0) \cdot \sqrt{L_0 \cdot k}} = 1, \quad (7.1-105)$$

$$\frac{L_0 k \cdot (d+x_0)^2}{L_0 \cdot 2 \cdot (d+x_0)} + k \cdot (x_0 - x_F) = 0 \Rightarrow x_{0,\text{Pull-in}} = \frac{2}{3} \cdot \left( x_F - \frac{d}{2} \right), \quad (7.1-106)$$

$$\kappa = \frac{\pm L_0 I_0}{(d+x_0) \cdot \sqrt{L_0 \cdot k}} = 1 \Rightarrow I_{0,\text{Pull-in}} = \pm \frac{(d+x_{0,\text{Pull-in}}) \cdot \sqrt{k}}{\sqrt{L_0}} = \pm \frac{2}{3} \cdot \frac{(d+x_F) \cdot \sqrt{k}}{\sqrt{L_0}}. \quad (7.1-107)$$

Wir vergleichen diese Pull-in-Daten mit jenen des detaillierten Wandlers Typ 1, Bild 7.1-1, für  $m \cdot g = 0$ , wobei  $e'$  in Bild 7.1-21a  $d$  entspricht. (7.1-18) stimmt dann mit (7.1-106) überein.

$$x_{\text{Pull-in}} = X_3 = \frac{2}{3} \cdot \left( x_F + \frac{m \cdot g}{k} - \frac{e'}{2} \right) = \frac{2}{3} \cdot \left( x_F - \frac{d}{2} \right) \quad (7.1-108)$$

(7.1-19) wird zu (7.1-109) und daraus mit (7.1-9) für  $L_0$  (7.1-110), passend zu (7.1-107).

$$I_3 = \pm \frac{2 \cdot (x_F + e' + m \cdot g/k)}{3N} \cdot \sqrt{\frac{(x_F + e') \cdot k + m \cdot g}{3\mu_0 \cdot h \cdot l}} = \pm \frac{2 \cdot (x_F + d)}{3N} \cdot \sqrt{\frac{(x_F + d) \cdot k}{3\mu_0 \cdot h \cdot l}} \quad (7.1-109)$$

$$I_3 = \pm \frac{2 \cdot (x_F + d)}{3} \cdot \sqrt{\frac{k}{L_0}} = I_{0,\text{Pull-in}} \quad (7.1-110)$$

Beachten Sie dazu die Beziehung für die Induktivität (7.1-9)  $L_0(X_3)$  gemäß (7.1-111).

$$L_{0,\text{Pull-in}} = \frac{\mu_0 N^2 A_e}{x_{0,\text{Pull-in}} + d} = \frac{\mu_0 N^2 2hl}{\frac{2}{3} \cdot (x_F - \frac{d}{2}) + d} = \frac{\mu_0 N^2 2hl}{\frac{2}{3} \cdot (x_F + d)} = \frac{\mu_0 N^2 3hl}{x_F + d} = \frac{\mu_0 N^2 3hl}{x_F + e'} \quad (7.1-111)$$

Pull-in-Lage und Pull-in-Strom führen für beide Wandler Bild 7.1-1 und Bild 7.1-21a zum selben Ergebnis!

Für **kleine sinusförmige Änderungen** um den Arbeitspunkt  $I_0, \Psi_0, x_0, F_0$  gemäß (7.1-112)

$$\begin{aligned} i_1(t) &= \hat{I}_1 \cdot \cos(\omega t + \varphi_i) = \text{Re}\{\hat{\underline{I}}_1 \cdot e^{j\omega t}\}, \quad \psi_1(t) = \text{Re}\{\hat{\underline{\Psi}}_1 \cdot e^{j\omega t}\}, \\ x_1(t) &= \text{Re}\{\hat{\underline{X}}_1 \cdot e^{j\omega t}\}, \quad F_1(t) = \text{Re}\{\hat{\underline{F}}_1 \cdot e^{j\omega t}\} \end{aligned} \quad (7.1-112)$$

müssen auch die Induktionsspannung auf Grund der Ankerbewegung  $v_1(t) = dx_1/dt$  und der Stromänderung  $di_1/dt$  in der Spule und die Wechselgröße der von außen angelegten Spulenspannung  $u_1(t) = \text{Re}\{\hat{\underline{U}}_1 \cdot e^{j\omega t}\}$  gemäß (7.1-83)  $u(t) = U_0 + u_1(t)$ ,  $|u_1/U_0| \ll 1$ , berücksichtigt werden. Mit  $v_1(t) = \text{Re}\{\hat{\underline{V}}_1 \cdot e^{j\omega t}\}$  folgt aus (7.1-98) der Ausdruck (7.1-113) mit der **Matrix (B)**.

$$\begin{pmatrix} \hat{\underline{I}}_1 \\ \hat{\underline{F}}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{L_0} & \frac{\Psi_0}{(d+x_0) \cdot L_0} \\ \frac{\Psi_0}{(d+x_0) \cdot L_0} & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{\underline{\Psi}}_1 \\ \hat{\underline{X}}_1 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \begin{pmatrix} \hat{\underline{I}}_1 \\ \hat{\underline{F}}_1 \end{pmatrix} = (B) \cdot \begin{pmatrix} \hat{\underline{\Psi}}_1 \\ \hat{\underline{X}}_1 \end{pmatrix} \quad (7.1-113)$$

Einsetzen von (7.1-97) in die obere Gleichung (7.1-98) liefert

$$\begin{aligned} i_1 &\approx \frac{\psi_1}{L_0} + \frac{\Psi_0}{(d+x_0) \cdot L_0} \cdot x_1 = \frac{F_1 - k \cdot x_1}{L_0} \cdot \frac{(d+x_0) \cdot L_0}{\Psi_0} + \frac{\Psi_0}{(d+x_0) \cdot L_0} \cdot x_1 \text{ bzw.} \\ i_1 &\approx \frac{d+x_0}{\Psi_0} \cdot F_1 - \frac{d+x_0}{\Psi_0} \cdot \left( k - \frac{\Psi_0^2}{(d+x_0)^2 \cdot L_0} \right) \cdot x_1. \end{aligned} \quad (7.1-114)$$

Die Spannungsgleichung im selben Arbeitspunkt ist ohne *ohm'schen* Spannungsfall ( $U_0 = 0$ ) mit (7.1-88)

$$u_1 = \frac{d\psi_1}{dt} = L_0 \cdot \frac{di_1}{dt} - \frac{\Psi_0}{d+x_0} \cdot \frac{dx_1}{dt}. \quad (7.1-115)$$

Der Strom wird mit (7.1-95) ersetzt:

$$\begin{aligned} u_1 &= L_0 \cdot \frac{d+x_0}{\Psi_0} \cdot \frac{dF_1}{dt} - L_0 \cdot \frac{d+x_0}{\Psi_0} \cdot \left( k - \frac{\Psi_0^2}{(d+x_0)^2 \cdot L_0} \right) \cdot \frac{dx_1}{dt} - \frac{\Psi_0}{d+x_0} \cdot \frac{dx_1}{dt} \text{ bzw.} \\ u_1 &= L_0 \cdot \frac{d+x_0}{\Psi_0} \cdot \frac{dF_1}{dt} - L_0 \cdot \frac{d+x_0}{\Psi_0} \cdot k \cdot \frac{dx_1}{dt}. \end{aligned} \quad (7.1-116)$$

Für kleine sinusförmige Änderungen um den Arbeitspunkt  $I_0, \Psi_0, x_0, F_0, U_0 = 0$  wird mit

$v_1 = dx_1/dt \rightarrow \hat{\underline{V}}_1 = j \cdot \omega \cdot \hat{\underline{X}}_1$  aus (7.1-114), (7.1-116) die komplexe Vierpoldarstellung (7.1-117) mit der komplexwertigen **Matrix (T)** erhalten, die aus mech. Größen el. Größen ergibt.

$$\begin{pmatrix} \hat{\underline{I}}_1 \\ \hat{\underline{U}}_1 \end{pmatrix} = \frac{d+x_0}{\Psi_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{j \cdot \omega} \cdot \left( k - \frac{\Psi_0^2}{(d+x_0)^2 \cdot L_0} \right) \\ j \cdot \omega \cdot L_0 & -L_0 \cdot k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{\underline{F}}_1 \\ \hat{\underline{V}}_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \hat{\underline{I}}_1 \\ \hat{\underline{U}}_1 \end{pmatrix} = (T) \cdot \begin{pmatrix} \hat{\underline{F}}_1 \\ \hat{\underline{V}}_1 \end{pmatrix} \quad (7.1-117)$$

Darin ist  $k_{\text{res}} = k - \frac{\Psi_0^2}{(d+x_0)^2 \cdot L_0}$  die resultierende Federkonstante und  $k_m = \frac{\Psi_0^2}{(d+x_0)^2 \cdot L_0}$

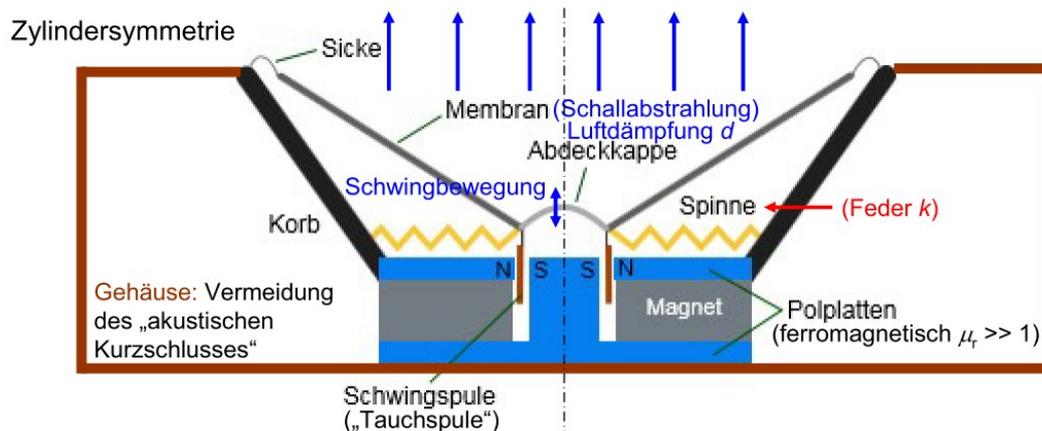
entspricht der **magnetischen Federkonstante** (7.1-14).

$$k_m = \frac{\Psi_0^2}{(d + x_0)^2 \cdot L_0} = \frac{L_0 I_0^2}{(d + x_0)^2} = \frac{\mu_0 N^2 I_0^2 \cdot A_e}{(d + x_0)^3} \Leftrightarrow k_m = \frac{\mu_0 \cdot (N \cdot I)^2 \cdot 2h \cdot l}{(X + e')^3} \quad (7.1-117)$$

Mit der Entsprechung  $A_e = A/2$  (der Luftspalt  $d + x_0$  tritt zweimal im Feldverlauf auf, Bild 7.1-21a) folgt:  $A_e \Leftrightarrow 2h \cdot l$ ,  $d + x_0 \Leftrightarrow X + e'$ . So folgt die Gleichheit für  $k_m$  mit (7.1-14).

### 7.2 Magnetischer Wandler „Typ 2“

Elektromagnetische Wandler Typ 2 sind mit beweglichen („schwingenden“) Spulen ausgestattet (z. B. Schwing- oder „Tauchspulen“, die in ein externes Magnetfeld „eintauchen“), in die eine el. Spannung durch das externe Magnetfeld induziert wird. Dadurch verhalten sie sich im Gegensatz zu Wandlern Typ 1 auch für Großsignale etwa linear, so dass die Linearisierung in stabilen Arbeitspunkten entfällt. Eine Anwendung sind Lautsprecher (Bild 7.2-1). Das elektrische Tonsignal wird in mechanische Bewegung der mit der Spule verbundenen Membran zur Anregung von Luft-Schallwellen umgewandelt (Bild 7.2-2). Diese sind longitudinale Druckwellen (7.2-1) mit der Wellenlänge  $\lambda$  und Schallgeschwindigkeit  $c_s = \lambda \cdot f$ . Die Luftmoleküle schwingen am Ort  $x$  in Wellenausbreitungsrichtung mit der Geschwindigkeit (Schallschnelle)  $v(x, t) = \hat{v} \cdot \sin(2\pi \cdot ((x/\lambda) - f \cdot t))$  mit der Frequenz  $f$ .



**Bild 7.2-1:** Magnetischer Wandler „Typ 2“ als Tauchspulen-Wandler für die Anwendung als Lautsprecher (Quelle: [Wikipedia.de](http://Wikipedia.de)).



**Bild 7.2-2:** a) Elektro-dynamischer Lautsprecher (Tauchspulenprinzip) mit „Lautsprecherkorb“ bei entfernter „Abdeckkappe“, Papier-Konusmembran und Gummi-Sicke als Feder, b) „Abdeckkappe“ (Staubschutzkalotte) (Quelle: [Wikipedia.de](http://Wikipedia.de)).

$$\Delta p(x,t) = \hat{p} \cdot \sin(2\pi \cdot ((x/\lambda) - f \cdot t)) = Z_S \cdot v(x,t) \tag{7.2-1}$$

Aus den Luftdruckschwankungen  $\Delta p(x,t)$  („Schalldruck“) entsteht je Wellen-Querschnittsfläche  $A$  die mit dieser Frequenz  $f$  schwingende, in  $v$ -Richtung wirkende Schallkraft  $F_S$ . In größerem Abstand von der Schallquelle sind ebene Schallwellen eine gute Näherung für die Wellenausbreitung. Für sie gilt zwischen Schallschnelle und Druckschwankung im Medium Luft am Ort  $x$  (z. B.  $x = 0$ )  $\Delta p(t) = \rho_L \cdot c_S \cdot v(t) = Z_S \cdot v(t)$  (Bild 7.2-3). Der Faktor zwischen beiden als das Produkt „Luftdichte  $\rho_L \times$  Wellengeschwindigkeit“ ist die „spezifische akustische Impedanz“  $Z_S$ . Bei einer Lufttemperatur von 20°C, einem Luftdruck  $p_L = 1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$  und einer Luftdichte  $\rho_L = 1.29 \text{ kg/m}^3$  ergibt sich eine Schallgeschwindigkeit  $c_S = 343 \text{ m/s}$  und damit eine spezifische akustische Impedanz  $Z_S = \rho_L \cdot c_S = 443 \text{ Ns/m}^3$ .

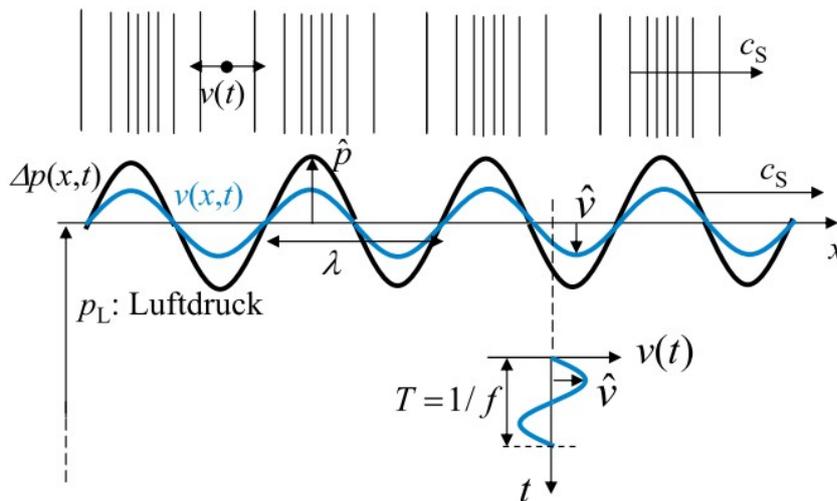


Bild 7.2-3: Ebene Schallwelle in  $x$ -Richtung im elastischen Medium (Gas, Flüssigkeit oder Festkörper) mit lokaler Schwingbewegung der Moleküle in Wellenausbreitungsrichtung (= Longitudinalwelle) und globalem räumlichem Wellenbild von  $\Delta p$ .

Die Schallintensität  $I_S$  (7.2-2) ist die Schallleistung  $P_S$  (Kraft  $\times$  Geschwindigkeit) je Wellen-Querschnittsfläche  $A$  als Produkt aus Schalldruck und Schallschnelle je Fläche.

$$I_S(t) = P_S(t) / A = F_S(t) \cdot v(t) / A = (F_S(t) / A) \cdot v(t) = \Delta p(t) \cdot v(t) \tag{7.2-2}$$

Die mittlere Schallintensität  $I_S$  je Schwingungsperiode  $T = 1/f$  in einer ebenen Schallwelle ist demnach (7.2-3).

$$I_S = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T I_S(t) \cdot dt = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T p(t) \cdot v(t) \cdot dt = \frac{\hat{p} \cdot \hat{v}}{T} \cdot \int_0^T \sin^2(2\pi \cdot f \cdot t) \cdot dt = \frac{\hat{p} \cdot \hat{v}}{2} = p_{\text{eff}} \cdot v_{\text{eff}} = \frac{p_{\text{eff}}^2}{Z_S} \tag{7.2-3}$$

Das gesunde menschliche Ohr junger Menschen hat bei einem Tonsignal mit der Frequenz  $f = 1 \text{ kHz}$  eine Hörschwelle  $I_{S0} = 10^{-12} \text{ W/m}^2$ , somit bei  $Z_S = 443 \text{ Ns/m}^3$   $p_{\text{eff},0} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}$  und eine Schmerzgrenze  $I_{S,\text{lim}} = 10 \text{ W/m}^2$ ,  $p_{\text{eff},\text{lim}} = 65 \text{ Pa}$ .

$$I_{S0} = \frac{p_{\text{eff},0}^2}{Z_S} = \frac{(2 \cdot 10^{-5})^2}{443} = 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}, \quad I_{S,\text{lim}} = \frac{p_{\text{eff},\text{lim}}^2}{Z_S} = \frac{65^2}{443} = 10 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

Die resultierende Schallkraft am Ort  $x$  der Welle  $F_S(t) = \Delta p(t) \cdot A = Z_S \cdot v(t) \cdot A = d_S \cdot \dot{x}(t)$  ist über den **Schalldämpfungsbeiwert**  $d_S$  zur Schallschnelle proportional. Die Bewegung der schwingenden Lautsprechermembran im schallübertragenden Medium Luft stellt eine Dämpferwirkung dar, die die Membranbewegung zu bremsen versucht.



(iii) Der Luftspalt ist „klein“:  $\delta \ll r_a$ : Damit ist das Radialmagnetfeld  $B_\delta(r) = \mu_0 \cdot H_\delta(r)$  über die Luftspaltweite  $r_a \leq r \leq r_a + \delta$  etwa konstant.

Die zum Einsatz kommenden kostengünstigen Ferrit-Dauermagnete haben gemäß Bild 2.2.2-2 eine lineare  $B_M(H_M)$ -Dauermagnetkennlinien im 2. Quadranten der  $B_M(H_M)$ -Ebene.

$$B_M = \mu_M H_M + B_R, \quad \mu_M \approx 1.05 \cdot \mu_0 \quad (\text{Bild 7.2-5}) \quad (7.2-5)$$

Die Flussdurchtrittsflächen sind an den geschlossenen  $B$ -Feldlinien, Kurve  $C$  in Bild 7.2-4 zu betrachten. Am Ringmagneten ist  $A_M$

$$A_M = (R'^2 - (R' - b_M)^2) \cdot \pi = b_M \cdot (2R' - b_M) \cdot \pi. \quad (7.2-6)$$

Die Zylinderfläche in Luftspaltmitte beim Eisenjoch im Spulenbereich  $A_\delta$  ist

$$A_\delta = (2r_a + \delta) \cdot \pi \cdot l. \quad (7.2-7)$$

Da keine Streuflüsse erfasst werden, herrscht Flusskonstanz  $\Phi = B_\delta \cdot A_\delta = B_M \cdot A_M$ , so dass bei  $A_\delta < A_M$  wegen  $B_\delta = B_M \cdot (A_M / A_\delta) > B_M$  die Flussdichte im Luftspalt  $B_\delta$  gegenüber jener im Magneten  $B_M$  erhöht ist („**Flusskonzentration**“). Dies ist erforderlich, da Ferrite (Bild 2.2.2-2) nur geringe Flussdichteremanenzen  $B_R < 0.4\text{T}$  aufweisen. Der Durchflutungssatz bei stromloser Spule  $i = 0$  entlang der geschlossenen Kurve  $C$  für  $\mu_{Fe} \rightarrow \infty$  ergibt

$$H_{Fe} = 0: \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = H_\delta \cdot \delta + H_M \cdot h_M = \Theta \sim i = 0 \Rightarrow H_\delta = -H_M \cdot (h_M / \delta). \quad (7.2-8)$$

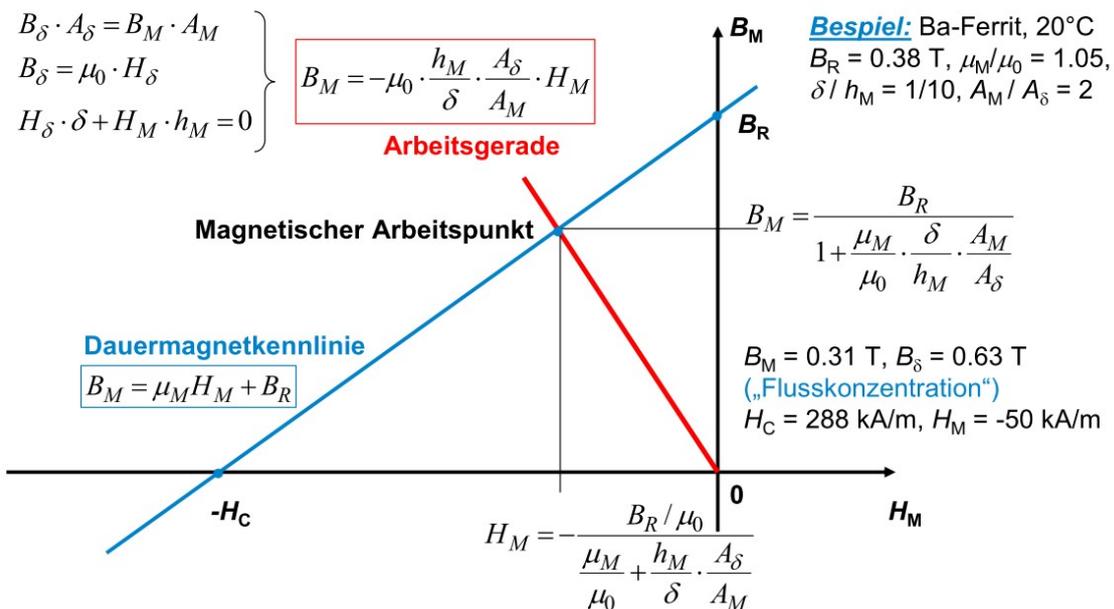


Bild 7.2-5: Dauermagnet-Kennlinie im 2. Quadranten und Luftspalt-Arbeitsgerade des Wandlers Typ 2. Als Beispiel dient Ba-Ferrit, der bei 20°C eine Remanenz  $B_R = 0.38\text{ T}$  und Permeabilität  $\mu_M/\mu_0 = 1.05$  hat. Als Geometriedaten gelten hier  $\delta/h_M = 1/10$ ,  $A_M/A_\delta = 2$ .

Das  $H_M$ -Feld im Magneten ist bei positiver Luftspaltfeldstärke  $H_\delta$  negativ, d. h. der Dauermagnet wird tw. entmagnetisiert (reversibel, da die  $B_M(H_M)$ -Kennlinie linear ist) und wird daher im 2. Quadranten der  $B_M(H_M)$ -Ebene betrieben (Bild 7.2-5). Die vier Unbekannten  $B_\delta, H_\delta, B_M, H_M$  werden mit den vier linearen Gleichungen (7.2-9) bestimmt.

$$\text{El.-magn. Grundgesetze: } H_\delta \cdot \delta + H_M \cdot h_M = 0, \quad B_\delta \cdot A_\delta = B_M \cdot A_M, \quad (7.2-9)$$

$$\text{Materialgesetze: } B_\delta = \mu_0 \cdot H_\delta, \quad B_M = \mu_M H_M + B_R,$$

$$B_\delta = \frac{B_R}{\frac{A_\delta}{A_M} + \frac{\mu_M}{\mu_0} \cdot \frac{\delta}{h_M}}, \quad H_M = -\frac{B_R / \mu_0}{\frac{\mu_M}{\mu_0} + \frac{h_M}{\delta} \cdot \frac{A_\delta}{A_M}}, \quad B_M = \frac{B_R}{1 + \frac{\mu_M}{\mu_0} \cdot \frac{\delta}{h_M} \cdot \frac{A_M}{A_\delta}} \quad (7.2-10)$$

Die Luftspaltflussdichte  $B_\delta$  im Arbeitspunkt (Bild 7.2-5) ist umso größer, je größer  $A_M/A_\delta, h_M/\delta$  sind, also je breiter und länger der Dauermagnet ist.

Die Lorentz-Kraft  $F_m$  auf die mit  $i$  stromdurchflossene, rechtswendig gewickelte Spule (Bild 7.2-6) im Luftspaltfeld  $\vec{B}_\delta = -B_\delta \cdot \vec{e}_r$  erfolgt durch Integration der Kraft auf ein differentiell kurzes Spulenleiterstück  $ds = r_{av} \cdot d\varphi$ , das im Sinn der Stromrichtung in Umfangsrichtung vektoriell positiv gezählt wird:  $d\vec{s} = r_{av} \cdot d\varphi \cdot \vec{e}_\varphi$ . Der mittlere Radius beschreibt die Luftspaltmitte  $r_{av} = r_a + (\delta/2)$ .

$$\vec{F}_m = \int_s N \cdot i \cdot d\vec{s} \times \vec{B}_\delta = \int_0^{2\pi} N \cdot i \cdot r_{av} \cdot (-B_\delta) \cdot d\varphi \cdot \vec{e}_\varphi \times \vec{e}_r = -N \cdot i \cdot r_{av} \cdot B_\delta \cdot (-\vec{e}_z) \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$\vec{F}_m = N \cdot i \cdot 2\pi \cdot r_{av} \cdot B_\delta \cdot \vec{e}_z = K_0 \cdot i \cdot \vec{e}_z \quad (7.2-11)$$

In (7.2-11) ist  $K_0 = N \cdot 2\pi \cdot r_{av} \cdot B_\delta$  der **Kopplungsterm** zwischen mechanischer und elektrischer Gleichung, wie noch gezeigt wird.

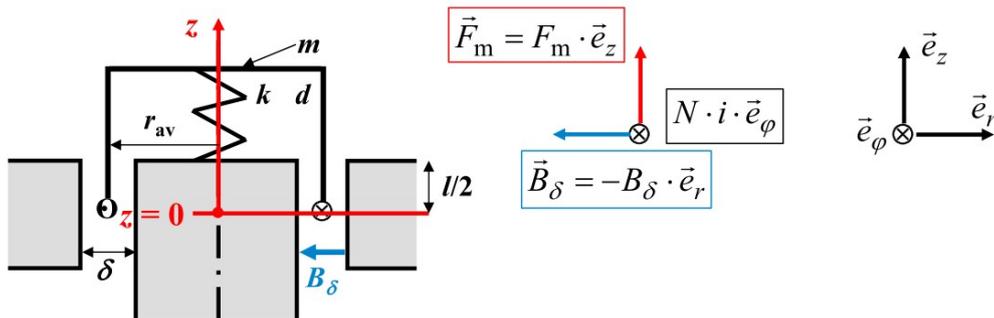


Bild 7.2-6: Lorentz-Kraft  $F_m$  auf die mit  $i$  stromdurchflossene, rechtswendig gewickelte bewegliche Spule

Die Vertikalposition  $z$  der Tauchspule erreicht von  $z = 0$  in der Mitte nach oben und unten mit  $l/2$  jeweils den Rand des Eisenjochs. Die Feder (Federkonstante  $k$ ) ist entspannt bei  $z = 0$  und ist zwischen Spule und Eisenkern befestigt. Die Newton-Bewegungsgleichung für die Spule mit der Masse  $m$ , deren bewegliche Stromzuleitungen vernachlässigt werden, ist (7.2-12), da die Magnetkraft bei positivem Spulenstrom  $i > 0$  nach oben gegen die gedehnte Feder  $-k \cdot z$  und gegen die Dämpferkraft  $-d \cdot \dot{z}$  der Lautsprechermembran die Masse  $m$  beschleunigt.

$$m \cdot \ddot{z} \cdot \vec{e}_z = (F_m - k \cdot z - d \cdot \dot{z}) \cdot \vec{e}_z \Rightarrow m \cdot \ddot{z} + d \cdot \dot{z} + k \cdot z = F_m = K_0 \cdot i \quad (7.2-12)$$

Der Schwerkrafteinfluss ist vernachlässigt. Für die elektrische Gleichung muss die bewegungsinduzierte Spannung  $u_{i,f}$  im  $B_\delta$ -Feld berechnet werden, wobei es gemäß Kap. 2 zwei Möglichkeiten zur Berechnung von  $u_{i,f}$  bei bewegter Tauchspule gibt: a) aus der Änderung  $-\psi_f/dt$  der Fremd-Flussverkettung  $\psi_f$  der Tauchspule mit dem Permanentmagnetfeld und b) mit der bewegungsinduzierten Feldstärke  $E_b$ . Gemäß a) ist die Flussverkettung  $\psi_f$  (7.2-15) der Tauchspule mit dem „Fremdfeld“  $B_\delta$  und der Spulenfläche  $A$  (Flächennormalenvektor auf ein Flächenelement:  $d\vec{A} = dA \cdot \vec{e}_z$ ) aus dem Magnetfluss  $\Phi_f$  (7.2-13) zu berechnen, der wegen der Flusskonstanz auch durch (7.2-14) bestimmt ist (Bild 7.2-7a).

$$\Phi_f = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_A \vec{B} \cdot dA \cdot \vec{e}_z = \int_A (-B) \cdot \vec{e}_z \cdot dA \cdot \vec{e}_z = -B \cdot A, \quad (7.2-13)$$

$$\Phi_f = -B_\delta \cdot 2\pi \cdot r_{av} \cdot ((l/2) - z), \tag{7.2-14}$$

$$\psi_f(z(t)) = N \cdot \Phi_f = -N \cdot B_\delta \cdot 2\pi \cdot r_{av} \cdot ((l/2) - z(t)). \tag{7.2-15}$$

Aus (7.2-15) ergibt das Faraday-Induktionsgesetz (Kap. 2) die induzierte Spannung (7.2-16).

$$u_{i,f} = -d\psi_f / dt = -N \cdot B_\delta \cdot 2\pi \cdot r_{av} \cdot \dot{z} \tag{7.2-16}$$

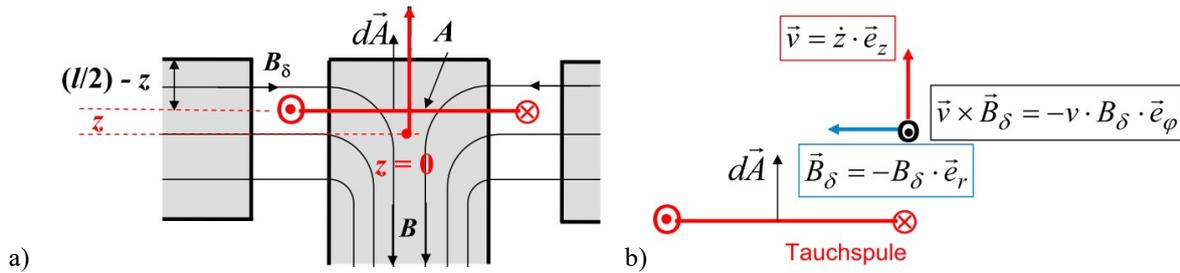


Bild 7.2-7: a) Flussverketzung  $\psi_f$  der Tauchspule mit dem „Fremdfeld“  $B_\delta$  und der Spulenfläche  $A$ ,  
 b) Bewegungsinduzierte Feldstärke  $E_b$  aus  $v$  und  $B_\delta$ .

Gemäß Bild 7.2-7b erfolgt die Berechnung von  $u_{i,f}$  gemäß b) mit der bewegungsinduzierten Feldstärke  $E_b$  in den Spulenleitern. Diese Leiter werden dabei im rechtswendigen Umlaufsinn  $d\vec{s}$  um den Flächennormalenvektor der Spulenfläche  $d\vec{A}$  durchlaufen. Mit der vertikalen Spulenleiter-Geschwindigkeit  $\vec{v} = \dot{z} \cdot \vec{e}_z$  ist  $\vec{E}_b = \vec{v} \times \vec{B}_\delta$ . Die induzierte Spannung längs eines Leiter-Wegelements  $\vec{E}_b \cdot d\vec{s}$  wird mit  $\vec{B}_\delta = -B_\delta \cdot \vec{e}_r$ ,  $d\vec{s} = r_{av} \cdot d\varphi \cdot \vec{e}_\varphi$  für die Spule aufintegriert.

$$u_{i,f} = N \cdot \int_s (\vec{v} \times \vec{B}_\delta) \cdot d\vec{s} = N \cdot \int_0^{2\pi} \dot{z} \cdot (-B_\delta) \cdot r_{av} \cdot d\varphi \cdot (\vec{e}_z \times \vec{e}_r) \cdot \vec{e}_\varphi = -N \cdot \dot{z} \cdot B_\delta \cdot r_{av} \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi,$$

$$u_{i,f} = -N \cdot \dot{z} \cdot B_\delta \cdot 2\pi \cdot r_{av}, \tag{7.2-17}$$

in Übereinstimmung mit (7.2-16). Kontrolle der Richtung von  $E_b$ : Bei Bewegung der Spule nach oben  $v > 0$  verringert sich ihre Flussverketzung  $\psi_f$ .  $E_b$  ist daher so gerichtet, dass es in der (gedanklich) kurz geschlossenen Spule einen Strom  $i$  in Richtung  $E_b$  treiben würde, so dass der von ihm erregte Fluss die ursprüngliche Flussverketzung  $\psi_f$  aufrecht zu halten versucht (Bild 7.2-7b). Seine Lorentz-Kraft  $F \sim i \cdot B_\delta$  wirkt dabei gegen  $v$ .

Die Selbstinduktivität  $L_i$  der Tauchspule wird mit dem idealisierten Feldbild Bild 7.2-8 bestimmt.

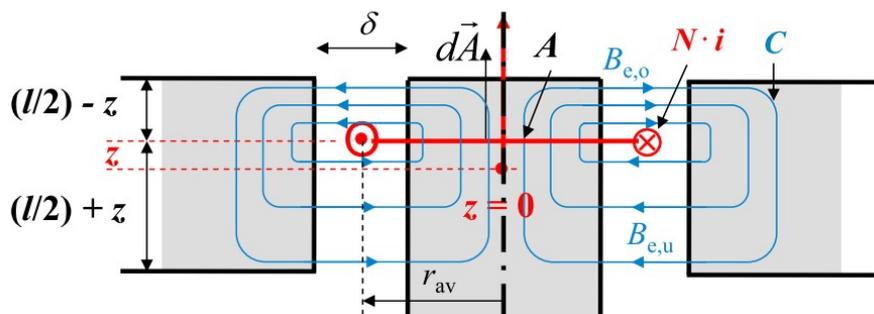


Bild 7.2-8: Idealisiertes Feldbild der Tauchspule, erregt durch den Spulenstrom  $i$ , zur Bestimmung der Selbstinduktivität  $L_i$  der Tauchspule.

Dazu wird das Spuleneigenfeld  $H_e$  mit dem Durchflutungssatz (7.2-18) berechnet. Im ideal magnetisierbaren Eisen ist die magnetische Feldstärke Null:  $\mu_{Fe} \rightarrow \infty : H_{Fe,e} = 0$ . Auch das Spulengebiet, dessen Feldlinien sich über den Dauermagnet schließen, ist vernachlässigbar klein, da die Dauermagnet-Permeabilität etwa  $\mu_M \approx \mu_0$  ist und  $h_M \gg \delta$  ist. Daher verbleibt nur der Fluss innerhalb des Luftspalts, dessen Flussdichte bei unsymmetrischer Spulenanlage  $z \neq 0$  oberhalb und unterhalb der Spule ungleich ist:  $B_{e,o} \neq B_{e,u}$ . Daher ist auch  $H_{e,o} = B_{e,o} / \mu_0 \neq H_{e,u} = B_{e,u} / \mu_0$ .

$$\oint_C \vec{H}_e \cdot d\vec{s} = H_{e,o} \cdot \delta + H_{Fe,e} \cdot s_{Fe} + H_{e,u} \cdot \delta = H_{e,o} \cdot \delta + H_{e,u} \cdot \delta = \Theta = N \cdot i, \quad (7.2-18)$$

$$B_{e,o} \cdot \delta + B_{e,u} \cdot \delta = \mu_0 \cdot N \cdot i. \quad (7.2-19)$$

Aus der Flusskonstanz  $\Phi_e = B_{e,o} \cdot 2\pi \cdot r_{av} \cdot \left(\frac{l}{2} - z\right) = B_{e,u} \cdot 2\pi \cdot r_{av} \cdot \left(\frac{l}{2} + z\right)$  (Bild 7.2-8) folgt

$$B_{e,o}(z) \cdot \left(\frac{l}{2} - z\right) = B_{e,u}(z) \cdot \left(\frac{l}{2} + z\right) \Rightarrow B_{e,o}(z) = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot i}{\delta \cdot l} \cdot \left(\frac{l}{2} + z\right) \quad (7.2-20)$$

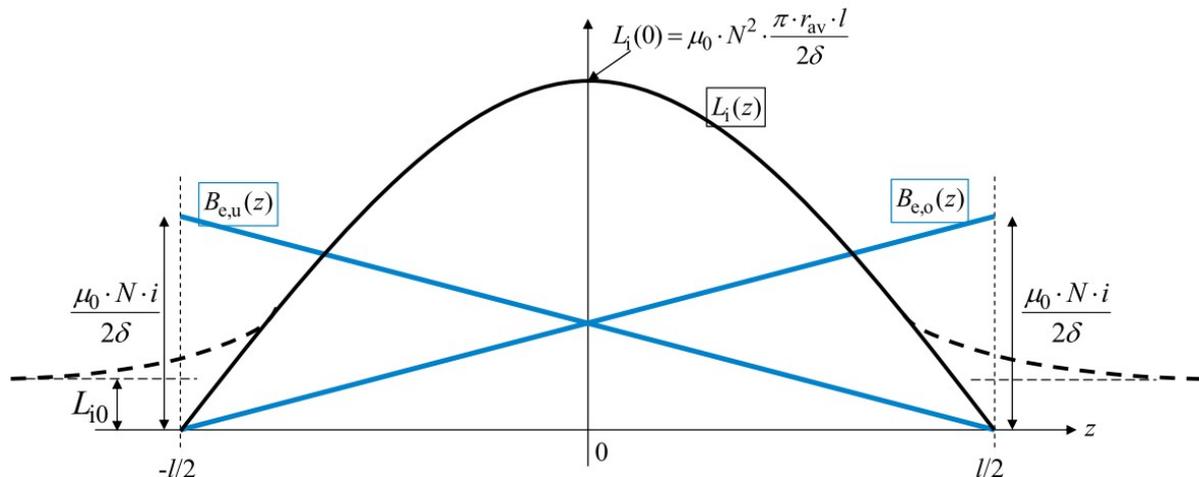


Bild 7.2-9: Luftspaltflussdichte des Spuleneigenfelds beim Spulenstrom  $i$  ober- und unterhalb der Spule  $B_{e,o}$  und  $B_{e,u}$  sowie die Spulenselbstinduktivität  $L_i$  in Abhängigkeit der Lagekoordinate  $z$  der Tauchspule.

$$L_i(z) = \frac{\Psi_e}{i} = \frac{N \cdot \Phi_e}{i} = \frac{\mu_0 \cdot N^2 \cdot i}{\delta \cdot l \cdot i} \cdot 2\pi \cdot r_{av} \cdot \left(\frac{l}{2} + z\right) \cdot \left(\frac{l}{2} - z\right) = \mu_0 \cdot N^2 \cdot \frac{2\pi \cdot r_{av}}{\delta \cdot l} \cdot \left(\frac{l^2}{4} - z^2\right) \quad (7.2-21)$$

Die Selbstinduktivität  $L_i(z)$  ist abhängig von der Lage  $z$  der Tauchspule (7.2-21). In der Näherung von Bild 7.2-8 für das Spulengebiet wird dieses bei  $z = \pm l/2$  Null, so dass dort auch  $L_i = 0$  ist. Tatsächlich muss aber die als „Kreisschleife“ modellierte Spule außerhalb des Luftspalts für  $z \gg l/2$  immer noch als Grenzwert die Selbstinduktivität  $L_{i0}$  einer Kreisschleifen-Luftspule haben. Mit dem Spulenleiterradius  $r$  der Kreisschleife ist dieser Wert (7.2-22) für die Geometrie  $r_{av} / r > 2$  (Bild 7.2-9) allerdings klein und interessiert hier nicht, da wir nur  $l/2 \geq z \geq -l/2$  betrachten.

$$L_{i0} \approx \mu_0 \cdot N^2 \cdot r_{av} \cdot [\ln(8 \cdot r_{av} / r) - 2], \text{ gültig für } r_{av} / r > 2 \quad (7.2-22)$$

Die gesamte Selbstinduktionsspannung in der Spule umfasst neben der Bewegungsinduktion zufolge  $dz/dt$  auch die Ruhinduktionsspannung  $u_{i,e}$  zufolge  $di/dt$ . Mit der Kirchhoff'schen Maschenregel folgt die Spannungsgleichung (7.2-24) mit dem Spuleninnenwiderstand  $R_i$  und einem äußeren Widerstand  $R_a$  zur Spannungsquelle  $u(t)$  hin.

$$u_{i,e} = -d\psi_e(t)/dt = -\frac{d(L_i(z) \cdot i)}{dt} = -i \cdot \frac{dL_i(z)}{dz} \cdot \dot{z} - L_i(z) \cdot \frac{di}{dt} \quad (7.2-23)$$

$$u(t) + u_i(t) = u(t) + u_{i,e} + u_{i,f} = (R_a + R_i) \cdot i = R \cdot i, \quad R_a + R_i = R \quad (7.2-24)$$

$$u(t) = R \cdot i + i \cdot \frac{dL_i(z)}{dz} \cdot \dot{z} + L_i(z) \cdot \frac{di}{dt} + N \cdot \dot{z} \cdot B_\delta \cdot 2\pi \cdot r_{av} \quad (7.2-25)$$

$$u = R \cdot i - \mu_0 \cdot N^2 \cdot \frac{4\pi \cdot r_{av}}{\delta \cdot l} \cdot i \cdot z \cdot \dot{z} + \mu_0 \cdot N^2 \cdot \frac{2\pi \cdot r_{av}}{\delta \cdot l} \cdot \left(\frac{l^2}{4} - z^2\right) \cdot \dot{i} + N \cdot \dot{z} \cdot B_\delta \cdot 2\pi \cdot r_{av} \quad (7.2-26)$$

Wegen  $i \cdot z \cdot \dot{z}$  und  $z^2 \cdot \dot{i}$  ist (7.2-26) nichtlinear. Mit der **Vereinfachung** für kleine Bewegungsamplituden  $-l/2 \ll z \ll l/2$  ist  $L_i$  etwa konstant, und (7.2-26) wird linear (7.2-28).

$$\frac{l^2}{4} - z^2 \approx \frac{l^2}{4} \Rightarrow L_i \approx \mu_0 \cdot N^2 \cdot \frac{\pi \cdot r_{av} \cdot l}{2\delta} = \text{konst.} \Rightarrow \frac{dL_i(z)}{dz} = 0 \quad (7.2-27)$$

$$u = R \cdot i + L_i \cdot \frac{di}{dt} + N \cdot \dot{z} \cdot B_\delta \cdot 2\pi \cdot r_{av} = R \cdot i + L_i \cdot \frac{di}{dt} + K_0 \cdot \dot{z}, \quad K_0 = N \cdot B_\delta \cdot 2\pi \cdot r_{av} \quad (7.2-28)$$

Der **Kopplungsterm**  $K_0$  koppelt die mechanische und die elektrische Gleichung.

$$m \cdot \ddot{z} + d \cdot \dot{z} + k \cdot z = K_0 \cdot i, \quad u = R \cdot i + L_i \cdot \frac{di}{dt} + K_0 \cdot \dot{z} \quad (7.2-29)$$

Die **Gleichgewichtslagen**  $Z$  zum nichtlinearen System (7.2-12), (7.2-26) werden mit  $d./dt = 0$  erhalten. Dann gilt  $u(t) = \text{konst.} = U$ ,  $z(t) = \text{konst.} = Z$ ,  $i(t) = \text{konst.} = I$ . Aus (7.2-12), (7.2-26) folgt (7.2-30): Die Gleichspannung  $U$  treibt den Gleichstrom  $I$  in der Spule, der mit dem Dauermagnetfeld eine konstante *Lorentz-Kraft* erzeugt, die die Spule gegen die Federkraft aus  $z = 0$  in die Lage  $Z$  schiebt. Bei  $U > 0$  wird die Spule nach oben gezogen ( $Z > 0$ ), bei  $U < 0$  nach unten:  $Z < 0$ .

$$k \cdot Z = K_0 \cdot I, \quad (R_a + R_i) \cdot I = U \Rightarrow Z = \frac{K_0}{k} \cdot \frac{U}{R_a + R_i} \quad \text{für } -\frac{l}{2} \leq Z \leq \frac{l}{2}. \quad (7.2-30)$$

Im Gleichgewicht ( $d./dt = 0$ ) ist das nichtlineare System (7.2-12), (7.2-26) LINEAR. Die nichtlinearen Terme  $i \cdot z \cdot \dot{z}$  und  $z^2 \cdot \dot{i}$  verschwinden. Die Gleichgewichtslage  $Z$  ist proportional zur angelegten Spannung  $U$ !

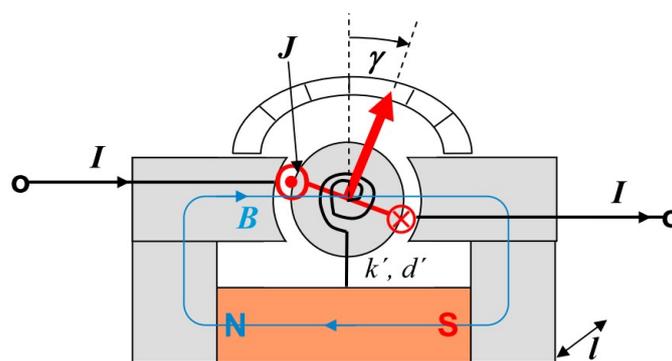


Bild 7.2-10: Anwendung zu Wandler Typ 2: Gleichspannungsmessung  $U$  bzw. Gleichstrommessung  $I$  im Drehspulinstrument über den stationären Drehwinkel  $\gamma$  der Spule.

Beispiel 7.2-1: Eine Anwendung dafür ist die Spannungsmessung bzw. Strommessung im **Drehspulinstrument** (Bild 7.2-10), wo die Spule drehbar gelagert ist, so dass anstelle der Linearbewegung  $z$  die Drehbewegung mit dem Drehwinkel  $\gamma$  auftritt. Dieser Drehwinkel ist gemäß (7.2-30) gemäß  $\gamma \sim U \sim I$  proportional zur angelegten Spulenspannung  $U$  bzw. zum Spulengleichstrom  $I$ , so dass beide über  $\gamma$  messbar sind.

Statt der Linearbewegung  $z$  des Wandlers „Typ 2“ tritt nun die Drehbewegung  $z = \gamma \cdot r$  auf. Dabei ist die Umfangslänge der Spule des Wandlers Typ 2 im  $B$ -Feld  $2\pi \cdot r_{av}$  zu ersetzen durch die Länge der Spulenseiten  $2 \cdot l$  im  $B$ -Feld. Daher ist die bewegungsinduzierte Spulenspannung anstelle (7.2-16)  $u_{i,f} = -N \cdot B_\delta \cdot 2l \cdot \dot{z} = -N \cdot B_\delta \cdot 2l \cdot r \cdot \dot{\gamma}$ . Mit der Lorentz-Kraft je Spulenleiter einer Spulenseite  $F_m = N \cdot i \cdot l \cdot B_\delta$  wird mit  $M_m = 2F_m \cdot r$  das Drehmoment auf die Spule bestimmt  $M_m = N \cdot i \cdot 2l \cdot B_\delta \cdot r$ . Mit dem zu  $K_0$  entsprechenden Kopplungsfaktor  $K'_0 = 2 \cdot N \cdot B_\delta \cdot l$  gilt  $u_{i,f} = -K'_0 \cdot r \cdot \dot{\gamma}$ ,  $M_m = K'_0 \cdot r \cdot i$ . Mit der Masse  $m$  je Spulenseite (inklusive Stirnverbindung) wird die Spulenspannung  $2m$  erhalten. Damit wird die mechanische Gleichung des Wandlers Typ 2  $m \cdot \ddot{z} + d \cdot \dot{z} + k \cdot z = F_m$  umgerechnet in die Drehbewegung (7.2-31) des Spulenkörpers in Bild 7.2-10.

$$2m \cdot r^2 \cdot \ddot{\gamma} + 2d \cdot r^2 \cdot \dot{\gamma} + 2k \cdot r^2 \cdot \gamma = 2F_m \cdot r = M_m = K'_0 \cdot r \cdot i \quad (7.2-31)$$

In (7.2-31) ist  $J = 2m \cdot r^2$  das polare Trägheitsmoment der Spule um die Vertikalachse,  $d' = 2d \cdot r^2$  die entsprechende Dämpfung der Bewegung und  $k' = 2k \cdot r^2$  die Drehfederkonstante.

$$J \cdot \ddot{\gamma} + d' \cdot \dot{\gamma} + k' \cdot \gamma = K'_0 \cdot r \cdot i \quad (7.2-32)$$

Anstelle (7.2-28) wird die elektrische Gleichung (7.2-33) für die Drehbewegung ermittelt.

$$(R_a + R_i) \cdot i + L_i \cdot \frac{di}{dt} = u(t) + u_{i,f} \Rightarrow (R_a + R_i) \cdot i + L_i \cdot \frac{di}{dt} + K'_0 \cdot r \cdot \dot{\gamma} = u(t) \quad (7.2-33)$$

Die Winkellage der Drehspule für statisches Gleichgewicht folgt mit  $d./dt = 0$  aus (7.2-33) gemäß (7.2-34) und erlaubt so die Gleichspannungsmessung  $U$  bzw. Gleichstrommessung  $I$ .

$$d./dt = 0 \rightarrow u(t) = U : \gamma = \frac{K'_0 \cdot r}{k'} \cdot \frac{U}{R_a + R_i} \Rightarrow \gamma \sim U \sim I \quad (7.2-34)$$

**Beispiel 7.2-2: Frequenzgang des Wandlers Typ 2** als Lautsprecher im Arbeitspunkt  $(U, I)$ : Da der Wandler Typ 2 mit (7.2-27) etwa linear ist, entfällt die Notwendigkeit der Linearisierung im Arbeitspunkt. Der Frequenzgang wird arbeitspunktunabhängig, solange gilt:  $|z| \ll l/2$ . Mit der Vorgabe der Gleich- und überlagerten Wechselspannung

$$u(t) = U + \hat{U} \cdot \cos \omega t = U + \operatorname{Re} \left\{ \hat{U} \cdot e^{j\omega t} \right\} \quad (7.2-35)$$

folgt der zugehörige Gleichstrom und um  $\varphi$  phasenverschobene Wechselstrom allgemein

$$i(t) = I + \hat{I} \cdot \cos(\omega t + \varphi) = I + \operatorname{Re} \left\{ \hat{I} \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t} \right\} = I + \operatorname{Re} \left\{ \underline{\hat{I}} \cdot e^{j\omega t} \right\}, \quad \underline{\hat{I}} = \hat{I} \cdot e^{j\varphi} \quad (7.2-36)$$

Die um den Arbeitspunkt  $Z$  überlagerte oszillierende Spulenbewegung ist um den Winkel  $\alpha$  zur Spannungslage phasenversetzt.

$$z(t) = Z + \hat{Z} \cdot \cos(\omega t + \alpha) = Z + \operatorname{Re} \left\{ \hat{Z} \cdot e^{j\alpha} \cdot e^{j\omega t} \right\} = Z + \operatorname{Re} \left\{ \underline{\hat{Z}} \cdot e^{j\omega t} \right\}, \quad \underline{\hat{Z}} = \hat{Z} \cdot e^{j\alpha} \quad (7.2-37)$$

Mit dem resultierenden Spulenwiderstand  $R = R_a + R_i$  ergibt das Einsetzen von (7.2-35), (7.2-36), (7.2-37) in (7.2-29) nach Kürzen von  $U = R \cdot I$ ,  $k \cdot Z = K_0 \cdot I$  den Gleichungssatz (7.2-38). Dessen Lösung mit der Cramer'schen Determinantenregel ist (7.2-40), (7.2-41).

$$(-\omega^2 \cdot m + j\omega \cdot d + k) \cdot \underline{\hat{Z}} - K_0 \cdot \underline{\hat{I}} = 0, \quad j\omega \cdot K_0 \cdot \underline{\hat{Z}} + (R + j\omega \cdot L_i) \cdot \underline{\hat{I}} = \hat{U} \quad \text{bzw.}$$

$$\begin{pmatrix} -\omega^2 \cdot m + j\omega \cdot d + k & -K_0 \\ j\omega \cdot K_0 & R + j\omega \cdot L_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{\hat{Z}} \\ \underline{\hat{I}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{U} \end{pmatrix} \quad (7.2-38)$$

$$\text{Det} = \begin{vmatrix} -\omega^2 \cdot m + j\omega \cdot d + k & -K_0 \\ j\omega \cdot K_0 & R + j\omega \cdot L_i \end{vmatrix} = (-\omega^2 \cdot m + j\omega \cdot d + k) \cdot (R + j\omega \cdot L_i) + j\omega \cdot K_0^2 \quad (7.2-39)$$

$$\hat{Z} = \frac{1}{\text{Det}} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -K_0 \\ \hat{U} & R + j\omega \cdot L_i \end{vmatrix} = \frac{K_0 \cdot \hat{U}}{(-\omega^2 \cdot m + j\omega \cdot d + k) \cdot (R + j\omega \cdot L_i) + j\omega \cdot K_0^2} \quad (7.2-40)$$

$$\hat{I} = \frac{1}{\text{Det}} \cdot \begin{vmatrix} -\omega^2 \cdot m + j\omega \cdot d + k & 0 \\ j\omega \cdot K_0 & \hat{U} \end{vmatrix} = \frac{(-\omega^2 \cdot m + j\omega \cdot d + k) \cdot \hat{U}}{(-\omega^2 \cdot m + j\omega \cdot d + k) \cdot (R + j\omega \cdot L_i) + j\omega \cdot K_0^2} \quad (7.2-41)$$

Aus dem Frequenzgang für die Spulenschwingungsamplitude  $\hat{Z}$  und die Stromamplitude  $\hat{I}$  wird die Spuleneingangsimpedanz  $\underline{Z}_e = \hat{U} / \hat{I} = \hat{U} / \hat{I}$  (7.2-42) berechnet.

$$\frac{\hat{U}}{\hat{I}} = R + j\omega \cdot L_i + \frac{j\omega \cdot K_0 \cdot \hat{Z}}{\hat{I}} = R + j\omega \cdot L_i + \frac{j\omega \cdot K_0^2}{-\omega^2 \cdot m + j\omega \cdot d + k} = \text{Re}\{\underline{Z}_e\} + j \cdot \text{Im}\{\underline{Z}_e\} \quad (7.2-42)$$

$$\frac{\hat{U}}{\hat{I}} = R + j\omega \cdot L_i + \frac{\omega^2 \cdot K_0^2 \cdot d + j\omega \cdot K_0^2 \cdot (k - \omega^2 \cdot m)}{(k - \omega^2 \cdot m)^2 + \omega^2 \cdot d^2} = R + R_S + j \cdot (\omega \cdot L_i + X_S) \quad (7.2-43)$$

Der Realteil  $\text{Re}\{\underline{Z}_e\} = R + R_S$  umfasst neben den *ohm'schen* Verlusten im el. Widerstand  $R$  die Reibungsverluste und die akustischen „Verluste“ der abgestrahlten Schallleistung, die durch den „**akustischen Strahlungswiderstand**“  $R_S$  (7.2-44) erfasst werden.

$$R_S = \frac{\omega^2 \cdot K_0^2 \cdot d}{(k - \omega^2 \cdot m)^2 + \omega^2 \cdot d^2} = \frac{\omega^2 \cdot K_0^2 / (m \cdot \tau)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega / \tau)^2} \quad (7.2-44)$$

In (7.2-44) sind als Abkürzungen (7.2-45) die mechanische, ungedämpfte Eigenkreisfrequenz  $\omega_0$  der Spule bei  $i = 0$ , die Dämpfungszeitkonstante  $\tau = T_d = 1/\omega_d$  und  $\omega_K$  verwendet.

$$\omega_0^2 = k/m, \quad \tau = m/d = 1/\omega_d = T_d, \quad \omega_K = K_0^2 / (R \cdot m) \quad (7.2-45)$$

Der Imaginärteil  $\text{Im}\{\underline{Z}_e\} = \omega \cdot L_i + X_S$  umfasst neben der Spulenselbstinduktivität  $L_i$  die „**Strahlungsreaktanz**“  $X_S$  (7.2-46).

$$X_S = \frac{\omega \cdot K_0^2 \cdot (k - \omega^2 \cdot m)}{(k - \omega^2 \cdot m)^2 + \omega^2 \cdot d^2} = \frac{\omega \cdot (\omega_0^2 - \omega^2) \cdot (K_0^2 / m)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega / \tau)^2} \quad (7.2-46)$$

Diese Strahlungsreaktanz  $X_S$  ist für kleine Kreisfrequenzen  $\omega < \omega_0$  wegen  $X_S(\omega) > 0$  eine frequenzabhängige Induktivität  $L_S(\omega^2) = X_S / \omega$  (7.2-47).

$$L_S(\omega^2) = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) \cdot (K_0^2 / m)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega / \tau)^2} \quad (7.2-47)$$

Für hohe Kreisfrequenzen  $\omega > \omega_0$  ist  $X_S(\omega) < 0$  und entspricht daher einer frequenzabhängigen Kapazität  $C_S(\omega^2) = -1/(\omega X_S)$ .

$$C_S(\omega^2) = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega / \tau)^2}{\omega^2 \cdot (\omega^2 - \omega_0^2) \cdot (K_0^2 / m)} \quad (7.2-48)$$

Der akustische Strahlungswiderstand  $R_S \sim d$  verschwindet bei  $d = 0 = d_R + d_S$ . Bei reibungsfreier Bewegung  $d_R = 0$  verbleibt nur die Dämpfung durch Schallabstrahlung. Die abgestrahlte Schallleistung  $P_S$  ist daher bei reibungsarmer Bewegung  $d_R \ll d_S$  proportional zu  $R_S \sim d_S$  (7.2-49). Sie wird mit der **Schalldämpfungszeitkonstanten**  $\tau_S = m/d_S$  durch (7.2-50) bestimmt und wird auf die *ohm'schen* Verluste  $U_{\text{eff}}^2 / R$  bezogen.

$$R_S = \frac{\omega^2 \cdot \omega_K \cdot (R / \tau_S)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega / \tau_S)^2} \quad (7.2-49)$$

$$P_S = R_S \cdot I_{\text{eff}}^2 = \frac{R_S \cdot \hat{I}^2}{2} = \frac{R_S \cdot |\hat{I}|^2}{2} \Rightarrow p_S = \frac{P_S}{U_{\text{eff}}^2 / R} = \frac{R_S \cdot |\hat{I}|^2 / 2}{U_{\text{eff}}^2 / R} = \frac{R_S \cdot |\hat{I}|^2 \cdot R}{\hat{U}^2} \quad (7.2-50)$$

Die Berechnung dieser „normierten“ Schallleistung  $p_S$  des magnetischen Wandlers „Typ 2“ als Lautsprecher erfordert das Einsetzen der Stromamplitude (7.2-41) in (7.2-50). Mit den Abkürzungen (7.2-45), der charakteristischen Kreisfrequenz  $\omega_L$  (7.2-51) und  $\tau_S$  folgt aus (7.2-41) der Ausdruck (7.2-52) bzw. (7.2-53).

$$\omega_L = R/L_i = 1/T_i, \quad \tau_S = m/d_S \quad (7.2-51)$$

$$(7.2-41) : \hat{I} = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) + j \cdot (\omega/\tau_S)}{(\omega_0^2 + j \cdot \frac{\omega}{\tau_S} - \omega^2) \cdot (1 + j \cdot \frac{\omega \cdot L_i}{R}) + j\omega \cdot \frac{K_0^2}{R \cdot m}} \cdot \frac{\hat{U}}{R}$$

$$\hat{I} = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) + j \cdot (\omega/\tau_S)}{(\omega_0^2 + j \cdot \frac{\omega}{\tau_S} - \omega^2) \cdot (1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_L}) + j\omega \cdot \omega_K} \cdot \frac{\hat{U}}{R} \quad (7.2-52)$$

$$\hat{I} = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) + j \cdot (\omega/\tau_S)}{(\omega_0^2 - \omega^2 \cdot (1 + \frac{1}{\omega_L \tau_S})) + j\omega \cdot (\omega_K + \frac{1}{\tau_S} + \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_L})} \cdot \frac{\hat{U}}{R} \quad (7.2-53)$$

Daraus folgt sofort das Betragsquadrat (7.2-54), das mit (7.2-49) in (7.2-50) eingesetzt wird.

$$|\hat{I}|^2 = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau_S)^2}{\left(\omega_0^2 - \omega^2 \cdot (1 + \frac{1}{\omega_L \tau_S})\right)^2 + \omega^2 \cdot \left(\omega_K + \frac{1}{\tau_S} + \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_L}\right)^2} \cdot \frac{\hat{U}^2}{R^2} \quad (7.2-54)$$

Nach Kürzen von  $(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau_S)^2$  und  $\hat{U}^2 / R^2$  wird (7.2-55) erhalten.

$$p_S = \frac{R \cdot R_S \cdot \hat{I}^2}{\hat{U}^2} = \frac{\omega^2 \cdot \omega_K / \tau_S}{\left(\omega_0^2 - \omega^2 \cdot (1 + \frac{1}{\omega_L \tau_S})\right)^2 + \omega^2 \cdot \left(\omega_K + \frac{1}{\tau_S} + \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_L}\right)^2} \quad (7.2-55)$$

Da die Spulenselbstinduktivität  $L_i \sim \mu_0$  (7.2-21) i. A. sehr klein ist, ist die elektrische Dämpfungskreisfrequenz  $\omega_L = R/L_i \sim 1/L_i$  i. A. deutlich größer als die mechanische Eigenkreisfrequenz  $\omega_0 = \sqrt{k/m} \ll \omega_L$  (Bild 7.2-11).



Bild 7.2-11: Typische Frequenzskala des akustischen Wandlers Typ 2

Es werden demnach die drei Kreisfrequenzbereiche  $0 < \omega \ll \omega_0$ ,  $\omega_0 < \omega < \omega_L$ ,  $\omega_L \ll \omega$  unterschieden, für die  $p_S$  zu bestimmen ist (Bild 7.2-13).

$$1) 0 < \omega \ll \omega_0 : p_S \approx \frac{\omega^2}{\omega_0^4} \cdot \frac{\omega_K}{\tau_S} = \frac{\omega^2}{(k/m)^2} \cdot \frac{d_S}{m} \cdot \frac{K_0^2}{R \cdot m} = \omega^2 \cdot \frac{d_S}{R} \cdot \frac{(2\pi \cdot r_{\text{av}} \cdot N \cdot B_\delta)^2}{k^2}, \quad (7.2-56)$$

$$2) \omega_0 < \omega < \omega_L : p_S \approx \frac{\omega^2 \cdot \omega_K / \tau_S}{\omega^4 \cdot (1 + \frac{1}{\omega_L \tau_S})^2 + \omega^2 \cdot (\omega_K + \frac{1}{\tau_S})^2} \approx \frac{\omega^2 \cdot \omega_K / \tau_S}{\omega^4 \cdot (1 + \frac{1}{\omega_L \tau_S})^2},$$

$$p_S \approx \frac{\omega^2 \cdot \omega_K / \tau_S}{\omega^4} = \frac{\omega_K}{\omega^2 \cdot \tau_S} = \frac{1}{\omega^2} \cdot \frac{d_S}{m} \cdot \frac{K_0^2}{R \cdot m} = \frac{1}{\omega^2} \cdot \frac{d_S}{R} \cdot \frac{(2\pi \cdot r_{av} \cdot N \cdot B_\delta)^2}{k^2} \cdot \frac{k^2}{m^2}, \quad (7.2-57)$$

$$3) \omega \gg \omega_L : p_S \approx \frac{\omega^2 \cdot \omega_K / \tau_S}{\omega^2 \cdot (-\omega^2 / \omega_L)^2} = \frac{\omega_L^2 \cdot \omega_K / \tau_S}{\omega^4} = \frac{1}{\omega^4} \cdot \frac{R^2}{L_i^2} \cdot \frac{d_S}{m} \cdot \frac{K_0^2}{R \cdot m},$$

$$p_S \approx \frac{1}{\omega^4} \cdot \frac{R \cdot d_S}{L_i^2} \cdot \frac{(2\pi \cdot r_{av} \cdot N \cdot B_\delta)^2}{m^2}. \quad (7.2-58)$$

Für kleine Frequenzen steigt die Schallleistung mit  $\omega^2$ , sinkt dann zunächst mit  $1/\omega^2$  und bei hohen Frequenzen mit  $1/\omega^4$ , weil die träge Masse der Tauchspule der raschen Stromfrequenz des akustischen Tons nicht mehr ausreichend schnell folgen kann. Das Maximum der „normierten“ Schallleistung  $p_S$  für eine Frequenzskala gemäß Bild 7.2-11 liegt bei  $\omega \ll \omega_L$  und wird aus (7.2-55) mit der Näherung  $\omega_0 \ll \omega_L, 1/\tau_S \ll \omega_L$  gemäß (7.2-59) bestimmt.

$$\omega_0, 1/\tau_S \ll \omega_L, \quad p_S \cong \frac{\omega^2 \cdot \omega_K / \tau_S}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \cdot (\omega_K + \frac{1}{\tau_S})^2} = p_S(\underbrace{\omega^2}_{\xi}) = p_S(\xi) \quad (7.2-59)$$

Mit  $A = \omega_K + \frac{1}{\tau_S}$  und  $p_S(\xi) \sim f(\xi) = \frac{\xi}{(\omega_0^2 - \xi)^2 + \xi \cdot A} \Rightarrow \frac{dp_S}{d\xi} = 0$  und der Nebenrechnung

$$\frac{df}{d\xi} = 0 = \frac{1}{(\omega_0^2 - \xi)^2 + \xi \cdot A} - \frac{\xi \cdot (-2 \cdot (\omega_0^2 - \xi) + A)}{((\omega_0^2 - \xi)^2 + \xi \cdot A)^2}$$

folgt die Bedingung  $(\omega_0^2 - \xi)^2 + \xi \cdot A - \xi \cdot (-2 \cdot (\omega_0^2 - \xi) + A) = 0$ , aus der sich nach Kürzen von  $\xi \cdot A$  die Beziehung  $((\omega_0^2 - \xi) + 2\xi) \cdot (\omega_0^2 - \xi) = (\omega_0^2 + \xi) \cdot (\omega_0^2 - \xi) = 0$  ergibt. Daraus folgt die Lösung  $\xi = \omega_0^2$  bzw.  $\omega^2 = \omega_0^2$  bzw.  $\omega = \omega_0$ . Das **Schalleistungsmaximum des Lautsprechers**  $p_{S,max}$  tritt für  $\omega_0 \ll \omega_L$  bei der ungedämpften mechanischen Kreisfrequenz  $\omega = \omega_0$  auf! Bei mechanischer Resonanz  $\omega = \omega_0$  erfährt die Spule die größte Schwingungsleistung, daher ist dort auch die Schallleistung  $p_S$  maximal!

$$(7.2-59): \omega_0 \ll \omega_L : p_{S,max} \cong p_S(\omega = \omega_0) = \frac{\omega_K / \tau_S}{(\omega_K + \frac{1}{\tau_S})^2} = \frac{\omega_K \cdot \tau_S}{(\omega_K \cdot \tau_S + 1)^2} \Rightarrow \quad (7.2-60)$$

$$\Rightarrow p_{S,max} \Big|_{\omega_0 \ll \omega_L} = \frac{(2\pi \cdot r_{av} \cdot N \cdot B_\delta)^2 / (R \cdot d_S)}{\left( \frac{(2\pi \cdot r_{av} \cdot N \cdot B_\delta)^2 / (R \cdot d_S)}{1} + 1 \right)^2} \quad (7.2-61)$$

Wie müssen die Parameter des Lautsprechers  $N, B_\delta, R, r_{av}, d_S$  gewählt werden, dass die bei  $\omega_0$  auftretende Maximalleistung  $p_{S,max}$  als  $p_{S,opt}$  MAXIMIERT, d. h. optimiert wird? Es hängt  $p_{S,max}$  (7.2-60) vom Produkt  $a = \omega_K \cdot \tau_S$  ab. Daher erfordert die Optimierung

$$\frac{dp_{S,max}}{d(\omega_K \cdot \tau_S)} = \frac{dp_{S,max}}{da} = 0 \text{ bzw. } \frac{d}{da} \left( \frac{a}{(a+1)^2} \right) = \frac{1}{(a+1)^2} - \frac{2a}{(a+1)^3} = 0. \quad (7.2-62)$$

Aus (7.2-62) folgt die Lösung  $a + 1 - 2a = 0$  bzw.  $a = \omega_K \cdot \tau_S = 1$ . Somit gilt für eine optimale

Maximal-Schallleistung die Bedingung  $\omega_K \cdot \tau_S = 1 = \frac{K_0^2}{R \cdot m} \cdot \frac{m}{d_S} = \frac{K_0^2}{R \cdot d_S}$  bzw.  $K_0^2 = R \cdot d_S$

bzw.  $(2\pi \cdot r_{av} \cdot N \cdot B_\delta)^2 = R \cdot d_S$  (Bild 7.2-12). Es tritt die maximal mögliche abgestrahlte Schallleistung (7.2-63) bei diesem optimierten Lautsprecher auf.

Sie beträgt  $\frac{1}{4}$  der fiktiven „Normierungsleistung“  $(U_{\text{eff}})^2/R!$

$$p_{S,\text{opt}} = p_{S,\text{max}} (\omega_K \cdot \tau_S = 1) = \frac{1}{(1+1)^2} = \frac{1}{4} = \frac{P_{S,\text{opt}}}{U_{\text{eff}}^2 / R}, \quad P_{S,\text{opt}} = U_{\text{eff}}^2 / (4R) \quad (7.2-63)$$

Wegen

$$R_S(\omega_0) = \frac{\omega^2 \cdot \omega_K \cdot (R/\tau_S)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau_S)^2} \Bigg|_{\omega_0} = \omega_K \cdot (R \cdot \tau_S) = R \cdot (\omega_K \cdot \tau_S) = R \cdot 1 = R \quad (7.2-64)$$

ist die Optimierungsbedingung  $\omega_K \cdot \tau_S = 1$  identisch mit der „Leistungsanpassung“

$$R = R_i + R_a = R_S(\omega_0). \quad (7.2-65)$$

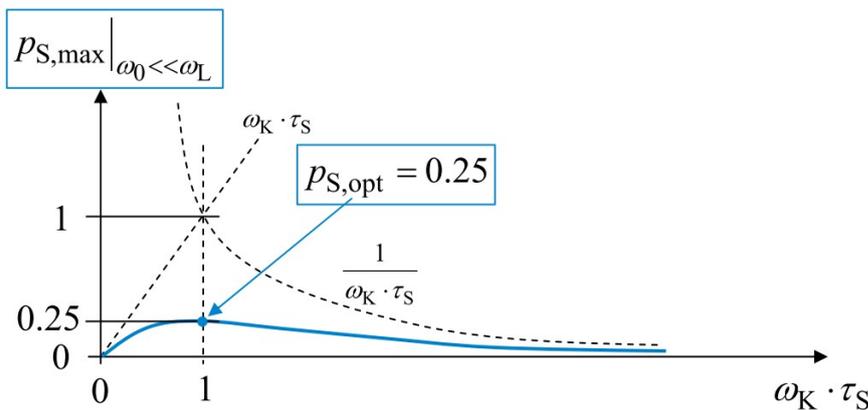


Bild 7.2-12: Abhängigkeit der maximalen Schallleistung von dem Parameterprodukt  $\omega_K \tau_S$ .

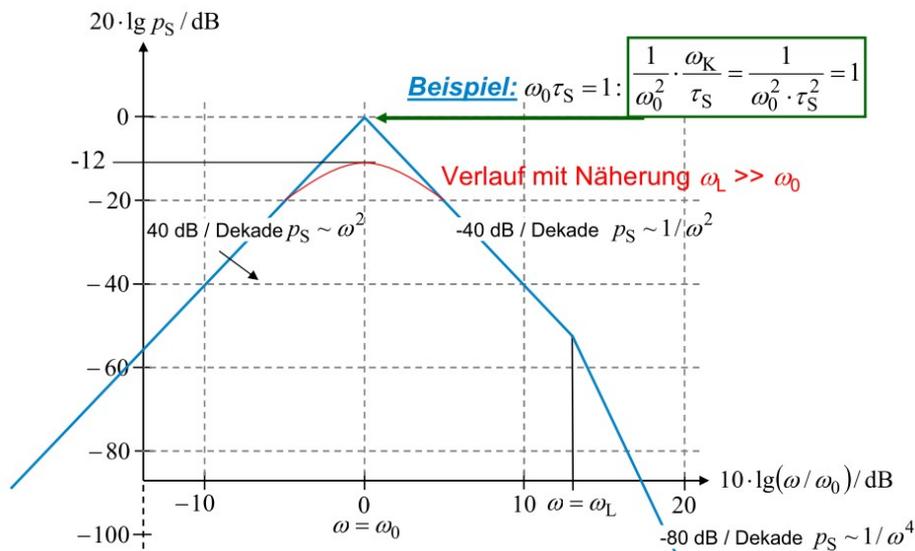


Bild 7.2-13: Magnetischer Wandler „Typ 2“ als optimierter Lautsprecher: Frequenzgang der normierten Schallleistung  $p_S$  bei kleiner Tauchspulen-Selbstinduktivität  $\omega_L \gg \omega_0$  und dem Beispiel  $\omega_0 \tau_S = 1$ .

In Bild 7.2-13 ist der Frequenzgang der normierten Schallleistung für den optimierten Lautsprecher  $R_i + R_a = R_S(\omega_0)$  bzw.  $\omega_K \cdot \tau_S = 1$  als Bode-Diagramm für eine „kleine“ Spulenselbstinduktivität gemäß  $\omega_L \gg \omega_0$  dargestellt. Im Bild endet die Näherung  $p_S(\omega) \sim \omega^2$  für  $0 < \omega \ll \omega_0$  (7.2-56) bei  $\omega = \omega_0$  mit dem Wert  $p_S \approx \omega_K / (\omega_0^2 \cdot \tau_S)$ . Für das Beispiel  $\omega_0 = 1/\tau_S$  hat dies den Zahlenwert  $p_S \approx \omega_K \cdot \tau_S = 1$  bzw. 0 dB.

Das logarithmierte Leistungsmaximum (7.2-60) bei  $\omega = \omega_0$  beträgt um 12 dB weniger:

$$20 \cdot \lg(p_{S,\text{opt}}) = 20 \cdot \lg(1/4) = -20 \cdot \lg 4 = -12 \text{ dB}.$$

Der Amplitudenfrequenzgang der Membran-Schwingamplitude, bezogen auf die Spannungsamplitude des Tonsignals, ist mit (7.2-40) und den Abkürzungen (7.2-51)

$$\left| \frac{\hat{Z}}{\hat{U}} \right| = \frac{\omega_K / K_0}{\left| (\omega_0^2 - \omega^2 + j \cdot (\omega / \tau_S)) \cdot (1 + j \cdot (\omega / \omega_L)) + j \omega \cdot \omega_K \right|} \quad \text{bzw.} \quad (7.2-66)$$

$$\left| \frac{\hat{Z}}{\hat{U}} \right| = \frac{\omega_K / K_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2 \cdot (1 + \frac{1}{\omega_L \tau_S}))^2 + \omega^2 \cdot (\omega_K + \frac{1}{\tau_S} + \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_L})^2}} \quad (7.2-67)$$

Mit der o. g. Annahme  $\omega_0 \ll \omega_L$  wird (7.2-67) für die drei Frequenzbereiche gemäß Bild 7.2-11 ausgewertet.

$$1) 0 < \omega < \omega_0 : \quad \left| \frac{\hat{Z}}{\hat{U}} \right| \approx \frac{\omega_K / K_0}{\sqrt{(\omega_0^2)^2}} = \frac{\omega_K}{K_0 \cdot \omega_0^2} = \frac{K_0}{k \cdot R} = \text{konst.} \quad (7.2-68)$$

$$2) \omega_0 < \omega < \omega_L : \quad \left| \frac{\hat{Z}}{\hat{U}} \right| \approx \frac{\omega_K / K_0}{\sqrt{(-\omega^2)^2}} = \frac{\omega_K}{K_0 \cdot \omega^2} = \frac{K_0}{R \cdot m \cdot \omega^2}. \quad (7.2-69)$$

$$3) \omega_L \ll \omega : \quad \left| \frac{\hat{Z}}{\hat{U}} \right| \approx \frac{\omega_K / K_0}{\sqrt{\omega^2 \cdot (-\omega^2 / \omega_L)^2}} = \frac{\omega_K \omega_L}{K_0 \cdot \omega^3} = \frac{K_0}{m \cdot L_i \cdot \omega^3}. \quad (7.2-70)$$

Für  $\omega_0 \ll \omega_L$  kann (7.2-67) auch als (7.2-71) vereinfacht werden, und ist in (7.2-72) an der Stelle  $\omega_0$  ausgewertet.

$$\omega \ll \omega_L : \quad \left| \frac{\hat{Z}}{\hat{U}} \right| \approx \frac{\omega_K / K_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \cdot (\omega_K + \frac{1}{\tau_S})^2}} \quad (7.2-71)$$

$$\left| \frac{\hat{Z}}{\hat{U}} \right|_{\omega_0} \approx \frac{\omega_K / K_0}{\omega_0 \cdot (\omega_K + \frac{1}{\tau_S})} = \frac{\omega_K \tau_S / K_0}{\omega_0 \cdot (\omega_K \tau_S + 1)} \Rightarrow \left| \frac{\hat{Z}}{\hat{U}} \right|_{\omega_0, \omega_K \tau_S = 1} \approx \frac{1}{2 \omega_0 \cdot K_0}. \quad (7.2-72)$$

Beim optimal ausgelegten Lautsprecher mit  $\omega_K \tau_S = 1$  ist  $\left| \frac{\hat{Z}}{\hat{U}}(\omega_0) / \hat{U} \right| \approx 1 / (2 \omega_0 K_0)$ . Werden die Parameter  $k$  und  $m$  so gewählt, dass  $\omega_0 = \sqrt{k/m} = \omega_K = K_0^2 / (R \cdot m)$  (7.2-51) ist (siehe Beispiel Bild 7.2-13), so erhalten wir die Bedingung  $R \cdot \sqrt{k \cdot m} = K_0^2$ . Wegen  $\omega_K \tau_S = 1$  ist auch  $\omega_0 \tau_S = 1$  (siehe oben). Daher ist (7.2-72) auch

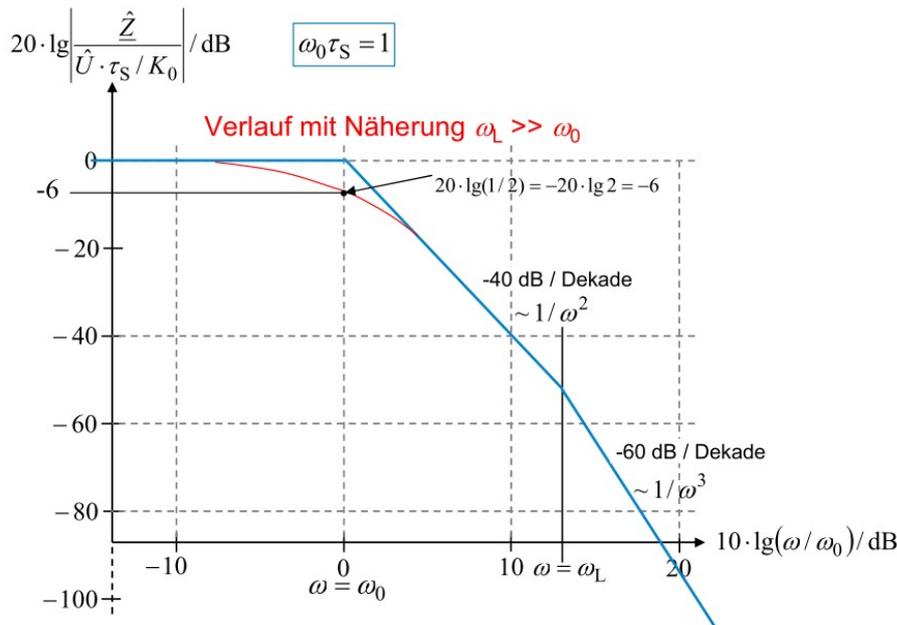
$$\left| \frac{\hat{Z}}{\hat{U}} \right|_{\omega_0, \omega_K \tau_S = 1} \approx \frac{1}{2 \omega_0 \cdot K_0} = \frac{\tau_S}{2 \cdot K_0}. \quad (7.2-73)$$

Somit wird die horizontale Asymptote des Amplitudenfrequenzgangs für  $\omega \ll \omega_0$  (7.2-68)

$$\left| \frac{\hat{Z}}{\hat{U}} \right| \approx \frac{\omega_K}{K_0 \cdot \omega_0^2} = \frac{1/\tau_S}{K_0 \cdot \omega_0^2} = \frac{1}{K_0 \cdot \tau_S \omega_0 \cdot \omega_0} = \frac{\tau_S}{K_0} \approx 2 \cdot \left| \frac{\hat{Z}}{\hat{U}} \right|_{\omega_0, \omega_K \tau_S = 1}. \quad (7.2-74)$$

Die Asymptote an den Amplitudenfrequenz für  $\omega_L > \omega \gg \omega_0$  ist gemäß (7.2-69)

$$\left| \frac{\hat{Z}}{\hat{U}} \right| \approx \frac{\omega_K}{K_0 \cdot \omega^2} \quad \text{und beträgt bei } \omega = \omega_0 \text{ wie (7.2-74) auch } \left| \frac{\hat{Z}}{\hat{U}} \right|_{\omega_0} \approx \frac{\omega_K}{K_0 \cdot \omega_0^2} = \frac{\tau_S}{K_0} \quad (\text{Bild 7.2-14}).$$



**Bild 7.2-14:** Zu Bild 7.2-13: Magnetischer Wandler „Typ 2“ als optimierter Lautsprecher: Frequenzgang der normierten Membran-Schwingungsamplitude bei kleiner Tauchspulen-Selbstinduktivität  $\omega_L \gg \omega_0$  (= für große elektrische Dämpfung) und den Fall  $\omega_0 \tau_S = 1$ .

In Bild 7.2-14 ist die Membran-Schwingungsamplitude  $\hat{Z}$  auf  $\hat{U} \cdot \tau_S / K_0$  bezogen, so dass für kleine Kreisfrequenzen  $\omega \ll \omega_0$  der Wert 0 dB auftritt. Gemäß (7.2-74) tritt bei  $\omega = \omega_0$  für das Beispiel  $\omega_0 \tau_S = 1$  der Wert -6 dB auf. Im Bereich quadratisch mit der Frequenz  $f$  zunehmender Schalleistung  $P_S$  (Bild 7.2-13) ist die Schwingungsamplitude der Membran als Weg  $z(t)$  gemäß Bild 7.2-14 direkt proportional zur Amplitude des Tonsignals  $u(t)$ . Ist der Lautsprecher z. B. für  $f_0 = 1$  kHz bzw.  $\omega_0 = 2\pi \cdot 10^3 = 6383$ /s ausgelegt, beträgt für das Beispiel  $\omega_0 \tau_S = 1$  die Schalldämpfungszeitkonstante  $\tau_S = 1/\omega_0 = 0.157$  ms. Bei einem Auslegungswert  $\tau_S / K_0 = 0.125$  mm/V wird für ein Tonsignal  $\hat{U} = 1$  V bei 1 kHz eine Amplitude der Membranschwingung von nur  $\hat{Z}(\omega_0) = \hat{U} \cdot \tau_S / (2K_0) = 62.5$   $\mu$ m auftreten.

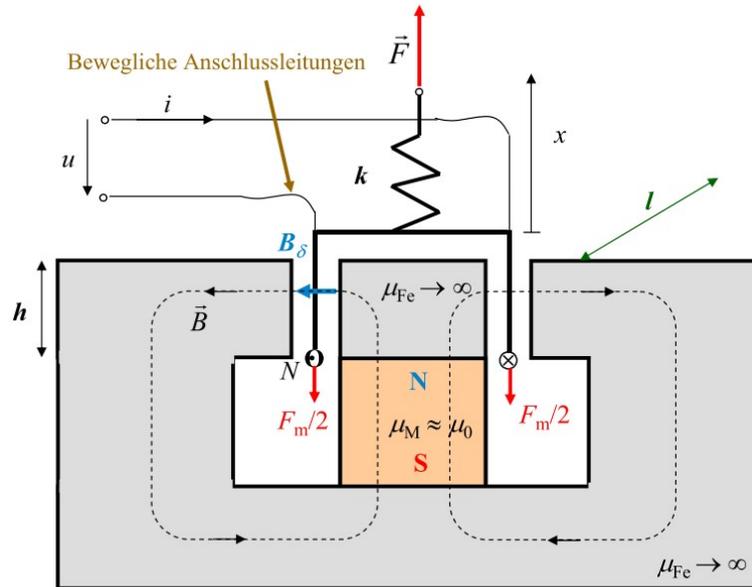
**Zusammenfassung:**

Im Vergleich zum magnetischen Wandler Typ 1 ist beim Wandler Typ 2 nicht eine Kraft auf magnetisierbare Körper maßgebend, sondern die *Lorentz*-Kraft auf stromdurchflossene Leiter. Es tritt daher kein instabiles Verhalten bzw. kein Schnapp-Mechanismus auf. Die Bewegungsgleichungen sind bei konstanter Spuleninduktivität  $L_i$  LINEAR, so dass keine Linearisierung und Kleinsignaltheorie erforderlich sind. Als zwei typische Anwendungen wurden das Drehspul-Messinstrument und der elektrodynamische Lautsprecher behandelt.

Um solche Wandler Typ 2 allgemein zu charakterisieren, um sie für unterschiedliche Anwendungen im Frequenzbereich untersuchen zu können, wird wie beim Wandler Typ 1 die Geometrie auf die Grundzüge vereinfacht (Bild 7.2-15). Danach bedient man sich wieder der ungedämpften Wandlergleichungen im Arbeitspunkt  $x_0, F_0, U_0, I_0, \Psi_0$  mit der **Vierpol-darstellung**. Dabei wird angenommen, dass die Luftspaltflussdichte  $B_\delta$  vom Permanentmagnet konstant eingepreßt ist, die Feder  $k$  bei  $x = 0$  entspannt ist, die Tauchspule durch eine konzentrierte  $N$ -windige Rechteckschleifenspule modelliert wird, deren rechteckiger Querschnitt die axiale Länge  $l$  hat. Die Spuleninduktivität heißt im Folgenden anstelle  $L_i$  wie bei Wandler Typ 1  $L_0$  und wird unabhängig von der Spulenposition  $0 \leq x \leq h$  angenommen. Die Spulenflussverkettung mit dem PM-Feld ist maximal bei  $x = 0$  mit  $\Psi_p = N \cdot 2h \cdot l \cdot B_\delta$ .

Diese Spulenflussverkettung mit dem PM-Feld hängt von  $x$  ab gemäß (7.2-75).

$$\Psi_p(x) = \Psi_p \cdot (1 - (x/h)), \quad 0 \leq x \leq h. \quad (7.2-75)$$



**Bild 7.2-15:** Vereinfachung des Wandlers Typ 2 auf seine wesentlichen Eigenschaften mit einer konzentrierten Rechteckschleifen-Tauchspule.

Die Spulenbewegung  $x(t) = x_0 + x_1(t)$  um den Arbeitspunkt  $x_0$  erfolgt so, dass sowohl der Arbeitspunkt als auch die aktuelle Spulenposition innerhalb des Luftspalts liegen:  $0 \leq x_0 \leq h$ ,  $0 \leq x \leq h$ . In gleicher Weise werden mit  $F(t) = F_0 + F_1(t)$ ,  $\psi(t) = \Psi_0 + \psi_1(t)$ ,  $i(t) = I_0 + i_1(t)$  die Abweichungen von Kraft, Flussverkettung und Spulenstrom vom Arbeitspunkt beschrieben. Da der Wandler Typ 2 mit  $L_0 = \text{konst.}$  linear ist, ist eine Beschränkung auf kleine Bewegungen  $x_1(t) \ll x_0$  nicht nötig, solange  $0 \leq x \leq h$  eingehalten wird. Die resultierende Spulenflussverkettung aus dem Spuleneigenenfeld und PM-Feld ist dann

$$0 \leq x \leq h: \quad \psi(t) = \psi(x(t), t) = L_0 \cdot i(t) + \Psi_p \cdot (1 - (x/h)) \quad \text{mit} \quad (7.2-76)$$

$$\Psi_0 = L_0 \cdot I_0 + \Psi_p \cdot (1 - (x_0/h)), \quad \psi_1 = L_0 \cdot i_1 - \Psi_p \cdot x_1/h \Rightarrow i_1 = \frac{\psi_1}{L_0} + \frac{\Psi_p \cdot x_1/h}{L_0}. \quad (7.2-77)$$

Mit der gesamten Spulenleiterlänge  $l_e := N \cdot 2 \cdot l$  im PM-Magnetfeld, also ohne Stirnverbindungen zwischen zwei Spulenleitern, ist der veränderliche Spulenstromanteil

$$i_1 = \frac{\psi_1}{L_0} + \frac{N \cdot 2h \cdot l \cdot B_\delta \cdot x_1/h}{L_0} = \frac{\psi_1}{L_0} + \frac{N \cdot 2 \cdot l \cdot B_\delta \cdot x_1}{L_0} = \frac{\psi_1}{L_0} + \frac{l_e \cdot B_\delta \cdot x_1}{L_0}. \quad (7.2-78)$$

Die Lorentz-Kraft auf die gesamte Spulenleiterlänge im PM-Feld  $F_m = N \cdot 2 \cdot l \cdot B_\delta \cdot i$  und die Federkraft  $F_F = k \cdot x$  ergeben die resultierende Kraft  $F$  auf die Spule, die in den konstanten Anteil  $F_0$  und den zweitabhängigen Anteil  $F_1(t)$  zerlegt wird (7.2-79), (7.2-80).

$$F = F_m + F_F = N \cdot 2 \cdot l \cdot B_\delta \cdot i + k \cdot x = N \cdot 2 \cdot l \cdot B_\delta \cdot (I_0 + i_1) + k \cdot (x_0 + x_1) = F_0 + F_1 \quad (7.2-79)$$

$$F_0 = N \cdot 2 \cdot l \cdot B_\delta \cdot I_0 + k \cdot x_0, \quad F_1(t) = N \cdot 2 \cdot l \cdot B_\delta \cdot i_1(t) + k \cdot x_1(t) = l_e \cdot B_\delta \cdot i_1 + k \cdot x_1 \quad (7.2-80)$$

Mit  $i_1$  aus (7.2-78), eingesetzt in (7.2-80), wird die veränderliche Spulenkraft  $F_1$  erhalten.

$$F_1 = l_e B_\delta \cdot i_1 + k \cdot x_1 = l_e \cdot B_\delta \cdot \left( \frac{\psi_1}{L_0} + \frac{l_e \cdot B_\delta \cdot x_1}{L_0} \right) + k \cdot x_1 = \frac{l_e \cdot B_\delta \cdot \psi_1}{L_0} + \left( \frac{l_e^2 B_\delta^2}{L_0} + k \right) \cdot x_1. \quad (7.2-81)$$

Die Spulengeschwindigkeit  $v_1(t) = dx_1 / dt$  wird in (7.2-81) berücksichtigt gemäß (7.2-82), so dass der Strom  $i_1$  in Abhängigkeit von  $F_1$  und  $v_1$  ausgedrückt werden kann.

$$F_1 = l_e \cdot B_\delta \cdot i_1 + k \cdot \int v_1 \cdot dt \Rightarrow i_1(t) = \frac{F_1(t)}{l_e \cdot B_\delta} - \frac{k \cdot \int v_1(t) \cdot dt}{l_e \cdot B_\delta}. \quad (7.2-82)$$

(7.2-78) und (7.2-81) sind in (7.2-83) als **(B)-Matrix** angeschrieben.

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{L_0} & \frac{l_e \cdot B_\delta}{L_0} \\ \frac{l_e \cdot B_\delta}{L_0} & \frac{(l_e \cdot B_\delta)^2}{L_0} + k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \psi_1 \\ x_1 \end{pmatrix} \quad (7.2-83)$$

Der Kopplungsterm zwischen mechanischem und elektrischem System  $K_{0L} = l_e \cdot B_\delta / L_0$  entspricht dem Ausdruck  $K_0 = N \cdot 2\pi \cdot r_{av} \cdot B_\delta$  aus (7.2-11), jedoch dividiert durch die Spulenselbstinduktivität  $L_0$ . Ohne diese Division gilt

$$K_0 = K_{0L} \cdot L_0 = l_e \cdot B_\delta = N \cdot 2 \cdot l \cdot B_\delta \Leftrightarrow K_0 = N \cdot 2\pi \cdot r_{av} \cdot B_\delta = l_e \cdot B_\delta, \quad (7.2-84)$$

denn die dem PM-Feld ausgesetzte Spulenleiterlänge des rotationsymmetrischen Wandlers Typ 2 in Bild 7.2-4 ist  $l_e = N \cdot 2\pi \cdot r_{av}$ . Bei  $K_0 = 0$  bzw.  $K_{0L} = 0$  ist  $i_1 = \psi_1 / L_0$  und  $F_1 = k \cdot x_1$ . Wie in (7.1-102) wird der **Kopplungsfaktor  $\kappa$**  berechnet (7.2-85), der ohne PM-Magnetfeld natürlich Null ist.

$$\kappa = \frac{l_e \cdot B_\delta / L_0}{\sqrt{\frac{1}{L_0} \cdot \left( \frac{(l_e \cdot B_\delta)^2}{L_0} + k \right)}} = \frac{l_e \cdot B_\delta}{\sqrt{(l_e \cdot B_\delta)^2 + L_0 k}}. \quad \text{Beachten Sie: Bei } B_\delta = 0 : \kappa = 0. \quad (7.2-85)$$

Beim magnetischen Wandler „Typ 2“ ist mit der Feder  $k > 0$  stets **statische Stabilität** vorhanden. Mit der magnetischen Kraft und der Federkraft  $F_1 = l_e \cdot B_\delta \cdot i_1 + k \cdot x_1$  (7.2-80) wird mit dem 2. Newton-Axiom die dynamische Gleichung (7.2-86) für ungedämpfte Bewegung im Arbeitspunkt  $x_0, \pm I_0, F_0$  erhalten.

$$m \cdot \ddot{x}_1 + F_1 = 0 \Rightarrow m \cdot \ddot{x}_1 + l_e \cdot B_\delta \cdot i_1 + k \cdot x_1 = 0 \Rightarrow \underbrace{m}_{\overset{m}{T}} \cdot \ddot{x}_1 + \underbrace{k}_{\overset{k}{K}} \cdot x_1 = -l_e \cdot B_\delta \cdot i_1 \quad (7.2-86)$$

Die Bedingung für statische Stabilität im Arbeitspunkt  $x_0$  ist (Kap. 6)  $K > 0$ , was wegen  $K = k > 0$  stets erfüllt ist. Da der Wandler Typ 2 stets statisch stabil ist für alle Arbeitspunkte  $\pm I_0, x_0$  ( $0 \leq x \leq h$ ), tritt KEIN Pull-in/Pull-out-Effekt wie bei Wandler Typ 1 auf! Die in (7.1-104) korrespondierende Bedingung für statische Stabilität  $\kappa^2 < 1$  wird vom Wandler Typ 2 wegen  $0 < \kappa < 1$  (7.2-87) erfüllt, solange eine mech. Feder  $k > 0$  vorhanden ist!

$$0 < \kappa = \frac{l_e \cdot B_\delta}{\sqrt{(l_e \cdot B_\delta)^2 + L_0 \cdot k}} < 1. \quad (7.2-87)$$

Sind die zeitlichen Änderungen um den Arbeitspunkt sinusförmig gemäß (7.1-112)

$$i_1(t) = \hat{I}_1 \cdot \cos(\omega t + \varphi_i) = \text{Re} \left\{ \hat{\underline{I}}_1 \cdot e^{j\omega t} \right\}, \quad \psi_1(t) = \text{Re} \left\{ \hat{\underline{\Psi}}_1 \cdot e^{j\omega t} \right\}, \quad x_1(t) = \text{Re} \left\{ \hat{\underline{X}}_1 \cdot e^{j\omega t} \right\},$$

$$F_1(t) = \text{Re} \left\{ \hat{\underline{F}}_1 \cdot e^{j\omega t} \right\},$$

wird aus (7.2-83) ebenfalls die **(B)-Matrix** erhalten (7.2-88). Die Spannungsinduktion in die Tauchspule erfolgt bei a) Stromänderung in der Spule (Ruhinduktion)  $u_{ie}$  und bei b) Spulenbewegung im PM-Magnetfeld  $u_{if}$  um den Arbeitspunkt  $x_0$  (Bewegungsinduktion, siehe Kap. 2 Grundlagen).

$$\begin{pmatrix} \hat{I}_1 \\ \hat{F}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{L_0} & \frac{l_e \cdot B_\delta}{L_0} \\ \frac{l_e \cdot B_\delta}{L_0} & \frac{(l_e \cdot B_\delta)^2}{L_0} + k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{\Psi}_1 \\ \hat{X}_1 \end{pmatrix} = (B) \cdot \begin{pmatrix} \hat{\Psi}_1 \\ \hat{X}_1 \end{pmatrix} \quad (7.2-88)$$

Zusammengefasst ist die gesamte Änderung der Spulenflussverkettung Ursache für die induzierte Spannung  $u_1(t) = -d\psi(x(t),t)/dt$ . Mit der angelegten Spulenspannung  $u(t) = U_0 + u_1(t)$  und der Kirchhoff-Maschengleichung für die Spule bei hier nicht berücksichtigter elektrischer Dämpfung ( $R = 0$ ) ist  $u(t) + u_1(t) = R \cdot i(t) = 0$  bzw.  $u = -u_1 = d\psi/dt$ . Es folgt mit  $U_0 = R \cdot I_0 = 0 \cdot I_0 = 0$ :  $u(t) = u_1(t)$ . Mit (7.2-77) folgt

$$u(t) = \frac{d\psi(x(t),t)}{dt} = \frac{d\psi}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{d\psi}{dt} = \frac{\Psi_p}{h} \cdot \frac{dx}{dt} + L_0 \cdot \frac{di}{dt} = -u_{if} - u_{ie}, \quad (7.2-89)$$

$$u(t) = -\frac{\Psi_p}{h} \cdot \frac{dx_1}{dt} + L_0 \cdot \frac{di_1}{dt} = U_0 + u_1(t) = u_1(t), \quad (7.2-90)$$

$$U_0 = 0, \quad \frac{dx_1}{dt} = v_1, \quad u_1(t) = -\frac{N \cdot 2h \cdot l \cdot B_\delta}{h} \cdot v_1 + L_0 \cdot \frac{di_1}{dt} = -l_e \cdot B_\delta \cdot v_1 + L_0 \cdot \frac{di_1}{dt}. \quad (7.2-91)$$

Mit (7.2-82) wird der Spulenstrom  $i_1$  durch  $F_1$  und  $v_1$  ersetzt.

$$u_1 = -l_e \cdot B_\delta \cdot v_1 + \frac{L_0}{l_e \cdot B_\delta} \cdot \frac{dF_1}{dt} - \frac{L_0 \cdot k \cdot v_1}{l_e \cdot B_\delta} = \frac{L_0}{l_e \cdot B_\delta} \cdot \frac{dF_1}{dt} - \frac{k}{l_e \cdot B_\delta} \cdot (L_0 + \frac{l_e^2 \cdot B_\delta^2}{k}) \cdot v_1. \quad (7.2-92)$$

Für sinusförmige Änderungen um den Arbeitspunkt  $x_0$

$$u_1(t) = \text{Re}\{\hat{U}_1 \cdot e^{j\omega t}\}, \quad v_1(t) = \text{Re}\{\hat{V}_1 \cdot e^{j\omega t}\} \quad (7.2-93)$$

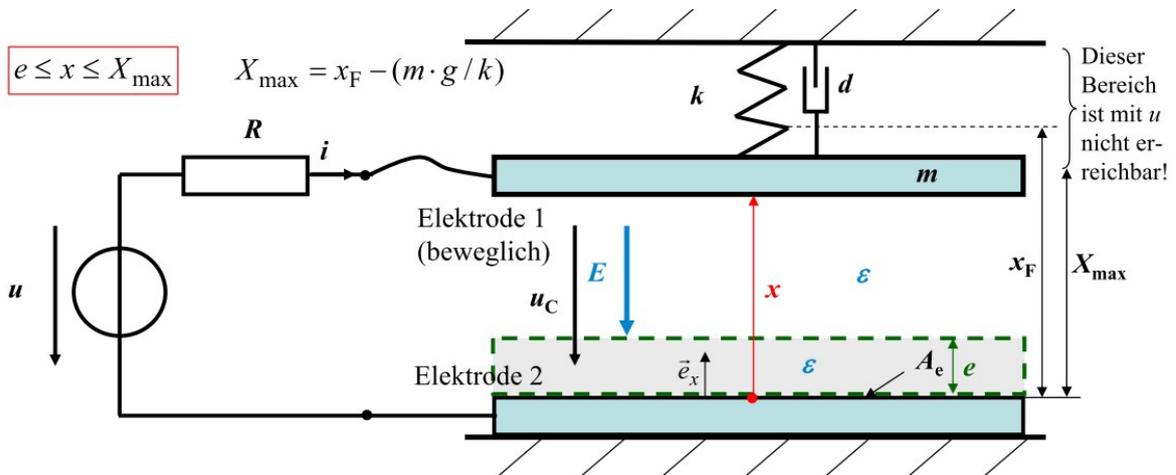
werden (7.2-82) und (7.2-92) als lineares komplexes Gleichungssystem 2. Ordnung mit der (**T**)-Matrix (7.2-94) dargestellt.

$$\begin{pmatrix} \hat{I}_1 \\ \hat{U}_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{l_e \cdot B_\delta} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{k}{j \cdot \omega} \\ j \cdot \omega \cdot L_0 & -k \cdot \left( L_0 + \frac{(l_e \cdot B_\delta)^2}{k} \right) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{F}_1 \\ \hat{V}_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \hat{I}_1 \\ \hat{U}_1 \end{pmatrix} = (\underline{T}) \cdot \begin{pmatrix} \hat{F}_1 \\ \hat{V}_1 \end{pmatrix} \quad (7.2-94)$$

### 7.3 Kapazitiver Wandler „Typ 3“

Der bereits in Kap. 2 besprochene Kondensator mit beweglicher Plattenelektrode 1 (Masse  $m$ , Plattenfläche  $A_e$ ), die über eine Feder (Federkonstante  $k$ ) fixiert ist, wird nun als Wandler „Typ 3“ behandelt (Bild 7.3-1). Bei  $x = x_F$  ist die Feder entspannt. Eine elektrisch isolierende Distanzscheibe mit der Dicke  $e$ , Permittivität  $\epsilon$ , vermeidet einen Plattenkurzschluss. Das Feld  $\vec{E} = E_x \cdot \vec{e}_x = -E \cdot \vec{e}_x$  zwischen den beiden Platten wird vereinfachend als homogen betrachtet, so dass die seitlich ausufernden Randfelder vernachlässigt werden (= keine „Randeffekte“). Dies ist zulässig, solange der maximale Plattenabstand  $X_{\max}$  deutlich kleiner als die Plattenbreite und Plattenlänge  $b, l \sim \sqrt{A_e}$  sind. Das flüssige oder gasförmige Dielektrikum zwischen den beiden Elektroden sei linear polarisierbar, so dass mit  $D = \epsilon \cdot E$  die Permittivität  $\epsilon$  konstant ist. Durch die Bewegung der Platte 1 im Dielektrikum mit der Geschwindigkeit  $v$  und durch ein zusätzliches Dämpfungselement erfährt sie eine mechanische bremsende Dämpfungskraft  $F_d = v \cdot d$ . Zwischen beiden Plattenelektroden wird über einen ohm'schen Widerstand  $R$  eine el. Spannung  $u_C$  aus einer idealen Spannungsquelle  $u$  angelegt.

Die Parameter  $R, m, k, d$  sind konstant angenommen!



**Bild 7.3-1:** Wandler „Typ 3“ ist ein Plattenkondensator mit beweglicher Plattenelektrode 1, die über eine Feder  $k$  und einen mech. Dämpfer  $d$  im Rahmen befestigt ist.

Wir zählen den Plattenabstand  $x$  von der Oberseite der unteren Platte 2 nach oben zur Unterseite der oberen Platte 1. In diese Richtung werden auch die auf die obere Platte 1 wirkende Federkraft  $\vec{F}_F = k \cdot (x_F - x) \cdot \vec{e}_x$ , Schwerkraft  $\vec{F}_g = -m \cdot g \cdot \vec{e}_x$  und el. Kraft  $F_e$  positiv gezählt. Wegen der Distanzscheibe ist  $x_{\min} = e$ . Bei spannungslosem Kondensator  $u = 0$  wird die obere Platte nur durch  $F_g$  nach unten gezogen und dadurch die Feder gedehnt. In dieser Gleichgewichtslage  $X_{\max}$  ist

$$F_F + F_g = 0 = k \cdot (x_F - x) - m \cdot g = 0 \Rightarrow x = X_{\max} = x_F - (m \cdot g / k), \quad (7.3-1)$$

so dass sich die obere Platte 1 infolge einer anliegenden el. Spannung und damit plattenanziehenden el. Kraft  $F_e$  nur im Bereich  $e \leq x \leq X_{\max}$  bewegen kann. Die Maxwell'sche Zugspannung  $p_e$  auf die Elektrode 1 führt zur anziehenden el. Kraft  $F_e$  (Kap. 2).

$$\vec{p}_{e,x} = -\frac{\epsilon \cdot E_x^2}{2} \cdot \vec{e}_x = -\frac{\epsilon \cdot E^2}{2} \cdot \vec{e}_x \rightarrow \vec{F}_e = -\frac{\epsilon \cdot E^2 \cdot A_e}{2} \cdot \vec{e}_x \quad (7.3-2)$$

Mit der Polarität der el. Spannung  $u$  gemäß Bild 7.3-1 ist Elektrode 1 mit  $Q > 0$  positiv geladen. Mit der geschlossenen Hüllfläche  $O$  um Elektrode 1, wo die Ladung  $Q$  ihren Sitz hat, ergibt die vierte Maxwell-Gleichung („Satz vom elektrischen Hüllenfluss“) (7.3-3).

$$Q = \oint_O \vec{D} \cdot d\vec{A} = \int_{A_e} D \cdot dA = D \cdot A_e = E \cdot \epsilon \cdot A_e \quad (7.3-3)$$

Die el. Spannung  $u_C$  zwischen den beiden Elektroden von 1 nach 2 mit  $1 \rightarrow 2 : d\vec{s} = -ds \cdot \vec{e}_x$

$$u_C = \int_{s=0}^{s=x} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_0^x (-E \cdot \vec{e}_x) \cdot (-ds \cdot \vec{e}_x) = \int_0^x E \cdot ds = E \cdot x > 0, 1 \rightarrow 2, \quad (7.3-4)$$

ergibt mit (7.3-2) die el. Kraft in quadratischer Abhängigkeit von  $\pm u_C$  unabhängig von der Plattenpolarität.

$$\vec{F}_e = -\frac{\epsilon \cdot u_C^2 \cdot A_e}{2x^2} \cdot \vec{e}_x. \quad (7.3-5)$$

Die Newton'sche Bewegungsgleichung für Elektrode 1 ist demnach

$$m \cdot \ddot{x} \cdot \vec{e}_x = (x_F - x) \cdot k \cdot \vec{e}_x - d \cdot \dot{x} \cdot \vec{e}_x - m \cdot g \cdot \vec{e}_x - \frac{\epsilon \cdot u_C^2 \cdot A_e}{2x^2} \cdot \vec{e}_x \quad \text{bzw.} \quad (7.3-6)$$

$$m \cdot \ddot{x} + d \cdot \dot{x} + k \cdot x = x_F \cdot k - m \cdot g - (\varepsilon \cdot u_C^2 \cdot A_e / (2x^2))$$

und mit der Kirchhoff'schen Maschengleichung  $u = R \cdot i + u_C$

$$m \cdot \ddot{x} + d \cdot \dot{x} + k \cdot x = x_F \cdot k - m \cdot g - \frac{\varepsilon \cdot (u - i \cdot R)^2 \cdot A_e}{2x^2} \quad (7.3-7)$$

Mit der elektrischen Ladung  $Q$  auf Elektrode 1  $Q = E \cdot \varepsilon \cdot A_e = u_C \cdot \varepsilon \cdot A_e / x = C \cdot u_C$  wird die Kapazität  $C(x) = \varepsilon \cdot A_e / x$  in Abhängigkeit von  $x$  (siehe Kap. 2) erhalten. Die Ladungsänderung  $dQ/dt$  ist der Ladestrom  $i$  (7.3-8).

$$i = dQ/dt = d(C(x) \cdot u_C)/dt = \frac{dC(x(t))}{dt} \cdot u_C(t) + C(x(t)) \cdot \frac{du_C(t)}{dt},$$

$$i(t) = \frac{dC(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot u_C + C(x) \cdot \frac{du_C}{dt} = -\frac{\varepsilon \cdot A_e}{x^2} \cdot \dot{x} \cdot u_C + \frac{\varepsilon \cdot A_e}{x} \cdot \frac{du_C}{dt} \quad (7.3-8)$$

Daraus wird mit  $u = R \cdot i + u_C$  die elektrische dynamische Gleichung (7.3-9) für  $i, x$  erhalten.

$$i(t) = -\frac{\varepsilon \cdot A_e}{x^2} \cdot \dot{x} \cdot (u - R \cdot i) + \frac{\varepsilon \cdot A_e}{x} \cdot \left( \frac{du}{dt} - R \cdot \frac{di}{dt} \right) \quad \text{bzw.}$$

$$\frac{\varepsilon \cdot A_e \cdot R}{x} \cdot \frac{di}{dt} + i \cdot \left( 1 - \frac{\varepsilon \cdot A_e \cdot R}{x^2} \cdot \dot{x} \right) = -\frac{\varepsilon \cdot A_e}{x^2} \cdot \dot{x} \cdot u + \frac{\varepsilon \cdot A_e}{x} \cdot \frac{du}{dt} \quad \text{bzw.}$$

$$\frac{di}{dt} + i \cdot \left( \frac{x}{\varepsilon \cdot A_e \cdot R} - \frac{\dot{x}}{x} \right) = -\frac{\dot{x}}{x} \cdot \frac{u}{R} + \frac{1}{R} \cdot \frac{du}{dt} \quad (7.3-9)$$

(7.3-7) und (7.3-9) bilden ein nichtlineares Differentialgleichungssystem dritter Ordnung, denn es sind drei gekoppelte Energiespeicher beteiligt, ein kinetischer ( $m$ ), ein mechanisch potentieller (Federspeicher  $k$ ) und ein elektrisch potentieller Speicher (elektrostatischer Speicher  $C$ ). Die statischen Gleichgewichtslagen des kapazitiven Wandlers „Typ 3“ werden daraus mit  $d./dt = 0$  ermittelt. Aus (7.3-9) folgt mit  $\dot{i} = \dot{x} = \dot{u} = 0$  für  $x \neq 0$

$$i \cdot \frac{x}{\varepsilon \cdot A_e \cdot R} = 0 \Rightarrow i = 0 = dQ/dt \Rightarrow Q = \text{konst.} \quad (7.3-10)$$

Bei  $u(t) = U = \text{konst.}$  fließt KEIN Strom über die Kapazität  $C$ ; die Ladung  $Q$  je Elektrode ist im statischen Fall konstant, und es ist  $u = U = U_C = u_C$  eine Gleichspannung.

$$i = 0: \quad Q = C(x) \cdot U_C = (\varepsilon \cdot A_e / x) \cdot U_C = (\varepsilon \cdot A_e / x) \cdot U \quad (7.3-11)$$

Aus (7.3-7) folgt mit  $\ddot{x} = \dot{x} = i = 0$

$$k \cdot x = x_F \cdot k - m \cdot g - \frac{\varepsilon \cdot U^2 \cdot A_e}{2x^2} \quad (7.3-12)$$

Mit den Gleichgewichtslagen  $x = X$  wird aus (7.3-11), (7.3-12) die **statische Kennlinie**  $U^2(X)$  (7.3-13) ermittelt, deren drei Nullstellen  $U(X) = 0$  durch (7.3-14)  $X_1, X_2, X_{\max}$  gegeben sind.

$$U^2(X) = \frac{2k}{\varepsilon \cdot A_e} \cdot X^2 \cdot \left( x_F - \frac{m \cdot g}{k} - X \right) \quad (\text{Bild 7.3-2}), \quad (7.3-13)$$

$$X_1 = X_2 = 0, \quad X_{\max} = x_F - (m \cdot g / k). \quad (7.3-14)$$

Die Kennlinie (7.3-13) hat ein Maximum bei  $X_3$  gemäß  $U(X_3) = U_{\max} = U_3$ .  $dU^2/dX = 0$  liefert  $2X \cdot (x_F - (m \cdot g / k)) - 3X^2 = 0$  und daraus die beiden Lösungen  $X = 0$  und (7.3-15).

$$X_3 = (2/3) \cdot (x_F - (m \cdot g / k)) = (2/3) \cdot X_{\max} \quad (7.3-15)$$

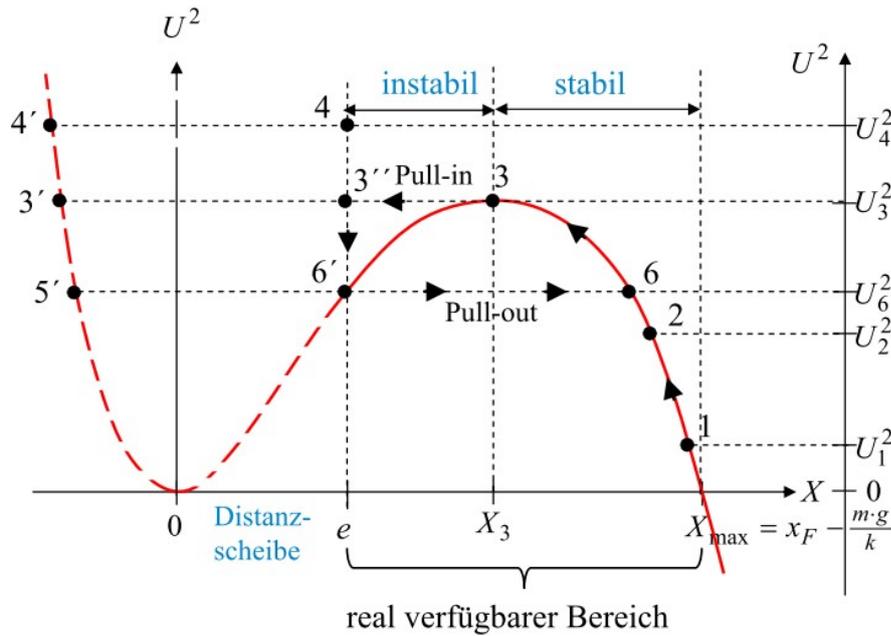


Bild 7.3-2: Kapazitiver Wandler „Typ 3“: Kennlinie der Gleichgewichtslagen ( $d./dt = 0$ ) und Schalthysterese.

Die Lösung  $X = 0$  ergibt das Minimum  $U(0) = 0$  als Plattenkurzschluss, das wegen der Distanzscheibe  $e$  nicht eingestellt werden kann. Die Berechnung von  $U_{\max} = U(X_3) = U_3$  mit (7.3-13) ergibt

$$U_3^2 = U^2(X_3) = \frac{8 \cdot k}{27 \cdot \varepsilon \cdot A_e} \cdot \left(x_F - \frac{m \cdot g}{k}\right)^3. \quad (7.3-16)$$

Es stellt sich stabiles und instabiles Verhalten wie bei Wandler 1 ein, so dass ein elektrostatischer Schalter mit diesem „Schnappverhalten“ (Pull-in und pull-out) mit Spannungssteuerung gebaut werden kann. Die Funktion dieses Geräts ist wegen des Einflusses von  $g$  lageabhängig. Die „Schalthysterese“  $U^2(X)$  ergibt sich für die Arbeitspunkte  $6 \rightarrow 3 \rightarrow 3' \rightarrow 6' \rightarrow 6$  und ist in Bild 7.3-2 eingetragen. Bei Erreichen des grenzstabilen Arbeitspunkts 3, von 6 her kommend, schnappt die obere Elektrode in den Punkt 3' an der Distanzscheibe, wo sie dank der gegenüber der Federkraft größeren elektrostatischen Kraft und der Schwerkraft kleben bleibt (pull-in). Durch Absenken der el. Spannung wird der statisch instabile Arbeitspunkt 6' erreicht. Hier ist die resultierende „Klebekraft“ Null, so dass jede weitere geringfügige Spannungsabsenkung wegen der nun nach oben resultierend wirksamen Kraft die oberen Elektrode zur statisch stabilen Position 6 hin „schnappen“ lässt (pull-out), wie nun erläutert wird. Die Gleichgewichtsbedingung  $F_e = F_F - m \cdot g$  führt auf

$$F_e = F_F - m \cdot g \Rightarrow \frac{\varepsilon \cdot A_e}{2x^2} \cdot U^2 = k \cdot x_F - k \cdot x - m \cdot g. \quad (7.3-17)$$

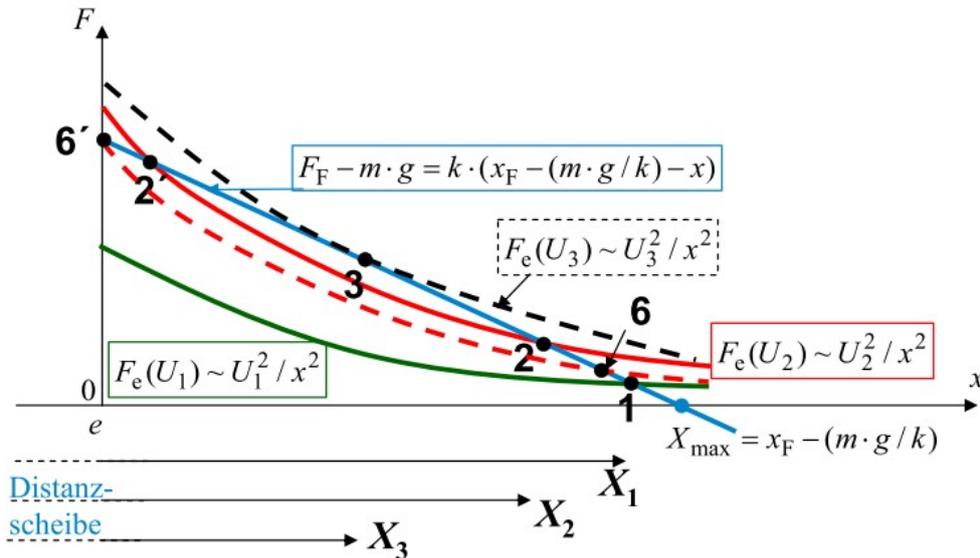
Für statische Stabilitätsuntersuchungen wird (Kap. 6) die Dämpfung vernachlässigt  $d = 0$ . Die ungedämpfte dynamische Gleichung (7.3-7)  $m \cdot \ddot{x} = -F_e + F_F - m \cdot g$  wird für kleine Störungen des Arbeitspunkts  $X$  gemäß  $x(t) = X + \Delta x(t)$ ,  $|\Delta x / X| \ll 1$  untersucht und führt auf  $m \cdot \Delta \ddot{x} + K \cdot \Delta x = 0$  mit

$$K = -\frac{d(F_F(x) - m \cdot g)}{dx} + \frac{dF_e(x, U)}{dx} = k - k_e. \quad (7.3-18)$$

Die statische Stabilitätsbedingung im jeweiligen Gleichgewichtspunkt  $X$  ist daher

$$K(x = X) = -\frac{d(F_F(x) - m \cdot g)}{dx} + \frac{dF_e(x, U)}{dx} = k - k_e > 0. \quad (7.3-19)$$

Dabei ist  $k_e = -dF_e(x,U)/dx$  die **elektrostatische Federkonstante**, da  $m \cdot \ddot{x} \uparrow, F_e \downarrow$  gezählt wird (Kap. 6.7). Mit (7.3-12) ist das Kräftegleichgewicht zwischen elektrostatischer Kraft, Federkraft und Schwerkraft in Bild 7.3-3 in Abhängigkeit unterschiedlicher Gleichspannungen  $U$  über der Position  $x$  von Elektrode 1 aufgetragen, um mit den Schnittpunkten von  $-k \cdot x + x_F \cdot k - m \cdot g$  und  $\varepsilon \cdot U^2 \cdot A_e / (2x^2)$  die Gleichgewichtslagen  $X$  zu ermitteln.



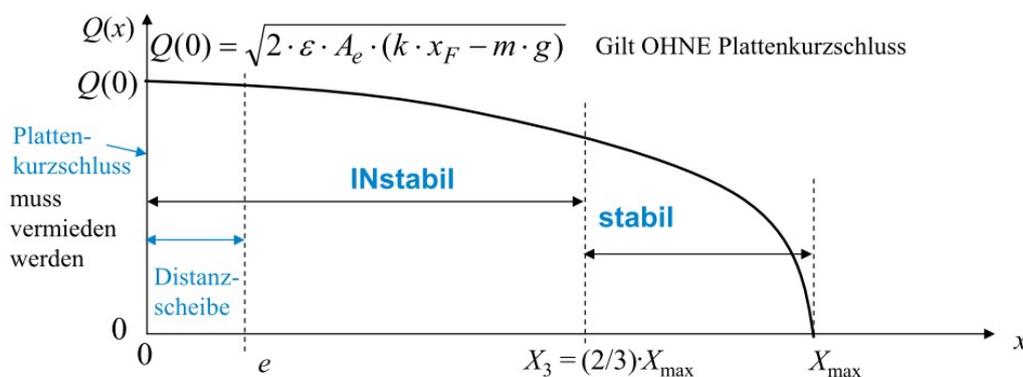
**Bild 7.3-3:** Kapazitiver Wandler „Typ 3“: Kräftegleichgewicht zwischen elektrostatischer Kraft, Federkraft und Schwerkraft bei den Punkten  $X$  in Abhängigkeit von  $U$ .

Die Arbeitspunkte 1, 2, 6 sind statisch stabil wegen  $K(X_1) = dF_e(x,U_1)/dx + k > 0$ ,  $K(X_2) = dF_e(x,U_2)/dx + k > 0$ ,  $K(X_6) = dF_e(x,U_6)/dx + k > 0$ . Der Arbeitspunkt 3 ist die statische Stabilitätsgrenze wegen  $K(X_3) = dF_e(x,U_3)/dx + k = 0$ . Die Arbeitspunkte 2', 6' sind mit  $K(X_{2'}) = dF_e(x,U_2)/dx + k < 0$ ,  $K(X_{6'}) = dF_e(x,U_6)/dx + k < 0$  statisch instabil.

Die Ladungen  $Q, -Q$  auf den Elektroden 1, 2 ändern sich lageabhängig und werden von der Spannungsquelle nachgeliefert oder aufgenommen. Mit (7.3-13) für  $U(x)$  folgt

$$Q = (\varepsilon \cdot A_e / x) \cdot U = (\varepsilon \cdot A_e / x) \cdot x \cdot \sqrt{2 \cdot (k \cdot x_F - m \cdot g - k \cdot x) / (\varepsilon \cdot A_e)} \quad \text{bzw.} \quad (7.3-20)$$

$$Q(x) = \sqrt{2 \cdot \varepsilon \cdot A_e \cdot (k \cdot x_F - m \cdot g - k \cdot x)} = \sqrt{2 \cdot \varepsilon \cdot A_e \cdot k \cdot (X_{\max} - x)} \quad (\text{Bild 7.3-4}). \quad (7.3-21)$$



**Bild 7.3-4:** Kapazitiver Wandler „Typ 3“: El. Ladungen  $Q, -Q$  auf den Elektroden 1 und 2

Mit sinkendem Plattenabstand  $x$  muss über die, bis  $X_3$  zunehmende, von außen angelegte Gleichspannung  $U$  mehr Ladung  $Q$ ,  $-Q$  getrennt werden, um die erhöhte Kraft  $F_e$  gegen die sich spannende Feder  $k$  aufzubringen (Bild 7.3-4).  $Q(0) = \sqrt{2 \cdot \varepsilon \cdot A_e \cdot k \cdot X_{\max}}$  ist als kurz vor dem Plattenkurzschluss auftretender Wert zu verstehen, der real wegen der Distanzscheibe nicht auftreten kann, so dass maximal  $Q_{\max} = Q(e) = \sqrt{2 \cdot \varepsilon \cdot A_e \cdot k \cdot (X_{\max} - e)}$  auftritt.

Die linearisierten gedämpften dynamische Gleichungen im Arbeitspunkt ( $i = 0, x = X$ ) bei  $u(t) = U$  folgen mit  $i(t) = 0 + \Delta i(t)$ ,  $x(t) = X + \Delta x(t)$ ,  $|\Delta x / X| \ll 1$  und  $\dot{x} = \Delta \dot{x}$ ,  $\dot{i} = \Delta \dot{i}$ ,  $\dot{u} = 0$  aus (7.3-9) gemäß

$$\frac{d\Delta i}{dt} + \frac{\Delta i \cdot X + \overbrace{\Delta i \cdot \Delta x}^{\approx 0}}{\varepsilon \cdot A_e \cdot R} - \frac{\overbrace{\Delta i \cdot \Delta \dot{x}}^{\approx 0}}{X + \Delta x} = -\frac{\Delta \dot{x}}{X + \Delta x} \cdot \frac{U}{R} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\overbrace{dU}^{\approx 0}}{dt} \approx -\frac{\Delta \dot{x}}{X} \cdot \frac{U}{R}, \quad (7.3-22)$$

$$\frac{d\Delta i}{dt} + \frac{\Delta i \cdot X}{\varepsilon \cdot A_e \cdot R} = -\frac{\Delta \dot{x}}{X} \cdot \frac{U}{R}, \quad (7.3-23)$$

und aus (7.3-7) gemäß

$$m \cdot \Delta \ddot{x} + d \cdot \Delta \dot{x} + k \cdot \Delta x + k \cdot X = x_F \cdot k - m \cdot g - \frac{\varepsilon \cdot (U - \Delta i \cdot R)^2 \cdot A_e}{2 \cdot (X + \Delta x)^2} \quad (7.3-24)$$

nach Kürzen der Gleichgewichtsbedingung (7.3-17)

$$m \cdot \Delta \ddot{x} + d \cdot \Delta \dot{x} + k \cdot \Delta x \approx \frac{\varepsilon \cdot A_e \cdot U^2 \cdot \Delta x}{X^3} + \frac{\varepsilon \cdot A_e \cdot U \cdot R \cdot \Delta i}{X^2}. \quad (7.3-24)$$

Mit der el. Federkonstanten

$$k_e = -\frac{dF_e(x,U)}{dx} = -\frac{\varepsilon \cdot A_e \cdot U^2}{2} \cdot \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x^2} \right) = \frac{\varepsilon \cdot A_e \cdot U^2}{x^3}. \quad (7.3-25)$$

werden die beiden linearisierten dynamischen Gleichungen mit den Variablen  $\Delta x, \Delta i$

$$m \cdot \Delta \ddot{x} + d \cdot \Delta \dot{x} + \Delta x \cdot (k - k_e) = \frac{\varepsilon \cdot A_e \cdot R \cdot U}{X^2} \cdot \Delta i = K_0 \cdot \Delta i, \quad (7.3-26)$$

$$\frac{\varepsilon \cdot A_e \cdot R^2}{X} \cdot \frac{d\Delta i}{dt} + R \cdot \Delta i = -\frac{\varepsilon \cdot A_e \cdot R \cdot U}{X^2} \cdot \Delta \dot{x} = -K_0 \cdot \Delta \dot{x}. \quad (7.3-27)$$

Darin ist (7.3-28) ähnlich wie bei den Wandlern Typ 1 und 2 der Kopplungsterm.

$$K_0 = \varepsilon \cdot A_e \cdot R \cdot U / X^2 \quad (7.3-28)$$

Durch Einsetzen wird  $\Delta i$  eliminiert. Aus (7.3-26), (7.3-27) entsteht eine dynamische Gleichung (7.3-30) mit  $b_0, b_1, b_2, b_3$  als linearisierte gewöhnliche Differentialgleichung 3. Ordnung (7.3-29), da drei Energiespeicher im Austausch sind, nämlich  $m, k, C(x)$ .

$$m \cdot \Delta \ddot{x} + \left( d + \frac{m \cdot X}{\varepsilon \cdot A_e \cdot R} \right) \cdot \Delta \dot{x} + \left( k + \frac{d \cdot X}{\varepsilon \cdot A_e \cdot R} \right) \cdot \Delta x + \left( \frac{k \cdot X}{\varepsilon \cdot A_e \cdot R} - \frac{U^2}{X^2 \cdot R} \right) \cdot \Delta x = 0 \quad (7.3-29)$$

$$b_3 \cdot \Delta \ddot{x} + b_2 \cdot \Delta \dot{x} + b_1 \cdot \Delta x + b_0 \cdot \Delta x = 0 \quad (7.3-30)$$

Während, wie oben gezeigt, die statische Stabilitätsbedingung (7.3-19) für einen stabilen Arbeitspunkt gelten muss ( $K = k_{\text{res}} = -k_e + k > 0$ ), muss noch geprüft werden, ob diese Arbeitspunkte auch dynamisch stabil sind. Das Hurwitz-Kriterium muss erfüllt sein, damit dynamische Stabilität erreicht wird, also Störungen gedämpft abklingend! Es ist dabei  $b_0 > 0$  (7.3-31), wenn statische Stabilität erfüllt ist!

$$b_0 = \frac{X}{\varepsilon \cdot A_e \cdot R} \cdot (k - k_{\text{res}}) = \frac{X}{\varepsilon \cdot A_e \cdot R} \cdot K > 0 \quad (7.3-31)$$

Dann müssen für dynamische Stabilität (Kap. 6.4) alle drei *Hurwitz*-Determinanten  $D_1, D_2, D_3$  positiv sein für, was auch gemäß (7.3-32) ... (7.3-35) der Fall ist.

$$D_1 = b_1 = k + \frac{d \cdot X}{\varepsilon \cdot A_e \cdot R} > 0 \tag{7.3-32}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} b_1 & b_0 \\ b_3 & b_2 \end{vmatrix} = b_1 b_2 - b_3 b_0 = \left(k + \frac{d \cdot X}{\varepsilon \cdot A_e \cdot R}\right) \cdot \left(d + \frac{m \cdot X}{\varepsilon \cdot A_e \cdot R}\right) - \frac{m}{R} \cdot \left(\frac{k \cdot X}{\varepsilon \cdot A_e} - \frac{U^2}{X^2}\right) > 0 \tag{7.3-33}$$

$$D_2 = k \cdot d + \frac{d^2 \cdot X}{\varepsilon \cdot A_e \cdot R} + \frac{d \cdot m \cdot X}{(\varepsilon \cdot A_e \cdot R)^2} + \frac{m \cdot U^2}{R \cdot X^2} > 0 \tag{7.3-34}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} b_1 & b_0 & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 \\ 0 & 0 & b_3 \end{vmatrix} = b_1 b_2 b_3 - b_3 b_3 b_0 = b_3 \cdot (b_1 b_2 - b_3 b_0) = b_3 \cdot D_2 = m \cdot D_2 > 0 \tag{7.3-35}$$

Das Gleichgewicht ist in einem Arbeitspunkt auch dynamisch stabil, wenn es statisch stabil ist.

Wie bei den Wandlern Typ 1 und 2 soll auch für den kapazitiven Wandler „Typ 3“ abschließend der ungedämpfte Grundtyp des linearisierten Wandlers (Bild 7.3-5) in Vierpoldarstellung angegeben werden.

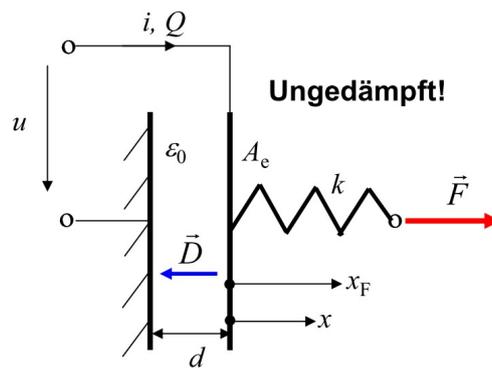


Bild 7.3-5: Kapazitiver Wandler „Typ 3“ als ungedämpfter Grundtyp für die Vierpoldarstellung

Bei  $x = x_F$  ist die Feder  $k$  in Bild 7.3-5 entspannt. Die Mindestdistanz  $d$  entspricht der el. isolierenden Distanzscheibe  $e$  von Bild 7.3-1 und vermeidet den Plattenkurzschluss (Achtung:  $d$  nicht mit dem Dämpfungsbeiwert verwechseln!). Das  $D$ -Feld ist wie in Bild 7.3-1 homogen. Es werden wie in Bild 7.3-1 keine Randfeldeffekte berücksichtigt. Die Linearisierung des Wandlers erfolgt mit  $|Q_1 / Q_0| \ll 1, |x_1 / x_0| \ll 1, |u_1 / U_0| \ll 1, |F_1 / F_0| \ll 1$  im Arbeitspunkt  $x_0$  der verschobenen rechten Elektrode. Mit der Kapazität  $C(x)$  aus Bild 7.3-5 folgt die el. Ladung  $Q$  auf der z. B. positiv geladenen Elektrode.

$$Q(t) = C(x) \cdot u(t) = \frac{\varepsilon_0 \cdot A_e}{d + x(t)} \cdot u(t) \Rightarrow Q(t) = Q_0 + Q_1(t) = \frac{\varepsilon_0 \cdot A_e}{d + x_0 + x_1(t)} \cdot (U_0 + u_1(t)) \tag{7.3-36}$$

Die Linearisierung ergibt mit der „Arbeitspunktkapazität“  $C_0 = \varepsilon_0 \cdot A_e / (d + x_0)$

$$Q_0 + Q_1 = \frac{\varepsilon_0 \cdot A_e \cdot U_0}{(d + x_0) \cdot \left(1 + \frac{x_1}{d + x_0}\right)} \cdot \left(1 + \frac{u_1}{U_0}\right) \approx \frac{\varepsilon_0 \cdot A_e \cdot U_0}{d + x_0} \cdot \left(1 - \frac{x_1}{d + x_0}\right) \cdot \left(1 + \frac{u_1}{U_0}\right),$$

$$Q_0 + Q_1 \approx \underbrace{\frac{\varepsilon_0 \cdot A_e \cdot U_0}{d + x_0}}_{Q_0} \cdot \left(1 - \frac{x_1}{d + x_0}\right) \cdot \left(1 + \frac{u_1}{U_0}\right) \approx Q_0 \cdot \left(1 - \frac{x_1}{d + x_0} + \frac{u_1}{U_0}\right).$$

Ladungs- und Spannungsänderung im Arbeitspunkt sind demnach

$$Q_1 \approx -\frac{Q_0 \cdot x_1}{d+x_0} + \frac{Q_0 \cdot u_1}{U_0} \Rightarrow u_1 \approx \frac{Q_1}{C_0} + \frac{Q_0 \cdot x_1}{(d+x_0) \cdot C_0}. \quad (7.3-37)$$

Die Berechnung der nach links gerichteten elektrostatische Kraft  $F_e$  (7.3-38) aus der *Maxwell-Zugspannung* (Kap. 2.3.1) liefert mit  $D = Q/A_e$

$$F_e = \frac{D^2 \cdot A_e}{2\varepsilon_0} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 \cdot A_e}. \quad (7.3-38)$$

Die äußere, nach rechts gerichtete Kraft  $F$  (7.3-39) ist mit der el. Kraft und Federkraft  $F_e + F_F$  im Gleichgewicht, die nach links als  $-(F_e + F_F) \cdot \vec{e}_x$  wirken.

$$F = F_e + F_F = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 \cdot A_e} + k \cdot (x - x_F) = F_0 + F_1 = \frac{(Q_0 + Q_1)^2}{2\varepsilon_0 \cdot A_e} + k \cdot (x_0 + x_1) - k \cdot x_F. \quad (7.3-39)$$

Die Linearisierung von (7.3-39) im Arbeitspunkt  $x_0$

$$F_0 + F_1 = \frac{Q_0^2}{2\varepsilon_0 \cdot A_e} \cdot \left(1 + \frac{Q_1}{Q_0}\right)^2 + k \cdot (x_0 + x_1 - x_F) \approx \frac{Q_0^2}{2\varepsilon_0 \cdot A_e} \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{Q_1}{Q_0}\right) + k \cdot (x_0 - x_F + x_1)$$

liefert den zeitlich konstanten Anteil  $F_0$  und den kleinen Wechselanteil  $F_1$  (7.3-40).

$$F_0 = \frac{Q_0^2}{2\varepsilon_0 \cdot A_e} + k \cdot (x_0 - x_F), \quad F_1(t) \approx \frac{Q_0 \cdot Q_1(t)}{\varepsilon_0 \cdot A_e} + k \cdot x_1(t) = \frac{Q_0 \cdot Q_1(t)}{(d+x_0) \cdot C_0} + k \cdot x_1(t) \quad (7.3-40)$$

(7.3-37) und (7.3-40) können als Matrixgleichung (7.3-41) mit (B) geschrieben werden.

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{C_0} & \frac{Q_0}{(d+x_0) \cdot C_0} \\ \frac{Q_0}{(d+x_0) \cdot C_0} & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = (B) \cdot \begin{pmatrix} Q_1 \\ x_1 \end{pmatrix} \quad (7.3-41)$$

Der **Kopplungsterm**  $K_{0C}$  (7.3-42) zwischen mechanischem und elektrischem System

$$K_{0C} = \frac{Q_0}{(d+x_0) \cdot C_0} = \frac{U_0}{d+x_0} \quad (7.3-42)$$

steht wie Wandler 1 und 2 in der Nebendiagonale. Er unterscheidet sich vom Kopplungsterm  $K_0$  (7.3-28) des Wandlers von Bild 7.3-1, da dort die Variablen  $i_1, x_1$  und nicht  $Q_1, x_1$  verwendet werden, und auch Dämpfung ( $R > 0!$ ) berücksichtigt wird. Ohne diese Kopplung  $K_{0C} = 0$  zerfällt der vereinfachte Wandler Typ 3 von Bild 7.3-5 in ein getrenntes mechanisches und elektrisches System mit den voneinander unabhängigen Systemgleichungen  $u_1 = Q_1/C_0, F_1 = k \cdot x_1$ . Wie bei den Wandlern 1 und 2 wird wieder der aus der (B)-Matrix abgeleitete **Kopplungsfaktor**  $\kappa$  (7.3-43) eingeführt.

$$\kappa = \frac{Q_0}{(d+x_0) \cdot \sqrt{k \cdot C_0}} = \frac{\sqrt{C_0} \cdot U_0}{(d+x_0) \cdot \sqrt{k}} \quad (7.3-43)$$

Aus (7.3-40) folgt  $Q_1 = (F_1 - k \cdot x_1) \cdot (d+x_0) \cdot C_0 / Q_0$  und wird in (7.3-37) eingesetzt.

$$u_1 \approx \frac{Q_1}{C_0} + \frac{Q_0 \cdot x_1}{(d+x_0) \cdot C_0} = \frac{1}{C_0} \cdot (F_1 - k \cdot x_1) \cdot \frac{\varepsilon_0 \cdot A_e}{Q_0} + \frac{Q_0 \cdot x_1}{(d+x_0) \cdot C_0},$$

$$u_1 \approx \frac{d+x_0}{Q_0} \cdot F_1 - \frac{d+x_0}{Q_0} \cdot \left( k - \frac{Q_0^2}{(d+x_0)^2 \cdot C_0} \right) \cdot \underbrace{x_1}_{\int v_1 dt}. \quad (7.3-44)$$

Dabei ist  $x_1$  das Integral der kleinen Geschwindigkeit  $v_1$  der rechten Elektrode in Bild 7.3-5 im Arbeitspunkt. Die Änderung der kleinen Ladung  $Q_1$  ist der kleine Ladestrom  $i_1$  (7.3-45).

$$Q_1 = (F_1 - k \cdot x_1) \cdot \frac{\varepsilon_0 \cdot A_e}{Q_0} \Rightarrow i_1 = \frac{dQ_1}{dt} = \left( \frac{dF_1}{dt} - k \cdot v_1 \right) \cdot \frac{C_0 \cdot (d+x_0)}{Q_0} \quad (7.3-45)$$

Für kleine sinusförmige Änderungen der Betriebsgrößen im Arbeitspunkt

$$u_1(t) = \operatorname{Re}\{\hat{U}_1 \cdot e^{j\omega t}\}, \quad x_1(t) = \operatorname{Re}\{\hat{X}_1 \cdot e^{j\omega t}\}, \quad Q_1(t) = \operatorname{Re}\{\hat{Q}_1 \cdot e^{j\omega t}\}, \quad i_1(t) = \operatorname{Re}\{\hat{I}_1 \cdot e^{j\omega t}\} \quad (7.3-46)$$

$$F_1(t) = \operatorname{Re}\{\hat{F}_1 \cdot e^{j\omega t}\}, \quad v_1(t) = \operatorname{Re}\{\hat{V}_1 \cdot e^{j\omega t}\} \quad (7.3-47)$$

liefert (7.3-41) die Matrixgleichung (7.3-48) mit der ( $B$ )-Matrix

$$\begin{pmatrix} \hat{U}_1 \\ \hat{F}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{C_0} & \frac{Q_0}{(d+x_0) \cdot C_0} \\ \frac{Q_0}{(d+x_0) \cdot C_0} & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{Q}_1 \\ \hat{X}_1 \end{pmatrix} = (B) \cdot \begin{pmatrix} \hat{Q}_1 \\ \hat{X}_1 \end{pmatrix}, \quad (7.3-48)$$

und (7.3-44), (7.3-45) die ( $T$ )-Matrixgleichung (7.3-49).

$$\begin{pmatrix} \hat{U}_1 \\ \hat{I}_1 \end{pmatrix} = \frac{d+x_0}{Q_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{j \cdot \omega} \cdot \left( k - \frac{Q_0^2}{C_0 \cdot (d+x_0)^2} \right) \\ j \cdot \omega \cdot C_0 & -k \cdot C_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{F}_1 \\ \hat{V}_1 \end{pmatrix} = (T) \cdot \begin{pmatrix} \hat{F}_1 \\ \hat{V}_1 \end{pmatrix}, \quad (7.3-49)$$

Die el. Kraft (7.3-38) ist linearisiert  $F_e = F_{e0} + F_{e1}$

$$F_e = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 \cdot A_e} = \frac{C^2 u^2}{2\varepsilon_0 \cdot A_e} = \frac{\varepsilon_0 A_e (U_0 + u_1)^2}{2 \cdot (d+x_0+x_1)^2} = \frac{\varepsilon_0 A_e U_0^2}{2(d+x_0)^2} \cdot \left( 1 + 2 \frac{u_1}{U_0} - 2 \frac{x_1}{d+x_0} \right),$$

$$F_{e0} = \frac{\varepsilon_0 A_e U_0^2}{2(d+x_0)^2}, \quad F_{e1} = \frac{\varepsilon_0 A_e U_0}{(d+x_0)^2} \cdot u_1 - \frac{\varepsilon_0 A_e U_0^2}{(d+x_0)^3} \cdot x_1 = \frac{C_0 U_0}{d+x_0} \cdot u_1 - k_e \cdot x_1, \quad (7.3-50)$$

worin

$$k_e = \frac{\varepsilon_0 A_e U_0^2}{(d+x_0)^3} = \frac{\varepsilon_0 A_e \cdot (Q_0/C_0)^2}{(d+x_0)^3} = \frac{Q_0^2}{C_0 \cdot (d+x_0)^2} \quad (7.3-51)$$

die el. Federkonstante (7.3-25) ist, die auch in (7.3-49) erscheint.

$$\begin{pmatrix} \hat{U}_1 \\ \hat{I}_1 \end{pmatrix} = \frac{d+x_0}{Q_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{j \cdot \omega} \cdot (k - k_e) \\ j \cdot \omega \cdot C_0 & -k \cdot C_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{F}_1 \\ \hat{V}_1 \end{pmatrix} = (T) \cdot \begin{pmatrix} \hat{F}_1 \\ \hat{V}_1 \end{pmatrix} \quad (7.3-52)$$

Aus (7.3-41) erhalten wir für die kleine Wechselkraft  $F_1$  und el. Spannung  $u_1$  mit  $Q_0 = C_0 U_0$

$$F_1 = \frac{U_0}{d+x_0} \cdot Q_1 + k \cdot x_1, \quad u_1 = \frac{Q_1}{C_0} + \frac{U_0}{d+x_0} \cdot x_1 \quad (7.3-53)$$

und daraus durch Einsetzen von  $u_1$  in  $F_1$  die Summe aus kleiner el. Wechselkraft  $F_{e1}$  und kleiner Federwechselkraft  $F_{F1}$ , mit Übereinstimmung für  $F_{e1}$  gemäß (7.3-50).

$$F_1 = \frac{U_0 C_0}{d+x_0} \cdot u_1 + \left( -\frac{C_0 U_0^2}{(d+x_0)^2} + k \right) \cdot x_1 = \frac{U_0 C_0}{d+x_0} \cdot u_1 + (k - k_e) \cdot x_1 = F_{e1} + F_{F1}, \quad (7.3-54)$$

$$F_{e1} = \frac{U_0 C_0}{d+x_0} \cdot u_1 - k_e \cdot x_1, \quad F_{F1} = k \cdot x_1. \quad (7.3-55)$$

Die mechanische dynamische Gleichung des ungedämpften Wandlers Typ 3 im Arbeitspunkt  $x_0$  (7.3-56) ist  $m \cdot \ddot{x}_1 \cdot \vec{e}_x = -(F_{e1} + F_{F1}) \cdot \vec{e}_x$  bzw.  $m \cdot \ddot{x}_1 + F_1 = 0$ .

$$m \cdot \ddot{x}_1 + (k - k_e) \cdot x_1 = -\frac{U_0 C_0}{d+x_0} \cdot u_1 = \underbrace{m}_{T>0} \cdot \ddot{x}_1 + \underbrace{(k - k_e)}_K \cdot x_1 \quad (7.3-56)$$

Statische Stabilität im Arbeitspunkt  $x_0$  erfordert  $K > 0$  (Kap. 6.5), und mit (7.3-43)  $\kappa^2 < 1$ , woraus (7.3-57) folgt.

$$K > 0: \quad k - k_e > 0 \Rightarrow k > k_e \Rightarrow \frac{1}{k} < \frac{1}{k_e} = \frac{(d + x_0)^2}{C_0 U_0^2} \Rightarrow \frac{C_0 U_0^2}{(d + x_0)^2 \cdot k} = \kappa^2 < 1 \quad (7.3-57)$$

Der vereinfachte kapazitive Wandler Typ 3 (Bild 7.3-5) ist somit **statisch stabil im Arbeitspunkt  $\pm U_0, x_0$  für Werte des positiven Kopplungsfaktors  $0 < \kappa < 1$**  wie beim Wandler Typ 1 (vgl. (7.1-104)). Bei  $K = 0$  (grenzstabil) bzw.  $\kappa = 1$  tritt der Pull-in-Effekt auf. Der Pull-in-Effekt bei  $\kappa = 1$  bzw.  $K = 0$  tritt bei jenem Arbeitspunkt  $x_0$  als Gleichgewichtslage zwischen statischer Coulomb-Kraft und Federkraft auf,

$$F_0 = \frac{Q_0^2}{2\varepsilon_0 \cdot A_e} + k \cdot (x_0 - x_F) = \frac{Q_0^2}{2C_0 \cdot (d + x_0)} + k \cdot (x_0 - x_F) = 0, \quad (7.3-58)$$

bei dem die Stabilitätsgrenze  $\kappa^2 = 1$  bzw.  $\kappa = \pm \frac{\sqrt{C_0} \cdot U_0}{(d + x_0) \cdot \sqrt{k}} = \pm 1$  (7.3-43) erreicht wird.

Einsetzen von (7.3-43) in (7.3-58) ergibt mit  $Q_0^2 = C_0 \cdot C_0 U_0^2 \Big|_{\kappa=\pm 1} = C_0 \cdot (d + x_0)^2 \cdot k$  die Pull-in-Lage  $x_{0,\text{pull-in}}$ .

$$\frac{C_0 k \cdot (d + x_0)^2}{C_0 \cdot 2 \cdot (d + x_0)} + k \cdot (x_0 - x_F) = 0 \Rightarrow \frac{d + x_0}{2} = x_F - x_0 \Rightarrow x_{0,\text{pull-in}} = \frac{2}{3} \cdot \left( x_F - \frac{d}{2} \right) \quad (7.3-59)$$

Aus (7.3-43) folgt die pull-in-Spannung  $U_{0,\text{pull-in}}$  wegen  $\kappa = \frac{\pm C_0 U_{0,\text{pull-in}}}{(d + x_{0,\text{pull-in}}) \cdot \sqrt{C_0} \cdot k} = \pm 1$ :

$$U_{0,\text{pull-in}} = \pm \frac{(d + x_{0,\text{pull-in}}) \cdot \sqrt{k}}{\sqrt{C_0}} = \pm \frac{2}{3} \cdot \frac{(d + x_F) \cdot \sqrt{k}}{\sqrt{C_0}}. \quad (7.3-60)$$

Bei positiver und negativer Spannung (7.3-60) tritt gleichermaßen der pull-in-Effekt auf, da die elektrostatische *Coulomb*-Kraft wegen der ungleichnamig geladenen beiden Elektroden stets anziehend wirkt. Wegen der i. A. kleinen Distanzscheibendicke  $d \ll x_F$  tritt der pull-in-Effekt bei einem Plattenabstand von ca. 66% der Lage des linken Fußpunkts der ungedehnten Feder auf. Die Feder ist somit auf Zug beansprucht und wirkt gegen die *Coulomb*-Kraft, um Gleichgewicht herzustellen. Alle Lagen  $(0 < d) < x_0 < 0.66 \cdot x_F$  sind somit statisch instabil.

Der Wandler Typ 3 arbeitet nur im Bereich  $0.66 \cdot x_F < x_0 < x_F$  stabil. Bei  $x_0 = x_F$  ist die Federkraft Null, so dass auch  $U_0$  Null sein muss, wenn die rechte Elektrode dort ruhen soll. Lagen  $x_0 > x_F$  werden nicht eingenommen, da dann die Federkraft der nun drückenden Feder ebenso wie die el. Kraft nach links gerichtet ist, so dass kein Kräftegleichgewicht möglich ist. Die Pull-in-Lage  $x_0$  der rechten Elektrode (7.3-59) und die zugehörige Pull-in-Spannung  $U_0$  (7.3-60) sind im Prinzip IDENTISCH mit dem früherem Ergebnis des kapazitiven Wandlers Typ 3 von Bild 7.3-1. Es muss aber berücksichtigt werden, dass im vereinfachten Wandler Typ 3, Bild 7.3-5, wegen der horizontalen Anordnung keine Schwerkraft wirkt ( $m \cdot g = 0$ ), und dass einander  $e$  und  $d$  entsprechen, dass in Bild 7.3-5  $x$  ab  $d$  gezählt wird ( $x \rightarrow x + d$ ), so dass auch die Lage der beweglichen Elektrode bei entspannter Feder anstatt  $x_F$  nun  $x_F + d$  ist. Weiter ist hier ein unpolarisierbares Dielektrikum (anstelle  $\varepsilon$  nun  $\varepsilon_0$ ) im Einsatz. Damit wird die Pull-in-Lage (7.3-15) gemäß (7.3-61) in (7.3-59) umgerechnet. Aus (7.3-15) folgt:

$$X_3 = \frac{2}{3} \cdot \left( x_F - \frac{m \cdot g}{k} \right) \stackrel{m \cdot g = 0}{=} \frac{2}{3} \cdot \underbrace{x_F}_{"x_F"} \Rightarrow \underbrace{x_0 + d}_{X_3} = \frac{2}{3} \cdot \underbrace{(x_F + d)}_{"x_F"} \Rightarrow x_0 = \frac{2}{3} \cdot \left( x_F - \frac{d}{2} \right). \quad (7.3-61)$$

$$\text{Aus (7.3-16) und } m \cdot g = 0: U_3^2 = U^2(X_3) = \frac{8 \cdot k}{27 \cdot \varepsilon \cdot A_e} \cdot \left( x_F - \frac{m \cdot g}{k} \right)^3 = \frac{8 \cdot k \cdot x_F^3}{27 \cdot \varepsilon \cdot A_e} \text{ bzw. (7.3-62),}$$

wo dann der Ersatz  $x_F$  durch  $x_F + d$ ,  $\varepsilon$  durch  $\varepsilon_0$  erfolgt, woraus sich (7.3-63) ergibt.

$$U_3 = U_{0,\text{pull-in}} = \pm \frac{2}{3} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot k}{3 \cdot \varepsilon \cdot A_e} \cdot x_F^3} \rightarrow \pm \frac{2}{3} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot (x_F + d)^3}{3 \cdot \varepsilon_0 \cdot A_e}} \quad (7.3-62)$$

$$\pm U_{0,\text{pull-in}} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot k}{3 \cdot \frac{\varepsilon_0 \cdot A_e}{d + x_0}} \cdot \frac{(x_F + d)^3}{d + x_0}} \stackrel{x_0 = x_{0,\text{pull-in}}}{=} \frac{2}{3} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot k}{3 \cdot C_0} \cdot \frac{(x_F + d)^3}{d + \frac{2}{3} \cdot (x_F - \frac{d}{2})}} \quad (7.3-63)$$

$$\pm U_{0,\text{pull-in}} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot k}{3 \cdot C_0} \cdot \frac{(x_F + d)^3}{\frac{2}{3} \cdot (x_F + d)}} = \frac{2 \cdot (x_F + d)}{3} \cdot \sqrt{\frac{k}{C_0}} \quad (7.3-64)$$

(7.3-64) ist identisch mit (7.3-61) und zeigt, dass die Wandler von Bild 7.3-1 und 7.3-5 sich prinzipiell gleich verhalten und als elektrostatische Schaltelemente verwendet werden können.

### 7.4 Kapazitiver Wandler „Typ 4“

In Kap. 5.2 wurde das elektrostatische Grundsystem mit seitlich verschiebbarem Dielektrikum vorgestellt, das in erster Näherung über die mit  $x$  veränderliche Kapazität eine von  $0 < x < b$  unabhängige elektrostatische Kraft  $F_e$  ergab (Bild 5.2-2). Der Wandler war somit für kleine Bewegungen linear. Eine ähnliche Anordnung als Wandler Typ 4 mit seitlich längs  $x$  verschiebbarer Elektrode (Bild 7.4-1) ändert ebenfalls über  $x$  die Kapazität, so dass die elektrostatische Kraft  $F_e$  auch für  $0 < x < l_0$  ( $l_0$  entspricht hier  $b$  von Kap. 5.2) konstant ist (Bild 7.4-2). Mithin ist der für kleine Bewegungen lineare Wandler Typ 4 die Entsprechung zum elektromagnetischen Wandler Typ 2, so wie der nichtlineare kapazitive Wandler Typ 3 dem nichtlinearen elektromagnetischen Wandler Typ 1 entspricht.

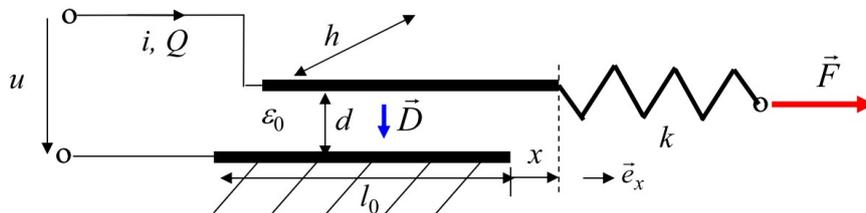


Bild 7.4-1: Kapazitiver Wandler „Typ 4“ mit seitlich verschiebbarer Elektrode als ungedämpfter Grundtyp für die Vierpoldarstellung.

Es ist beim kapazitiven Wandler Typ 4 die obere Elektrode seitlich verschiebbar mit der Verschiebungslänge  $-l_0 < x < l_0$ . Bei  $x = 0$  tritt die Elektrodenüberdeckung  $l_0$  auf. Ebenfalls bei  $x = 0$  ist die Feder mit der Federkonstanten  $k$  entspannt. Der Elektrodenabstand ist  $d = \text{konst.}$ . Als Dielektrikum wird Luft  $\varepsilon = \varepsilon_0$  angenommen. Die Plattenbreite der beiden unterschiedlich elektrisch geladenen Elektroden (el. Ladungen  $Q$  und  $-Q$ ) ist  $h$ . Das  $D$ -Feld zwischen beiden Elektroden ist homogen angenommen, so dass keine ausufernden Randfelder (wie in Kap. 5.2) berücksichtigt werden. Bei von außen angelegter el. Spannung  $u$  ist dann die el. Ladung bei der Elektrodenstellung  $-l_0 < x < l_0$  linear von  $x$  abhängig.

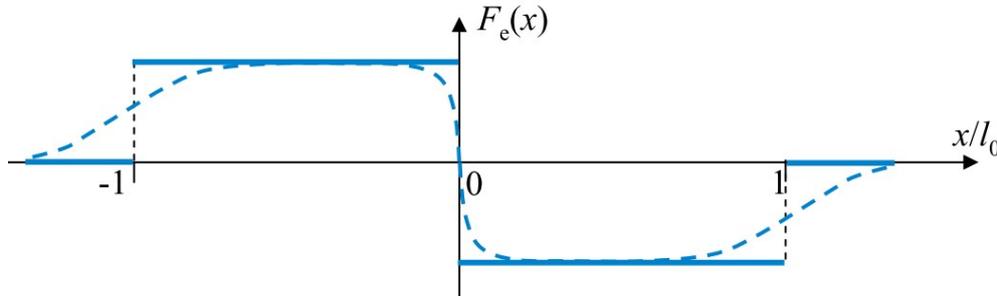
$$Q = C(x) \cdot u = \frac{\varepsilon_0 \cdot h \cdot (l_0 - |x|)}{d} \cdot u \quad (7.4-1)$$

Wenn sich die beiden Elektroden nicht mehr überdecken ( $|x| > l_0$ ), sind das  $D$ - und  $E$ -Feld näherungsweise Null, so dass dann  $C(x) = 0$  ist. Die el.-statische Ko-Energie  $W_e^*$  sinkt bei  $u = \text{konst.}$  mit steigendem  $x$ . Sie ist bei  $x = 0$  maximal.

Die elektrostatische Kraft  $F_e$  ist gemäß Kap. 2  $F_e = dW_e^* / dx$ ,  $\vec{F}_e = F_e \cdot \vec{e}_x$  (Bild 7.4-2).

$$0 < x < l_0 : F_e = \frac{dW_e^*}{dx} = \frac{d}{dx} \frac{C(x) \cdot u^2}{2} = \frac{d}{dx} \frac{\varepsilon_0 \cdot h \cdot (l_0 - x) \cdot u^2}{2 \cdot d} = -\frac{\varepsilon_0 \cdot h \cdot u^2}{2 \cdot d} < 0 \quad (7.4-2)$$

$$-l_0 < x < 0 : F_e = \frac{dW_e^*}{dx} = \frac{d}{dx} \frac{C(x) \cdot u^2}{2} = \frac{d}{dx} \frac{\varepsilon_0 \cdot h \cdot (l_0 + x) \cdot u^2}{2 \cdot d} = \frac{\varepsilon_0 \cdot h \cdot u^2}{2 \cdot d} > 0 \quad (7.4-3)$$



**Bild 7.4-2:** Elektrostatische Kraft  $F_e$  bei konstanter Spannung  $u$  zwischen den mit  $x$  zueinander verschobenen Elektroden als Näherung (eindimensionales  $D$ -Feld, volle Linie) und als angenäherter realer Verlauf (gestrichelt) bei Berücksichtigung der Randfelder (zweidimensionales  $D$ -Feld).

Wenn sich Spannung  $u(t)$  und Verschiebung  $x(t)$  gleichzeitig mit der Zeit  $t$  ändern, ändert sich gemäß (7.4-1) die Elektrodenladung  $Q(t)$  nichtlinear mit der Zeit. Dann muss gemäß Kap. 6 linearisiert werden, so dass gegenüber dem Arbeitspunkt  $U_0$ ,  $x_0$ ,  $Q_0$  und  $F_0$  (für die äußere Haltekraft  $F$ , Bild 7.4-1) die Abweichungen  $u_1(t)$ ,  $x_1(t)$ ,  $Q_1(t)$ ,  $F_1(t)$  klein sind (7.4-4, 7.4-5).

$$Q(t) = Q_0 + Q_1(t), \quad u(t) = U_0 + u_1(t), \quad x(t) = x_0 + x_1(t), \quad F(t) = F_0 + F_1(t), \quad (7.4-4)$$

$$|Q_1 / Q_0| \ll 1, \quad |x_1 / x_0| \ll 1, \quad |u_1 / U_0| \ll 1, \quad |F_1 / F_0| \ll 1. \quad (7.4-5)$$

Aus (7.4-1) folgt (7.4-6):

$$Q(t) = Q_0 + Q_1(t) = \frac{\varepsilon_0 \cdot h \cdot (l_0 - x_0 - x_1(t))}{d} \cdot (U_0 + u_1(t)). \quad (7.4-6)$$

$$Q_0 + Q_1 = \frac{\varepsilon_0 \cdot h \cdot (l_0 - x_0) \cdot U_0}{d} \cdot \left(1 - \frac{x_1}{l_0 - x_0}\right) \cdot \left(1 + \frac{u_1}{U_0}\right) \quad \text{mit } C_0 := \frac{\varepsilon_0 \cdot h \cdot (l_0 - x_0)}{d}, \quad (7.4-7)$$

$$Q_0 + Q_1 = C_0 \cdot U_0 \cdot \left(1 - \frac{x_1}{l_0 - x_0}\right) \cdot \left(1 + \frac{u_1}{U_0}\right) \approx C_0 \cdot U_0 \cdot \left(1 - \frac{x_1}{l_0 - x_0} + \frac{u_1}{U_0}\right). \quad (7.4-8)$$

Die statische Ladung ist daher  $Q_0 = C_0 \cdot U_0$  und die zeitlich veränderliche kleine Ladungsmenge  $Q_1(t)$  hängt sowohl von der Weg- als auch Spannungsänderung  $x_1$ ,  $u_1$  ab.

$$Q_1(t) \approx -\frac{\varepsilon_0 \cdot h \cdot U_0 \cdot x_1(t)}{d} + C_0 \cdot u_1(t) = -\frac{C_0 \cdot U_0 \cdot x_1(t)}{l_0 - x_0} + C_0 \cdot u_1(t) \quad (7.4-9)$$

Daraus wird die Spannungsabhängigkeit  $u_1$  von  $x_1$ ,  $Q_1$  dargestellt.

$$u_1 = \frac{Q_1}{C_0} + \frac{Q_0 \cdot x_1}{(l_0 - x_0) \cdot C_0} \quad (7.4-10)$$

Für  $0 < x < l_0$  ziehen sowohl das el. Feld als auch die Feder nach links, da die Feder gemäß Bild 7.4-1 und 3.2-4 gedehnt wird. Mit  $\vec{F}_F = F_F \cdot \vec{e}_x = -k \cdot x \cdot \vec{e}_x$  und der äußeren Haltekraft  $F$ , die ebenfalls in  $x$ -Richtung positiv gezählt wird ( $\vec{F} = F \cdot \vec{e}_x$ ), gilt im Gleichgewicht  $\vec{F} + \vec{F}_e + \vec{F}_F = 0$ . Die Haltekraft  $F$  stellt die Gleichgewichtslage  $x_0$  ein.

$$F(t) = -F_e(t) - F_F(t) = \frac{\varepsilon_0 \cdot h \cdot u(t)^2}{2 \cdot d} + k \cdot x(t) = F_0 + F_1(t) \quad (7.4-11)$$

Bei  $F = 0$  ist  $x_0 = 0$ . Mit der Linearisierung für die Spannung folgt daraus

$$F_0 + F_1(t) = \frac{\varepsilon_0 \cdot h \cdot U_0^2 \cdot (1 + (u_1/U_0))^2}{2 \cdot d} + k \cdot (x_0 + x_1) \quad (7.4-12)$$

Mit  $(1 + (u_1/U_0))^2 \approx 1 + 2 \cdot (u_1/U_0)$  folgen aus (7.4-12) der statische Haltekraftanteil

$$F_0 = \frac{\varepsilon_0 \cdot h \cdot U_0^2}{2 \cdot d} + k \cdot x_0 \text{ und der veränderliche Kraftanteil (7.4-13), wo (7.4-10) eingesetzt ist.}$$

$$F_1(t) \approx \frac{\varepsilon_0 \cdot h \cdot U_0 \cdot u_1(t)}{d} + k \cdot x_1(t) = \frac{\varepsilon_0 \cdot h \cdot U_0}{d} \cdot \left( \frac{Q_1}{C_0} + \frac{Q_0 \cdot x_1}{C_0 \cdot (l_0 - x_0)} \right) + k \cdot x_1 \quad (7.4-13)$$

Damit wird die veränderliche Haltekraft in Abhängigkeit der veränderlichen Ladung und Verschiebung erhalten (7.4-14) bzw. die Ladung in Abhängigkeit von  $F_1$  und  $x_1$  (7.4-15).

$$F_1(t) \approx \frac{Q_0}{C_0 \cdot (l_0 - x_0)} \cdot Q_1(t) + \left( \frac{Q_0^2}{C_0 \cdot (l_0 - x_0)^2} + k \right) \cdot x_1(t) \quad (7.4-14)$$

$$Q_1(t) = \left( F_1(t) - \left( \frac{Q_0^2}{C_0 \cdot (l_0 - x_0)^2} + k \right) \cdot x_1(t) \right) \cdot \frac{C_0 \cdot (l_0 - x_0)}{Q_0} \quad (7.4-15)$$

Wird (7.4-15) in (7.4-10) eingesetzt

$$u_1 = \frac{1}{C_0} \cdot \underbrace{\left( F_1 - \left( \frac{Q_0^2}{C_0 \cdot (l_0 - x_0)^2} + k \right) \cdot x_1 \right)}_{Q_1} \cdot \frac{C_0 \cdot (l_0 - x_0)}{Q_0} + \frac{Q_0 \cdot x_1}{(l_0 - x_0) \cdot C_0}, \quad (7.4-16)$$

erhalten wir die Abhängigkeit der veränderlichen Spannung von Kraft und Verschiebung (7.4-17) bzw. von Kraft und Verschiebungsgeschwindigkeit  $v_1$ .

$$u_1(t) = \frac{l_0 - x_0}{Q_0} \cdot F_1(t) - \frac{l_0 - x_0}{Q_0} \cdot k \cdot \underbrace{x_1(t)}_{\int v_1 \cdot dt} = \frac{l_0 - x_0}{Q_0} \cdot F_1(t) - \frac{l_0 - x_0}{Q_0} \cdot k \cdot \int v_1(t) \cdot dt \quad (7.4-17)$$

Wegen der zeitlich veränderlichen Ladung  $Q_1(t)$  (7.4-15) fließt ein el. Ladestrom (7.4-18)

$$\dot{i}_1(t) = \frac{dQ_1}{dt} = \left( \frac{dF_1}{dt} - \left( \frac{Q_0^2}{C_0 \cdot (l_0 - x_0)^2} + k \right) \cdot \frac{dx_1}{dt} \right) \cdot \frac{C_0 \cdot (l_0 - x_0)}{Q_0} \quad \text{bzw.} \quad (7.4-18)$$

$$\dot{i}_1(t) = \frac{C_0 \cdot (l_0 - x_0)}{Q_0} \cdot \frac{dF_1(t)}{dt} - \frac{k \cdot (l_0 - x_0)}{Q_0} \cdot \left( C_0 + \frac{Q_0^2}{k \cdot (l_0 - x_0)^2} \right) \cdot v_1(t) \cdot \quad (7.4-19)$$

Die Beziehungen (7.4-16), (7.4-13) verwenden als Matrixdarstellung (7.4-20) die (B)-Matrix analog zu (7.3-41).

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{C_0} & \frac{Q_0}{(l_0 - x_0) \cdot C_0} \\ \frac{Q_0}{(l_0 - x_0) \cdot C_0} & \frac{Q_0^2}{C_0 \cdot (l_0 - x_0)^2} + k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = (B) \cdot \begin{pmatrix} Q_1 \\ x_1 \end{pmatrix} \quad (7.4-20)$$

Der **Kopplungsterm**  $K_{0C}$  (7.4-21) zwischen mechanischem und elektrischem System tritt dabei wieder in der Nebendiagonale von (B) auf.

$$K_{0C} = \frac{Q_0}{(l_0 - x_0) \cdot C_0} \quad (7.4-21)$$

Ohne Kopplung ist  $K_0 = 0$ , und daher die Spannungsänderung  $u_1 = Q_1/C_0$  nur zur Ladungsänderung proportional.

Die äußere Kraftänderung ändert dann nur die Federkraft  $F_1 = k \cdot x_1$ .

Für sinusförmige Änderungen (7.3-46, 7.3-47) mit der Kreisfrequenz  $\omega$  um den Arbeitspunkt  $U_0, x_0, Q_0, F_0, v_0 = 0, I_0 = 0$  gemäß (7.4-22, 7.4-23) liefert mit (7.4-20) den Ausdruck (7.4-24).

$$u_1(t) = \text{Re}\{\hat{U}_1 \cdot e^{j\omega t}\}, x_1(t) = \text{Re}\{\hat{X}_1 \cdot e^{j\omega t}\}, Q_1(t) = \text{Re}\{\hat{Q}_1 \cdot e^{j\omega t}\}, i_1(t) = \text{Re}\{\hat{I}_1 \cdot e^{j\omega t}\} \quad (7.4-22)$$

$$F_1(t) = \text{Re}\{\hat{F}_1 \cdot e^{j\omega t}\}, v_1(t) = \text{Re}\{\hat{V}_1 \cdot e^{j\omega t}\} \quad (7.4-23)$$

$$\begin{pmatrix} \hat{U}_1 \\ \hat{F}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{C_0} & \frac{Q_0}{(l_0 - x_0) \cdot C_0} \\ \frac{Q_0}{(l_0 - x_0) \cdot C_0} & \frac{Q_0^2}{C_0 \cdot (l_0 - x_0)^2} + k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{Q}_1 \\ \hat{X}_1 \end{pmatrix} = (B) \cdot \begin{pmatrix} \hat{Q}_1 \\ \hat{X}_1 \end{pmatrix} \quad (7.4-24)$$

Analog zu (7.1-101), (7.1-102) wird wieder der **Kopplungsfaktor**  $\kappa$  (7.4-25) eingeführt, als Bruch aus Nebendiagonalelement von  $(B)$  und Wurzel aus dem Produkt der beiden Hauptdiagonalelemente.

$$\kappa = \frac{Q_0}{(l_0 - x_0) \cdot \sqrt{\frac{Q_0^2}{(l_0 - x_0)^2} + k \cdot C_0}} = \frac{Q_0}{\sqrt{Q_0^2 + k \cdot C_0 \cdot (l_0 - x_0)^2}} \Rightarrow 0 < \kappa < 1 \quad (7.4-25)$$

Aus (7.4-17), (7.4-19) folgt die  $(T)$ -Matrixdarstellung (7.4-26).

$$\begin{pmatrix} \hat{U}_1 \\ \hat{I}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{l_0 - x_0}{Q_0} & -\frac{l_0 - x_0}{j \cdot \omega \cdot Q_0} \cdot k \\ j \cdot \omega \cdot \frac{C_0 \cdot (l_0 - x_0)}{Q_0} & -\frac{k \cdot (l_0 - x_0)}{Q_0} \cdot \left( C_0 + \frac{Q_0^2}{k \cdot (l_0 - x_0)^2} \right) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{F}_1 \\ \hat{V}_1 \end{pmatrix} = (T) \cdot \begin{pmatrix} \hat{F}_1 \\ \hat{V}_1 \end{pmatrix} \quad (7.4-26)$$

$$\begin{pmatrix} \hat{U}_1 \\ \hat{I}_1 \end{pmatrix} = \frac{l_0 - x_0}{Q_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{k}{j \cdot \omega} \\ j \cdot \omega \cdot C_0 & -k \cdot \left( C_0 + \frac{Q_0^2}{k \cdot (l_0 - x_0)^2} \right) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{F}_1 \\ \hat{V}_1 \end{pmatrix} = (T) \cdot \begin{pmatrix} \hat{F}_1 \\ \hat{V}_1 \end{pmatrix} \quad (7.4-27)$$

Mit (7.4-13) als veränderlicher Haltekraft (7.4-28)

$$F_1(t) \approx \frac{\varepsilon_0 \cdot h \cdot U_0 \cdot u_1(t)}{d} + k \cdot x_1(t) = \frac{Q_0}{l_0 - x_0} \cdot u_1(t) + k \cdot x_1(t) \quad (7.4-28)$$

wird mit dem 2. *Newton-Axiom* die mechanische dynamische, ungedämpfte Gleichung im Arbeitspunkt  $x_0, \pm Q_0$  bzw.  $\pm U_0$  erhalten (7.4-29) (mit der Masse  $m$  der bewegten Elektrode).

$$m \cdot \ddot{x}_1 + F_1 = 0 \Rightarrow m \cdot \ddot{x}_1 + \frac{Q_0}{l_0 - x_0} \cdot u_1 + k \cdot x_1 = 0 \Rightarrow \frac{m}{T} \cdot \ddot{x}_1 + \frac{k}{K} \cdot x_1 = -\frac{Q_0}{l_0 - x_0} \cdot u_1 \quad (7.4-29)$$

Statische Stabilität im Arbeitspunkt  $x_0$  ist gewährleistet (Kap. 6) für  $K > 0$ , somit gemäß (7.4-29) für  $k > 0$ . Dies ist für mechanische Federn stets erfüllt. Wie Wandler Typ 2 ist der Wandler Typ 4 stets statisch stabil im Arbeitspunkt  $\pm U_0, x_0$ ! Es tritt KEIN Pull-in/Pull-out-Effekt auf. Die statische Stabilitätsgrenze  $\kappa = 1$  (7.1-105) wird nicht erreicht, solange  $k > 0$  ist, wie dies (7.4-25) zeigt, wo  $0 < \kappa < 1$  für  $k > 0$  gilt, also solange eine Feder vorhanden ist!

### Zusammenfassung der vier Wandlertypen 1 bis 4 als Vierpole:

Formal entsprechen gemäß Tabelle 7.4-1 im Kleinsignalverhalten einander die  $(T)$ -Matrizen von Wandler Typ 1 und Typ 3 sowie jene von Typ 2 und Typ 4, wenn  $\underline{I}$  und  $\underline{U}$  beim Übergang vom magnetischen zum kapazitiven Wandler in der  $(T)$ -Gleichung getauscht werden (Tab. 7.4-1).

| Magnetische Wandler  | Kapazitive Wandler  |
|--|---|
| $\begin{pmatrix} \hat{I}_1 \\ \hat{U}_1 \end{pmatrix} = (\underline{T}) \cdot \begin{pmatrix} \hat{F}_1 \\ \hat{V}_1 \end{pmatrix}$  | $\begin{pmatrix} \hat{U}_1 \\ \hat{I}_1 \end{pmatrix} = (\underline{T}) \cdot \begin{pmatrix} \hat{F}_1 \\ \hat{V}_1 \end{pmatrix}$   |
| Typ 1: Pull-in-Verhalten<br>$\frac{d+x_0}{\Psi_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{j \cdot \omega} \cdot \left( k - \frac{\Psi_0^2}{(d+x_0)^2 \cdot L_0} \right) \\ j \cdot \omega \cdot L_0 & -L_0 \cdot k \end{pmatrix}$  | Typ 3: Pull-in-Verhalten<br>$\frac{d+x_0}{Q_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{j \cdot \omega} \cdot \left( k - \frac{Q_0^2}{C_0 \cdot (d+x_0)^2} \right) \\ j \cdot \omega \cdot C_0 & -k \cdot C_0 \end{pmatrix}$ |
| Typ 2: KEIN Pull-in-Verhalten<br>$\frac{1}{l_e \cdot B_\delta} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{k}{j \cdot \omega} \\ j \cdot \omega \cdot L_0 & -k \cdot \left( L_0 + \frac{(l_e \cdot B_\delta)^2}{k} \right) \end{pmatrix}$ | Typ 4: KEIN Pull-in-Verhalten<br>$\frac{l_0-x_0}{Q_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{k}{j \cdot \omega} \\ j \cdot \omega \cdot C_0 & -k \cdot \left( C_0 + \frac{Q_0^2}{k \cdot (l_0-x_0)^2} \right) \end{pmatrix}$  |

Tabelle 7.4-1: Vergleich des Kleinsignalverhaltens der vier Wandlergrundtypen 1, 2, 3, 4 als Vierpoldarstellung mit der (T)-Matrix

Somit wurde in Kap. 7.1 zunächst die i. A. wegen  $B_{Fe}(H_{Fe})$  nichtlineare Berechnung des magnetischen Arbeitspunkts bei Wandler Typ 1 gezeigt. Dann wurden statisch stabile und instabile Arbeitspunkte rechnerisch und graphisch untersucht. Als Anwendung wurde ein Schaltersystem skizziert. Das linearisierte Kleinsignalverhalten in einem stabilen Arbeitspunkt führte auf den Frequenzgang. Der Amplituden-Frequenzgang bei erzwungener Schwingungsanregung wurde beispielhaft bei Wandler Typ 1 für die Anwendung der Schwingungsmessung genutzt. Je nach Frequenzbereich ist die Messung des Schwingungswegs, der Schwinggeschwindigkeit oder der Schwingungsbeschleunigung möglich.

Der bei begrenzter Aussteuerung lineare Wandler Typ 2 fand eine Anwendung als Lautsprecher, wo Linearität zur Vermeidung akustischer Verzerrungen wesentlich ist. Die Amplituden-Frequenzgangsdarstellung erfolgte im doppelt-logarithmischen Bode-Diagramm. Ähnliche Anwendungen lassen sich vor allem bei miniaturisierten Wandlern für die kapazitiven Wandler Typ 3 und 4 finden, wobei die Methodik der mathematischen Analyse identisch mit jener bei den elektromagnetischen Wandlern ist. In der begleitenden Aufgabensammlung sind mehrere Anwendungen gezeigt, so z. B. ein kapazitiver Schwingungsaufnehmer und ein kapazitiver Lautsprecher.

Mit dieser Übersicht zur mathematischen Analyse elektromechanischer Wandler mit konzentrierten Bauelementen anhand ausgewählter Grundsysteme ist es möglich, die in der Praxis sehr große Vielfalt unterschiedlicher Bauformen prinzipiell zu untersuchen und zu beschreiben. Unterschiedlichste geometrische Anordnungen sind in der begleitenden Aufgabensammlung zu finden.